

MÔN HỌC

KINH TẾ XÂY DỰNG (KC269)

GIÁO VIÊN PHỤ TRÁCH

ĐẶNG THẾ GIA

Bộ môn Kỹ Thuật Xây Dựng
Khoa Công Nghệ, Trường Đại Học Cần Thơ

Chương 2:
Thời gian & Lãi suất
Time & Interest

Phần 2

Nội dung chương

1. Hệ số P/G & A/G
2. Gradient hình học
3. Tính lãi suất
4. Tính thời đoạn
5. Bảng tính

Hệ số độ dốc số học P/G & A/G
(Chuỗi thay đổi đều)

Arithmetic Gradient Factors P/G & A/G

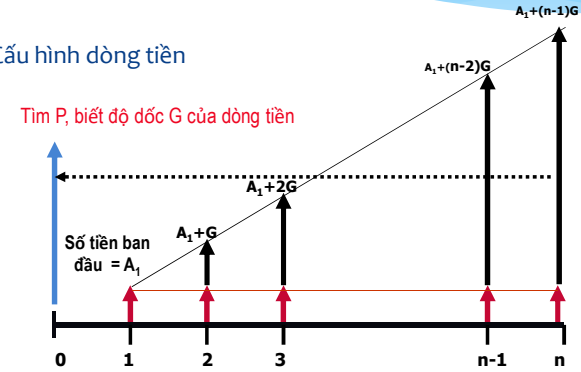


Hệ số độ dốc P/G



Khái niệm

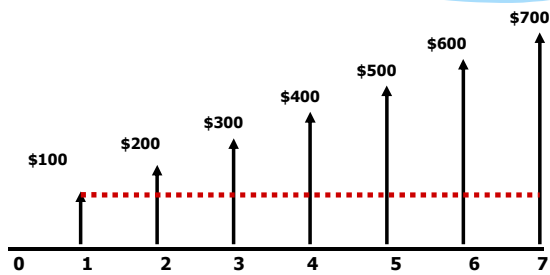
* Cấu hình dòng tiền



$$CF_i = A_1 \pm (i - 1)G$$



Ví dụ



Độ dốc gồm hai thành phần: Số tiền ban đầu & lượng gia tăng (gradient)

1. Số tiền ban đầu = \$100
2. Số tiền gia tăng (bên trên) = \$100/thời đoạn



Ví dụ

EXAMPLE 2.8

A local university has initiated a logo-licensing program with the clothier Holister, Inc. Estimated fees (revenues) are \$80,000 for the first year with uniform increases to a total of \$200,000 by the end of year 9. Determine the gradient and construct a cash flow diagram that identifies the base amount and the gradient series.

Ví dụ

Solution

The year 1 base amount is $CF_1 = \$80,000$, and the total increase over 9 years is

$$CF_9 - CF_1 = 200,000 - 80,000 = \$120,000$$

Equation [2.18], solved for G , determines the arithmetic gradient.

$$G = \frac{(CF_9 - CF_1)}{n - 1} = \frac{120,000}{9 - 1} = \$15,000 \text{ per year}$$

Ví dụ

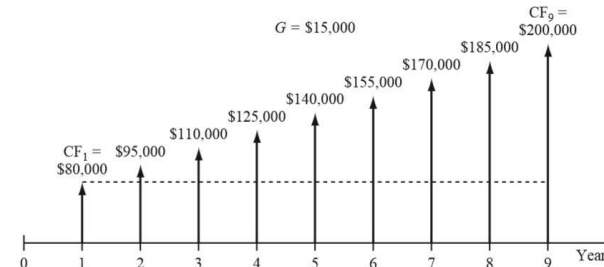
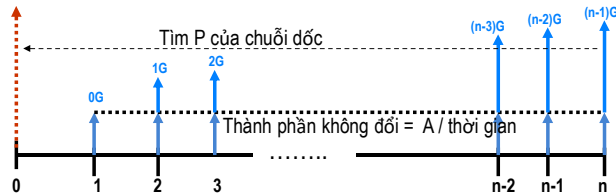


Figure 2-13
Diagram for gradient series, Example 2.8.

The cash flow diagram (Figure 2-13) shows the base amount of \$80,000 in years 1 through 9 and the \$15,000 gradient starting in year 2 and continuing through year 9.

Cấu thành của độ dốc (Gradient composition)



- Giá trị hiện tại là điểm cách một đơn vị thời gian về phía trái của nơi có giá trị độ dốc $0G$
- Để tính giá trị hiện tại của số tiền ban đầu, sử dụng hệ số P/A (đã biết)
- Để tính giá trị hiện tại của chuỗi độ dốc, sử dụng hệ số P/G (xem phía sau)

Phân rã độ dốc (Gradient Decomposition)

- * Chúng ta đã biết, độ dốc số học gồm hai thành phần
 1. Số tiền ban đầu (Base amount)
 2. Thành phần độ dốc (Gradient component)
 Khi dòng tiền có độ dốc, hệ số P/G là độ dốc cấu thành duy nhất
- * Áp dụng hệ số P/A đối với số tiền ban đầu
- * $P_T = P_{A1}$ (base amount) + P_G (gradient)

Thành lập công thức

$$P = G(P/F, i, 2) + 2G(P/F, i, 3) + 3G(P/F, i, 4) + \dots + [(n-2)G](P/F, i, n-1) + [(n-1)G](P/F, i, n)$$

Factor out G and use the P/F formula.

$$P = G \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \frac{3}{(1+i)^4} + \dots + \frac{n-2}{(1+i)^{n-1}} + \frac{n-1}{(1+i)^n} \right] \quad [2.21]$$

Multiplying both sides of Equation [2.21] by $(1+i)^1$ yields

$$P(1+i) = G \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{2}{(1+i)^2} + \frac{3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{n-2}{(1+i)^{n-2}} + \frac{n-1}{(1+i)^{n-1}} \right] \quad [2.22]$$

Subtract Equation [2.21] from Equation [2.22] and simplify.

$$iP = G \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right] - G \left[\frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad [2.23]$$

Hệ số độ dốc A/G

Dạng bài toán

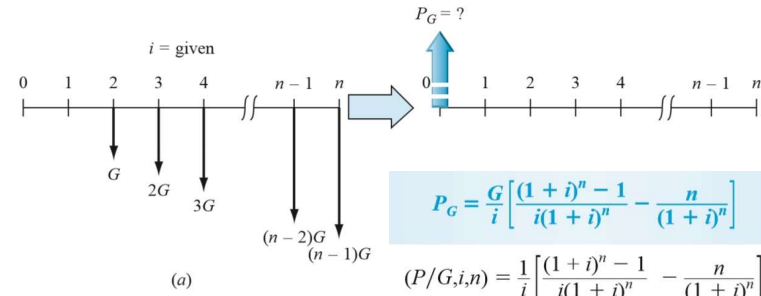


Figure 2-14

Conversion diagram from an arithmetic gradient to a

$$(P/G, i, n) = \frac{(1+i)^n - in - 1}{i^2(1+i)^n}$$

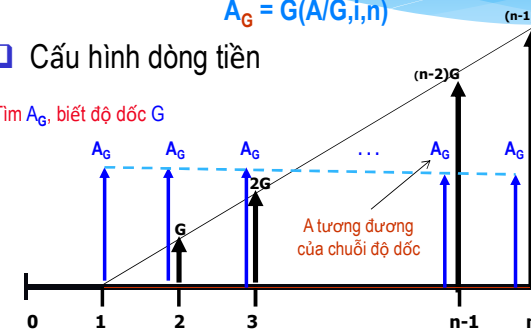
$$P_G = G(P/G, i, n)$$

Khái niệm

$$A_G = G(A/G, i, n)$$

□ Cấu hình dòng tiền

Tim A_G , biết độ dốc G



$$CF_i = (i-1)G$$

$$A_T = A_1 \text{ (base amount)} + A_G \text{ (gradient)}$$

Thành lập công thức

$$A_G = G(P/G, i, n)(A/P, i, n)$$

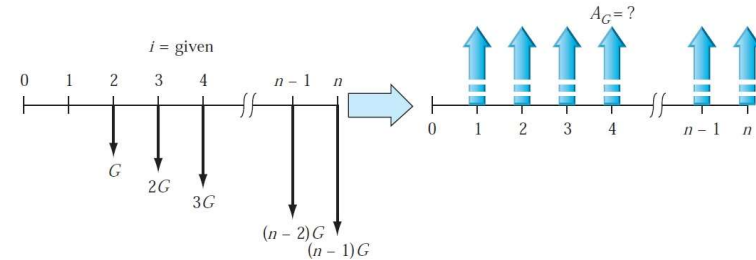
$$= G(A/G, i, n)$$

$$A_G = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A_G = G \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

Dạng bài toán



$$A_G = G \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

Hệ số độ dốc số học F/G

Arithmetic Gradient Factor F/G

Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

Thành lập công thức

$$F = P(1+i)^n$$

$$P_G = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

$$F_G = G \left[\left(\frac{1}{i} \right) \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) - n \right]$$

Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

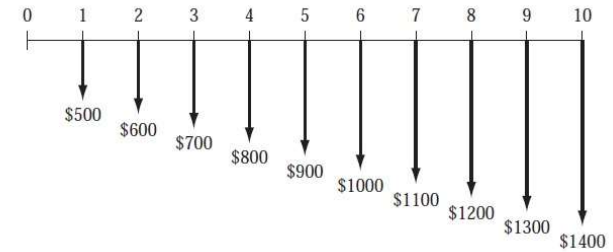
Ví dụ

EXAMPLE 2.9

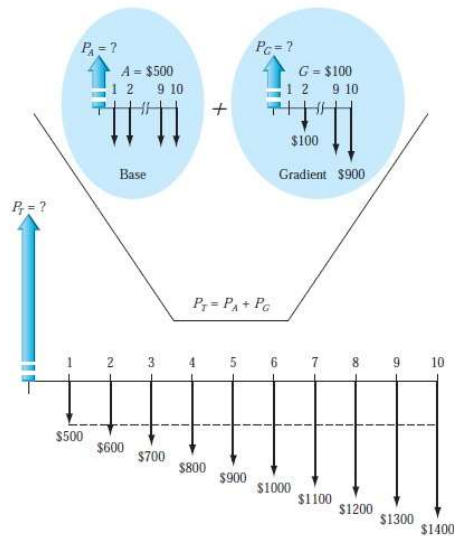
Neighboring parishes in Louisiana have agreed to pool road tax resources already designated for bridge refurbishment. At a recent meeting, the engineers estimated that a total of \$500,000 will be deposited at the end of next year into an account for the repair of old and safety-questionable bridges throughout the area. Further, they estimate that the deposits will increase by \$100,000 per year for only 9 years thereafter, then cease. Determine the equivalent (a) present worth and (b) annual series amounts, if public funds earn at a rate of 5% per year.

Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

Ví dụ



Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ



Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

Figure 2-17
Partitioned cash flow diagram (in \$1000 units), Example 2.9.

Ví dụ

Solution

(a) The cash flow diagram of this conventional arithmetic gradient series from the perspective of the parishes is shown in Figure 2-16. According to Equation [2.19], two computations must be made and added: the first for the present worth of the base amount P_A and the second for the present worth of the gradient P_G . The total present worth P_T occurs in year 0. This is illustrated by the partitioned cash flow diagram in Figure 2-17. In \$1000 units, the total present worth is

$$P_T = \boxed{}$$

Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

Ví dụ

(b) Here, too, it is necessary to consider the gradient and the base amount separately. The total annual series A_T is found by Equation [2.20] and occurs in years 1 through 10.

$$A_T = 500 + 100(A/G, 5\%, 10) = 500 + 100(4.0991) = \$909.91 \text{ per year } (\$909,910)$$

Comment

Remember: The P/G and A/G factors determine the present worth and annual series of the gradient only. Any other cash flows must be considered separately.

If the present worth is already calculated [as in part (a)], P_T can be multiplied by an A/P factor to get A_T . In this case, considering round-off error,

A_T

Ví dụ

EXAMPLE 2.10 The Cement Factory Case

The announcement of the HAC cement factory states that the \$200 million (M) investment is planned for 2012. Most large investment commitments are actually spread out over several years as the plant is constructed and production is initiated. Further investigation may determine, for example, that the \$200 M is a present worth in the year 2012 of anticipated investments during the next 4 years (2013 through 2016). Assume the amount planned for 2013 is \$100 M with constant decreases of \$25 M each year thereafter. As before, assume the time value of money for investment capital is 10% per year to answer the following questions using tabulated factors and spreadsheet functions, as requested below.

- In equivalent present worth values, does the planned decreasing investment series equal the announced \$200 M in 2012? Use both tabulated factors and spreadsheet functions.
- Given the planned investment series, what is the equivalent annual amount that will be invested from 2013 to 2016? Use both tabulated factors and spreadsheet functions.
- (This optional question introduces **Excel's Goal Seek tool**.) What must be the amount of yearly constant decrease through 2016 to have a present worth of exactly \$200 M in 2012, provided \$100 M is expended in 2013? Use a spreadsheet.

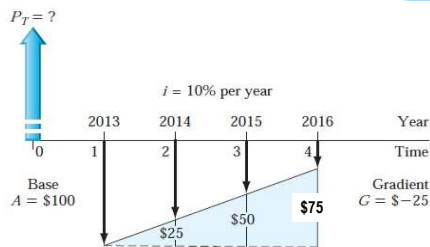


Figure 2-18
Cash flow diagram for decreasing gradient in \$1 million units, Example 2.10.

Solution

(a) The investment series is a decreasing arithmetic gradient with a base amount of \$100 M in year 1 (2013) and $G = \$-25$ M through year 4 (2016). Figure 2-18 diagrams the cash flows with the shaded area showing the constantly declining investment each year. The P_T value at time 0 at 10% per year is determined by using tables and a spreadsheet.

Tabulated factors: Equation [2.19] with the minus sign for negative gradients determines the total present worth P_T . Money is expressed in \$1 million units.

$$P_T = P_A - P_G \tag{2.30}$$

In present worth terms, the planned series will exceed the equivalent of \$200 M in 2012 by approximately \$7.5 M.

Spreadsheet: Since there is no spreadsheet function to directly display present worth for a gradient series, enter the cash flows in a sequence of cells (rows or columns) and use the NPV function to find present worth. Figure 2-19 shows the entries and function $NPV(i\%, \text{second_cell}:\text{last_cell})$. There is no first_cell entry here, because there is no investment per se in year 0. The result displayed in cell C9, \$207.534, is the total P_T for the planned series. (Note that the NPV function does not consider two separate series of cash flows as is necessary when using tabulated factors.)

The interpretation is the same as in part (a): the planned investment series exceeds the \$200 M in present worth terms by approximately \$7.5 M.

(b) *Tabulated factors:* There are two equally correct ways to find A_T . First, apply Equation [2.20] that utilizes the A/G factor, and second, use the P_T value obtained above and the A/P factor. Both relations are illustrated here, in \$1 million units,

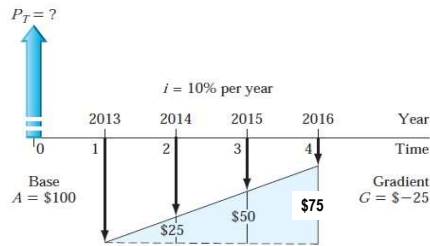


Figure 2-18
Cash flow diagram for decreasing gradient in \$1 million units, Example 2.10.

Use Equation [2.20]:

$$A_T = 100 - 25(A/G, 10\%, 4) = 100 - 25(1.3812) = \$65.471 \quad (\$65,471,000 \text{ per year})$$

Use P_T :

$$A_T = 207.537(A/P, 10\%, 4) = 207.537(0.31547) = \$65.471 \text{ per year}$$

Spreadsheet: Apply the PMT function in Equation [2.29] to obtain the same $A_T = \$65.471$ per year (Figure 2-19).

**Hệ số độ dốc hình học
(Chuỗi thay đổi không đều)**

Geometric Gradient Series Factor

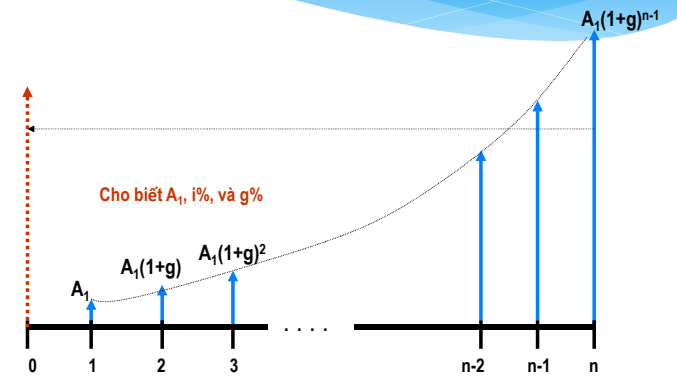
Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

Khái niệm

- Đôi khi các chi phí bảo quản, vận hành, nhân công,... tăng/giảm theo một tỉ lệ nhất định, chẳng hạn 0.1%/tháng hay 3%/năm.
- Độ dốc hình học (Geometric Gradient)
 - * Chuỗi dung tiền bắt đầu từ giá trị A_1
 - * Tăng/giảm một tỉ lệ (lãi suất) không đổi (constant percentage) theo thời gian
 - * Tỉ lệ/Lãi suất này được gọi là:
 - Độ dốc hình học (Geometric Gradient)
 - Ký hiệu:
 - g = tỉ lệ/lãi suất, tính bằng %, theo đó giá trị tương lai sẽ tăng/giảm theo mỗi đơn vị thời gian

Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

Chuỗi độ dốc hình học điển hình



Yêu cầu: Tìm hệ số $(P/A, g\%, i\%, n)$ dùng để chuyển đổi dòng tiền hàng năm trong tương lai về thời điểm hiện tại ($t = 0$)

Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

Thành lập công thức

□ Trường hợp $g \neq i$

$$P_g = \frac{A_1}{(1+i)^1} + \frac{A_1(1+g)}{(1+i)^2} + \frac{A_1(1+g)^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{A_1(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n}$$

$$= A_1 \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1+g}{(1+i)^2} + \frac{(1+g)^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n} \right]$$

Nhân 2 vế cho $(1+g)/(1+i)$ rồi trừ cho phương trình trên:

$$P_g \left(\frac{1+g}{1+i} - 1 \right) = A_1 \left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{1+i} \right]$$

$$P_g = A_1 \left[\frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^n}{i-g} \right] \quad g \neq i$$

Thành lập công thức

□ Trường hợp $g = i$

$$P_g = \frac{A_1}{(1+i)^1} + \frac{A_1(1+g)}{(1+i)^2} + \frac{A_1(1+g)^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{A_1(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n}$$

$$= A_1 \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1+g}{(1+i)^2} + \frac{(1+g)^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n} \right]$$

Thay $g = i$ vào phương trình trên:

$$P_g = A_1 \left(\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)} + \dots + \frac{1}{(1+i)} \right)$$

$$P_g = \frac{nA_1}{(1+i)}$$

Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

Dạng bài toán

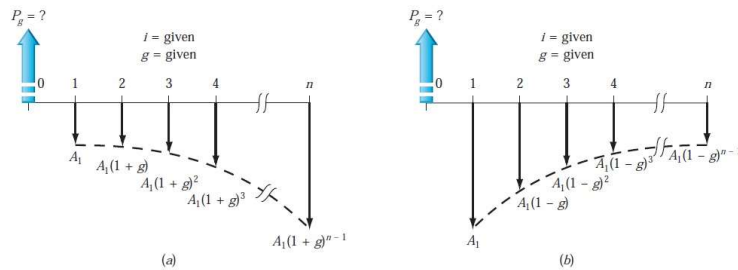


Figure 2-21 Cash flow diagram of (a) increasing and (b) decreasing geometric gradient series and present worth P_g .

$$P_g = A_1(P/A, g, i, n)$$

$$(P/A, g, i, n) = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^n}{i-g} & g \neq i \\ \frac{n}{1+i} & g = i \end{cases}$$

Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học

Các ghi chú

Trường hợp $g \neq i$

$$P_g = A_1 \left[\frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^n}{i-g} \right] \quad g \neq i$$

Trường hợp $g = i$

$$P_g = \frac{n A_1}{(1+i)}$$

Các lưu ý khi sử dụng hệ số $(P/A, g\%, i\%, n)$

- A_1 là giá trị khởi điểm
- Bài toán này **KHÔNG** có số tiền ban đầu
- Lượng tiền ở những năm (thời đoạn) kế tiếp được tính trực tiếp từ A_1

Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

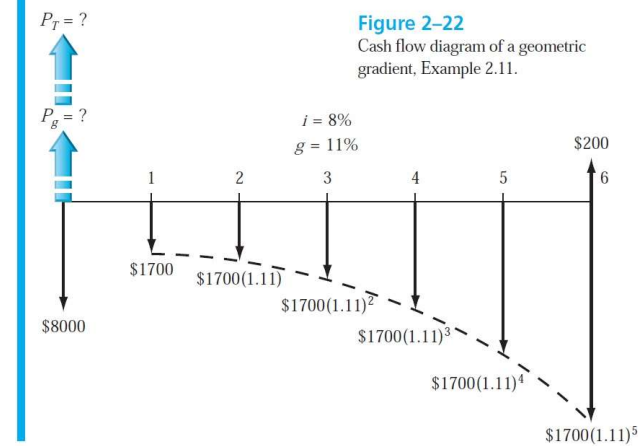
Ví dụ

EXAMPLE 2.11

A coal-fired power plant has upgraded an emission control valve. The modification costs only \$8000 and is expected to last 6 years with a \$200 salvage value. The maintenance cost is expected to be high at \$1700 the first year, increasing by 11% per year thereafter. Determine the equivalent present worth of the modification and maintenance cost by hand and by spreadsheet at 8% per year.

Ví dụ

Figure 2-22
Cash flow diagram of a geometric gradient, Example 2.11.



Ví dụ

Solution by Hand

The cash flow diagram (Figure 2-22) shows the salvage value as a positive cash flow and all costs as negative. Use Equation [2.35] for $g \neq i$ to calculate P_g . Total P_T is the sum of three present worth components.

$$\begin{aligned}
 P_T &= -8000 - P_g + 200(P/F, 8\%, 6) \\
 &= -8000 - 1700 \left[\frac{1 - (1.11/1.08)^6}{0.08 - 0.11} \right] + 200(P/F, 8\%, 6) \\
 &= -8000 - 1700(5.9559) + 126 = \$-17,999
 \end{aligned}$$

Ví dụ

EXAMPLE 2.12 The Cement Factory Case

Now let's go back to the proposed Houston American Cement plant in Georgia. The revenue series estimate of \$50 million annually is quite optimistic, especially since there are many other cement product plants operating in Florida and Georgia on the same limestone deposit. (The website for the HAC plant shows where they are located currently; it is clear that keen competition will be present.) Therefore, it is important to be sensitive in our analysis to possibly declining and increasing revenue series, depending upon the longer-term success of the plant's marketing, quality, and reputation. Assume that revenue may start at \$50 million by the end of the first year, but then decreases geometrically by 12% per year through year 5. Determine the **present worth** and **future worth** equivalents of all revenues during this 5-year time frame at the same rate used previously, that is, 10% per year.

Ví dụ

Solution

The cash flow diagram appears much like Figure 2-21*b*, except that the arrows go up for revenues. In year 1, $A_1 = \$50$ M and revenues decrease in year 5 to

$$A_1(1 - g)^{n-1} = 50 \text{ M}(1 - 0.12)^{5-1} = 50 \text{ M}(0.88)^4 = \$29.98 \text{ M}$$

First, we determine P_g in year 0 using Eq. [2.35] with $i = 0.10$ and $g = -0.12$, then we calculate F in year 5. In \$1 million units,

P_g

F

This means that the decreasing revenue stream has a 5-year future equivalent worth of \$246.080 M. If you look back to Example 2.6, we determined that the F in year 5 for the uniform revenue series of \$50 M annually is \$305.255 M. In conclusion, the 12% declining geometric gradient has lowered the future worth of revenue by \$59.175 M, which is a sizable amount from the perspective of the owners of Votorantim Cimentos North America, Inc.

Đặt vấn đề

- * Khi tất cả các giá trị dòng tiền được biết đến hoặc đã được ước tính, giá trị i (interest rate or rate of return) hoặc giá trị n (số năm) thường là chưa biết.
- * Ví dụ: Một công ty đầu tư vốn để phát triển một sản phẩm mới. Sau vài năm, giá trị thu nhập ròng hàng năm trên thị trường đã được biết, vấn đề đặt ra là cần xác định tỷ lệ lợi nhuận (rate of return) trên vốn đầu tư.

Tìm lãi suất và số năm

Determination of Unknown Interest Rate & Unknown Number of Years

Đặt vấn đề

- * Có vài cách để tìm i & n chưa biết, tùy thuộc vào bản chất của dòng tiền tệ và tùy thuộc vào phương pháp tìm.
- * Các trường hợp tìm i & n sẽ đơn giản khi chỉ liên quan đến giá trị hiện tại và giá trị tương lai (P & F).
- * Các trường hợp tìm i & n sẽ phức tạp hơn khi liên quan đến A , G , và đặc biệt là g .

Ví dụ

EXAMPLE 2.13

If Laurel made a \$30,000 investment in a friend's business and received \$50,000 5 years later, determine the rate of return.

Solution

Since only single amounts are involved, i can be determined directly from the P/F factor.

$$P = F(P/F, i, n) = F \frac{1}{(1 + i)^n}$$

$$30,000 = 50,000 \frac{1}{(1 + i)^5}$$

$$0.600 = \frac{1}{(1 + i)^5}$$

$$i = \left(\frac{1}{0.6}\right)^{0.2} - 1 = 0.1076 \quad (10.76\%)$$

Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

Ví dụ

EXAMPLE 2.15 The Cement Factory Case

From the introductory comments about the HAC plant, the annual revenue is planned to be \$50 million. All analysis thus far has taken place at 10% per year; however, the parent company has made it clear that its other international plants are able to show a 20% per year return on the initial investment. Determine the number of years required to generate 10%, 15%, and 20% per year returns on the \$200 million investment at the Georgia site.

Solution

$$P = -200 + 50(P/A, i\%, n)$$

$$(i = 10\%, 15\%, 20\%)$$

$$(P/A, i\%, n) = 4.00$$

Return, $i\%$	Years
10	6
15	7
20	9

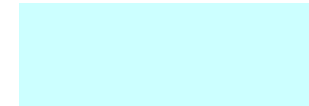
Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

EXAMPLE 2.14

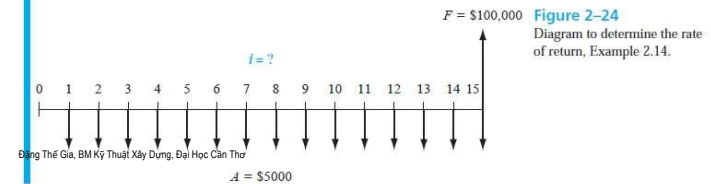
Pyramid Energy requires that for each of its offshore wind power generators \$5000 per year be placed into a capital reserve fund to cover unexpected major rework on field equipment. In one case, \$5000 was deposited for 15 years and covered a rework costing \$100,000 in year 15. What rate of return did this practice provide to the company? Solve by hand and spreadsheet.

Solution by Hand

The cash flow diagram is shown in Figure 2-24. Either the A/F or F/A factor can be used. Using A/F ,



From the A/F interest tables for 15 years, the value 0.0500 lies between 3% and 4%. By interpolation, $i = 3.98\%$.



Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

Tóm tắt chương 2

- Các công thức và hệ số được thành lập và áp dụng trong chương này giúp xác định đương lượng (giá trị tương đương) của dòng tiền hiện tại (P), tương lai (F), chuỗi hàng năm (A), và có chuỗi có độ dốc (G);
- Các công thức cho phép tính toán quy đổi qua lại các kiểu dòng tiền khác nhau;
- Cho phép tính lãi suất (i) và thời gian (n);
- Khả năng ứng dụng của các công thức và ký hiệu có ý nghĩa quan trọng cho các nghiên cứu kinh tế kỹ thuật.

Đặng Thế Gia, BM Kỹ Thuật Xây Dựng, Đại Học Cần Thơ

