

MÔN HỌC  
**THỐNG KÊ ỨNG DỤNG - XD (KC107)**



GIÁO VIÊN BIÊN SOẠN

**ĐẶNG THẾ GIA**

Bộ môn Kỹ Thuật Xây Dựng  
Khoa Công Nghệ, Trường Đại Học Cần Thơ

## Trung bình mẫu & Phương sai mẫu

BM Kỹ thuật xây dựng

Chương 4:

**PHÉP ĐO MÔ TẢ SỐ**

**NUMERICAL DESCRIPTIVE MEASURES**

**PHẦN BÀI TẬP**

BM Kỹ thuật xây dựng

## Trung Bình & Phương Sai Mẫu Biến Liên Tục

Cho mẫu ngẫu nhiên :

$X_i$	1	2	3	4
$n_i$	20	15	10	5

Tìm  $\bar{X}$ ,  $S_n^2(X)$ ,  $S_n^{*2}(X)$ .

2b-4

## Trung Bình & Phương Sai Mẫu Biến Liên Tục

Giải :

$$\bar{X} = \frac{1 \times 20 + 2 \times 15 + 3 \times 10 + 4 \times 5}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2$$

Tính  $S^2$  theo định nghĩa

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

i	$X_i$	$f_i$	$X_i * f_i$	$X_i^2$	$X_i^2 * f_i$	$(X_i - \bar{X})^2$
1	1	20	20	1	20	1
2	2	15	30	4	60	0
3	3	10	30	9	90	1
4	4	5	20	16	80	4
		50	100	30	250	

## Trung Bình & Phương Sai Mẫu Biến Rời Rạc

Cho số liệu quan trắc như bảng bên dưới. Tìm GTTG & trung vị? Tính giá trị trung bình và phương sai?

Số TT	Khoảng h	Tần số $n_i$	$\frac{n_i}{n_h}$
1	1 – 5	40	0,02
2	5 – 9	80	0,04
3	9 – 13	200	0,10
4	13 – 17	120	0,06
5	17 – 21	40	0,02

2b-7

## Trung Bình & Phương Sai Mẫu Biến Liên Tục

Giải :

$$\bar{X} = \frac{1 \times 20 + 2 \times 15 + 3 \times 10 + 4 \times 5}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2$$

Tính  $S^2$  theo công thức rút gọn

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{20 \times 1^2 + 15 \times 2^2 + 10 \times 3^2 + 5 \times 4^2}{50} = \frac{250}{50} = 5$$

$$S_n^2(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2 = 5 - 2^2 = 1$$

$$S_n^{*2}(X) = \frac{n}{n-1} S_n^2(X) = \frac{50}{49} \times 1 = \frac{50}{49}$$

2b-6

## Trung Bình & Phương Sai Mẫu Biến Rời Rạc

Giải :

$$x_1^* = \frac{1+5}{2} = 3; \quad x_2^* = \frac{5+9}{2} = 7; \quad x_3^* = \frac{9+13}{2} = 11;$$

$$x_4^* = \frac{13+17}{2} = 15; \quad x_5^* = \frac{17+21}{2} = 19.$$

Ta có mẫu :

X	$x_1^* = 3$	$x_2^* = 7$	$x_3^* = 11$	$x_4^* = 15$	$x_5^* = 19$
$n_i$	40	80	200	120	40

$$\bar{X} = \frac{40 \times 3 + 80 \times 7 + 200 \times 11 + 120 \times 15 + 40 \times 19}{40 + 80 + 200 + 120 + 40} = \frac{5440}{480}$$

$$\bar{X} = \frac{34}{3} \approx 11,33$$

2b-8

## Trung Bình & Phương Sai Mẫu Biến Rời Rạc

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{40 \times 3^2 + 80 \times 7^2 + 200 \times 11^2 + 120 \times 15^2 + 40 \times 19^2}{480}$$

$$= \frac{70020}{480} = \frac{1167}{8} \approx 145,8$$

$$S_n^2(X) = \frac{1167}{8} - \left(\frac{34}{3}\right)^2 = \frac{1255}{72}$$

2b-9

## Mẫu có nhiều nhóm Trung bình nhóm & Trung bình mẫu

Trung bình trong nhóm thứ j :

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}$$

Trung bình mẫu chung :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^v \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}$$

2b-11

## Mẫu có nhiều nhóm

: Nếu mẫu ngẫu nhiên cho dưới dạng

$A_1$	$A_2$	...	$A_v$
$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1v}$
$X_{21}$	$X_{22}$	...	$X_{2v}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$X_{n_11}$	$X_{n_12}$	...	$X_{n_1v}$

2b-10

## Mẫu có nhiều nhóm Phương sai nhóm & Phương sai mẫu

Phương sai mẫu trong nhóm j :

$$S_{n_j}^2(X) = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^r n_{kj} (X_{kj} - \bar{X}_j)^2$$

Phương sai chung :  $S_c^2(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X})^2$

2b-12

## Mẫu có nhiều nhóm

### Phương sai nhóm & Phương sai mẫu

Trường hợp  $(X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{rj})$  có  $r$  khác nhau  
và tần số tương ứng  $n_{1j}, \dots, n_{rj}$

Khi đó  $n_j = n_{1j} + n_{2j} + \dots + n_{rj}$

Phương sai mẫu nhóm trong (nt - nhóm trong) :

$$S_{nt}^2(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^v n_j S_{n_j}^2(X)$$

Phương sai mẫu nhóm giữa :  $S_G^2(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^v n_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2$

$$S_c^2(X) = S_G^2(X) + S_{nt}^2(X)$$

2b-13

## Mẫu có nhiều nhóm

### Trung bình nhóm & Trung bình mẫu

$$\bar{X}_1 = \frac{1 \times 2 + 7 \times 4 + 2 \times 5}{10} = 4$$

$$\bar{X}_2 = \frac{2 \times 3 + 3 \times 8}{5} = 6$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^v \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} = \frac{14}{3}$$

2b-15

## Mẫu có nhiều nhóm

. Cho mẫu ngẫu nhiên :

Nhóm 1		Nhóm 2	
$X_{i1}$	$n_{i1}$	$X_{i2}$	$n_{i2}$
2	1	3	2
4	7	8	3
5	2		

Tìm  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}, S_{n_1}^2(X), S_{n_2}^2(X), S_{n_t}^2(X), S_G^2(X), S_c^2(X)$

2b-14

## Mẫu có nhiều nhóm

### Phương sai nhóm & Phương sai mẫu

Phương sai nhóm 1 & 2

$$S_{n_1}^2(X) = \frac{1}{n_1} \sum n_{i1} (X_{i1} - \bar{X}_1)^2 = \frac{1 \times (2-4)^2 + 7(4-4)^2 + 2(5-4)^2}{10} = 0,6$$

$$S_{n_2}^2(X) = \frac{2(3-6)^2 + 3(8-6)^2}{5} = 6$$

2b-16

## Mẫu có nhiều nhóm Phương sai nhóm & Phương sai mẫu

– Phương sai nhóm trong :

$$S_{n_1}^2(X) = \frac{n_1 S_{n_1}^2(X) + n_2 S_{n_2}^2(X)}{n} = \frac{10 \times 0,6 + 5 \times 6}{15} = \frac{12}{5}$$

– Phương sai nhóm giữa :

$$S_G^2(X) = \frac{n_1(\bar{X}_1 - \bar{X})^2 + n_2(\bar{X}_2 - \bar{X})^2}{n} = \frac{10\left(4 - \frac{14}{3}\right)^2 + 5\left(6 - \frac{14}{3}\right)^2}{15} = \frac{8}{9}$$

Phương sai mẫu

$$S_c^2(X) = S_G^2(X) + S_{nt}^2(X)$$

2b-17

BM Kỹ thuật xây dựng

## Mẫu có nhiều nhóm Phương sai mẫu

– Phương sai mẫu chung :

$$S_c^2(X) = \frac{1 \cdot \left(2 - \frac{14}{3}\right)^2 + 7 \cdot \left(4 - \frac{14}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(5 - \frac{14}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(3 - \frac{14}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(8 - \frac{14}{3}\right)^2}{15} = \frac{148}{45}$$

2b-18

## Hệ số tương quan & Hiệp phương sai

## Hiệp phương sai

Hiệp phương sai của 2 biến X, Y

$$Cov(X, Y) = E(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{N}$$

Công thức

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}$$

## Hệ số tương quan

Hệ số tương quan giữa 2 biến X, Y

$$r = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} : r \in [-1, +1]$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{S_n(X)S_n(Y)}$$

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - (\sum_{i=1}^n X_i)(\sum_{i=1}^n Y_i)}{\sqrt{\left[ n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2 \right] \left[ n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\sum_{i=1}^n Y_i)^2 \right]}}$$

2b-21

## Ví dụ

i	X <sub>i</sub>	Y <sub>i</sub>	X <sub>i</sub> <sup>2</sup>	Y <sub>i</sub> <sup>2</sup>	X <sub>i</sub> * Y <sub>i</sub>
1	2	3	4	9	6
2	3	7	9	49	21
3	4	8	16	64	32
4	5	9	25	81	45
5	6	13	36	169	78
6	7	15	49	225	105
7	8	16	64	256	128
8	9	17	81	289	153
<b>Tổng</b>	<b>44</b>	<b>88</b>	<b>284</b>	<b>1142</b>	<b>568</b>

2b-23

## Ví dụ

**Ví dụ 4.9.** Cho mẫu ngẫu nhiên với cặp biến ngẫu nhiên (X, Y) là :

X	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	3	7	8	9	13	15	16	17

Tìm hệ số tương quan mẫu r.

2b-22

## Ví dụ

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{S_n(X)S_n(Y)}$$

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - (\sum_{i=1}^n X_i)(\sum_{i=1}^n Y_i)}{\sqrt{\left[ n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2 \right] \left[ n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\sum_{i=1}^n Y_i)^2 \right]}}$$

$$r = \frac{8 \times 568 - 44 \times 88}{\sqrt{[8 \times 284 - 44^2][8 \times 1142 - 88^2]}} = 0,98$$

2b-24

## Ví dụ

**Ví dụ 4.10.** Cho mẫu quan sát với cặp biến ngẫu nhiên (X, Y) là :

	X	1	2	3
Y	2	10	2	
	3	1	8	
	4		2	7

Tính hệ số tương quan mẫu r của X, Y.

2b-25

## Ví dụ

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><th><math>X_i</math></th><th><math>n_i</math></th><th><math>n_i X_i</math></th><th><math>n_i X_i^2</math></th></tr> <tr><td>1</td><td>11</td><td>11</td><td>11</td></tr> <tr><td>2</td><td>12</td><td>24</td><td>48</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>21</td><td>63</td></tr> <tr><td colspan="2">n = 30</td><td><math>\sum X_i = 56</math></td><td><math>\sum X_i^2 = 122</math></td></tr> </table>	$X_i$	$n_i$	$n_i X_i$	$n_i X_i^2$	1	11	11	11	2	12	24	48	3	7	21	63	n = 30		$\sum X_i = 56$	$\sum X_i^2 = 122$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><th><math>Y_i</math></th><th><math>n_i</math></th><th><math>n_i Y_i</math></th><th><math>n_i Y_i^2</math></th></tr> <tr><td>2</td><td>12</td><td>24</td><td>48</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>27</td><td>81</td></tr> <tr><td>4</td><td>9</td><td>36</td><td>144</td></tr> <tr><td colspan="2"></td><td><math>\sum Y_i = 87</math></td><td><math>\sum Y_i^2 = 273</math></td></tr> </table>	$Y_i$	$n_i$	$n_i Y_i$	$n_i Y_i^2$	2	12	24	48	3	9	27	81	4	9	36	144			$\sum Y_i = 87$	$\sum Y_i^2 = 273$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><th><math>X_i</math></th><th><math>Y_i</math></th><th><math>n_i</math></th><th><math>n_i X_i Y_i</math></th></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>10</td><td>20</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>8</td><td>48</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>16</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>7</td><td>84</td></tr> <tr><td colspan="3"></td><td><math>\sum Y_i = 179</math></td></tr> </table>	$X_i$	$Y_i$	$n_i$	$n_i X_i Y_i$	1	2	10	20	1	3	1	3	2	2	2	8	2	3	8	48	2	4	2	16	3	4	7	84				$\sum Y_i = 179$
$X_i$	$n_i$	$n_i X_i$	$n_i X_i^2$																																																																							
1	11	11	11																																																																							
2	12	24	48																																																																							
3	7	21	63																																																																							
n = 30		$\sum X_i = 56$	$\sum X_i^2 = 122$																																																																							
$Y_i$	$n_i$	$n_i Y_i$	$n_i Y_i^2$																																																																							
2	12	24	48																																																																							
3	9	27	81																																																																							
4	9	36	144																																																																							
		$\sum Y_i = 87$	$\sum Y_i^2 = 273$																																																																							
$X_i$	$Y_i$	$n_i$	$n_i X_i Y_i$																																																																							
1	2	10	20																																																																							
1	3	1	3																																																																							
2	2	2	8																																																																							
2	3	8	48																																																																							
2	4	2	16																																																																							
3	4	7	84																																																																							
			$\sum Y_i = 179$																																																																							

$$r = \frac{30 \times 179 - 56 \times 87}{\sqrt{[30 \times 122 - 56^2][30 \times 273 - 87^2]}} \approx 0,87$$

2b-26

## Kỹ thuật đổi biến

*Chú ý 4.3 :* Nếu các quan sát  $X_i, Y_i$  là các số khá lớn hoặc dưới dạng số thập phân phức tạp gây khó khăn cho việc tính toán thì ta nên dùng phép biến đổi thích hợp để các số liệu nhỏ và đơn giản hơn. Chẳng hạn, nếu các  $X_i, i = \overline{1, n}$ , cách đều 1 khoảng có độ dài  $h_1$ , còn các  $Y_i, i = \overline{1, n}$  cách đều nhau 1 khoảng có độ dài  $h_2$ . Khi đó ta dùng phép biến đổi :

$$u_i = \frac{X_i - X_0}{h_1}, v_i = \frac{Y_i - Y_0}{h_2}, i = \overline{1, n}$$

trong đó  $X_0, Y_0$  là số chọn tùy ý, sao cho nhận được các giá trị của  $u_i$  và  $v_i$  nhỏ và thuận tiện cho việc tính toán.

2b-27

## Ví dụ

Lúc đó các số đặc trưng mẫu có dạng :

$$\bar{X} = x_0 + h_1 \bar{u}, \bar{Y} = Y_0 + h_2 \bar{v}, \bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i, \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$$

$$S_n^2(X) = h_1^2 \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2 - (\bar{u})^2 \right], S_n^2(Y) = h_2^2 \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2 - (\bar{v})^2 \right]$$

$$r = \frac{n \times \sum_{i=1}^n u_i v_i - (\sum_{i=1}^n u_i)(\sum_{i=1}^n v_i)}{\sqrt{[n \times \sum_{i=1}^n u_i^2 - (\sum_{i=1}^n u_i)^2][n \times \sum_{i=1}^n v_i^2 - (\sum_{i=1}^n v_i)^2]}}$$

2b-28

## Ví dụ

. Cho mẫu ngẫu nhiên :

Y \ X	10	20	30	40	50	60
15	5	7				
25		20	23			
35			30	47	2	
45			10	11	20	6
55				9	7	3

Tính hệ số tương quan mẫu  $r$  của  $X$ ,  $Y$ .

2b-29

## Ví dụ

**Giải :** Chọn  $h_1 = h_2 = 10$  ;  $X_0 = 40$ ,  $Y_0 = 35$ .

$$\text{Đặt } u_i = \frac{X_i - 40}{10}, v_i = \frac{Y_i - 35}{10}$$

2b-30

## Ví dụ

Ta nhận được bảng giá trị của  $u_i$  và  $v_i$  như sau :

u \ v	-3	-2	-1	0	1	2
-2	5	7				
-1		20	23			
0			30	47	2	
1			10	11	20	6
2				9	7	3

Lập các bảng phụ để tính các tổng :  $\sum_{i=1}^n u_i$ ,  $\sum_{i=1}^n v_i$ ,  $\sum_{i=1}^n u_i^2$ ,  $\sum_{i=1}^n v_i^2$ ,  $\sum_{i=1}^n u_i v_i$

2b-31

## Ví dụ

$u_i$	$n_i$	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$v_i$	$n_i$	$n_i v_i$	$n_i v_i^2$
-3	5	-15	45	-2	12	-24	48
-2	27	-54	108	-1	43	-43	43
-1	63	-63	63	0	79	0	0
0	67	0	0	1	47	47	47
1	29	29	29	2	19	38	76
2	9	18	36				
	$n = 200$	$\sum u_i = -85$	$\sum u_i^2 = 281$			$\sum v_i = 18$	$\sum v_i^2 = 214$

2b-32



## Ví dụ

$u_i$	$v_i$	$n_i$	$n_i u_i v_i$
-3	-2	5	30
-2	-2	7	28
-2	-1	20	40
-1	-1	23	23
-1	0	30	0
-1	1	10	-10
0	0	47	0
0	1	11	0
0	2	9	0
1	0	2	0
1	1	20	20
1	2	7	14
2	1	6	12
2	2	3	12
			$\sum u_i v_i = 169$

2b-33



## Ví dụ

$$r = \frac{n \times \sum_{i=1}^n u_i v_i - (\sum_{i=1}^n u_i)(\sum_{i=1}^n v_i)}{\sqrt{[n \times \sum_{i=1}^n u_i^2 - (\sum_{i=1}^n u_i)^2][n \times \sum_{i=1}^n v_i^2 - (\sum_{i=1}^n v_i)^2]}}$$

$$r = \frac{200 \times 169 - (-85)(18)}{\sqrt{[200 \times 281 - 85^2][200 \times 214 - 18^2]}} = 0,77$$

2b-34