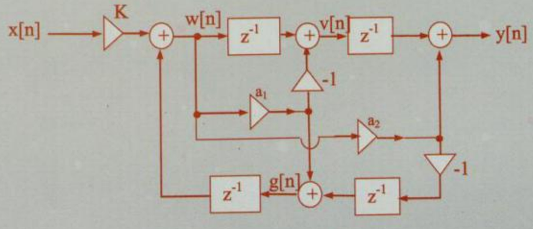
TS HỒ VĂN SUNG

BÀI TẬP
XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU
PHƯƠNG PHÁP TRUYỀN THỐNG KẾT HỢP VỚI MATLAB

559
BÀI TẬP GIẢI SẴN
TẬP I



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TS HỒ VĂN SUNG

BÀI TẬP
XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU

PHƯƠNG PHÁP TRUYỀN THỐNG
KẾT HỢP VỚI MATLAB

559 BÀI TẬP GIẢI SẴN

In lần thứ nhất

TẬP I

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI

LỜI GIỚI THIỆU

*Để rèn luyện đặc tính nghiên cứu và phát huy khả năng sáng tạo, biết vận dụng kiến thức vào giải quyết các vấn đề thực tế; đồng thời đáp ứng nhu cầu học tập ngày càng cao về công nghệ số của sinh viên và học viên cao học của các trường đại học và cao đẳng, lần xuất bản này, chúng tôi cho ra mắt hai tập sách "**Bài tập xử lý số tín hiệu, Phương pháp truyền thống kết hợp với MATLAB** ".559 bài tập chứa trong hai tập sách này, được phân thành 9 chương, gắn liền với nội dung của hai tập lý thuyết: "Xử lý số tín hiệu, phương pháp truyền thống kết hợp với phần mềm MATLAB", tái bản lần thứ tư, năm 2009, tại Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam; Trong đó, tập 1 có 264 bài phân bố trong 4 chương; tập 2 có 295 bài chia thành 5 chương.*

Tất cả 559 bài tập này đều đề cập đến những vấn đề cơ bản, những ứng dụng tiêu biểu và cập nhật những kiến thức mới nhất, đa dạng về tín hiệu và các hệ thống xử lý số hiện đại. Tất cả các định luật, định lý và những kiến thức thu nhận được trong hai tập lý thuyết, được vận dụng một cách triệt để và linh hoạt để giải tất cả các bài toán có trong hai tập sách.

Mỗi bài tập, bài toán lại có ít nhất vài ba câu hỏi, đề cập tới các tính chất khác nhau của tín hiệu thời gian rời rạc và của các hệ thống xử lý số hiện đại. Bởi vì, chúng tôi muốn tăng cường hiểu biết về phương diện vật lý, kỹ thuật và công nghệ của tín hiệu và hệ thống hơn là những tính toán toán học rườm rà và phức tạp. Chính vì thế, giải quyết được các bài toán này sẽ giúp bạn đọc tiếp thu được nhiều kiến thức và nắm bắt những công cụ hữu ích, cả phần cứng lẫn phần mềm để tự mình có thể thiết kế và thực thi các chíp xử lý số hiện đại nhất.

Tất cả các chương của cả hai tập sách này đều có bố cục giống nhau: Bắt đầu là "Tóm tắt lý thuyết", tiếp đến là "Đề bài bài tập" và cuối cùng là "Trả lời và hướng dẫn giải". Tất cả các bài tập đều được giải chi tiết vừa bằng phương pháp giải tích truyền thống, vừa được tính toán và m"phỏng *trên phần mềm MATLAB. Chính vì vậy, các kết quả và "lời giải" của các bài tập đều được thể hiện dưới dạng các công thức toán học chặt chẽ với độ chính xác rất cao. Chúng tôi để "lời giải" của các bài tập ngay sau mỗi chương để độc giả tiện so sánh kết quả của mình với lời giải của sách mà không phải tốn nhiều thời gian tìm tòi.*

Các hàm MATLAB và các chương trình m"phỏng và tính toán cho các bài tập của các chương đều được để ở cuối sách để bạn đọc tiện theo dõi, so sánh và đối chiếu.

Trong số các loại sách, thì sách ***bài tập*** *bao giờ cũng là sách khó nhất, nhưng cũng hấp dẫn nhất. Đó không chỉ là nơi để thể hiện và phát huy vốn kiến thức đã tích lũy được từ lý thuyết mà còn bộc lộ khả năng vận dụng sáng tạo và sự hiểu biết sâu rộng nhiều ngành khoa học khác như: Toán, Vật lý và Tin học. Bởi vì, không có các kiến thức và sự hiểu biết đó, sẽ không có được lời giải đúng đắn.*

Bộ sách này là kết quả của nhiều năm giảng dạy, nghiên cứu, sưu tầm và soạn thảo với nhiều nguồn tài liệu khác nhau. Đọc và giải các bài tập này, các bạn mới thấy một lượng lớn công việc đã được giải quyết chóng vánh, với những kết quả hết sức hấp dẫn và đẹp mắt, nhờ sự trợ giúp của máy tính, đặc biệt là phần mềm MATLAB. Tuy nhiên, trong quá trình soạn thảo, có thể còn có những khiếm khuyết. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn và mong quí độc giả góp ý, nhận xét để cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Tác giả

CHƯƠNG **1.**

TÍN HIỆU VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

1.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

❒ LẤY MẪU TÍN HIỆU

$$x[nT] = x_a(t)\Big|_{t=nT} = x_a[nT],\ \text{với } n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

ở đây, biến số thời gian t của tín hiệu thời gian liên tục $x_a(t)$ liên hệ với biến số thời gian n của tín hiệu rời rạc x[nT] bằng hệ thức:

$$t = nT = \frac{n}{F} = \frac{2\pi n}{\Omega}$$

với F = 1/T gọi là *tần số lấy mẫu* còn $\Omega = 2\pi F$ là tần số góc lấy mẫu.

* Tín hiệu thời gian rời rạc x[nT] được biểu diễn như một dãy số hay còn gọi là *một dãy mẫu*, được ký hiệu là {x[n]}; trong đó T = 1 giây và n là những số nguyên chạy từ $-\infty$ đến $+\infty$. Giá trị của dãy mẫu tại thời điểm n là x[n].

- Tín hiệu thời gian rời rạc có thể là một dãy mẫu có chiều dài v'’hạn hoặc hữu hạn. Dãy có chiều dài hữu hạn là dãy có giá trị khác không trong một khoảng thời gian hữu hạn từ thời điểm N_1 đến N_2: $N_1 \le n \le N_2$, với $N_2 \ge N_1$. Dãy này có chiều dài $N = N_2 - N_1 + 1$ mẫu.

- Dãy thoả mãn điều kiện: $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + kN]$

được gọi là ***dãy tuần hoàn*** với chu kỳ cơ bản N là một số nguyên dương và k là một số nguyên bất kỳ.

- ***Năng lượng*** của dãy x[n] được xác định bằng công thức:

$$\varepsilon = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Năng lượng của dãy trong một khoảng xác định từ $-K \le n \le K$ được xác định bằng biểu thức:

$$\varepsilon_N = \sum_{n=-K}^{K} |x[n]|^2$$

- ***Công suất trung bình*** của một dãy không tuần hoàn x[n] được xác định bằng công thức:

$$\overline{P_{av}} = \lim_{K \to \infty} \frac{1}{K+1} \varepsilon_K$$

Công suất trung bình của dãy tuần hoàn $\tilde{x}[n]$ *với* chu kỳ N được cho bởi:

*** Định lý Parseval**

Định lý Parseval liên hệ *năng lượng tổng cộng* chứa trong một tín hiệu với mật độ phổ năng lượng tổng cộng được tính từ biến đổi Fourier của tín hiệu đó:

❐ CÁC TÍN HIỆU THỜI GIAN RỜI RẠC CƠ SỞ

- ***Dãy xung đơn vị*** được ký hiệu bằng δ[n] và được xác định từ biểu thức:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{khi } n = 0 \\ 0, & \text{khi } n \neq 0 \end{cases}$$

- ***Dãy nhẩy bậc đơn vị*** ký hiệu u[n] được xác định từ biểu thức:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \text{khi } n \geq 0 \\ 0, & \text{khi } n < 0 \end{cases}$$

- ***Dãy sine phức*** được biểu thị bằng hệ thức:

$$x[n] = |A||\alpha|^n e^{j\omega_o n + \varphi}$$

- ***Dãy sine thực*** có biên độ là hằng số được biểu thị bằng:

$$x[n] = A\cos(\omega_o n + \Phi)$$

Trong đó A, ω_o và Φ là những số thực được gọi là *biên độ, tần số góc* và *pha ban đầu* của dãy hàm số sine x[n]. $f_o = \omega_o/2\pi$ là *tần số.*

*Dãy sin phức và sin thực là những dãy tuần hoàn với chu kỳ N nếu:

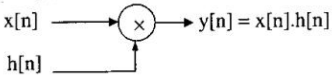
$$\omega_o N = 2\pi r$$

trong đó N là chu kỳ cơ bản; còn r là một số nguyên bất kỳ.

❐ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

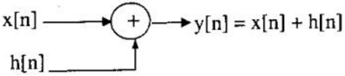
- ***Tích*** hai dãy dữ liệu x[n] và h[n] có cùng chiều dài N sẽ thu được dãy dữ liệu y[n] có cùng chiều dài N và được thực hiện bằng hệ thức:

  $y[n] = x[n] \,.\, h[n]$



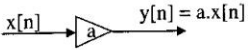
- ***Cộng*** hai dãy dữ liệu x[n] với h[n] có cùng chiều dài N sẽ thu được dãy dữ liệu y[n] có cùng chiều dài N và được thực hiện bằng hệ thức:

  $y[n] = x[n] + h[n]$



- ***Nhân dãy x[n] với hằng số a*** được thực hiện bằng hệ thức:

  $y[n] = a.x[n]$



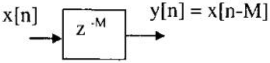
- ***Ngược thời gian*** hay còn gọi là đổi chiều tín hiệu, hoặc phép chuyển vị của một dãy có chiều dài v"hạn được thực hiện bằng hệ thức:

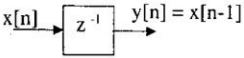
  $y[n] = x[-n]$

- ***Làm trễ dãy x[n]*** có chiều dài v"hạn một lượng M sẽ thu được dãy y[n] có chiều dài v"hạn và được thực hiện nhờ biểu thức:

  $y[n] = x[n-M]$

trong đó M là một số nguyên dương. Đây cũng chính là phép dịch dãy x[n] về phía phải trục thời gian M mẫu và được ký hiệu là z^{-M}. Trường hợp M = 1 thì được gọi là trễ đơn vị và ký hiệu z^{-1}.





❐ KHAI TRIỂN CHẴN VÀ LẺ

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

Trong đó phần chẵn và phần lẻ được cho bởi:

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \quad \text{vμ} \quad x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

Nếu dãy x[n] là dãy phức, thì:

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) \quad \text{vμ} \quad x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$$

❐ NHÂN CHẬP GIỮA HAI TÍN HIỆU

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

❐ THAY ĐỔI TỐC ĐỘ LẤY MẪU

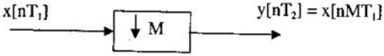
**** Giảm tốc độ lấy mẫu***

Gọi F_1 là tốc độ của dãy dữ liệu lối vào và F_2 là tốc độ của dãy mẫu ở lối ra, thì trên lĩnh vực thời gian, quan hệ giữa dãy mẫu lối vào và lối ra là:

$$y[nT_2] = x[nMT_1]$$

ở đây $\quad T_2 = MT_1$

Do vậy: $\quad F_2 = \dfrac{F_1}{M}$



Bộ giảm tốc độ mẫu hệ số M.

**** Tăng tốc độ lấy mẫu***

Gọi F_1 là tốc độ của dãy dữ liệu lối vào và F_2 là tốc độ của dãy mẫu ở lối ra, thì trên lĩnh vực thời gian, quan hệ giữa dãy mẫu lối vào và lối ra là:

$$y[nT_2] = x[n\frac{T_1}{L}]$$

ở đây $$T_2 = \frac{T_1}{L}$$

Do vậy: $$F_2 = LF_1$$

Bộ tăng tốc độ mẫu hệ số L.

❐ SỰ TƯƠNG QUAN GIỮA CÁC TÍN HIỆU

**** Tương quan chéo***

$$r_{xy}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-\ell] = y[\ell]*x[-\ell]$$

**** Tự tương quan***

$$r_{xx}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-\ell] = x[\ell]*x[-\ell]$$

❐ CÔNG SUẤT CỦA TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN

Công suất trung bình của một tín hiệu không tuần hoàn x[n], $-K \le n \le K$, được xác định bởi:

$$P_x = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^{K} |x[n]|^2$$

Đối với tín hiệu tuần hoàn $\tilde{x}[n]$ với chu kỳ N thì công suất trung bình được tính bằng:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2$$

Đối với tín hiệu ngẫu nhiên WSS thì công suất trung bình được xác định bởi:

$$P_X = \Phi_{XX}[0] = \sigma_X^2 + |m_X|^2$$

Trong đó σ_X^2 là *phương sai*; còn $|m_X|^2$ là *giá trị toàn phương trung bình*.

1.2. ĐỀ BÀI BÀI TẬP

❐ LẤY MẪU TÍN HIỆU THỜI GIAN LIÊN TỤC

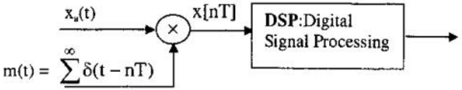
1.1. Hình B1.1 là m"hình hoá hệ thống xử lý số tín hiệu thời gian liên tục, trong đó bộ lấy mẫu tín hiệu là lý tưởng. Tìm dãy mẫu x[nT] khi:

1) $x_a(t) = \cos(2500\pi t)$; với tần số lấy mẫu F = 1kHz.

2) $x_a(t) = 3\cos(400\pi t) + 5\sin(1200\pi t) + 3\cos(4400\pi t) + 2\cos(5200\pi t)$; với tần số lấy mẫu F= 4kHz.

3) $x_a(t) = 6\cos(60\pi t) + 3\sin(300\pi t) + 2\cos(340\pi t) +$
$+ 4\cos(500\pi t) + 10\sin(660\pi t)$;

với tần số lấy mẫu F = 200Hz.



Hình B1.1. M"hình hoá bộ xử lý số tín hiệu thời gian liên tục. x(t).

1.2. Tín hiệu thời gian rời rạc x[nT] thu được bằng cách lấy mẫu tín hiệu thời gian liên tục $x_a(t) = \sin(2\pi.100t)$ với chu kỳ lấy mẫu T = 1/400 giây. Hãy tìm và vẽ $x_a(t)$, x[nT] và tín hiệu khôi phục lại sau khi lấy mẫu với tần số lấy mẫu F = 400 Hz và 150 Hz.

1.3. Tín hiệu thời gian rời rạc $x[n] = \cos(\pi n/4)$ thu được bằng cách lấy mẫu tín hiệu thời gian liên tục $x_a(t) = \cos(\Omega_0 t)$, $-\infty < t < \infty$ với tốc độ lấy mẫu 1000 mẫu/ giây. Hãy tìm các giá trị dương khả dĩ của Ω_0.

1.4. Tín hiệu thời gian liên tục $x_a(t) = \cos(4000\pi t)$ được lấy mẫu để trở thành tín hiệu thời gian rời rạc $x[n] = \cos(\pi n/3)$. Hãy xác định chu kỳ lấy mẫu T. Giá trị của T có duy nhất không? vì sao?

1.5. Một tín hiệu tương tự (thời gian liên tục) được lấy mẫu với tần số 2,5kHz.

a). Thành phần tần số lớn nhất có thể có trong tín hiệu này là bao nhiêu để không có hiện tượng chồng phổ xẩy ra?

b). Xác định độ phân dải tần số của phổ của tín hiệu đã được lấy mẫu nếu số lượng mẫu thu được là N = 500 mẫu.

c). Cho biết các thành phần tần số tương tự có mặt trong thành phần phổ.

1.6. Một tín hiệu sin thời gian liên tục $x_a(t) = \cos\Omega_0 t$ được lấy mẫu tại $t = nT$, $-\infty \le n \le \infty$, phát ra một dãy thời gian rời rạc:

$$x[n] = x_a(nT) = \cos(\Omega_0 nT)$$

Với những giá trị nào của T, x[n] là dãy tuần hoàn? Chu kỳ cơ bản của nó bằng bao nhiêu, nếu $\Omega_0 = 18$ radian và $T = \pi/6$ giây?

1.7. Một tín hiệu analog có chiều dài 250 ms được lấy mẫu tại 512 điểm cách đều nhau. Hãy xác định các đặc trưng sau đây của phổ tần số rời rạc của tín hiệu đó.

a) khoảng cách tối thiểu tính theo Hz giữa các thành phần tần số liên tiếp nhau.

b) Tần số cao nhất có mặt trong phổ tính theo Hz.

c) Tần số cao nhất cho phép trong phổ của tín hiệu analog để tránh hiện tượng chồng phổ.

1.8. Bộ xử lý DFT được sử dụng để xác định phổ tần số của một tín hiệu thực. Hệ thống này có khả năng xử lý các tín hiệu có tần số tối đa là 250Hz và có khoảng cách giữa các tần số trong phổ DFT nhỏ hơn hoặc bằng 0,5 Hz.

a) Hãy xác định chiều dài tối thiểu của băng phổ, thời gian cực đại giữa các mẫu và số điểm tối thiểu của băng ghi.

b) Tìm chiều dài của băng ghi, thời gian tối thiểu giữa các mẫu và số điểm trong băng ghi nếu số điểm đó là một số nguyên luỹ thừa của 2.

❒ CÁC LOẠI TÍN HIỆU RỜI RẠC VÀ SỰ BIỂU DIỄN

1.9. Hãy biểu diễn trên đồ thị các tín hiệu rời rạc sau đây trên miền của biến số độc lập đã cho.

a) b^n, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; b = 0,9

b) cũng giống như câu a) nhưng với b = 1,1.

c) $\sin(2\pi fn/F)$, f = 10; F = 100;
n = 0, 1, 2, ..., 19, 20.

d) $\sin(2\pi f_1 n/F) + \sin(2\pi f_2 n/F)$, $f_1 = 10$; $f_2 = 5$; $F = 100$.

1.10. Cho biết giá trị và vẽ đồ thị tín hiệu thời gian-rời rạc sau:

$$x[n] = n\,(u[n]-u[n-10]) + 10e^{-0,3(n-10)}\{u[n-10] - u[n-20]\}$$

$$0 \le n \le 20$$

1.11. Cho biết giá trị và vẽ đồ thị các tín hiệu:

a) $x[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n-4]$, với $-5 \le n \le 5$

b) $x_1[n] = u[n] - u[n-10]$

1.12. Hãy cho biết dãy nào trong các dãy dữ liệu sau đây giới nội?

a) $x[n] = A\alpha^n$ với A và α là những số phức và $|\alpha| < 1$,

b) $x[n] = A\alpha^n u[n]$ với A và α là những số phức và $|\alpha| < 1$,

c) $x[n] = A\alpha^n$ với A và α là những số phức và $|\alpha| > 1$,

d) $x[n] = 4\sin(\omega n)$

e) $x[n] = 3\cos^3(\omega n^3)$

1.13. Tính các chuẩn L_1, L_2, và L_∞ của các tín hiệu rời rạc sau đây:

a) $b^n u[n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $b = 0,5$.

b) $\sin(2\pi f n/F)$; $f = 10$; $F = 100$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

c) $x[n] = \{\ldots 0, 0, 0, 2, -1, 3, 2, -2, -1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, \ldots\}$

1.14. Khai triển các tín hiệu sau đây thành dãy xung đơn vị:

a) $x[n] = \left\{-4 \quad 3 \quad 2 \quad \underset{\uparrow}{3} \quad -4 \quad 2 \quad 0 \quad 3 \quad -1 \quad 3\right\}$

b) $w[n] = \left\{0 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 3{,}5 \quad 1 \quad \underset{\uparrow}{8} \quad -1 \quad -2 \quad 0 \quad 3\right\}$

c) $y[n] = \left\{3 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad \underset{\uparrow}{2} \quad 3 \quad 0\right\}$

d) $x[n] = 1$, $-\infty < n < \infty$

1.15. Biểu diễn các tín hiệu sau đây dùng dãy nhẩy bậc u[n]

a) $x_1[n] = 2$ với $-3 \le n \le 0$

b) $x_2[n] = 0,5$ với $6 \le n \le 12$

c) $x_3[n] = -4$ với $31 \le n \le 35$

d) $x_4[n] = 1$, $-\infty < n < \infty$

1.16. Vẽ tín hiệu sau đây:

$$x[n] = a^n(u[n] - u[n-21]) \qquad \text{với } |a| < 1$$

1.17. Xác định xem tín hiệu nào trong các tín hiệu sau đây là tuần hoàn. Nếu tín hiệu là tuần hoàn, hãy xác định chu kỳ cơ bản của nó:

a) $x[n] = e^{-j0,4\pi n}$

b) $y[n] = \sin(0,6\pi n + 0,6\pi)$

c) $g[n] = 2\cos(1,1\pi n - 0,5\pi) + 2\sin(0,7\pi n)$

d) $h[n] = -4\cos(0,3\pi n - 0,45\pi) + 3\sin(1,3\pi n)$

e) $f[n] = -\cos(0,8\pi n) + 4\sin(0,8\pi n) + 5\sin(1,2\pi n + 0,65\pi)$

1.18. Tìm chu kỳ cơ bản của các tín hiệu sau đây:

a) $x_1[n] = 3.(-1)^n, \quad -\infty < n < +\infty$

b) $x_2[n] = \sin(2\pi n/M), \quad -\infty < n < +\infty$

1.19. Các dãy rời rạc sau đây biểu thị một chu kỳ của dãy sin tuần hoàn dạng

$x[n] = A\cos(\omega_0 n+\varphi)$:

a) $\{0 \quad -\sqrt{2} \quad -2 \quad -\sqrt{2} \quad 0 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{2}\}$

b) $\{\sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{2}\}$

c) $\{2 \quad -\sqrt{2} \quad -2 \quad \sqrt{2}\}$.

a). Hãy xác định giá trị của các thông số A, ω_0 và φ.

b). Vẽ đồ thị các tín hiệu với các thông số vừa tìm được ở câu a).

1.20. Hãy xác định chu kỳ cơ bản của dãy tuần hoàn:

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n)$$

có các tần số góc ω_0 cho bằng các giá trị sau:

a) $0,14\pi$; b) $0,24\pi$; c) $0,34\pi$ và $0,75\pi$.

❐ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

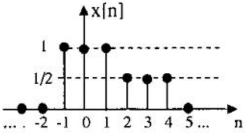
1.21. Cho các tín hiệu có chiều dài 7 mẫu:

$x[n] = \{3, -2, 0, 1, 4, 5, 2\}$
$y[n] = \{0, 7, 1, -3, 4, 9, -2\}$
$w[n] = \{-5, 4, 3, 6, -5, 0, 1\}$

Tìm các tín hiệu sau:

a) $s[n] = x[n] + y[n]$
b) $v[n] = x[n].w[n]$
c) $f[n] = y[n] - w[n]$

1.22. Tín hiệu thời gian-rời rạc x[n] được chỉ ra trên hình B1.22.



Hình B.1.22.

Hãy vẽ các tín hiệu sau đây:

(a) $x[n-2]$

(b) $x[4-n]$

(c) $x[2n]$

(d) $x[n]u[2-n]$

(e) $x[n-1]\delta[n-3]$

1.23 Cho tín hiệu thời gian rời rạc:

$$x[n]=\{1 \quad 2 \quad \underset{\uparrow}{3} \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1\}$$

a) Vẽ đồ thị dãy x[n]. Hãy tìm và vẽ các dãy sau:

b) $x_1[n] = 2x[n-5] - 3x[n+4]$

c) $x_2[n] = x[3-n] + x[n]x[n-2]$

1.24 Vẽ sơ đồ dòng tín hiệu thực thi các phép toán sau đây:

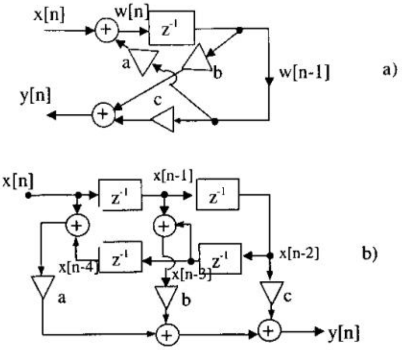
a) $y[n] = x[n] + 1,5y[n-1] + 0,75y[n-2]$

b) $y[n] = 0,2x[n-4] + 0,4x[n-3] + 0,5x[n-2] + 0,4x[n-1] + 0,2x[n]$

c) $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] + 1,6y[n-1] - 0,8y[n-2]$

d) $y[n] = x[n].x[n]$.

1.25. Thiết lập mối quan hệ giữa các tín hiệu x[n] và y[n] trong các sơ đồ dòng tín hiệu hình B1.25 sau đây:



Hình B1.25.

1.26. Giả sử g[n] và h[n] là các dãy số thực chẵn và lẻ tương ứng, hãy xét xem các dãy sau đây dãy nào là chẵn dãy nào là lẻ?

a) $x[n] = g[n]g[n]$

b) $y[n] = g[n]h[n]$

c) $z[n] = h[n]h[n]$

1.27. Cho dãy:

$$x[n] = \{0 \quad 1 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad 1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0\}$$

a) Tìm và vẽ các dãy: x[-n] và các khai triển chẵn và lẻ của tín hiệu này.

b) Vẽ các tín hiệu x[n] và các tín hiệu vừa tìm được.

1.28. Tìm và vẽ các khai triển chẵn và lẻ của dãy số phức:

$$x[n] = \left\{0 \quad 1+j4 \quad -2+j3 \quad \underset{\uparrow}{4-j2} \quad -5-j6 \quad -j2 \quad 3\right\}$$

1.29. Tìm và vẽ các khai triển chẵn và lẻ của dãy:

$$x[n] = a^n u[n] \text{ với } 0 < a < 1$$

1.30. Tìm các khai triển chẵn và lẻ các dãy sau đây:

a) $x_1[n]=\left\{3 \quad -4 \quad \underset{\uparrow}{2} \quad 0 \quad 6 \quad 3 \quad 9 \quad 5\right\}$

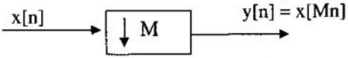
b) $x_3[n]=\left\{3+2j \quad -4-5j \quad \underset{\uparrow}{2+3j} \quad 5+j \quad -6+4j\right\}$

c) $v[n]=A\cos(\omega_o n)+B\sin(\omega_o n)$

d) $g[n]=n^2$

e) $h[n]=A\alpha^n, \quad 0\le n\le N-1$ va A,α là số phức.

1.31. Hình B1.31 mô tả hệ thống giảm tốc độ mẫu với hệ số M.



Hình B1.31.

Cho:

a) $x[n]=\left\{3 \quad -4 \quad \underset{\uparrow}{2} \quad 0 \quad 6 \quad 3 \quad 9 \quad 5\right\}.$

Tìm y[n] với M = 2

b) $x[n=\left\{3+2j \quad -4-5j \quad \underset{\uparrow}{2+3j} \quad 5+j \quad -6+4j\right\}.$

Tìm y[n] với M = 2.

c) $x[n]=\sin(0{,}125\pi n), \quad -50\le n\le 50.$

Tìm y[n] với n = 4.

☐ TƯƠNG QUAN CHÉO VÀ TỰ TƯƠNG QUAN GIỮA CÁC TÍN HIỆU

1.32. Tính tương quan chéo $r_{xy}(\ell)$ và $r_{zt}(\ell)$ và sự tự tương quan $r_{xx}(\ell)$ của hai dãy hữu hạn sau đây:

$x[n] = \{1 \;\; 3 \;\; -2 \;\; 1 \;\; 2 \;\; -1 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 2\}$
$y[n] = \{2 \;\; -1 \;\; 4 \;\; 1 \;\; -2 \;\; 3\}$
$z[n] = \{3 \;\; -2 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 2\}, \quad -3\le n\le 3$
$t[n] = \{0 \;\; 7 \;\; 1 \;\; -3 \;\; 4 \;\; 9 - 2\}, \quad -3\le n\le 3$

1.33. Tìm tương quan chéo và tự tương quan giữa hai dãy sau đây:

a) $x[n] = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}$ vµ $y[n] = \{5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0\}$

b) $g[n] = \{1 \quad 2 \quad 3\}$ và $h[n] = \{1 \quad 2 \quad 3\}$

1.34. Xác định dãy tự tương quan của các dãy tuần hoàn sau đây:

a) $x_1[n] = (\alpha)^n u[n]$

b) $x_2[n] = 3.(-1)^n$

c) $x_3[n] = \sin(2\pi n/M)$

1.35. Giả sử x và y là hai biến số ngẫu nhiên. Chứng tỏ rằng:

$$E\{x+y\} = E\{x\} + E\{y\}$$

và

$$E\{cx\} = cE\{x\}$$

ở đây c là hằng số.

1.36. Xác định giá trị của hằng số C để sai số toàn phương trung bình $E([X-C]^2)$ cực tiểu. Tìm giá trị cực tiểu của sai số toàn phương trung bình đó.

1.37. Tính giá trị trung bình và phương sai của các biến số ngẫu nhiên với các hàm mật độ xác suất được cho dưới đây:

a) Phân bố Cauchy $P_X(x) = \dfrac{\alpha/\pi}{x^2 + \alpha^2}$

b) Phân bố Laplace $P_X(x) = \dfrac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|}$

c) Phân bố Rayleigh $P_X(x) = \dfrac{x}{\alpha^2} e^{-x^2/2\alpha^2} u(x)$

1.38. Xác định giá trị trung bình và phương sai của tín hiệu ngẫu nhiên WSS với hàm tự tương quan cho bởi:

$$\Phi_{XX}(\ell) = \frac{9 + 15\ell + 18\ell^2}{2 + 5\ell + 6\ell^2}$$

1.39. Giả sử x[n] và y[n] là hai tín hiệu ngẫu nhiên dừng độc lập với nhau có giá trị trung bình m_x và m_y và phương sai là σ_x^2 và σ^2_y . Tín hiệu v[n] = ax[n] + by[n] trong đó a và b là những hằng số. Chứng minh rằng trung bình m_v và phương sai σ_v^2 của v[n] được xác định bởi $m_v = am_x + bm_y$ và $\sigma^2_v = a^2\sigma^2_x + b^2\sigma^2_y$.

❐ PHỔ TẦN SỐ VÀ NĂNG LƯỢNG CỦA TÍN HIỆU THỜI GIAN RỜI RẠC

1.40. Xác định phổ tần số của các dãy sau đây:

a) $x_1[n] = b^n u[n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $b = 0{,}5$.

b) $x_2[n] = \sin(2\pi f n/F)$; $f = 10$; $F = 100$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

c) $x_3[n] = \{\ldots 0, 0, 0, 2, -1, 3, 2, -2, -1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, \ldots\}$

d) $x_4[n] = \sin(2\pi f_1 n/F) + \sin(2\pi f_2 n/F)$; $f_1 = 10$; $f_2 = 11$; $F = 100$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

1.41. a) Xác định phổ tần số của dãy:

$$x[n] = A\alpha^n \cos(\omega_0 n + \varphi) u[n]$$

trong đó A, $\alpha < 1$ và ω_0 là những số thực.

b) Vẽ phổ tần số với :

$$A = 1;\ \alpha = 0{,}99;\ \omega_0 = \pi$$

và $\varphi = 45$ với $0 \le n \le 25$.

1.42. Xác định phổ tần số của các dãy sau đây:

a) $x_1[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$

b) $x_2[n] = a^{-n} u[-n]$, $|a| > 1$

c) $x_3[n] = a^n u[n+3]$, $|a| < 1$

d) $x_4[n] = \begin{cases} 1, & -N \le n \le N \\ 0, & \text{giá trị khác} \end{cases}$

e) $x_5[n] = \begin{cases} \cos(\pi n / 2N), & -N \le n \le N \\ 0, & \text{giá trị khác} \end{cases}$

1.43. Cho dãy dữ liệu:

$$x[n] = \{1 \quad 5 \quad -2 \quad 1 \quad \underset{\uparrow}{3} \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 5\}$$

Tìm thành phần phổ của dãy đó tại tần số $\omega = 0$ và $\omega = \pi$.

1.44. Tín hiệu tương tự x(t) được lấy mẫu với tần số lấy mẫu F = 10kHz và thu được tín hiệu rời rạc:

$$x[n]=\left\{\begin{matrix} \underset{\uparrow}{3} & -1,5 & 6,5 & -3 & 6,5 & -1,5 \end{matrix}\right\}$$

Xác định phổ tần số của tín hiệu này.

1.45. Cho tín hiệu:

$$x[n]=\begin{cases} 1 & 0 \le n \le 7 \\ 0 & \text{ngoài khoảng trên} \end{cases}$$

a). Tìm các tín hiệu: x[2n] và x[n/2].
b). Tìm và vẽ phổ tần số của cả ba tín hiệu: x[n], x[2n], x[n/2].

1.46. Tìm các dãy thời gian rời rạc có thành phần phổ cho trong các biểu thức sau đây:

a) $X_1(e^{j\omega})=\dfrac{1-e^{j\omega(N+1)}}{1-e^{-j\omega}}$

b) $X_2(e^{j\omega})=1+2\sum_{n=0}^{N}\cos(\omega n)$

c) $X_3(e^{j\omega})=1+\cos\omega+3\cos 2\omega$

1.47. a). Xác định phổ tần số $R(e^{j\omega})$ của dãy:

$$r[n]=\begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{các giá trị khác} \end{cases}$$

b). Xét dãy:

$$w[n]=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[1-\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right)\right], & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{các giá trị khác} \end{cases}$$

Hãy vẽ w[n] và biểu thị $W(e^{j\omega})$, phổ tần số của w[n], theo các số hạng của $R(e^{j\omega})$. (chỉ dẫn: Đầu tiên biểu thị w[n] theo các số hạng của r[n] và các e-mũ phức $e^{j(2\pi n/M)}$ và $e^{-j(2\pi n/M)}$.

c). Vẽ biên độ của $R(e^{j\omega})$ và $W(e^{j\omega})$ cho trường hợp M = 4.

1.48. Tính năng lượng của tín hiệu thời gian rời rạc có chiều dài N mẫu sau:

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \quad 0 \le n \le N-1$$

1.49. Tính công suất trung bình của các tín hiệu thời gian rời rạc sau:

a) $x[n] = u[n]$
b) $h[n] = nu[n]$
c) $g[n] = A_o e^{j\omega_o n}$
d) $f[n] = A\sin((2\pi n/M)+\varphi)$

1.50. Tính năng lượng tổng cộng và công suất trung bình của các tín hiệu rời rạc sau đây:

a) $$x_1[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n \ge 1 \\ 0, & n \le 0 \end{cases}$$

b) $$x_2[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}}, & n \ge 1 \\ 0, & n \le 0 \end{cases}$$

c) $$x[n] = \begin{cases} 3(-1)^n, & n \ge 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

1.3. TRẢ LỜI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

❐ LẤY MẪU TÍN HIỆU THỜI GIAN LIÊN TỤC

1.1. Để lấy mẫu tín hiệu thời gian liên tục, ta dùng công thức:

$$t = nT = n/F$$

Do đó:

1) $x[nT] = x_a(t)\Big|_{t=nT} = \cos(2500\pi nT)$; với chu kỳ lấy mẫu:

$$T = 1/F = 0.001s.$$

Do vậy:

$$x[nT] = x_a(t)\Big|_{t=nT} = \cos(2.5\pi n)$$

2) $x[nT] = x_a(t)\ \big|_{t=nT} = 3\cos(400\pi nT) + 5\sin(1200\pi nT) +$

$3\cos(4400\pi nT) + 2\cos(5200\pi nT)$; với $T = 1/F = 1/4000 = 2{,}4.10^{-4}$ s

nên:

$x[nT] = 3\cos(0{,}1\pi n) + 5\sin(0{,}3\pi n) + 3\cos(1{,}1\pi n) + 2\cos(1{,}3\pi n)$;

3) $x[nT] = x_a(t)\ \big|_{t=nT} = 6\cos(60\pi nT) + 3\sin(300\pi nT) + \quad +$

$2\cos(340\pi nT) + 4\cos(500\pi nT) + 10\sin(660\pi nT)$;

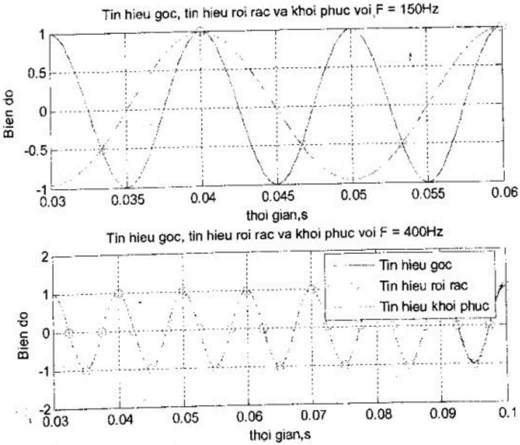
Với:

$T = 1/F = 1/200 = 0{,}005$s, thay vào ta được:

$$x[nT] = x_a(t)\ \big|_{t=nT} = 6\cos(0{,}3\pi n) + 3\sin(1{,}5\pi n) + 2\cos(1{,}7\pi n) + $$
$$+\ 4\cos(2{,}5\pi n) + 10\sin(3{,}3\pi n);$$

1.2. $x[nT] = x_a(t)\ \big|_{t=nT} = \sin(200\pi nT) = \sin(0{,}5\pi n)$ với $T = 1/400 = 0{,}0025$s

$x[nT] = x_a(t)\ \big|_{t=nT} = \sin(200\pi nT) = \sin(\frac{4}{3}\pi n)$ với $T = 1/150 = 0{,}0067$s



Hình BG 1.2

Tín hiệu gốc $x_a(t)$, tín hiệu thời gian rời rạc $x[nT]$ và tín hiệu khôi phục lại sau khi lấy mẫu với hai chu kỳ lấy mẫu khác nhau được cho trên hình BG 1.2. Từ hình vẽ ta thấy khi tần số lấy mẫu F không thỏa mãn tiêu chuẩn Nyquist, thì tín hiệu khôi phục lại khác rất nhiều với tín hiệu gốc; Có nghĩa là hiện tượng chồng phổ đã xẩy ra; Còn khi tần số lấy mẫu F = 400Hz lớn hơn gấp hai lần tần số của tín hiệu f_0 = 100 Hz, thì tín hiệu khôi phục lại trùng khít với tín hiệu gốc; Có nghĩa là tín hiệu khôi phục lại là duy nhất.

1.3. Để tìm Ω_0 , ta giải phương trình:

$$\cos(\Omega_0 nT) = \cos(\pi n/4); \text{ với } T = 1/1000 = 0{,}001s;$$

Từ đó tìm được:

$$0{,}001\Omega_0 n = \pi n/4 + 2k\pi \Rightarrow \Omega_0 = 250\pi + \frac{2000k\pi}{n}$$

Để tránh hiện tượng chồng phổ, thì phải có điều kiện: $2\Omega_0 \leq \Omega_S = 2000\pi$. Từ đây ta tìm được 2 giá trị của Ω_0 là 250π và 750π.

1.4. Để tìm T, ta giải phương trình:

$$\cos(4000\pi nT) = \cos(\pi n/3)$$

Từ đó tìm được:

$$4000\pi nT = \pi n/3 + 2k\pi \Rightarrow T = \frac{1}{12000} + \frac{k}{2000n}$$

Giá trị đầu tiên của $T = \frac{1}{12000}$ s khi k = 0; các giá trị khác khi $k \neq 0$;

Rõ ràng chu kỳ T không duy nhất.

1.5. a) $f_{max} = F/2 = 2500Hz/2 = 1250Hz$

b) $\Delta f = 1/NT$; $T = 1/F = 1/2500 = 4.10^{-4}$ s

Do đó:

$$\Delta f = 1/NT = 1/(500.4.10^{-4}) = 5 \text{ Hz}$$

c) Các tần số tương tự có mặt là:

f = -1245, -1240, ... , -10, -5, 0, 5, 10, ... ,1240, 1245, 1250 Hz.

1.6. Để x[n] tuần hoàn phải thỏa mãn điều kiện: $\Omega_0 NT = 2\pi r$; Trong đó N và r là những số nguyên. Với Ω_0 = 18radians $T = \pi/6$, ta tìm được: $\frac{N}{r} = \frac{2}{3}$; Giá trị nhỏ nhất của N và r là N = 2; r = 3.

1.7. a) $\Delta f = 1/T_0 = 1/0{,}25s = 4$ Hz

b) Tần số lấy mẫu $F = 1/T$; $T = T_0/N = 0{,}25/\ 512$;

Vậy $F = 512/0.25 = 2048$ Hz;

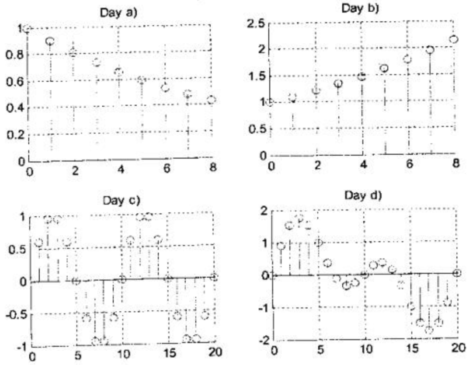
Do vậy tần số lớn nhất có mặt trong phổ $f_{max} = F/2 = 1024$ Hz.

c) 2014 Hz.

1.8. a) Chiều dài tối thiểu của băng phổ $T_0 = 1/\Delta f = 1/0{,}5 = 2$ giây; Tần số lấy mẫu F = 2.fmax = 2 × 250 Hz = 500 Hz . Vậy khoảng thời gian tối đa giữa các mẫu là $T = 1/F = 1/500 = 0{,}002$ giây và số điểm trong phổ $N = T_0 / T = 2/0{,}002 = 1000$ điểm.

b) Tmax = 0,002; N = 1024 vậy chiều dài của băng ghi bây giờ phải là $T_0 = N \times T_{max} = 1024 \times 0{,}002 = 2{,}048$ giây.

1.9. Hình BG1.9 vẽ các tín hiệu đã cho.

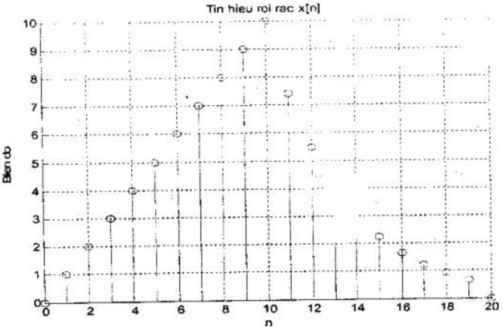


Hình BG1.9.

1.10. Tín hiệu x[n] tìm được:

x[n] = {0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 7,4082 5,4881 4,0657 3,0119 2,2313 1,6530 1,2246 0,9072 0,6721 0}

Đồ thị cho trên hình BG1.10 sau.

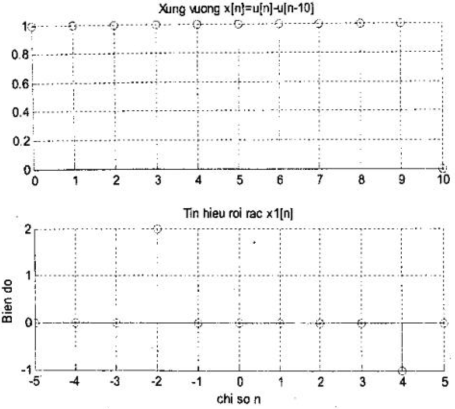


Hình BG1.10.

1.11. a) $x[n] = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0\}$

b) $x_1[n] = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0\}$

Đồ thị cho trên hình BG1.11 sau.



Hình BG1.11.

1.12. Tất cả các dãy đều giới nội, trừ dãy c) $x[n] = A\alpha^n$ với A và α là những số phức và $|\alpha| > 1$ là không giới nội.

1.13. a) $L_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b^n u[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} |b^n| = \frac{1}{1-|0,5|} = 2$

$$L_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |b^n u[n]|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |b^{2n}| = \frac{1}{1-|0,5^2|} = \frac{4}{3}$$

$L_\infty = \max |x[n] = 1$

b) $L_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\sin 0,2\pi n| = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = \infty$

$$L_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\sin(0,2\pi n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\sin(0,2\pi n|^2 = \infty$$

$L_\infty = \max |x[n] = 1$

c). $L_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = 2+1+3+2+2+1+0+2+1 = 14$

$$L_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 0 + 2^2 + 1^2 = 28$$

$L_\infty = \max |x[n] = 3$

1.14. a) $x[n] = -4\delta[n+3] + 3\delta[n+2] + 2\delta[n+1] - 3\delta[n] - 4\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-4] - \delta[n-5] + 3\delta[n-6]$.

b) $x[n] = 2\delta[n+6] + 3\delta[n+5] + \delta[n+4] + 3\delta[n+3] + 5\delta[n+2] + \delta[n+1] - \delta[n-1] - 2\delta[n-2] + 3\delta[n-4]$.

c) $x[n] = 3\delta[n+7] + 3\delta[n+6] + \delta[n+5] - \delta[n+2] - 2\delta[n+1] + 2\delta[n] + + 3\,\delta[n-1]$.

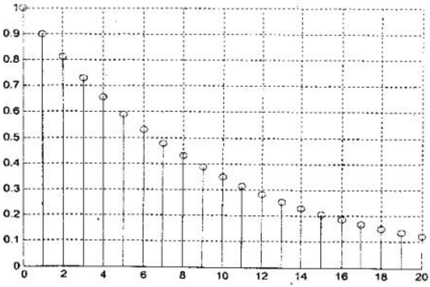
d) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k], -\infty < n < \infty$

1.15.

a) $x_1[n] = 2.([u[-n] - u[-n+3])$
b) $x_2[n] = 0,5.([u[n-6] - u[n-12])$
c) $x_3[n] = -4.([u[n-31] - u[n-35])$

d) $x_4[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{u(n-k) - u(n-k-1\}$

1.16. Đồ thị của tín hiệu này cho trên hình BG1.16 với a = 0,9.



Hình BG1.16.

1.17. a) Tín hiệu $x[n] = e^{-j0,4\pi n}$ có tần số góc là $\omega_0 = 0{,}4\pi$. Điều kiện để dãy rời rạc tuần hoàn: $\omega_0 N = 2\pi r \Rightarrow N = \frac{2\pi r}{\omega_0} = \frac{2\pi r}{0,4\pi} = 5r$. N và r nguyên nhỏ nhất. Vậy lấy r = 1; do vậy chu kỳ cơ bản N = 5.

b) Tín hiệu $y[n] = \sin(0,6\pi n + 0,6\pi)$ có tần số góc là $\omega_0 = 0{,}6\pi$. Điều kiện để dãy rời rạc này tuần hoàn: $\omega_0 N = 2\pi r \Rightarrow N = \frac{2\pi r}{\omega_0} = \frac{2\pi r}{0,6\pi} = \frac{10r}{3}$. N và r nguyên nhỏ nhất. Vậy lấy r = 3; do vậy chu kỳ cơ bản N = 10.

c) Tín hiệu $g[n] = 2\cos(1,1\pi n - 0,5\pi) + 2\sin(0,7\pi n)$ có 2 tần số góc là $\omega_{01} = 1{,}1\pi$ và $\omega_{02} = 0{,}7\pi$. Điều kiện để dãy rời rạc này tuần hoàn:

$$\omega_{01} N_1 = 2\pi r_1 \Rightarrow N_1 = \frac{2\pi r_1}{\omega_{01}} = \frac{2\pi r_1}{1,1\pi} = \frac{20 r_1}{11}$$

N_1 và r_1 nguyên nhỏ nhất. Vậy lấy $r_1 = 11$; do vậy chu kỳ cơ bản $N_1 = 20$.

$$\omega_{02} N_2 = 2\pi r_2 \Rightarrow N_2 = \frac{2\pi r_2}{\omega_{02}} = \frac{2\pi r_2}{0,7\pi} = \frac{20 r_2}{7}$$

N_2 và r_2 nguyên nhỏ nhất. Vậy lấy $r_2 = 7$; do vậy chu kỳ cơ bản $N_2 = 20$.
Ta thấy $N_1 = N_2$. Vậy chu kỳ cơ bản của tín hiệ u g[n] là $N = 20$.

d). Tín hiệu $h[n] = -4\cos(0,3\pi n - 0,45\pi) + 3\sin(1,3\pi n)$ có 2 tần số góc là $\omega_{01} = 0,3\pi$ và $\omega_{02} = 1,3\pi$. Điều kiện để dãy rời rạc này tuần hoàn:

$$\omega_{01}N_1 = 2\pi r_1 \Rightarrow N_1 = \frac{2\pi r_1}{\omega_{01}} = \frac{2\pi r_1}{0,3\pi} = \frac{20r_1}{3}$$

N_1 và r_1 nguyên nhỏ nhất. Vậy lấy $r_1 = 3$; do vậy chu kỳ cơ bản $N_1 = 20$.

$$\omega_{02}N_2 = 2\pi r_2 \Rightarrow N_2 = \frac{2\pi r_2}{\omega_{02}} = \frac{2\pi r_2}{1,3\pi} = \frac{20r_2}{13}$$

N_2 và r_2 nguyên nhỏ nhất. Vậy lấy $r_2 = 13$; do vậy chu kỳ cơ bản $N_2 = 20$.
Ta thấy $N_1 = N_2$. Vậy chu kỳ cơ bản của tín hiệu h[n] là $N = 20$.

e) Tín hiệu $f[n] = -\cos(0,8\pi n) + 4\sin(0,8\pi n) + 5\sin(1,2\pi n + 0,65\pi)$ có 2 tần số góc là $\omega_{01} = 0,8\pi$ và $\omega_{02} = 1,2\pi$. Điều kiện để dãy rời rạc này tuần hoàn:

$$\omega_{01}N_1 = 2\pi r_1 \Rightarrow N_1 = \frac{2\pi r_1}{\omega_{01}} = \frac{2\pi r_1}{0,8\pi} = \frac{20r_1}{8} = \frac{5r_1}{2}$$

N_1 và r_1 nguyên nhỏ nhất. Vậy lấy $r_1 = 2$; do vậy chu kỳ cơ bản $N_1 = 5$.

$$\omega_{02}N_2 = 2\pi r_2 \Rightarrow N_2 = \frac{2\pi r_2}{\omega_{02}} = \frac{2\pi r_2}{1,2\pi} = \frac{20r_2}{12} = \frac{5r_2}{3}$$

N_2 và r_2 nguyên nhỏ nhất. Vậy lấy $r_2 = 3$; do vậy chu kỳ cơ bản $N_2 = 5$.
Ta thấy $N_1 = N_2$. Vậy chu kỳ cơ bản của tín hiệu h[n] là $N = 5$.

1.18. a) Dãy này là dãy tuần hoàn có chu kỳ cơ bản $N = 2$.
b) Dãy này là dãy tuần hoàn có chu kỳ cơ bản $N = 2M$.

1.19. Giải 1): a). Ta thấy dãy này có chu kỳ cơ bản $N = 8$. Do đó tìm được ngay tần số góc $\omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Để tìm φ, ta tính $x[0] = A\cos(\varphi) = 0$. Vậy $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Bây giờ tìm A, ta sử dụng: $x[1] = A\cos(\pi/4+\pi/2) = -\sqrt{2} \Rightarrow A = 2$.

b). Ta thấy dãy này có chu kỳ cơ bản $N = 4$. Do đó tìm được ngay tần số góc $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Để tìm φ và A, ta dùng:

$$x[0] = A\cos(\varphi) = \sqrt{2} \quad \text{và} \quad x[1] = A\cos(\pi/2+\varphi) = -A\sin(\varphi) = -\sqrt{2}$$

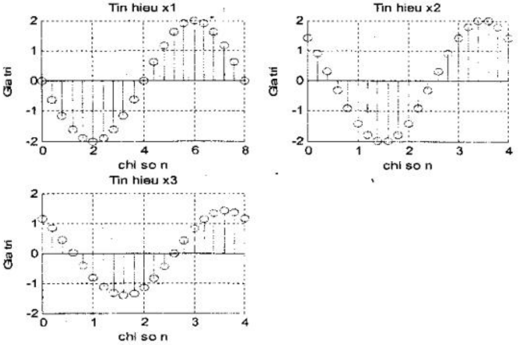
Từ đó tìm được $A = 2$ và $\varphi = \pi/4$.

c) Ta thấy dãy này có chu kỳ cơ bản N = 4. Do đó tìm được ngay tần số góc $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Để tìm φ và A, ta dùng:

$$x[0] = A\cos(\varphi) = 2 \text{ và } x[1] = A\cos(\pi/2 + \varphi) = -A\sin(\varphi) = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{6}\,;\ \varphi = \cos^{-1}(2/\sqrt{6}) = 35{,}2644^0.$$

2): Hình BG1.19 vẽ 3 tín hiệu cos vừa tìm được.



Hình BG1.19.

1.20. a). Chu kỳ cơ bản $N = \frac{2\pi r}{\omega_0} = \frac{2\pi r}{0{,}14\pi} = \frac{200r}{14} = \frac{100r}{7}$

r và N phải là những số nguyên nhỏ nhất. Vì vậy lấy r = 7, N = 100.

b). Chu kỳ cơ bản $N = \frac{2\pi r}{\omega_0} = \frac{2\pi r}{0{,}24\pi} = \frac{200r}{24} = \frac{25r}{3}$

r và N phải là những số nguyên nhỏ nhất. Vì vậy lấy r = 3, N = 25.

c). Chu kỳ cơ bản $N = \frac{2\pi r}{\omega_0} = \frac{2\pi r}{0{,}34\pi} = \frac{200r}{34} = \frac{100r}{17}$

r và N phải là những số nguyên nhỏ nhất. Vì vậy lấy r = 17, N = 100.

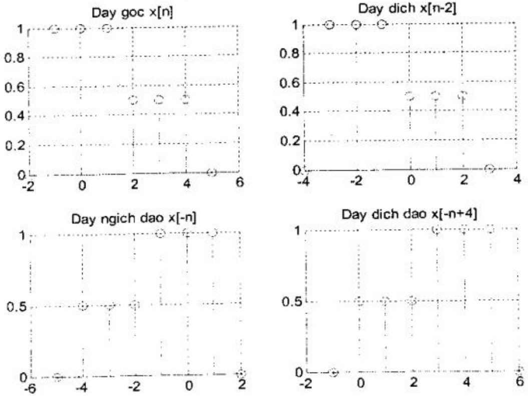
d). Chu kỳ cơ bản $N = \frac{2\pi r}{\omega_0} = \frac{2\pi r}{0,75} = \frac{200r}{75} = \frac{8r}{3}$

r và N phải là những số nguyên nhỏ nhất. Vì vậy lấy r = 3, N = 8.

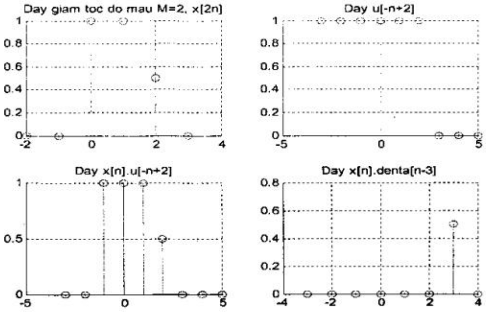
❐ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

1.21. s = { 3 5 1 -2 8 14 0}
v = { -15 -8 0 6 -20 0 2}
f = {5 3 -2 -9 9 9 -3}

1.22.. Hình BG1.22a và BG1.22b cho thấy giá trị và đồ thị của tín hiệu gốc và các tín hiệu thu được sau khi tác động các phép toán như trong bài ra.



Hình BG1.22a.

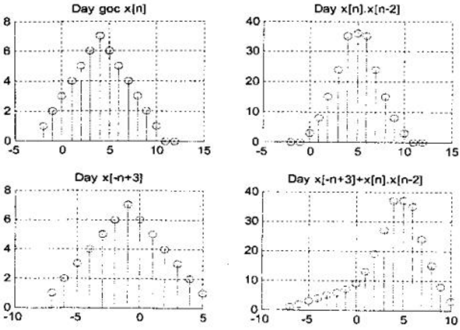


Hình BG1.22b.

1.23. a) Hình BG1.23 vẽ tín hiệu gốc a) và các tín hiệu $x_1[n]$, $x_2[n]$ cũng như các tín hiệu khác cho trong câu b) và c).

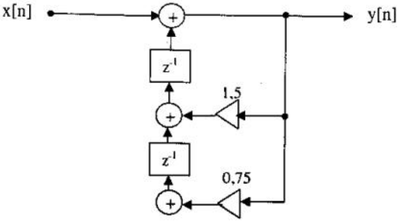
b) $x_1[n] = \{-3\ -6\ -9\ -12\ -15\ -18\ -21\ -18\ -15\ -10\ -5\ \ 0\ \ 5\ \ 10\ \ 12\ 14$
$12\ \ 10\ \ 8\ \ 6\ \ \ 4\ \ \ 2\}$; $-6 \le n \le 15$

c) $x_2[n] = \{\ 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 9\quad 13\quad 19\quad 27\quad 37\quad 37\quad 35$
$24\quad 15\quad 8\quad 3\}$, $-7 \le n \le 10$.

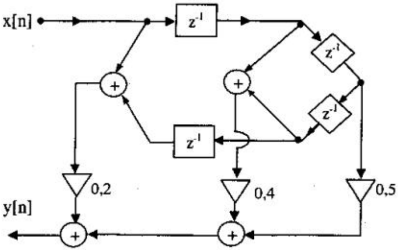


Hình BG1.23.

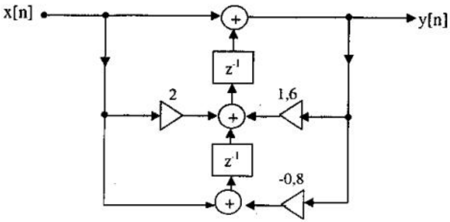
1.24. a)



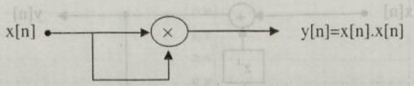
b)



c)



d)



1.25. Từ hình vẽ a) ta tìm được mối liên hệ giữa các tín hiệu x[n], y[n] và w[n]:

$$w[n] = x[n] + aw[n-1]$$
$$y[n] = (b+c)w[n-1]$$

Loại trừ biến số trung gian w[n], ta thu được phương trình liên hệ lối vào x[n] với lối ra y[n]:

$$y[n] = (b+c)x[n-1] + ay[n-1]$$

b) Từ các tín hiệu trên hình vẽ, ta thu được quan hệ giữa tín hiệu lối ra y[n] với lối vào x[n]:

$$y[n] = a(x[n] + x[n-4]) + b(x[n-1] + x[n-3]) + cx[n-2]$$

Hay:

$$y[n] = ax[n] + bx[n-1] + cx[n-2] + bx[n-3] + ax[n-4]$$

1.26. a) Để xem các dãy là chẵn hoặc lẻ, ta kiểm tra:

a) $x[-n] = g[-n].g[-n] = g[n].g[n] = x[n]$.
Vậy dãy này là dãy chẵn.

b) $y[-n] = g[-n].h[-n] = g[n].(-h[n]) = -y[n]$.
Vậy dãy này là dãy lẻ;

c) $z[-n] = h[-n].h[-n] = (-h[n]).(-h[n]) = h[n].h[n] = z[n]$.
Vậy dãy này là dãy chẵn.

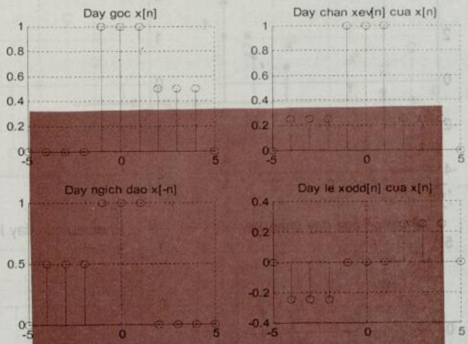
1.27. $x[-n] = \{0 \quad 0,5 \quad 0,5 \quad 0,5 \quad 1 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad 1 \quad 0\}$

Các khai triển lẻ và chẵn của dãy này tính được:

$X_{odd} =$
$\{0 \quad -0,25 \quad -0,25 \quad -0,25 \quad 0 \quad \underset{\uparrow}{0} \quad 0 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0\}$

$X_{ev} = \{0 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 1 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad 1 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0\}$

b). Dãy gốc và các dãy vừa tính, được vẽ trong hình BG1.27 sau đây:



Hình BG1.27.

1.28. Trước hết phải tính:

$$x^*[-n]=\{3 \quad j2 \quad -5+j6 \quad \underset{\uparrow}{4+j2} \quad -2-j3 \quad 1-j4 \quad 0\}$$

Dãy chẵn tính được nhờ công thức:

$$x_{ev}[n]=\frac{x[n]+x^*[-n]}{2}$$

Còn dãy lẻ tính được nhờ công thức:

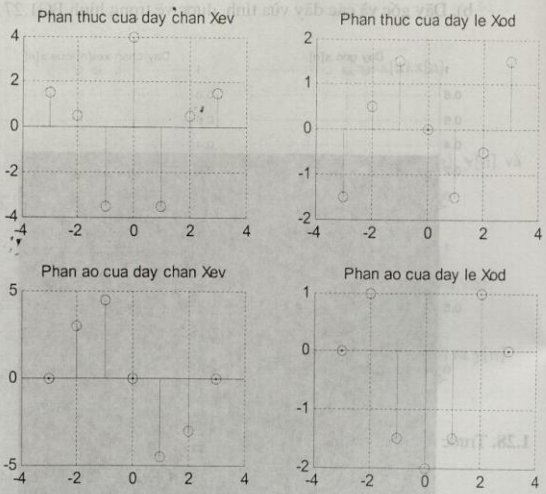
$$x_{od}[n]=\frac{x[n]-x^*[-n]}{2}$$

Từ đó tính được:

$$x_{ev}[n] = \{1,5 \quad 0,5+j3 \quad -3,5+j4,5 \quad \underset{\uparrow}{4} \quad -3,5-j4,5 \quad 0,5-j3 \quad 1,5\}$$

$$x_{od}[n] = \{-1,5 \quad 0,5+j \quad 1,5+j1,5 \quad \underset{\uparrow}{-j2} \quad -1,5-j1,5 \quad -0,5-j \quad 1,5\}$$

Các phần thực và phần ảo của các dãy chẵn và dãy lẻ cho trên hình vẽ BG1.28 sau:

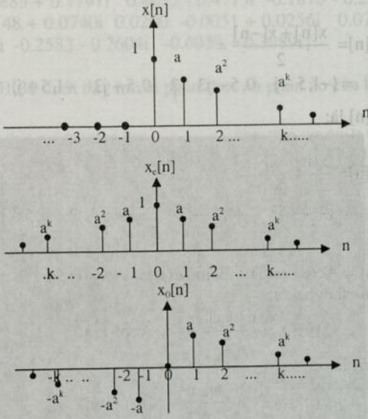


Hình BG1.28.

1.29. Theo bài ra, ta thấy đây là dãy số thực, nên công thức (1.46a) cho:

$$x_e[n] = \frac{a^n u[n] + a^{-n} u[-n]}{2} \quad \text{vμ} \quad x_0[n] = \frac{a^n u[n] - a^{-n} u[-n]}{2}$$

Hình BG1.29 cho thấy đồ thị của $x[n]$, $x_e[n]$ và $x_0[n]$.



Hình BG1.29.

1.30. a) Trước tiên tính $x[-n] = \{5 \quad 9 \quad 3 \quad 6 \quad 0 \quad \underset{\uparrow}{2} \quad -4 \quad 3\}$

Do vậy: phần chẵn của x[n] là:

$$x_{ev}[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} =$$

$$= \{2,5 \quad 4,5 \quad 1,5 \quad 4,5 \quad -2 \quad \underset{\uparrow}{2} \quad -2 \quad 4,5 \quad 1,5 \quad 4,5 \quad 2,5\}$$

phần lẻ của x[n] là:

$$x_{od}[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} =$$

$$= \{-2,5 \quad -4,5 \quad -1,5 \quad -1,5 \quad -2 \quad \underset{\uparrow}{0} \quad 2 \quad 1,5 \quad 1,5 \quad 4,5 \quad 2,5\}$$

b) Trước tiên tính:

$$x^*_3[-n] = \{-6 - j4 \quad 5 - j \quad \underset{\uparrow}{2 - j3} \quad -4 + j5 \quad 3 - j2\}$$

Do vậy: phần chẵn của x[n] là:

$$x_{ev}[n]=\frac{x[n]+x[-n]}{2}=$$
$$=\{-1,5-j\quad 0,5-j3\quad \underset{\uparrow}{2}\quad 0,5+j3\quad -1,5+j\}$$

phần lẻ của x[n] là:

$$x_{od}[n]=\frac{x[n]-x[-n]}{2}=$$
$$=\{4,4+j3\quad -4,5-j2\quad \underset{\uparrow}{j3}\quad 4,5-j2\quad 4,5+j3\}$$

c) $v[-n] = A\cos(-\omega_0 n) + B\sin(-\omega_0 n) = A\cos(\omega_0 n) - B\sin(\omega_0 n)$

Vậy phần chẵn của v[n] là:

$$v_{ev}[n]=\frac{v[n]+v[-n]}{2}=A\cos(\omega_0 n)$$

phần lẻ của v[n] là:

$$v_{od}[n]=\frac{v[n]-v[-n]}{2}=B\sin(\omega_0 n)$$

d) Dãy này là dãy chẵn, nên phần lẻ của nó bằng không còn phần chẵn là chính nó.

e) Vậy phần chẵn của h[n] là:

$$h_{ev}[n]=\frac{h[n]+h^*[-n]}{2}=\frac{A\alpha^n+A^*\alpha^{-n}}{2},\ -N+1\le n\le N-1$$

phần lẻ của v[n] là:

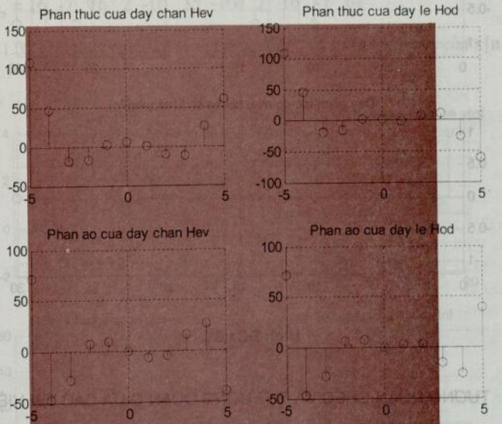
$$h_{od}[n]=\frac{h[n]-h^*[-n]}{2}=\frac{A\alpha^n-A^*\alpha^{-n}}{2},\ -N+1\le n\le N-1$$

Hai dãy chẵn và lẻ với A = 9; α = 0,1-j0,5 và N = 6 với tất cả 13 mẫu tính được:

$h_{ev}[n] = 10^2.\{$1.0900 + 0.7201i 0.4699 - 0.4739i -0.1913 - 0.2844i -0.1658 + 0.0691i 0.0198 + 0.0990i 0.0700 0.0141 - 0.0706i -0.0996 - 0.0415i -0.1086 + 0.1614i 0.2625 + 0.2648i 0.6064 - 0.4006i$\}$

$h_{od}[n] = 10^2\{1.0885 + 0.7191i \quad 0.4675 - 0.4715i \quad -0.1876 - 0.2789i \quad -0.1538 + 0.0641i \quad 0.0148 + 0.0740i \quad 0.0200 \quad -0.0051 + 0.0256i \quad 0.0780 + 0.0325i \quad 0.1019 - 0.1515i \quad -0.2583 - 0.2604i \quad -0.6039 + 0.3989i\}$.

Hình BG1.30 dưới đây mô tả phần thực và phần ảo của hai dãy chẵn và lẻ này.



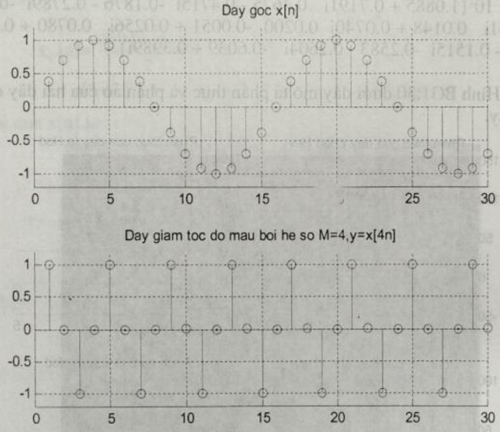
Hình BG1.30.

1.31. a) $y[n] = x[2n] = \{3 \quad \underset{\uparrow}{2} \quad 6 \quad 9\}$

b) $y[n] = x[2n] = \{3 + j2 \quad \underset{\uparrow}{2 + j3} \quad -6 + j4\}$

c) $y[n] = x[4n] = \sin(0.125\pi \times 4n) = \sin(n\pi/2), \quad -50 \le n \le 50$

Hình BG1.31vẽ đồ thị của x[n] và x[4n] với n trong khoảng đã cho.



Hình BG1.31.

❒ TƯƠNG QUAN CHÉO VÀ TỰ TƯƠNG QUAN GIỮA CÁC TÍN HIỆU

1.32. Tương quan chéo giữa hai dãy được tính theo công thức:

$$r_{xy}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-\ell]$$

Đây chính là nhân chập giữa dãy x[ℓ] và y[- ℓ]

Dãy tự tương quan được tính theo công thức:

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-\ell]$$

Đây chính là nhân chập giữa dãy x[ℓ]và x[- ℓ].

Dùng hai hàm MATLAB xcorr(x,y) và xcorr(x,x), ta tính được dãy tương quan chéo giữa x và y là:

r_{xy} = {0 0 0 0 3 7 -11 14 13 -15 28 6 -2 21 12 12 6 4}

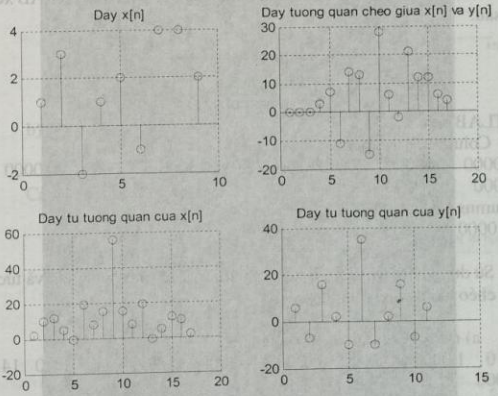
Dãy tự tương quan của x[n] là:

$$r_{xx} = \{2 \quad 10 \quad 12 \quad 5 \quad -1 \quad 19 \quad 8 \quad 15 \quad 56 \quad 15 \quad 8 \quad 19 \quad -1 \quad 5 \quad 12 \quad 10 \quad 2\}$$

Dãy tự tương quan của y[n] là:

$$r_{yy} = \{6 \quad -7 \quad 16 \quad 2 \quad -10 \quad 35 \quad -10 \quad 2 \quad 16 \quad -7 \quad 6\}$$

Hình BG1.32 cho thấy các dãy tương quan chéo và tự tương quan của x[n] và y[n].



Hình BG1.32.

Tương quan chéo giữa hai dãy z[n] và t[n] được tính theo công thức:

$$r_{zt}(\ell) = \sum_{n=-3}^{3} z[n]t[n-\ell], \ -6 \le \ell \le 6$$

Từ đó tính được:

$$r_{zt}(-6) = z[3]t[-3] = 0$$

$$r_{zt}(-5) = z[3]t[-2] + z[2]t[-3] = 14$$

$$r_{zt}(-4) = z[3]t[-1] + z[2]t[-2] + z[1]t[-3] = 37$$

$$r_{zt}(4) = z[-1]t[3] + z[2]t[-2] + z[-3]t[1] = -6$$

$$r_{zt}(5) = z[-2]t[3] + z[-3]t[2] = 31$$

$$r_{zt}(6) = z[-3]t[3] = -6$$

Vậy:

$$r_{zt}(\ell) = \{0 \quad 14 \quad 37 \quad 17 \quad 4 \quad 27 \quad 40 \quad 49 \quad 10 \quad -19 \quad -6 \quad 31 \quad -6\}$$

$$-6 \le \ell \le 6$$

Kết quả này cũng có thể thu được nếu dùng hàm MATLAB xcorr(z,t) như sau:

```
z=[3 -2 0 1 4 5 2];
t=[0 7 1 -3 4 9 -2];
rzt=xcorr(z,t)
```

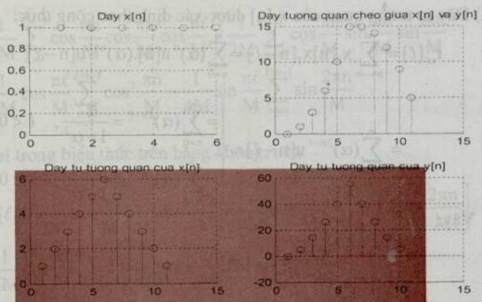
MATLAB cho:

```
rzt =  Columns 1 through 9
  0.0000  14.0000  37.0000  27.0000   4.0000  27.0000  40.0000
49.0000  10.0000
 Columns 10 through 13
 -19.0000  -6.0000  31.0000  -6.0000
```

1.33. Sử dụng hàm MATLAB xcorr để tính và vẽ tự tương quan và tương quan chéo hai dãy này, ta được:

```
a) rxy =  Columns 1 through 9
   0    1.0000   3.0000   6.0000  10.0000  15.0000  15.0000  14.0000
12.0000
 Columns 10 through 11
  9.0000   5.0000
rxx =  1  2  3  4  5  6  5  4  3  2  1
ryy =  Columns 1 through 9
 -0.0000   5.0000  14.0000  26.0000  40.0000  55.0000  40.0000
26.0000  14.0000
 Columns 10 through 11
  5.0000  -0.0000
```

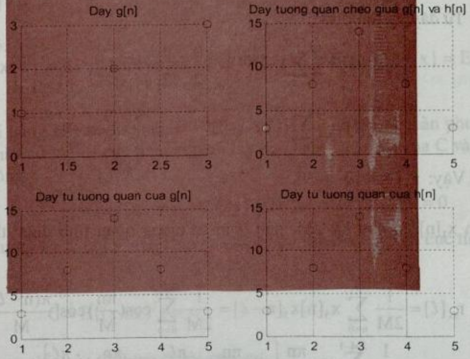
Các kết quả này cùng với tín hiệu x[n] được vẽ trên hình BG1.33a sau:



Hình BG1.33a.

b) rgg = {3 8 14 8 3};
rhh = {3 8 14 8 3};
rgh = {3 8 14 8 3};

Các dãy này được vẽ trên hình BG1.33b sau:



Hình BG1.33b.

1.34. a) Dãy tự tương quan của $x_1[n]$ được xác định theo công thức:

$$r_{xx}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_1[n-\ell] = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)^n u[n].(\alpha)^{n-\ell} u[n-\ell]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)^{2n-\ell} u[n-\ell] = \begin{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)^{2n-\ell} = \dfrac{\alpha^{-\ell}}{1-\alpha^2}, & \ell < 0 \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha)^{2n-\ell} = \dfrac{\alpha^{-\ell}}{1-\alpha^2}, & \ell \geq 0 \end{cases}$$

Vậy:

$$r_{xx}[\ell] = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{-\ell}}{1-\alpha^2}, & \ell \geq 0 \\ \dfrac{\alpha^{-\ell}}{1-\alpha^2}, & \ell < 0 \end{cases}$$

b). Dãy $x_2[n] = 3(-1)^n$ là dãy tuần hoàn có chu kỳ N = 2 mẫu, nên:

$$r_{xx}[\ell] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1} x_2[n]x_2[n-\ell] = \frac{9}{2}\sum_{n=0}^{1} (-1)^n.(-1)^{n-\ell}, \quad 0 \leq \ell \leq 1$$

Từ đây, ta tìm được:

$$r_{xx}[0] = \frac{9}{2}\sum_{n=0}^{1} (-1)^{2n} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9$$

$$r_{xx}[1] = \frac{9}{2}\sum_{n=0}^{1} (-1)^n.(-1)^{n-1} = -\frac{9}{2} - \frac{9}{2} = -9$$

Vậy: $r_{xx}[\ell] = \{9 \quad -9\}$

c) Hàm $x_1[n]$ có chu kỳ 2M, nên hàm tự tương quan tính được theo công thức:

$$r_{xx}[\ell] = \frac{1}{2M}\sum_{n=0}^{2M-1} x_3[n]x_3[n-\ell] = \frac{1}{2M}\sum_{n=0}^{2M-1} \cos(\frac{\pi n}{M})\cos[\frac{\pi(n-\ell)}{M}]$$

$$= \frac{1}{2M}\sum_{n=0}^{2M-1} \cos\frac{\pi n}{M}\left\{\cos\frac{\pi n}{M}\cos\frac{\pi\ell}{M} - \sin\frac{\pi n}{M}\sin\frac{\pi\ell}{M}\right\}$$

$$= \frac{1}{2M}\sum_{n=0}^{2M-1}\cos\frac{\pi n}{M}\cos\frac{\pi n}{M}\cos\frac{\pi\ell}{M} - \frac{1}{2M}\sum_{n=0}^{2M-1}\cos\frac{\pi n}{M}\sin\frac{\pi n}{M}\sin\frac{\pi\ell}{M}$$

$$= \frac{1}{2M}\cos\frac{\pi\ell}{M}\sum_{n=0}^{2M-1}\cos^2\frac{\pi n}{M} - \frac{1}{4M}\sin\frac{\pi\ell}{M}\sum_{n=0}^{2M-1}\sin\frac{2\pi n}{M}$$

Tổng thứ hai trong biểu thức trên bằng không, nên:

$$r_{xx}[\ell] = \frac{1}{2M}\cos\frac{\pi\ell}{M}.\sum_{n=0}^{2M-1}\cos^2\frac{\pi n}{M} = \frac{1}{4M}\cos\frac{\pi\ell}{M}.\sum_{n=0}^{2M-1}\left[1+2\sin\frac{2\pi n}{M}\right]$$

$$= \frac{1}{4M}\cos\frac{\pi\ell}{M}.\sum_{n=0}^{2M-1}1 = \frac{1}{4M}\cos\frac{\pi\ell}{M}.2M = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi\ell}{M}$$

Vậy: $r_{xx} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi\ell}{M}$

1.35. $E\{x+y\} =$
$\iint(x+y)P_{xy}(x,y)dxdy = \iint(x)P_{xy}(x,y)dxdy + \iint(y)P_{xy}(x,y)dxdy =$
$\int x(\int P_{xy}(x,y)dy)dx + \int y(\int P_{xy}(x,y)dx)dy = \int xP_x(x)dx + \int yP_y(y)dy =$
$= E\{x\} + E\{y\}$.

Từ đây ta có:
$E\{2x\} = E\{x+x\} = E\{x\} + E\{x\} = 2E\{x\}$ và $E\{cx\} = E\{(c-1)x + x\} = E\{(c-1)x + E\{x\}$; Do đó suy ra: $E\{cx\} = cE\{x\}$

1.36. Ta gọi hằng số tìm được là: $C = E\{(x-k)^2\}$ Để c có sai số toàn phương trung bình này có giá trị cực tiểu, ta phải lấy đạo hàm bậc nhất của C và cho nó bằng không:

$$\frac{dC}{dk} = E\{2(x-k)\} = 2E\{x\} - 2E\{k\} = 2E\{x\} - 2k = 0$$

Từ đó tìm được: $k = E\{x\} = m_x$. Thay giá trị k vừa tìm được giá trị cực tiểu của C:

$$C = E\{(x-m_x)^2\} = \sigma_x^2$$

Vậy giá trị cực tiểu của C chính là phương sai.

1.37. a). Giá trị trung bình của biến số độc lập x được tính theo công thức:

$$m_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

Thay $P_X(x) = \dfrac{\alpha / \pi}{x^2 + \alpha^2}$ vào tích phân trên, ta tính được:

$$m_x = E(x) = \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xd(x)}{x^2+\alpha^2} = 0$$

Phương sai:

$$\sigma_x^2 = E\{(x-m_x)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 P_x(x)d(x)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2d(x)}{x^2+\alpha^2}$$

b). Giá trị trung bình của biến số độc lập x được tính theo công thức:

$$m_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

Thay $P_X(x) = \dfrac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x|}$ vào tích phân trên, ta tính được:

$$m_X = E(x) = \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\alpha|x|}d(x) = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\alpha x}d(x) = 0$$

Phương sai:

$$\sigma_x^2 = E\{(x-m_x)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 P_x(x)d(x)$$

$$= \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\alpha|x|}d(x) = \alpha\int_{0}^{\infty} x^2e^{-\alpha x}d(x) =$$

Lấy tích phân phân lớp này, ta thu được:

$$\sigma_x^2 = \alpha\int_0^{\infty} x^2e^{-\alpha x}d(x) = \alpha\left\{\frac{x^2e^{-\alpha x}}{-a}\bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{2x}{a}e^{-\alpha x}d(x)\right\}$$

$$= \sigma_x^2 = \alpha\left\{0 + \{\frac{2x}{\alpha}\frac{e^{-\alpha x}}{-a}\bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{2}{\alpha^2}e^{-\alpha x}d(x)\}\right\} = \frac{2}{\alpha^2}$$

c). Giá trị trung bình:

$$m_X = E(x) = \frac{1}{\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2\alpha^2} u(x)d(x) = \frac{1}{\alpha^2}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2\alpha^2} d(x) = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Phương sai:

$$\sigma_x^2 = E\left\{(x-m_x)^2\right\} = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\infty} x^3 P_x(x)d(x)$$

$$= \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha|x|}d(x) = \alpha\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2/2\alpha^2}dx - \frac{\alpha^2\pi}{2} = (2-\frac{\pi}{2})\alpha^2$$

1.38. Với tín hiệu ngẫu nhiên thì giá trị trung bình m_X liên hệ với hàm tương quan bằng công thức (1.73):

$$\lim_{\ell\to\infty}\Phi_{XX}[\ell] = \left|m_{X[n]}\right|^2$$

Do đó:

$$\left|m_{X[n]}\right|^2 = \lim_{\ell\to\infty}\frac{9+15\ell+18\ell^2]}{2+5\ell+6\ell^2} = 3 \Rightarrow \left|m_{X[n]}\right| = \sqrt{3}$$

Giá trị toàn phương trung bình được xác định bởi:

$$E(|X[n]|^2) = \Phi_{XX}[0] = 4,5$$

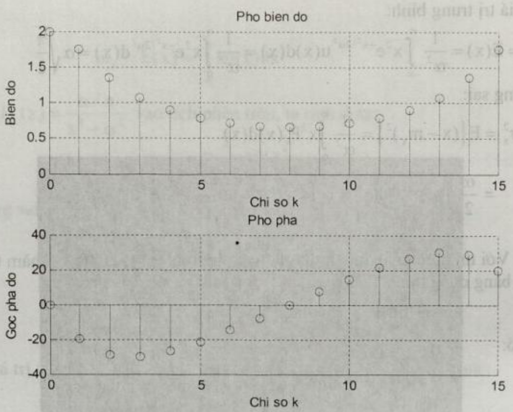
Phương sai liên hệ với giá trị trung bình bằng hệ thức (1.68):

$$\sigma_X^2 = \Phi_{XX}[0] - |m_X|^2 = 4,5 - 3 = 1,5$$

❐ PHỔ TẦN SỐ VÀ NĂNG LƯỢNG CỦA TÍN HIỆU THỜI GIAN RỜI RẠC

1.40. $X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n u[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-be^{-j\omega}}$

Hình BG1.40a sau đây vẽ phổ biên độ và phổ pha với b = 0,5 và tần số rời rạc $\omega = \frac{2\pi}{16}k, \quad k = 0,1,2,...,15$.



Hình BG1.40a.

b) $X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(0,2\pi n)e^{-j\omega n} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{j0,2\pi n} - e^{-j0,2\pi n}}{2j} e^{-j\omega n} =$$

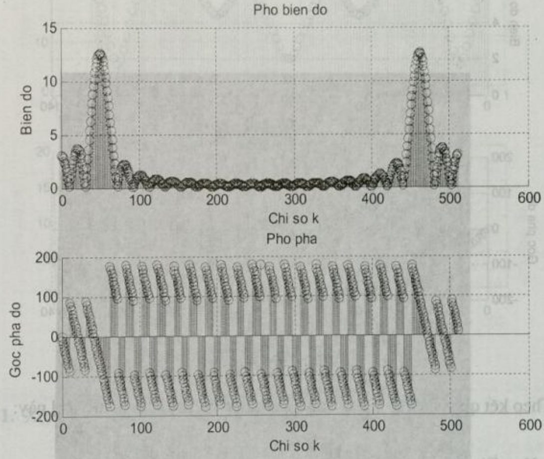
$$= \frac{1}{2j}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} e^{j0,2\pi n}e^{-j\omega n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j0,2\pi n}e^{-j\omega n}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} e^{j(0,2\pi-\omega)n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(j0,2\pi+\omega)n}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{1-e^{j(0,2\pi-\omega)n}} - \frac{1}{1-e^{-j(0,2\pi+\omega)n}}\right\} =$$

$$= \frac{\sin(0,2\pi).e^{-j\omega}}{1-2\cos(0,2\pi).e^{-j\omega} + .e^{-j2\omega}}$$

Hình BG1.40b sau đây vẽ phổ biên độ và phổ pha dãy này với tần số rời rạc $\omega = \frac{2\pi}{16}k, \quad k = 0,1,2,...,512$.

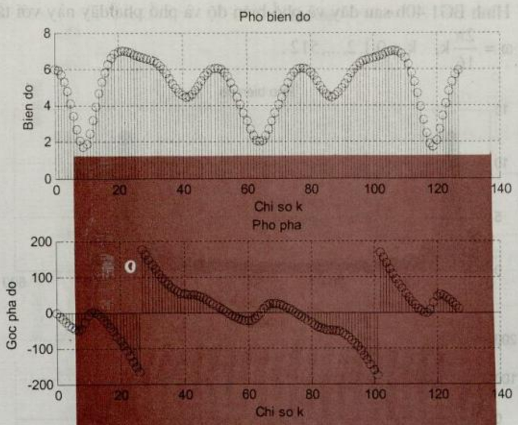


Hình BG1.40b.

c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{8} x_3[n]e^{-j\omega n} =$

$= 2 - e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega} - 2e^{-j4\omega} - e^{-j5\omega} + 2e^{-j7\omega} + e^{-j8\omega}$

Hình BG1.40c sau đây vẽ phổ biên độ và phổ pha của dãy này với tần số rời rạc $\omega = \frac{2\pi}{16}k, \quad k = 0,1,2,...,128$.

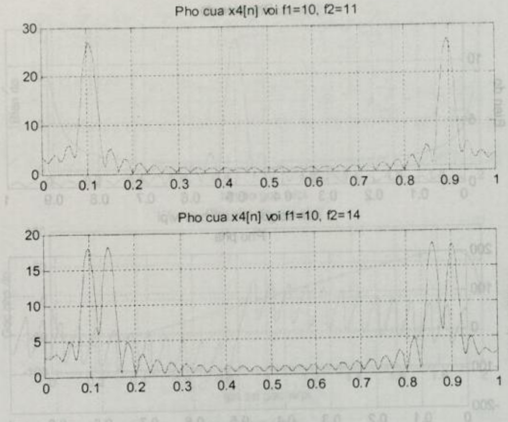


Hình BG1.40c.

d). Theo kết quả của câu b), ta tính ngay được phổ của tín hiệu $x_4[n]$ này:

$$X_4(e^{j\omega}) = \frac{\sin(0,2\pi).e^{-j\omega}}{1-2\cos(0,2\pi).e^{-j\omega}+.e^{-j2\omega}} + \frac{\sin(0,22\pi).e^{-j\omega}}{1-2\cos(0,22\pi).e^{-j\omega}+.e^{-j2\omega}}$$

Hình BG1.40d vẽ 2 phổ biên độ của tín hiệu $x_4[n]$ ứng hai cặp tần số f_1 và f_2 khác nhau. Từ hình vẽ ta thấy phổ tần số với cặp tần số f_1= 10Hz và f_2 = 11Hz chỉ có hai cực đại; còn phổ của tín hiệu với f_1= 10Hz và f_2 = 14Hz lại có 4 cực đại. Sở dĩ có hiện tượng này là do độ phân giải của phổ. Ở đồ thị dưới, hai tần số cách nhau khoảng tần số Δf = 4Hz, nên hai đỉnh phổ đã được tách ra thành 4, trong khi đồ thị trên hai phổ chồng vào nhau.



Hình BG1.40d.

1.41. $X(e^{j\omega}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A\alpha^n \cos(\omega_0 n + \phi)u[n]e^{-j\omega n}$

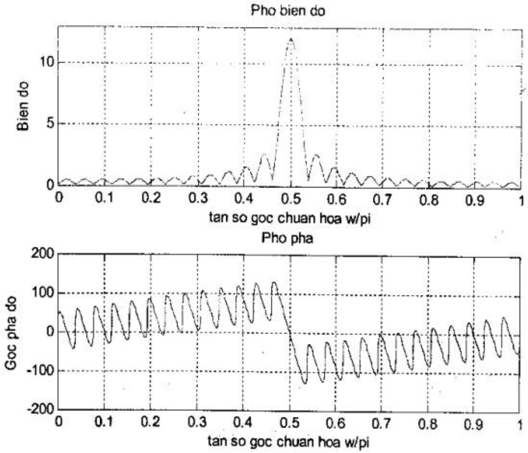
$$= \sum_{n=0}^{\infty} A\alpha^n \frac{e^{j(\omega_0 n+\phi)} + e^{-j(\omega_0 n+\phi)}}{2} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} Ae^{j\phi}\alpha^n e^{j(\omega_0-\omega)n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} Ae^{-j\phi}\alpha^n e^{-j(\omega_0-\omega)n}$$

$$= \frac{Ae^{j\phi}}{2}\frac{1}{1-\alpha e^{j(\omega_0-\omega)}} + \frac{Ae^{-j\phi}}{2}\frac{1}{1-\alpha e^{-j(\omega_0-\omega)}}$$

$$= \frac{A\cos\phi - A\alpha\cos(\omega_0 - \omega - \phi)}{1-2\cos(\omega_0-\omega)+\alpha^2}$$

Hình BG1.41 dưới đây cho thấy phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu này với $A = 1$; $\alpha = 0.99$; $\varphi = 45^0$ và $\omega_0 = \pi$ với n trong khoảng: $0 \leq n \leq 25$.

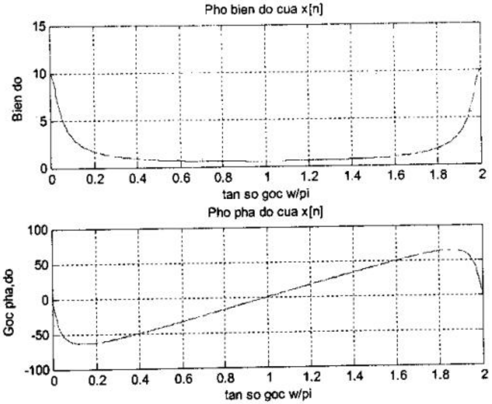


Hình BG1.41.

1.42. a) $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n]e^{-j\omega n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

Phổ biên độ và pha của tín hiệu này vẽ trên hình BG1.42a sau với $\alpha = 0{,}9$ và tần số góc vẽ trong khoảng 0: 2π.



Hình BG1.42a.

b) Nếu $X(e^{j\omega})$ là phổ tần số của tín hiệu x[n], thì phổ tần số của tín hiệu x[-n] sẽ là $X(e^{-j\omega})$. Do vậy:

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{-n}u[-n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \alpha^{-n}e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{m}e^{j\omega m} = X(e^{-j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{j\omega}}$$

c). $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{n}u[n+3]e^{-j\omega n} = \sum_{n=3}^{\infty} \alpha^{n}e^{-j\omega n}$$

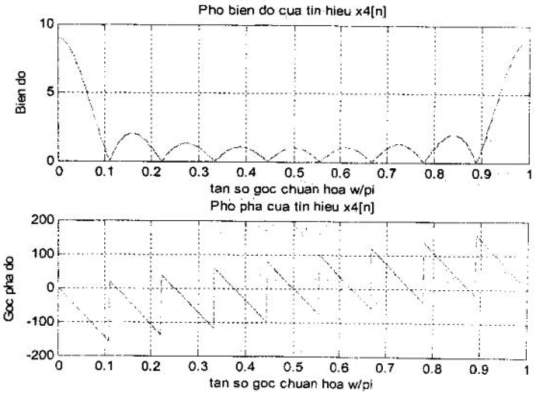
$$= -1-\alpha e^{-j\omega} - \alpha^2 e^{-j2\omega} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n}e^{-j\omega n} =$$

$$= -1-\alpha e^{-j\omega} - \alpha^2 e^{-j2\omega} + \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

d). $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N}^{N} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N}^{-1} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{N} e^{-j\omega n}$

$$= \sum_{m=1}^{N} e^{j\omega m} + \sum_{n=0}^{N} e^{-j\omega n} = \frac{e^{j\omega} - e^{j\omega N}}{1 - e^{j\omega}} + \frac{1 - e^{-j\omega(N+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin[\omega(N + \frac{1}{2})]}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

Hình BG1.42b sau cho thấy phổ biên độ và pha của tín hiệu này với N =4.



Hình BG1.42b.

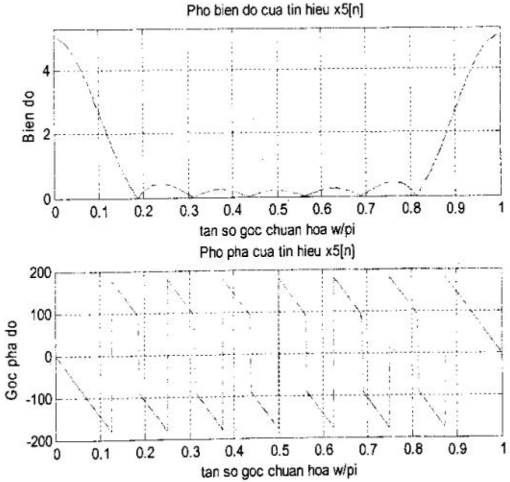
e). $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N}^{N} \cos(\pi n / 2N)e^{-j\omega n} =$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{j(\pi n/2N)}}{2} e^{-j\omega n} + \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{-j(\pi n/2N)}}{2} e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2} e^{j(\frac{\pi}{2N} - \omega)n} + \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2} e^{-j(\frac{\pi}{2N} - \omega)n} =$$

$$= \frac{(N+\frac{1}{2})\sin(\omega-\frac{\pi}{2N})}{2\sin[(\omega-\frac{\pi}{2N})/2]} + \frac{(N+\frac{1}{2})\sin(\omega+\frac{\pi}{2N})}{2\sin[(\omega+\frac{\pi}{2N})/2]}$$

Hình BG1.42c sau cho thấy phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu $x_n[n]$ này với N = 4.



Hình BG1.42c.

1.43. $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{4} x[n]e^{-j\omega n} =$

$$= e^{j4\omega} + 5e^{j3\omega} - 2e^{j2\omega} + e^{j\omega} + 3 + 4e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega} + 5e^{-j4\omega}$$

Vậy:

$X(e^{j0}) = 1 + 5 - 2 + 3 + 4 + 2 + 5 = 18;$

$X(e^{j\pi}) = e^{j4\pi} + 5e^{j3\pi} - 2e^{j2\pi} + e^{j\pi} + 3 + 4e^{-j\pi} + 2e^{-j2\pi} + 5e^{-j4\pi}$

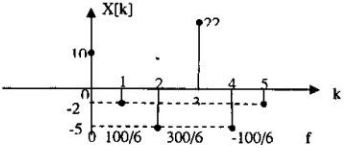
$= 1 - 5 - 2 - 1 + 3 - 4 + 2 + 5 = -1$

$|X(e^{j\pi})| = 1$

1.44.

$$X[k]=\sum_{n=0}^{5}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{6}nk}=\{10\quad -2\quad -5\quad 22\quad -5\quad -2\}$$

Phổ tần số này được biểu thị trên hình BG1.44.



Hình BG1.44.

1.45. a). $x_1[n]=x[n]=\{\underset{\uparrow}{1}\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\}$;

$x_2[n]=x[2n]=\{\underset{\uparrow}{1}\quad 1\quad 1\quad 1\}$;

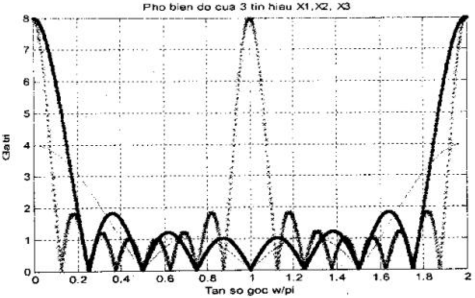
$x_3[n]=x[n/2]=\{\underset{\uparrow}{1}\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\}$

$$X_1(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{7}e^{-j\omega k}=\frac{1-e^{-j8\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{\sin 4\omega}{\sin(\omega/2)}e^{-j7\omega/2}$$

$$X_2(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{3}e^{-j\omega k}=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{\sin 2\omega}{\sin(\omega/2)}e^{-j3\omega/2}$$

$$X_3(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{7}e^{-j2\omega k}=\frac{1-e^{-j16\omega}}{1-e^{-j2\omega}}=\frac{\sin 8\omega}{\sin\omega}e^{-j7\omega}$$

Hình BG1.45 vẽ phổ biên độ của 3 tín hiệu này.



Hình BG1.45.

1.46. a). Ta thấy: $1 + e^{j\omega} + ... + e^{j\omega N} = \dfrac{1 - e^{j\omega(N+1)}}{1 - e^{-j\omega}}$

$$\Leftrightarrow x[n] = \Big\{\underbrace{\underset{\uparrow}{1} \quad 1 \quad \dots \quad 1}_{\text{N mau}}\Big\}$$

b) $X_2(e^{j\omega}) = 1 + 2\sum_{n=0}^{N} \cos(\omega n) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-j\omega n}$

$$\Leftrightarrow x[n] = \begin{cases} 1 & -N \le n \le N \\ 0 & \text{ngoài khoảng trên} \end{cases}$$

c) $X_3(e^{j\omega}) = 1 + \cos\omega + 3\cos 2\omega = 1 + \dfrac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} + 3\dfrac{e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}}{2}$

$$= 3\frac{e^{-j2\omega}}{2} + \frac{e^{-j\omega}}{2} + 1 + \frac{e^{j\omega}}{2} + 3\frac{e^{j2\omega}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x[n] = \left\{\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \underset{\uparrow}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}\right\}$$

1.47. Ta thấy: $w[n] = \frac{1}{2} r[n] - \frac{1}{2}\cos(2\pi n/M)$

Vì vậy:

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}R(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}f\{\cos(2\pi n/M)\}$$

$$= \frac{1}{2}R(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}\frac{1-\cos(2\pi/M)e^{-j\omega}}{1-2\cos(2\pi/M)e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}$$

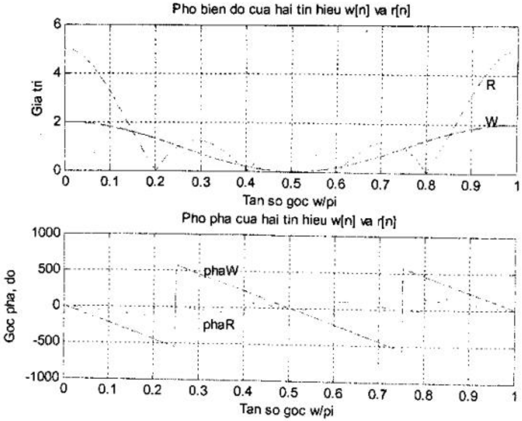
$$R(e^{j\omega}) = \frac{\sin\frac{M+1}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}e^{-j\frac{M}{2}\omega}$$

Vậy:

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin\frac{M+1}{2}\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}}e^{-j\frac{M}{2}\omega} - \frac{1}{2}\frac{1-\cos(2\pi/M)e^{-j\omega}}{1-2\cos(2\pi/M)e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}$$

Hình BG1.47 vẽ phổ biên độ và phổ pha của hai dãy đã cho với M = 4, thì dãy:

$r[n] = \{1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1\}$
$w[n] = \{0 \;\; 0{,}5 \;\; 1 \;\; 0{,}5 \;\; 0\}$



Hình BG1.47.

1.48. Năng lượng của tín hiệu được tính bởi công thức:

$$E_x = \sum_0^{N-1}(x[n])^2 = \sum_0^{N-1}\cos^2\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) = \sum_0^{N-1}\left[\frac{1+\cos\left(\frac{4\pi kn}{N}\right)}{2}\right]$$

$$= \sum_0^{N-1}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_0^{N-1}\cos\left(\frac{4\pi kn}{N}\right) = \frac{N}{2} + \frac{1}{2}\sum_0^{N-1}\cos\left(\frac{4\pi kn}{N}\right)$$

Để tính tổng: $C = \sum_0^{N-1}\cos\left(\frac{4\pi kn}{N}\right)$;

trước hết ta tính tổng: $C + jS = \sum_0^{N-1}\left(e^{\frac{4\pi kn}{N}}\right)$

Trong đó: $S = \sum_0^{N-1}\sin\left(\frac{4\pi kn}{N}\right)$.

Tổng: $C + jS = \sum_0^{N-1}\left(e^{\frac{4\pi kn}{N}}\right)$

là cấp số nhân hữu hạn công bội là $e^{\frac{4\pi k}{N}}$, nên:

$$C + jS = \sum_0^{N-1}\left(e^{\frac{4\pi kn}{N}}\right) = \frac{1-e^{j4k\pi}}{1-e^{j4k\pi/N}} = 0 \Rightarrow C = 0;\ S = 0.$$

Vậy năng lượng của tín hiệu đã cho là $E_X = N/2$.

1.49. a). Năng lượng: $E_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(x[n])^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(u[n])^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(1)^2 = \infty$

Công suất trung bình:

$$P_a = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}(u[n])^2 = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=0}^{K}(1)^2 = \lim_{K\to\infty}\frac{K}{2K+1} = \frac{1}{2}$$

b). Năng lượng: $E_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(x[n])^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(nu[n])^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n)^2 = \infty$

Công suất trung bình:

$$P_a = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}(nu[n])^2 = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=0}^{K}(n)^2 = \infty$$

c). Năng lượng: $E_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n])^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_0 e^{j\omega_0 n})^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (A_0^2 e^{j2\omega_0 n}) = \infty$

Công suất trung bình:

$$P_a = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^{K} \left|A_0 e^{j\omega_0 n}\right|^2 = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^{K} \left|A_0^2\right| = \lim_{K\to\infty} \frac{2KA_0^2}{2K+1} = A_0^2$$

d). Năng lượng: $E_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n])^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A\sin(\frac{2\pi n}{M} + \phi))^2$

$$x[n] = A\sin(\frac{2\pi n}{M} + \phi) = Ae^{j(\phi-\pi/2)}e^{j2\pi n/M} + Ae^{j(\phi+\pi/2)}e^{-j2\pi n/M}$$
$$= A_0 e^{j2\pi n/M} + A_1 e^{-j2\pi n/M}$$
$$= x_1[n] + x_2[n]$$

Trong đó $A_0 = Ae^{j(\varphi-\pi/2)}$, $A_1 = Ae^{j(\varphi-\pi/2)}$.

Theo câu c) năng lượng của $x_1[n]$ cũng như $x_2[n]$ đều bằng ∞, nên năng lượng tổng cộng cũng bằng ∞.

Vậy, công suất trung bình: $P_a = A_0^2 + A_1^2 + 4A_0^2 A_1^2 = \frac{3}{4}A^2$

1.50. Năng lượng được tính bằng:

$$\varepsilon_X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Vậy:

a) $$\varepsilon_{x1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

Để tính tổng này ta sử dụng công thức khai triển Fourier đối với tín hiệu tuần hoàn $f(t) = t^2$ trong khoảng $-\pi \le t \le \pi$ với chu kỳ $T = 2\pi$:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos t}{1^2} - \frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\cos nt}{n^2} + \ldots\right]$$

Vì vậy, nếu thay $t = \pi$, ta sẽ thu được:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Do đó: $$\varepsilon_{x1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

Công suất trung bình của một tín hiệu không tuần hoàn x[n] được xác định bởi:

$$P_x = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}|x[n]|^2$$

Với dãy này thì công suất trung bình bằng v''cùng.

b) $$\varepsilon_{x2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = \infty$$

c) $$\varepsilon_{x3} = \infty$$

Công suất trung bình:

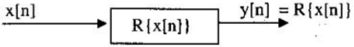
$$P_{x3} = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}(9\sum_{n=1}^{K}|-1|^2) = \lim_{K\to\infty}\frac{9(K+1)}{2K+1} = 4,5$$

CHƯƠNG **2.**

CÁC HỆ THỐNG RỜI RẠC TUYẾN TÍNH VÀ BẤT BIẾN VỚI THỜI GIAN - (LTI: LINEAR TIME INVARIABLE)

2.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

❒ HỆ THỐNG LTI VÀ CÁC TÍNH CHẤT



y[n]: Đáp ứng của hệ thống R đối với tín hiệu lối vào x[n].

* Tính chất tuyến tính:

$$\mathbf{R}\{x_1[n] + x_2[n]\} = \mathbf{R}\{x_1[n]\} + \mathbf{R}\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n]$$

Đáp ứng của một tổng thì bằng tổng các đáp ứng.

* Tính chất bất biến với thời gian:

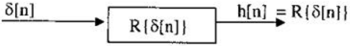
$$\mathbf{R}\{x[n - m]\} = Z^{-m}\,\mathbf{R}\{x[n]\}$$

* Tính chất ổn định BIBO

Nếu lối vào giới nội thì lối ra giới nội:

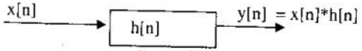
$|x[n]| \le B_x < +\infty$ với mọi n, thì $|y[n]| \le B_y < +\infty$ với mọi n

❒ ĐÁP ỨNG XUNG ĐƠN VỊ



h[n]: Đáp ứng xung đơn vị của hệ thống R.

❐ LỐI RA CỦA HỆ THỐNG LTI CÓ ĐÁP ỨNG XUNG H[N]



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n]*h[n] = h[n]*x[n]$$

* Hệ thống với h[n] có chiều dài hữu hạn , $-N_1 \le n \le N_2$ được gọi là *hệ thống FIR.*

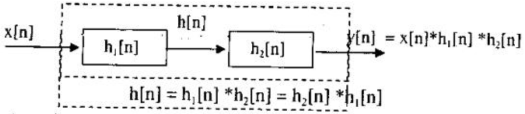
* Hệ thống với h[n] có chiều dài v''hạn , $-\infty < n < +\infty$ được gọi là *hệ thống IIR.*

* Hệ thống là *nhân quả,* nếu $h[n] \neq 0$ khi $0 \le n < +\infty$;
hay: $h[n] = 0$ khi $n < 0$.

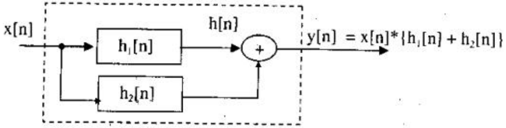
* *Hệ thống nghịch đảo:* $h_1[n]*h_2[n] = \delta[n]$

❐ GHÉP NỐI CÁC HỆ THỐNG LTI

* *Ghép nối tiếp*



Giép song song



$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] = h_2[n] + h_1[n]$$

❐ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

* *Phương trình sai phân của hệ thống IIR*

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

* Phương trình sai phân của hệ thống FIR:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

* Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân:

$$y[n] = y_C[n] + y_P[n]$$

Nếu phương trình đặc trưng có các nghiệm phân biệt, thì:

$$y_C[n] = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + ... + c_N\lambda_N^n$$

c_i, $i = 1, 2,..., N$ là các hằng số .

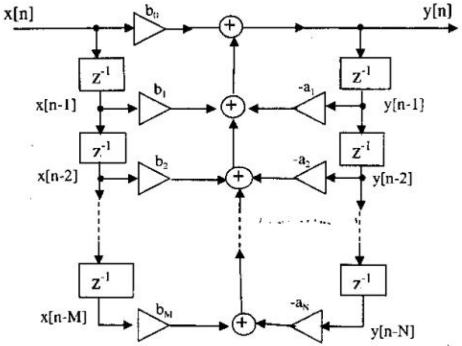
Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm bội; chẳng hạn λ_1 là nghiệm bội L; còn lại là các nghiệm phân biệt thì nghiệm thuần nhất sẽ có dạng:

$$y_C[n] = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n + c_3 n^2\lambda_1^n + ... + c_L n^{L-1}\lambda_1^n + c_{L+1}\lambda_2^n + ... + c_N\lambda_{N-L}^n$$

Nghiệm riêng $y_P[n]$ có cùng dạng như dạng của tín hiệu lối vào x[n].

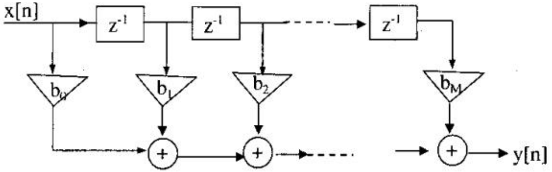
❐ SƠ ĐỒ DÒNG TÍN HIỆU CỦA CÁC HỆ THỐNG LTI

**** Hệ thống IIR***



Sơ đồ dòng tín hiệu của hệ thống IIR bậc N.

** Hệ thống FIR*



Sơ đồ dòng tín hiệu của hệ thống FIR bậc M.

☐ ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA HỆ THỐNG LTI

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\Phi(\omega)}$$

$|H(e^{j\omega})|$: Đáp ứng biên độ

$\Phi(\omega)$: Đáp ứng pha

$h[k]$: Đáp ứng xung đơn vị.

☐ PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI CỦA HỆ THỐNG LTI

**** Phương trình trạng thái của hệ thống bậc 2***

$$\underline{s}[n+1] = \mathbf{A}\underline{s}[n] + \underline{b}x[n]$$
$$y[n] = \underline{c}^t \underline{s}[n] + dx[n]$$

Trong đó:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^t = [c_1\ c_2] \text{ và } \qquad \underline{s}[n] = \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \end{bmatrix}$$

là các ma trận trạng thái của hệ thống.

**** Các phép biến đổi trạng thái***

$$\hat{\underline{s}}[n+1] = \hat{\mathbf{A}}\hat{\underline{s}}[n] + \hat{\underline{b}}x[n]$$
$$y[n] = \hat{\underline{c}}^t \hat{\underline{s}}[n] + \hat{d}x[n]$$

Trong đó: $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$ $\qquad \hat{\underline{b}} = \mathbf{T}\underline{b}$

$\hat{\underline{c}}^t = \underline{c}^t\mathbf{T}^{-1}$ $\qquad \hat{\underline{d}} = d$

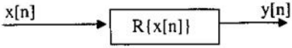
** Biểu diễn đáp ứng xung theo ma trận trạng thái*

$$h[n] = d\delta[n] + \underline{c}^{t}A^{n-1}\underline{b}u[n-1]$$

2.2. ĐỀ BÀI BÀI TẬP

❐ TÍNH CHẤT CỦA HỆ THỐNG LTI

2.1. Quan hệ vào- ra của một hệ thống trong hình B2.1



Hình B2.1.

được biểu thị bằng các hệ thức sau đây:

1) $y[n] = R\{x[n]\} = g[n]x[n]$ với $g[n]$ đã cho

2) $y[n] = R\{x[n]\} = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$

3) $y[n] = R\{x[n]\} = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$

4) $y[n] = R\{x[n]\} = x[n - n_0]$

5) $y[n] = R\{x[n]\} = e^{x[n]}$

6) $y[n] = R\{x[n]\} = ax[n] + b$

7) $y[n] = R\{x[n]\} = x[-n]$

8) $y[n] = R\{x[n]\} = x[n] + 3u[n + 1]$

9) $y[n] = R\{x[n]\} = n^2|x[n]|$

Trong đó, $x[n]$ là tín hiệu lối vào; $y[n]$ là tín hiệu lối ra; R là toán tử đặc trưng cho hệ thống. Với mỗi một hệ thống, hãy xác định xem hệ thống có: tuyến tính, bất biến với thời gian, nhân quả, không có nhớ và ổn định ?

2.2. Đối với mỗi một đáp ứng xung sau đây của hệ thống LTI, hãy chỉ ra rằng hệ thống có là nhân quả hay không:

(a) $h[n] = (1/2)^n u[n]$

(b) $h[n] = (1/2)^n u[n-1]$

(c) $h[n] = (1/2)^{|n|}$
(d) $h[n] = u[n+2] - u[n-2]$
(e) $h[n] = (1/3)^n u[n] + 3^n u[-n-1]$

2.3. Đạo hàm bậc hai y[n] của dãy x[n] tại thời điểm n được biểu thị bằng phương trình sai phân sau:

$$y[n] = x[n+1] - 2x[n] + x[n-1]$$

Nếu y[n] và x[n] là tín hiệu lối vào và tín hiệu lối ra của một hệ thống thời gian rời rạc thì:

a) Hệ thống đó có tuyến tính không?
b) Có bất biến với thời gian không?
c) Có nhân quả không?

2.4. Xét một hệ thống với lối vào x[n] và lối ra y[n] thỏa mãn hệ thức:

$$y[n] = ny[n-1] + x[n]$$

Hệ thống là nhân quả và thỏa mãn các điều kiện ban đầu bằng không, tức là nếu:

$x[n] = 0$ đối với $n < n_0$, thì khi đó $y[n] = 0$ với $n < n_0$.

a). Nếu $x[n] = \delta[n]$, xác định y[n] với mọi n.

b). Hệ thống có tuyến tính không? Hãy kiểm tra câu trả lời của bạn.

c). Hệ thống có bất biến với thời gian không? Hãy kiểm tra câu trả lời của bạn!

QUAN HỆ VÀO-RA CỦA HỆ THỐNG LTI VÀ PHÉP NHÂN CHẬP

2.5. Xác định lối ra của một hệ thống tuyến tính bất biến với thời gian nếu đáp ứng xung h[n] và lối vào x[n] là như sau:

(a) $x[n] = a^n u[n]$, với $a < 1$ và $h[n] = \delta[n] - b\delta[n-1]$
(b) $x[n] = u[n]$ và $h[n] = a^n u[-n-1]$, với $a > 1$
(c) $x[n] = u[n-4]$ và $h[n] = 2^n u[-n-1]$
(d) $x[n] = u[n]$ và $h[n] = (0,5)2^n u[-n]$
(e) $x[n] = u[n] - u[n-10]$ và $h[n] = 2^n u[-n-1]$

2.6. Các dãy thời gian rời rạc sau đây là lối vào và đáp ứng xung đơn vị của các hệ thống LTI thời gian rời rạc:

$$x_1[n] = 2\delta[n-1] - 0{,}5\delta[n-3]$$
$$x_2[n] = -3\delta[n-1] + \delta[n+2]$$

$h_1[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] - 3\delta[n-3]$
$h_2[n] = -\delta[n-2] -0,5\ \delta[n-1] + 3\delta[n-3]$

Hãy tìm tín hiệu lối ra cho mỗi trường hợp sau:

a). $y_1[n]$ với vào $x_1[n]$ và đáp ứng xung $h_1[n]$
b). $y_2[n]$ với vào $x_2[n]$ và đáp ứng xung $h_2[n]$
c). $y_3[n]$ với vào $x_1[n]$ và đáp ứng xung $h_2[n]$
d). $y_4[n]$ với vào $x_2[n]$ và đáp ứng xung $h_1[n]$

2.7. Một hệ thống LTI có đáp ứng xung đơn vị:

$$h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{ngoài khoảng trên} \end{cases}$$

a). Tìm tín hiệu lối ra khi lối vào $x[n] = a^n u[n]$, $0 < a < 1$

b) .Tìm tín hiệu lối ra khi lối vào $x[n] = h[n]$.

c. Xác định vị trí của các mẫu có các giá trị N/4, N/2 và N khi tín hiệu lối vào bằng đáp ứng xung như ở câu b).

d) Vẽ đồ thị lối ra y[n] đối với lối vào ở câu a) và b) khi a = 0,9 và N = 5.

2.8. Một hệ thống LTI có đáp ứng xung đơn vị:

$$h[n] = (0,9)^n u[n]$$

Tìm đáp ứng của hệ thống đó đối với tín hiệu lối vào:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n).u[n]$$

❐ NHẬN DẠNG TÍN HIỆU, NHẬN DẠNG HỆ THỐNG

2.9. Giả sử y[n] và h[n] là tín hiệu lối ra và đáp ứng xung đơn vị của các hệ thống LTI.

$y_1[n] = \{0 \quad 4 \quad 2 \quad -1 \quad -6{,}5 \quad 0 \quad 1{,}5\}$

$y_2[n] = \{1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 14 \quad 12 \quad 9 \quad 5\}$

$y_{31}[n] = \{-1-5j \quad -3-17j \quad -2+5j \quad -9{,}7+12{,}5j \quad 5{,}8+5{,}67j\}$

$h_1[n] = \{2 \quad 1 \quad 0 \quad 3\}$

$h_2[n] = \{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5\}$

$h_3[n] = \{3+2j \quad -1+4j \quad 2+j\}$

Hãy tìm tín hiệu lối vào cho mỗi hệ thống đây:

a) $x_1[n]$ với lối ra $y_1[n]$ và đáp ứng xung $h_1[n]$.

b) $x_2[n]$ với lối ra $y_2[n]$ và đáp ứng xung $h_2[n]$.

c) $x_3[n]$ với lối ra $y_3[n]$ và đáp ứng xung $h_3[n]$.

2.10. Phương trình sai phân sau đây biểu diễn một hệ thống LTI nhân quả:

$$y[n] + (1/a)y[n-1] = x[n-1]$$

a). Tìm đáp ứng xung h[n] của hệ thống.

b). Với miền giá trị nào của a hệ thống sẽ ổn định?

2.11. Một hệ thống LTI nhân quả có đáp ứng xung:

$$h[n] = (\alpha^n + \beta^n)\, u[n]$$

trong đó $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$.

Tìm đáp ứng của hệ thống đối với xung nhảy bậc có biên độ A ở lối vào, có nghĩa là: x[n] = Au[n], với A là hằng số.

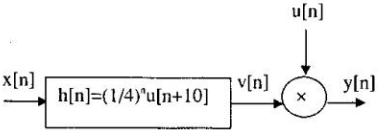
❒ TÍNH CHẤT CỦA HỆ THỐNG LTI DỰA TRÊN ĐÁP ỨNG XUNG

2.12.. Xét hệ thống được minh họa trên hình B.2.12. Lối ra của hệ thống LTI với đáp ứng xung $h[n] = (1/4)^n u[n+10]$ được nhân với một hàm nhảy bậc đơn vị u[n] để sinh ra lối ra của toàn bộ hệ thống.

(a) Hệ thống tổng thể là LTI được không? Vì sao?

(b) Hệ thống tổng thể là nhân quả không? Vì sao?

(c) Hệ thống tổng thể là ổn định theo nghĩa BIBO không ? Vì sao?



Hình B2.12.

2.13. Đối với mỗi một đáp ứng xung của hệ thống LTI sau đây, hãy chỉ ra rằng hệ thống có ổn định hay không:

(a) $h[n] = 4^n u[n]$
(b) $h[n] = u[n] - u[n-10]$
(c) $h[n] = 3^n u[-n-1]$
(d) $h[n] = \sin(\pi n/3)u[n]$
(e) $h[n] = (3/4)^{|n|}\cos(\pi n/4+\pi/4)$
(f) $h[n] = 2u[n+5] - u[n] - u[n-5]$

2.14. Đáp ứng xung h[n] đã cho bằng:

$$h[n] = \begin{cases} \neq 0, & N_0 \le n \le N_1 \\ 0, & \text{ngoài khoảng trên} \end{cases}$$

Lối vào x[n] đã cho: $x[n] = \begin{cases} \neq 0, & N_2 \le n \le N_3 \\ 0, & \text{ngoài khoảng trên} \end{cases}$

Khi đó thì lối ra là: $y[n] = \begin{cases} \neq 0, & N_4 \le n \le N_5 \\ 0, & \text{ngoài khoảng trên} \end{cases}$

a). Hãy xác định N_4 và N_5 theo N_0, N_1, N_2, và N_3.

b). Nếu x[n] = 0, ngoại trừ N là các điểm liên tiếp nhau, và h[n] = 0, ngoại trừ M là các điểm liên tiếp nhau. Số lượng cực đại các điểm liên tiếp nhau bằng bao nhiêu để, đối với các điểm đó, y[n] có thể khác không ?

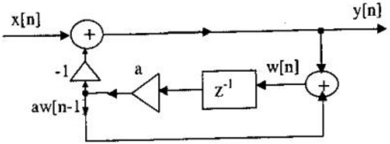
2.15. Tìm tín hiệu lối ra của một hệ thống LTI có đáp ứng xung đơn vị:

$$h[n] = a^{-n}u[-n], \qquad 0 < a < 1$$

khi tín hiệu lối vào $x[n] = u[n]$ là một xung nhảy bậc đơn vị.

❐ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH TÍN HIỆU LỐI RA CỦA HỆ THỐNG

2.16. Một hệ thống có sơ đồ khối cho trên hình B2.16. Thiết lập phương trình sai phân mô tả quan hệ vào-ra và sau đó tính đáp ứng xung h[n] của hệ thống.



Hình B2.16.

2.17. Quan hệ vào/ra của một hệ thống thời gian rời rạc nhân quả được mô tả bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = bx[n] + ay[n-1] \qquad n \geq 0$$

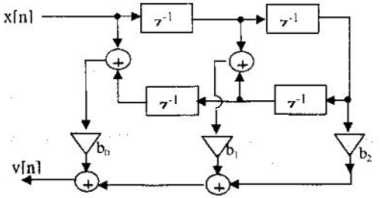
trong đó a và b là những hằng số .

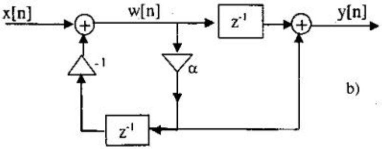
a). Tìm đáp ứng xung đơn vị h[n] của hệ thống.

b). Tìm tín hiệu lối ra khi tín hiệu lối vào $x[n] = 3u[n]$.

c). Hệ thống có tuyến tính và bất biến với thời gian không?

2.18. Viết phương trình sai phân mô tả quan hệ vào/ra và đáp ứng xung đơn vị của các hệ thống LTI nhân quả có sơ đồ dòng tín hiệu cho trong hình vẽ B 2.18 sau:





Hình B2.18.

2.19. Thuật toán tính căn bậc hai của một hằng số α được biểu thị bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = x[n] - y^2[n-1] + y[n-1]$$

trong đó $x[n] = \alpha u[n]$ với $0 < \alpha < 1$. Nếu x[n] và y[n] được xem như là lối vào và lối ra của một hệ thống thời gian rời rạc thì:

a) Hệ thống đó là tuyến tính hay phi tuyến?
b) Có bất biến với thời gian không?
c) Khi $n \to \infty$, chứng tỏ rằng $y[n] \to \sqrt{\alpha}$

2.20. Các dãy thời gian rời rạc sau đây là đáp ứng xung đơn vị của các hệ thống LTI thời gian rời rạc:

$$h_1[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] - 3\delta[n-3]$$
$$h_2[n] = -\delta[n-2] - 0{,}5\,\delta[n-1] + 3\delta[n-3]$$

Hãy tìm phương trình sai phân mô tả tín hiệu lối ra với lối vào cho mỗi trường hợp sau:

a). $y_1[n]$ với vào $x_1[n]$ và đáp ứng xung $h_1[n]$

b). $y_2[n]$ với vào $x_2[n]$ và đáp ứng xung $h_2[n]$
c). $y_3[n]$ với vào $x_3[n]$ và đáp ứng xung $h_2[n]$
d). $y_4[n]$ với vào $x_4[n]$ và đáp ứng xung $h_1[n]$

2.21. Dãy số Fibonacci f[n] là một dãy nhân quả được xác định bằng phương trình sai phân:

$$f[n] = f[n-1] + f[n-2] \quad n \geq 2.$$

với f[0] = 0 và f[1] = 1.

a) Hãy phát triển một công thức chính xác để tính f[n] với n bất kỳ.

b) Chứng minh rằng f[n] là đáp ứng xung của một hệ tyhống LTI được mô tả bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = x[n-1] + y[n-1] + y[n-2]$$

❒ NGHIỆM TỔNG QUÁT CỦA PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

2.22. Xét phương trình sai phân sau đây:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=3x[n]$$

(a) Tìm nghiệm thuần nhất dạng tổng quát của phương trình sai phân này.
(b) Hệ thống LTI vừa nhân quả lẫn phản nhân quả đều được đặc trưng bằng phương trình sai phân này. Hãy tìm đáp ứng xung của hai hệ thống đó.
(c) Chỉ ra rằng hệ thống LTI nhân quả là ổn định còn hệ thống LTI phản nhân quả thì không ổn định.
(d) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân khi:

$$x[n] = (1/2)^n u[n]$$

2.23. Xét phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng số:

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n-1]$$

Hãy xác định y[n] với $n \geq 0$ khi $x[n] = \delta[n]$ và $y[n] = 0$ khi $n < 0$.

2.24. Một hệ thống tuyến tính bất biến với thời gian và nhân quả được mô tả bằng phương trình sai phân sau:

$$y[n] + y[n-1] - 6y[n-2] = x[n]$$

(a) Xác định đáp ứng đồng nhất của hệ thống, tức là lối ra khả dĩ nếu $x[n] = 0$ với mọi n.

(b) Tìm đáp ứng xung đơn vị của hệ thống.

(c) Tìm tín hiệu lối ra của hệ thống khi lối vào:

1) $x[n] = 8u[n]$

2) $x[n] = (2)^n u[n]$

Với điều kiện ban đầu $y[-1] = 1$; $y[-2] = -1$

2.25. Một hệ thống tuyến tính bất biến với thời gian và nhân quả được mô tả bằng phương trình sai phân sau:

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 2x[n-1]$$

(d) Xác định đáp ứng đồng nhất của hệ thống, tức là lối ra khả dĩ nếu $x[n] = 0$ với mọi n.

(e) Xác định đáp ứng xung của hệ thống.

(f) Xác định đáp ứng nhảy bậc đơn vị của hệ thống.

2.26. Quan hệ vào/ra của một hệ thống LTI được biểu thị bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[n-1]\right) - 0{,}3y[n-1] + 0{,}4y[n-2]$$

a) Xác định đa thức đặc trưng của hệ thống đó.

b) Tìm tín hiệu lối ra khi lối vào để không và với các điều kiện ban đầu:

$y[-1] = y[-2] = 1$.

c) Cho biết hệ thống có ổn định không?

2.27. Quan hệ vào/ra của một hệ thống LTI được biểu thị bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[n-1]\right) + y[n-1] - y[n-2]$$

a) Xác định đa thức đặc trưng của hệ thống đó.

b) Tìm nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân.

c) Cho biết hệ thống có ổn định không?

2.28. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân sau:

$$y[n] = 2u[n] - 0{,}5y[n-1] \quad n \geq 0$$

với điều kiện ban đầu $y[-1] = 2$.

2.29. Quan hệ vào/ra của một hệ thống LTI được biểu thị bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = \left(x[n] + x[n-1]\right) - y[n-2]$$

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân đó với lối vào $x[n] = 10u[n]$ và các điều kiện ban đầu $y[-1] = 0$ và $y[-2] = -10$.

2.30. Một hệ thống LTI bậc hai được mô tả bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = x[n] + |2\alpha\cos\varphi|\, y[n-1] - |\alpha^2| y[n-2]$$

a) Tìm đa thức đặc trưng của hệ thống đó.

b) Tìm đáp ứng của hệ thống đối với lối vào để không.

c) Tìm đáp ứng xung đơn vị của hệ thống đó.

2.31. Chuyển động quay của con tàu vũ trụ được biểu thị bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[n-1]\right) + y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2]$$

trong đó $y[n]$ biểu thị vị trí của góc còn $x[n]$ biểu thị mômen quay lối vào.

a). Tìm vị trí góc quay của con tàu $y[n]$ đối với mômen quay lối vào:

$$x[n] = \cos(n\pi/3)u[n]$$

và với các điều kiện ban đầu $y[-1] = y[-2] = 0$.

b) Tính các giá trị $y[0]$, $y[1]$, $y[2]$ và $y[3]$ dùng phương pháp lặp và so sánh với kết quả tính từ biểu thức vừa tìm được từ câu a).

2.32. Một hệ thống LTI được biểu thị bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = 20x[n] + 7y[n-1] - 10y[n-2]$$

a). Tìm đáp ứng xung đơn vị của hệ thống.

b). Tìm nghiệm tổng quát của phương trình trên đối với lối vào:

$$x[n] = 3u[n] + 4nu[n]$$

và các điều kiện ban đầu $y[-1] = y[-2] = 0$.

c) So sánh một vài giá trị tính được bằng các tính toán đệ qui.

2.33. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân sau:

$$y[n] = 2^n u[n] - 0,1y[n-1] + 0,06y[n-2] \quad n \geq 0$$

với điều kiện ban đầu $y[-1] = 1$ và $y[-2] = 0$.

2.34. a). Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân sau:

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] - 0,1y[n-1] + 0,06y[n-2] \quad n \geq 0$$

với điều kiện ban đầu $y[-1] = 1$ và $y[-2] = 0$ và tín hiệu lối vào $x[n] = 2^n u[n]$.

b). Tính đáp ứng xung $h[n]$ của hệ thống đó.

2.35. Phương trình sai phân mô tả quan hệ vào/ra của một bộ tích luỹ dữ liệu được biểu thị dưới dạng:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] = y[n-1] + x[n]$$

a) Chứng tỏ rằng hệ thống đó còn được biểu thị bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = y[-1] + \sum_{k=0}^{n} x[k]$$

b) Chứng tỏ rằng hệ thống đó là tuyến tính với mọi lối vào nhân quả.

2.36. Một mạch lọc số bậc nhất có lối vào $x[n]$ là những dãy số thực còn lối ra $y[n]$ là những dãy số phức $y[n] = y_{re}[n] + jy_{im}[n]$ được mô tả bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = x[n] + \alpha y[n-1]$$

trong đó α cũng là hằng số phức $\alpha = a + jb$.

a). Hãy phát triển một hệ thống tương đương với mạch lọc trên có một lối vào chung và hai lối ra.

b). Chứng tỏ rằng nếu mạch lọc số có một lối vào và một lối ra duy nhất (SISO) liên hệ giữa $y_{rc}[n]$ và $x[n]$ là phương trình sai phân bậc hai.

c). Vẽ sơ đồ dòng tín hiệu để thực thi mạch lọc theo 2 phương pháp nói trên.

2.37. Quan hệ vào/ra của một hệ thống IIR nhân quả được biểu thị bằng phương trình sai phân:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

Hãy chứng tỏ rằng nếu đáp ứng xung của hệ thống này liên hệ với các hệ số a_k và b_m theo phương trình:

$$b_m = \sum_{n=0}^{m} h[n] a_{m-n}\ ,\ m = 0, 1, \ldots, M$$

thì: $b_n = h[n]*a_n$

❐ ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA HỆ THỐNG LTI

2.38. Tìm đáp ứng tần số của các hệ thống LTI có các đáp ứng xung đơn vị cho dưới đây:

(a) $h_1[n] = e^{j2\pi n/3}, 0 \le n \le 3$
(b) $h_2[n] = [(0,5)^n + (0,4)^n]\, u[n]$
(c) $h_3[n] = 2^n u[-n-1]$
(d) $h_4[n] = (0,5)^n \cos(0,1\pi n) u[n]$
(e) $h_5[n] = (1/4)^n u[n] + 4^n u[-n-1]$

2.39. Đáp ứng xung đơn vị của một hệ thống LTI có dạng:

$$h[n] = A\alpha^n \cos(\varphi n).u[n]\ ,\quad 0 < \alpha < 1.$$

a). Tìm đáp ứng tần số của hệ thống này.
b). Tìm phương trình sai phân mô tả quan hệ vào-ra của hệ thống.
c). Cho A = ; $\alpha = 0,9$; $\varphi = \pi/3$. Tìm đáp ứng trạng thái dừng của hệ thống đối với lối vào:

1). $x[n] = 2\cos(n\pi/6 + \pi/12)$
2). $x[n] = 6\sin(n\pi/2 - \pi/6)$

2.40. a.) Tìm đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của hệ thống tuyến tính bất biến với thời gian mà lối vào và lối ra của nó thỏa mãn phương trình sai phân:

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+2x[n-1]+x[n-2]$$

b). Viết phương trình sai phân cho hệ thống có đáp ứng tần số là:

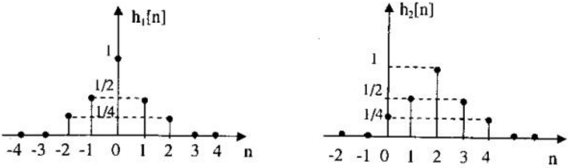
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}+e^{-j3\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

2.41. Hai hệ thống FIR có đáp ứng xung đơn vị $h_1[n]$ và $h_2[n]$ cho trên hình vẽ B2.41.

a) Tìm đáp ứng tần số $H_1(e^{j\omega})$ và $H_2(e^{j\omega})$ của hai hệ thống đó.

b) Tìm biểu thức liên hệ giữa $H_1(e^{j\omega})$ và $H_2(e^{j\omega})$.

c. Mối liên hệ giữa đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hai hệ thống như thế nào?



Hình B2.41

2.42. Xét một hệ thống với đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-j2\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j4\omega}}, \quad -\pi < \omega \le \pi$$

Xác định lối ra y[n] cho mọi n nếu lối vào x[n] cho mọi n là:

$x[n] = \sin(\pi n/4)$.

2.43. Đáp ứng tần số của một hệ thống FIR được biểu thị bằng biểu thức:

$$H(e^{j\omega}) = 1 - 3e^{-j\omega} + 4e^{-j2\omega}$$

a) Tìm và vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống đó.

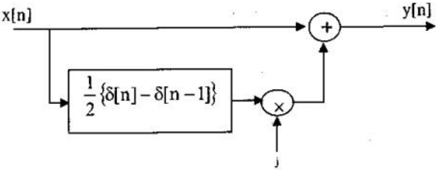
b) Tìm phương trình sai phân mô tả hệ thống.

c) Vẽ sơ đồ dòng tín hiệu thực thi hệ thống.

2.44. Một hệ thống có sơ đồ cho trên hình B2.44.

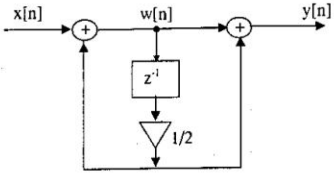
a). Thiết lập phương trình sai phân mô tả quan hệ vào-ra.

b). Tìm đáp ứng tần số của hệ thống.



Hình B2.44.

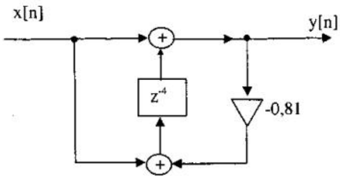
2.45. Tìm phương trình sai phân và đáp ứng tần số của hệ thống có sơ đồ dòng tín hiệu cho trong hình B2.45 sau đây.



Hình B2.45.

2.46. a). Tìm phương trình sai phân, đáp ứng xung đơn vị và đáp ứng tần số của hệ thống có sơ đồ dòng tín hiệu cho trong hình B2.46. Vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha.

b). Tìm tín hiệu lối ra của hệ thống khi lối vào $x[n] = \sin(n\pi/4)$.



Hình B2.46.

2.47. Đáp ứng tần số của một hệ thống IIR được biểu thị bằng biểu thức:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - 2,5e^{-j\omega} + 1,5e^{-j2\omega}}{1 + 0,4e^{-j\omega} - 0,05e^{-j2\omega}}$$

a) Tìm và vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống đó với ω thay đổi từ 0 đến 2π.
b) Tìm phương trình sai phân mô tả hệ thống.
c) Vẽ sơ đồ dòng tín hiệu thực thi hệ thống.
d) Tìm đáp ứng xung đơn vị của hệ thống.
e) Tìm đáp ứng của hệ thống đối với lối vào để không và với các điều kiện ban đầu đối với lối ra $y[0] = 0$ và $y[1] = 3$.

2.48. Một hệ thống LTI có đáp ứng xung:

$$h[n] = 5(-1/2)^n u[n]$$

Hãy tìm đáp ứng tần số của hệ thống để xác định lối ra của hệ thống này khi lối vào là:

$$x[n] = (1/3)^n u[n]$$

2.49. Hệ thống FIR lấy trung bình động được mô tả bởi phương trình sai phân:

$$y[n] = \frac{1}{M+1}\sum_{m=0}^{M} x[n-m]$$

a). Tìm đáp ứng tần số của hệ thống này dưới dạng một biểu thức toán học chặt chẽ. Vẽ đáp ứng biên độ và pha với $0 \le \omega \le \pi$ với $M = 4$.

b). Tìm đáp ứng trạng thái dừng của hệ thống đối với tín hiệu lối vào $x[n] = \cos(\pi n/4 - \pi/2)$.

2.50. Khảo sát phương trình sai phân:

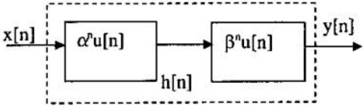
$$y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=\frac{1}{3}x[n-1]$$

(a) Đáp ứng xung, đáp ứng tần số, đáp ứng nhảy bậc đơn vị cho hệ thống LTI nhân quả thỏa mãn phương trình sai phân này như thế nào?

(b) Dạng tổng quát của nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân này là như thế nào?

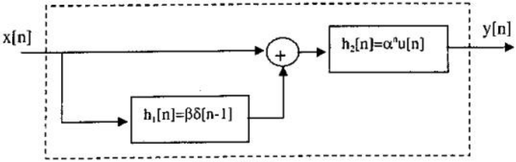
❒ GHÉP NỐI CÁC HỆ THỐNG LTI

2.51. Hai hệ thống LTI có đáp ứng xung lần lượt $\alpha^n u[n]$ và $\beta^n u[n]$ với $0 < \alpha < 1$ và $0 < \beta < 1$, mắc nối tiếp như trên hình B2.51. Tìm đáp ứng xung h[n] của hệ thống tổng thể.



Hình B2.51.

2.52. Hai hệ thống có đáp ứng xung đơn vị $h_1[n] = \beta\delta[n-1]$ và $h_2[n] = \alpha^n u[n]$ được ghép với nhau như trong sơ đồ khối cho trên hình B2.52.



Hình B2.52.

a). Tìm đáp ứng xung đơn vị h[n] của hệ thống tổng thể.

b). Tìm đáp ứng tần số của hệ thống tổng thể.

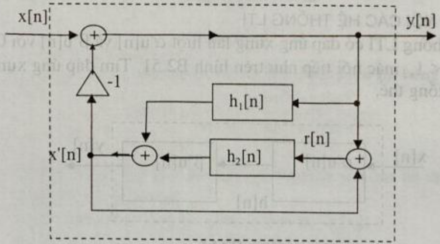
c). Viết phương trình sai phân mô tả quan hệ vào-ra của hệ thống tổng thể.

d). Cho biết hệ thống tổng thể có ổn định và nhân quả không?

2.53. Một hệ thống có sơ đồ cho trên hình B2.53. Trong đó:

$$h_1[n] = a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2] + a_3\delta[n-3]$$
$$h_2[n] = b_1\delta[n-1] + b_2\delta[n-2]$$

Hãy thiết lập mối liên hệ giữa lối ra y[n] với lối vào x[n] và giữa tín hiệu r[n] với lối vào x[n].

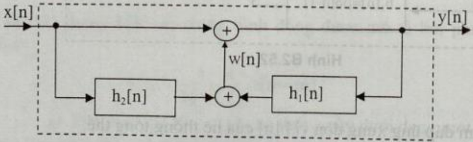


Hình B2.53.

2.54. Hai hệ thống có đáp ứng xung:

$$h_1[n] = a_1\delta[n-1]$$
$$h_2[n] = b_1\delta[n-1] + b_2\delta[n-2]$$

được ghép nối trong sơ đồ khối hình B2.54 sau đây.



Hình B2.54.

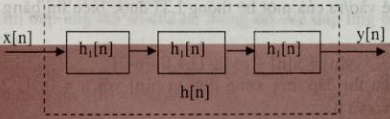
a). Tìm đáp ứng xung đơn vị của hệ thống tổng thể.

b). Hãy thiết lập mối liên hệ giữa lối ra y[n] với lối vào x[n] và giữa tín hiệu w[n] với lối vào x[n].

2.55. a) Người ta ghép nối tiếp 3 hệ thống có đáp ứng xung đơn vị:

$$h_1[n] = \delta[n] - 0{,}9\delta[n-5]$$

như trên sơ đồ hình B2.55 sau đây:



Hình B2.55.

a). Tìm đáp ứng xung h[n] của hệ thống tổng thể.

b). Tìm và vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống tổng thể đó.

2.56. Ba hệ thống có đáp ứng xung đơn vị:

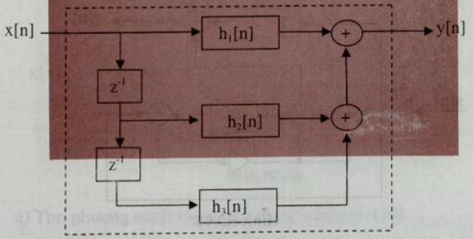
$$h_1[n] = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n];$$

$$h_2[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]; \; h_3[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1]$$

được mắc trong sơ đồ hình B2.56.

a). Tìm đáp ứng xung đơn vị và đáp ứng tần số của hệ thống tổng thể.

b). Tìm phương trình sai phân mô tả quan hệ vào ra của hệ thống tổng thể.



Hình B2.56.

2.57. Xác định đáp ứng tần số của hệ thống có đáp ứng xung đơn vị $h[n] = (0,9)^n u[n]$. Vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha. Xác định đáp ứng của hệ thống đó khi lối vào $x[n] = 0,1\ u[n]$.

2.58. Quan hệ vào/ra của một hệ thống LTI được biểu thị bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = x[n] + \alpha y[n-1] + \beta y[n-2]$$

a). Biểu thị đáp ứng xung đơn vị h[n] với n = 0, 1, 2, 3, 4 của hệ thống đó theo α và β.

b) Giả sử $\alpha = -1$, $\beta = 2$, tìm y[0], y[1], y[2] và y[3] đối với lối vào $x[n] = 2^n u[n]$ và với các điều kiện ban đầu $y[-1] = y[-2] = 0$.

2.59.. Một hệ thống LTI có phương trình sai phân:

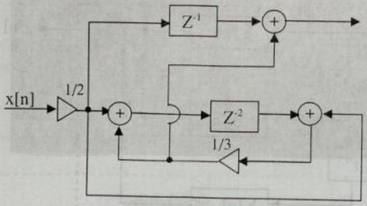
$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2\, x[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]$$

Trong đó y[n] và x[n] tương ứng là lối ra và lối vào của hệ thống.

a). Tìm đáp ứng tần số của hệ thống đó.

b). Với giá trị nào của các hằng số b_m, m = 0, 1, 2, đáp ứng tần số sẽ có giá trị không đổi với mọi ω?

2.60. Một hệ thống LTI có sơ đồ dòng tín hiệu cho trên hình B2.60.



Hình B2.60.

a). Thiết lập phương trình sai phân mô tả quan hệ vào- ra của hệ thống.

b). Tìm đáp ứng biên độ và pha của hệ thống.

2.61. Một hệ thống LTI có đáp ứng xung đơn vị :

$$h[n] = (0{,}4)^n u[n]$$

a). Tìm đáp ứng tần số của hệ thống đó. Vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha.

b). Tìm đáp ứng của hệ thống đối với lối vào bị tác động đột ngột bởi tín hiệu sin $x[n] = \sin(n\pi/4)u[n]$.

2.62. Hệ thống FIR có đáp ứng xung đơn vị:

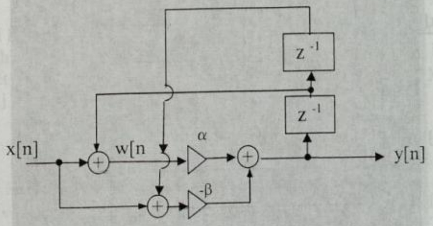
$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

a) Tìm đáp ứng tần số của hệ thống đó. Vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha.

b) Tính đáp ứng trạng thái dừng của hệ thống đối với tín hiệu lối vào

$$x[n] = 1 + 10\cos(n\pi/10)$$

2.64. Một hệ thống có sơ đồ dòng tín hiệu cho trên hình B2.64.



Hình B2.64.

a) Tìm phương trình sai phân liên hệ w[n] với x[n].

b) Tìm phương trình sai phân mô tả quan hệ vào/ra giữa y[n] và x[n].

c) Tìm điều kiện đối với đối với α và β để hệ thống ổn định.

d). Tìm và vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng xung đơn vị của hệ thống với $\alpha = 0{,}6$ và $\beta = 0{,}9$.

2.63. Hệ thống lấy trung bình động bậc M được biểu thị bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = \frac{1}{M+1}\sum_{m=0}^{M} x[n-m]$$

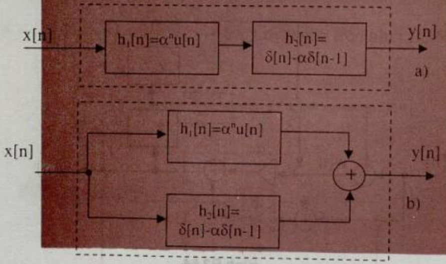
a) Tìm và vẽ đáp ứng xung đơn vị của hệ thống đó với M = 4.

b) Tìm đáp ứng tần số và vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống đó với M = 4.

c) Tìm tín hiệu lối ra khi tín hiệu lối vào $x[n] = 0{,}75\cos(n\pi/4)$.

❐ HỆ THỐNG NGHỊCH ĐẢO

2.65. Hai hệ thống LTI có đáp ứng xung lần lượt $h_1[n] = \alpha^n u[n]$ và $h_2[n] = \delta[n] - \alpha\delta[n-1]$ với $0 < \alpha < 1$, mắc nối tiếp và song song như trên hình B2.65. Tìm đáp ứng xung h[n] và đáp ứng tần số của hai hệ thống tổng thể.



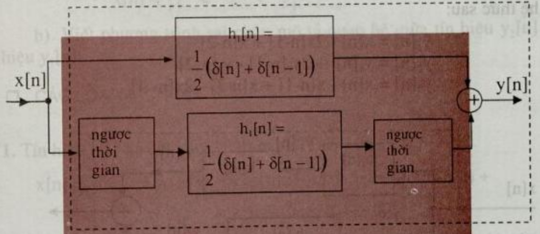
Hình B2.65.

2.66. Một hệ thống LTI có đáp ứng xung:

$$h_1[n] = \frac{1}{2}\left(\delta[n] + \delta[n-1]\right)$$

a). Tìm đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của hệ thống có đáp ứng xung h[n] đó.

b). Hệ thống đó được mắc trong sơ đồ cho trên hình B2.66. Xác định đáp ứng tần số của hệ thống tổng thể theo $H(e^{j\omega})$ và chứng minh rằng hệ thống tổng thể có pha bằng không.



Hình B2.66.

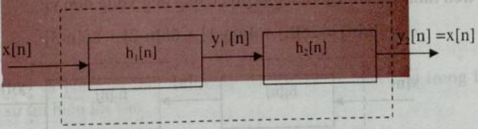
2.67. Quan hệ vào/ra của một hệ thống LTI nhân quả được biểu thị bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] - a_1y[n-1]$$

Hãy tìm phương trình sai phân biểu thị hệ thống nghịch đảo của nó.

2.68. Hai hệ thống LTI có đáp ứng xung lần lượt $h_1[n]$ và $h_2[n]$ mắc nối tiếp như trên hình B2.68. Lối ra của hệ thống tổng thể $y_2[n]$ bằng tín hiệu lối vào x[n]. Viết phương trình sai phân mô tả quan hệ giữa tín hiệu $y_2[n]$ với tín hiệu $y_1[n]$. Biết rằng:

$$h_1[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$



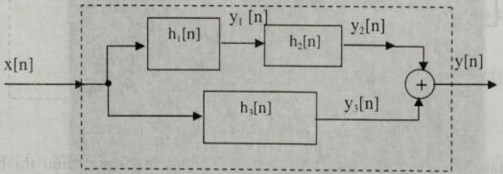
Hình B2.68.

a). Tìm đáp ứng tần số của hệ thống $h_2[n]$.

b). Viết phương trình sai phân mô tả quan hệ giữa tín hiệu $y_2[n]$ với tín hiệu $y_1[n]$.

2.69. Ba hệ thống LTI có đáp ứng xung lần lượt $h_1[n]$, $h_2[n]$ và $h_3[n]$ mắc nối tiếp như trên hình B2.69. Các tín hiệu cho trong sơ đồ liên hệ với nhau bằng các hệ thức sau:

$$y_1[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$
$$y_2[n] = y_1[n] + 2y_2[n-1] - y_2[n-2]$$
$$y_3[n] = x[n] - x[n-1] + x[n-3] - 2x[n-4]$$



Hình B2.69.

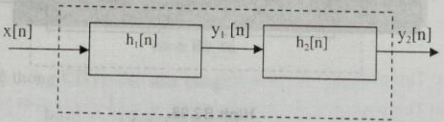
a). Viết phương trình sai phân mô tả quan hệ giữa tín hiệu lối ra $y[n]$ của hệ thống tổng thể với tín hiệu lối vào $x[n]$.

b). Tìm đáp ứng tần số của hệ thống tổng thể.

c). Vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha với $0 \leq \omega \leq 2\pi$. Cho biết trong vùng tần số đó, đáp ứng biên độ có bao nhiêu cực đại bao nhiêu cực tiểu.

2.70. Hai hệ thống LTI có đáp ứng xung lần lượt $h_1[n]$ và $h_2[n]$ mắc nối tiếp như trên hình B2.70. Hệ thống $h_1[n]$ có đáp ứng xung đơn vị:

$$h_1[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 8\delta[n-3]$$



Hình B2.70.

Lối ra của hệ thống tổng thể $y_2[n]$ đã được xác định:

$$y_2[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{2} \quad 8 \quad 20 \quad 40 \quad 60 \quad 68 \quad 62 \quad 40 \right\}$$

a). Tìm đáp ứng xung đơn vị của hệ thống $h_2[n]$ khi tín hiệu lối vào là:

$$x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \right\}$$

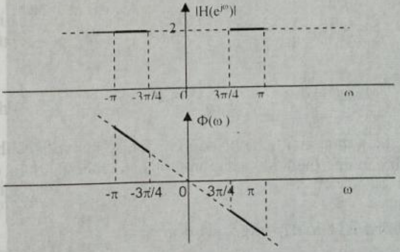
b). Viết phương trình sai phân mô tả quan hệ giữa tín hiệu $y_2[n]$ với tín hiệu $y_1[n]$.

❐ CÁC LOẠI MẠCH LỌC SỐ

2.71. Tín hiệu lối vào của một hệ thống LTI có dạng

$$x[n] = 3\cos(n\pi/6+\pi/3) + 7\cos(n\pi/3-\pi/6) - 5\cos(4n\pi/5-\pi/2) + $$
$$+ 3{,}5\cos(9n\pi/10+3\pi/8).$$

Tìm tín hiệu lối ra nếu hệ thống đó có đáp ứng biên độ và đáp ứng pha cho trên hình B2.71.



Hình B2.71.

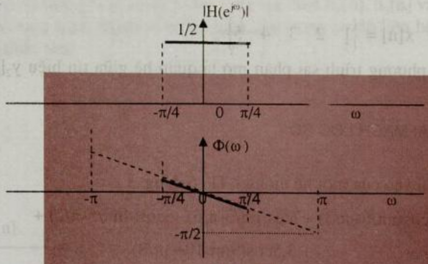
2.72. Biên độ và pha của một hệ thống rời rạc tuyến tính cho trong hình B2.72. Giả sử tín hiệu lối vào:

$$x[n] = 3\cos(\pi n/6+\pi/3) + 7\cos(\pi n/3-\pi/6) - 5\cos(4\pi n/5-\pi/2) + 3{,}5\cos(9\pi n/10+3\pi/8)$$

a). Tìm tín hiệu lối ra và cho biết đây là bộ lọc loại gì?

b). Đáp ứng xung đơn vị của mạch lọc lý tưởng này.

c). Vẽ đáp ứng xung đơn vị và tín hiệu lối ra của bộ lọc này với $n = -50: 50$.



Hình B2.72.

2.73. Hai hệ thống có đáp ứng xung:

$$h_1[n] = \left\{ \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \underset{\uparrow}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \right\}$$

$$h_2[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{\frac{1}{4}} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \right\}$$

a). Tìm biểu thức giải tích cho đáp ứng tần số của mỗi hệ thống.

b). Tính đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của mỗi hệ thống đó và có nhận xét gì?

2.74. Một hệ thống LTI có đáp ứng xung đơn vị:

$$h[n] = \delta[n] - \alpha\delta[n-R]$$

trong đó $|\alpha| < 1$.

a). Tìm đáp ứng tần số của hệ thống đó.

b). Đáp ứng biên độ có bao nhiêu cực đại, bao nhiêu cực tiểu trong vùng $0 \le \omega \le 2\pi$?. Tìm các vị trí đó.

c). Vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha cho trường hợp $R = 5$, $\alpha = 1$.

2.75. Một hệ thống có đáp ứng xung:

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & \text{ngoài khoảng trên} \end{cases}$$

a). Tìm đáp ứng tần số của hệ thống đó.

b). Đáp ứng biên độ có bao nhiêu cực đại, bao nhiêu cực tiểu trong vùng $0 \le \omega \le 2\pi$?. Tìm các vị trí đó.

c). Vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha cho trường hợp $M = 5$; $\alpha=0,9$.

2.76. Tìm đáp ứng tần số và vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha cho mỗi hệ thống sau đây:

a) $y_1[n] = x[n] + x[n-1] + ... + x[n-6]$

b) $y_2[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] - 0,5y_2[n-1] - 5y_2[n-2]$

c) $y_3[n] = 2x[n] + x[n-1] + x[n-2] - 0,25y_3[n-1] - 0,25y_3[n-2]$

2.77. Một hệ thống FIR không nhân quả có đáp ứng xung:

$$h[n] = \sum_{k=-2}^{2} b_k \delta[n-k]$$

Với giá trị nào của đáp ứng xung, đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ sẽ có pha bằng không?

2.78. Một hệ thống FIR nhân quả có đáp ứng xung:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{6} b_k \delta[n-k]$$

Với giá trị nào của đáp ứng xung, đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ sẽ có pha tuyến tính?

2.79. Hai hệ thống LTI nhân quả có các đáp ứng xung lần lượt là:

$$h_1[n] = 0,5\delta[n] - \delta[n-1] + 0,5\delta[n-2]$$
$$h_2[n] = 0,5\delta[n] + \delta[n-1] + 0,5\delta[n-2]$$

a). Vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hai hệ thống. So sánh và rút ra nhận xét.

b). Tìm đáp ứng tần số $H_3(e^{j\omega})$ của hệ thống mới có đáp ứng xung:

$$h_3[n] = (-1)^n h_1[n], \quad \text{với mọi } n$$

Cho biết mối quan hệ giữa $H_3(e^{j\omega})$ và $H_1(e^{j\omega})$.

2.80. Một hệ thống FIR có đáp ứng xung đơn vị đối xứng dạng:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{2} b_k \delta[n-k]$$

trong đó $b_0 = b_2$.

a). Xác định các hệ số b_k , k = 0, 1, 2, để hệ thống có đáp ứng biên độ có các giá trị $|H(e^{j0,1})| = 1$ và $|H(e^{j0,4})| = 0$.

b). Tìm biểu thức chính xác đối với $H(e^{j\omega})$ có các hệ số vừa tìm được. Vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha.

2.81. Một hệ thống FIR có đáp ứng xung đơn vị phản đối xứng dạng:

$$h[n] = \sum_{m=0}^{4} b_m \delta[n-m]$$

trong đó: $b_m = -\, b_{4-m}$, $0 \le m \le 4$; $b_2 = 0$.

a). Xác định các hệ số b_k , k = 0, 1, 2, 3, 4, để hệ thống có đáp ứng biên độ có các giá trị: $|H(e^{j\pi/4})| = 0{,}5$ và $|H(e^{j\pi/2})| = 1$.

b). Tìm biểu thức chính xác đối với $H(e^{j\omega})$ có các hệ số vừa tìm được. Vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha.

2.82. Một hệ thống LTI có đáp ứng xung đơn vị :

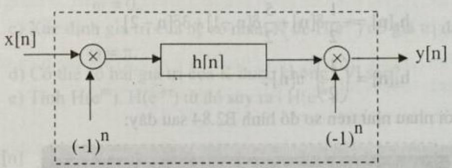
$$h[n] = \frac{1}{2}\left(\delta[n] + \delta[n-1]\right)$$

được mắc trong sơ đồ hình B2.82.

a) Tìm phương trình sai phân mô tả mối liên hệ giữa y[n] và x[n].

b) Tìm đáp ứng xung đơn vị của hệ thống tổng thể.

c) Tìm và vẽ đáp ứng tần số của hệ thống có đáp ứng xung đơn vị h[n] và hệ thống mới xây dựng.



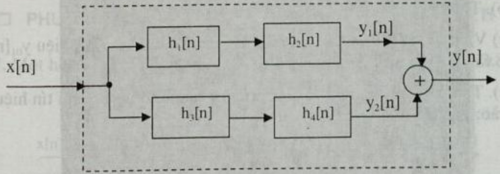
Hình B2.82.

2.83. Bốn hệ thống có đáp ứng xung:

$$h_1[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1];\ h_2[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1]$$

$$h_3[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1];\ h_2[n] = -\frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]$$

được ghép với nhau như trên sơ đồ hình B2.83 sau đây:



Hình B2.83.

a) Tìm đáp ứng xung của hệ thống tổng thể.

b). Tìm đáp ứng tần số của hệ thống tổng thể.

c). Tìm tín hiệu lối ra khi tín hiệu vào $x[n] = \alpha^n u[n]$

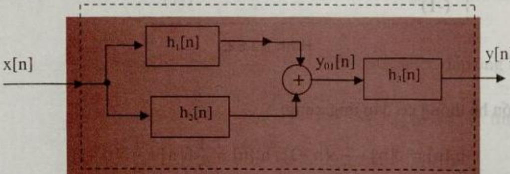
2.84. Ba hệ thống có đáp ứng xung:

$$h_1[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - 3\delta[n-2];$$

$$h_2[n] = -\frac{1}{2}\delta[n] + \frac{5}{2}\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

$$h_3[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n];$$

được ghép với nhau như trên sơ đồ hình B2.84 sau đây:



Hình B2.84.

a). Tìm đáp xung đơn vị của hệ thống tổng thể.

b). Tìm đáp ứng tần số của hệ thống tổng thể.

c) Viết phương trình sai phân mô tả quan hệ giữa các tín hiệu $y_{01}[n]$ và $y[n]$ với tín hiệu lối vào $x[n]$.

c). Tìm đáp ứng trạng thái dừng của hệ thống tổng thể khi tín hiệu vào:

$$x[n] = \cos(n\pi/2).u[n]$$

2.85. Một hệ thống LTI được mô tả bằng phương trình sai phân:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{3} x[n-2m] - \sum_{\ell=1}^{3} (0{,}81)^{\ell}\, y[n-2\ell]$$

Xác định đáp ứng trạng thái dừng đối với các lối vào sau đây:

$$x[n] = 1 + \cos(0.5\pi n + \pi/2)$$

Vẽ $x[n]$ và đáp ứng với $0 \le n \le 200$.

2.86. Hình B2.86 là đồ thị dòng tín hiệu của một hệ thống thời gian rời rạc.

a) Tìm phương trình sai phân mô tả quan hệ vào ra của hệ thống.

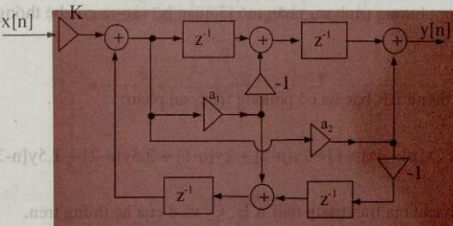
b) Xác định giá trị của hệ số nhân K để $H(e^{j\omega})$ có giá trị đơn vị tại

$\omega = 0$.

c) Xác định giá trị của hệ số nhân K để $H(e^{j\omega})$ có giá trị đơn vị tại $\omega = \pi$.

d) Có thể có hai giá trị của K được không? Vì sao?

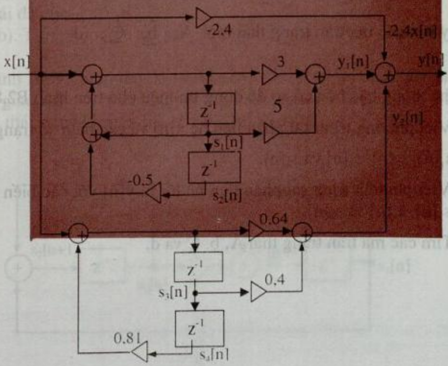
e) Tính $H(e^{j\omega}).\ H(e^{-j\omega})$ từ đó suy ra $|H(e^{j\omega})|$.



Hình B2.86.

❒ PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI CỦA CÁC HỆ THỐNG LTI

2.87. Một hệ thống bậc bốn có sơ đồ dòng tín hiệu cho trên hình B2.87.



Hình B2.87.

a). Viết phương trình sai phân liên hệ x[n] và các biến số trạng thái $s_1[n]$, $s_2[n]$, $s_3[n]$ và $s_4[n]$.

b). Viết phương trình sai phân liên hệ lối ra y[n] với các biến số trạng thái $s_1[n]$, $s_2[n]$, $s_3[n]$ và $s_4[n]$.

c). Tìm các ma trận trạng thái **A**, $\underline{b}$, $\underline{C}^t$ và d.

d). Tìm phương trình sai phân mô tả quan hệ vào-ra của hệ thống.

2.88. Một hệ thống IIR bậc ba có phương trình sai phân:

$$y[n] = 2x[n] - 4x[n-1] + 9x[n-2] + 2y[n-1] + 2{,}5y[n-2] + 1{,}5y[n-3].$$

a) Tìm các ma trận trạng thái **A** $\underline{b}$, $\underline{C}^t$ và d của hệ thống trên.

b) Bây giờ dùng phép biến đổi trạng thái với ma trận biến đổi

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

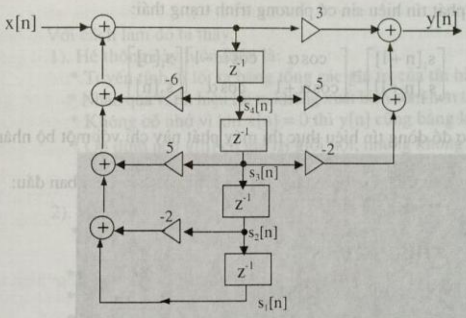
Hãy tìm các ma trận trạng thái mới $\hat{A}$, $\underline{\hat{b}}$, $\underline{\hat{C}}^t$, $\hat{d}$.

2.89. Một hệ thống bậc bốn có sơ đồ dòng tín hiệu cho trên hình B2.89.

a) Viết phương trình sai phân liên hệ x[n] và các biến số trạng thái $s_1[n]$, $s_2[n]$, $s_3[n]$ và $s_4[n]$.

b) Viết phương trình sai phân liên hệ lối ra y[n] với các biến số trạng thái $s_1[n]$, $s_2[n]$, $s_3[n]$ và $s_4[n]$.

c) Tìm các ma trận trạng thái **A**, $\underline{b}$, $\underline{C}^t$ và d.



Hình B2.89.

2.90. Một hệ thống IIR bậc 2 có các ma trận trạng thái:

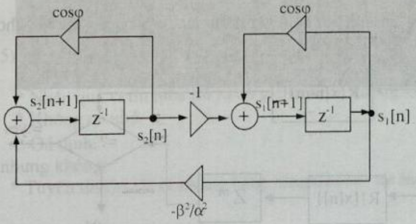
$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}; \; b = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

$$C^t = [\,2 \quad 3\,]; \; d = 0,7$$

a). Hãy tính đáp ứng xung đơn vị của hệ thống đó theo các ma trận trạng thái đã cho.

b). Tìm phương trình sai phân mô tả quan hệ vào ra của hệ thống.

2.91. Hình B2.91 dưới đây là sơ đồ dòng tín hiệu của một máy phát tín hiệu sin thời gian rời rạc. Viết phương trình sai phân mô tả quan hệ giữa các biến số trạng thái $s_1[n+1]$ và $s_2[n+1]$ với $s_1[n]$ và $s_2[n]$.



Hình B2.9

2.92. Một máy phát tín hiệu sin có phương trình trạng thái:

$$\begin{bmatrix} s_1[n+1] \\ s_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha - 1 \\ \cos\alpha + 1 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \end{bmatrix}$$

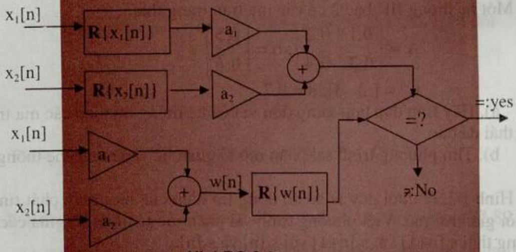
a). Vẽ sơ đồ dòng tín hiệu thực thi máy phát này chỉ với một bộ nhân hệ số $\cos\alpha$.

b). Tìm và vẽ tín hiệu lối ra tại $s_1[n]$ và $s_2[n]$ với điều kiện ban đầu: $s_1[-1] = s_2[-1] = 0,1$.

2.3. TRẢ LỜI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

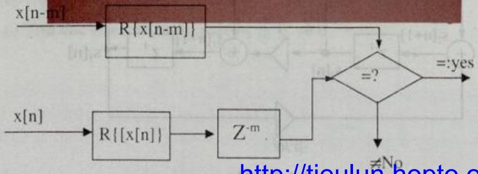
❐ TÍNH CHẤT CỦA HỆ THỐNG LTI

2.1. Để kiểm tra tính chất tuyến tính, ta dùng thủ tục cho trong hình BG2.1a sau đây.



HinhBG 2.1a.

Để kiểm tra tính bất biến với thời gian, ta sử dụng thủ tục cho trong hình BG2.1b.



Hình BG2.1b.

Với cách làm đó ta thấy:

1). Hệ thống này luôn luôn là:

* Tuyến tính vì lối ra bằng tổng các giá trị của tín hiệu lối vào.
* Nhân quả vì tín hiệu lối ra không xuất hiện sớm hơn tín hiệu lối vào.
* Không có nhớ vì khi $x[n] = 0$ thì $y[n]$ cũng bằng không.
* Ổn định nếu $g[n]$ có giá trị giới nội, nhưng không bất biến với thời gian

2). Hệ thống này luôn luôn là:

* Tuyến tính vì lối ra bằng tổng các giá trị của tín hiệu lối vào.

nhưng không:

* Bất biến với thời gian.
* Nhân quả vì tín hiệu lối ra có giá trị khác không khi $n < 0$.
* Không có nhớ vì khi $x[n] =0$ thì $y[n]$ cũng bằng không ổn định nếu $g[n]$ có giá trị giới nội.

3). Hệ thống này luôn luôn là:

* Tuyến tính vì lối ra bằng tổng các giá trị của tín hiệu lối vào.
* Bất biến với thời gian.
* Nhân quả nếu $n_0 = 0$.
* Không có nhớ vì khi $x[n] =0$ thì $y[n]$ cũng bằng không.
* Ổn định nếu $n_0 = 0$ vì khi đó lối ra bằng lối vào; Có nghĩa là hệ thống đồng nhất.

4). Hệ thống này luôn luôn là:

* Tuyến tính vì lối ra bằng tổng các giá trị của tín hiệu lối vào.
* Bất biến với thời gian.
* Nhân quả nếu $n_0 \leq 0$.
* Không có nhớ nếu $n_0 =0$.
* Ổn định.

5). Hệ thống này luôn luôn là:

* Bất biến với thời gian.
* Nhân quả vì tín hiệu lối ra có giá trị khác không khi $n < 0$.
* Không có nhớ.
* Ổn định.

nhưng không:

* Tuyến tính vì lối ra không bằng tổng của các tín hiệu lối vào.

6). Hệ thống này luôn luôn là:

* Tuyến tính nếu b = 0.
* Bất biến với thời gian.
* Nhân quả.
* Không có nhớ vì lối ra bằng không khi lối vào để trống.
* Ổn định.

7). Hệ thống này luôn luôn là:

* Tuyến tính vì lối ra không bằng tổng của các tín hiệu lối vào.
* Ổn định.

nhưng không:

* Bất biến với thời gian vì y[n] ≠0 khi ≤0.
* Nhân quả vì tín hiệu lối ra có giá trị khác trước thời điểm hiện tại n = 0.
* Không có nhớ.

8). Hệ thống này luôn luôn là:

* Ổn định.
* Không có nhớ.

nhưng không:

* Tuyến tính vì lối ra không bằng tổng của các tín hiệu lối vào
* Bất biến với thời gian vì y[n] ≠0 khi ≤0.
* Nhân quả vì tín hiệu lối ra có giá trị y[-1] ≠0.

9) Hệ thống là tuyến tính vì:

Với lối vào $x_1[n]$ ta được lối ra: $y_1[n] = n^2|x_1[n]|$. Vì vậy: $\alpha_1 y_1[n] = \alpha_1 n^2|x_1[n]|$. Tương tự với lối vào $x_2[n]$, ta cũng thu được: $\alpha_2 y_2[n] = \alpha_2 n^2|x_2[n]|$.

Lấy tổng: $\alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n] = \alpha_1 n^2|x_1[n]| + \alpha_2 n^2|x_2[n]|$.

Bây giờ nếu tác động tín hiệu tổng $x_3[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$, ta sẽ thu được tín hiệu ra: $y_3[n] = n^2|\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]| \neq$ $\alpha_1 n^2|x_1[n]| + \alpha_2 n^2|x_2[n]|$. Vậy hệ thống này không tuyến tính.

* Hệ thống là không bất biến với thời gian vì:

Nếu tác động vào lối vào một tín hiệu trễ $x_1[n-m]$, thì tín hiệu ra sẽ là: $y_1[n] = n^2|x_1[n-m]|$.

Bây giờ ta trễ tín hiệu lối ra đối với tín hiệu vào chưa bị trễ $x_1[n]$, ta sẽ thu được tín hiệu ra: $y_2[n-m] = (n-m)^2|x_1[n-m]| \neq y_1[n]$. Vậy hệ thống này không bất biến với thời gian.

* Hệ thống hoặc nhân quả hoặc không vì: Tính chất nhân quả nói rằng: Một hệ thống mà tín hiệu lối ra không xuất hiện sớm hơn tín hiệu lối vào, thì hệ thống đó được gọi là nhân quả; còn ngược lại thì được gọi là không nhân quả. Đối với hệ thống này $y[n] = n^2|x[n]|$, thì tính chất nhân quả phụ thuộc vào tín hiệu lối vào. Chẳng hạn nếu tín hiệu lối vào là một phiên bản trễ dạng: $x[n] = Ax[n + n_0]$ thì đáp ứng của hệ thống lên lối vào này sẽ là:

$$y[n] = An^2|x[n+n_0]|, \text{ với } x[n] = 0 \text{ khi } n < 0$$

thì $y[n] = 0$ khi $n_0 \leq 0$; tức là nhân quả; nhưng $y[n] \neq 0$ khi $n_0 > 0$; tức là không nhân quả.

* Hệ thống là không ổn định: Một hệ thống được gọi là ổn định nếu lối vào giới nội thì lối ra giới nội; Điều đó có nghĩa là nếu lối vào bằng không hoặc lối vào có giá trị hữu hạn mà lối ra có giá trị khác không hoặc v"cùng, thì hệ thống sẽ không ổn định. Với định nghĩa này, ta thấy hệ thống đã cho là không ổn định vì: Khi lối vào $x[n] = A$ là giá trị hữu hạn, nhưng khi $n \to \infty$ thì lối ra $y[n] = \infty$. Vậy hệ thống không ổn định.

2.3. a). Hệ thống này tuyến tính vì đáp ứng của một tổng bằng tổng các đáp ứng.

b). Bất biến với thời gian.

c). Không nhân quả vì đáp ứng xung đơn vị:

$$h[n] = \delta[n+1] - \delta x[n] + \delta[n-1]$$

có giá trị khác không khi $n < 0$.

2.4. a) $h[n] = nh[n-1] + \delta[n]$ với mọi n; $h[n] = 0$ khi $n < 0$.

$h[0] = 1 = 1\times1$

$h[1] = 1 = 1\times1$

$h[2] = 2 = 1\times2$

$h[3] = 6 = 1\times2\times3$

$h[4] = 24 = 1\times2\times3\times4$

.

.

.

$h[n] = n!\, u[n]$

b). Hệ thống không tuyến tính, vì chuẩn L_1 của đáp ứng xung có giá trị v"hạn.

c). Hệ thống là không bất biến với thời gian vì:

$$y[n] = R\{\delta[n]\} = nh[n-1] + \delta[n]$$

nên:

$$R\{\delta[n-k]\} = nh[n-1] + \delta[n-k]$$

Bây giờ tác động toán tử trễ k đơn vị lên đáp ứng xung h[n], ta được:

$$Z^{-k}\{h[n]\} = (n-k)h(n-k-1] + \delta[n-k] = h[n-k]$$

Ta thấy: $h[n-k] \neq R\{\delta[n-k]\}$, nên hệ thống không bất biến với thời gian.

❐ QUAN HỆ VÀO-RA CỦA HỆ THỐNG LTI VÀ PHÉP NHÂN CHẬP

2.5. a). $y[n] = x[n]*h[n] = (x[n])*(\delta[n] - b\delta u[n-]) =$

$$= x[n]*\delta[n] - bx[n]*\delta[n-1]$$

Ta thấy $x[n]*\delta[n] = x[n]$; $x[n]*\delta[n-k] = x[n-k]$.

Do đó:

$$y[n] = x[n]*\delta[n] - bx[n]*\delta[n-1] = x[n] - bx[n-1]$$

$$= a^n u[n] - ba^{n-1}u[n-1] = a^n u[n] - ba^{n-1}u[n-1] + a^n u[n-1] - a^n u[n-1]$$

$$= a^n(u[n] - u[n-1]) + (a-b)a^{n-1}u[n-1] = a^n\delta[n] + (a-b)a^{n-1}u[n-1]$$

$$y[n] = \delta[n] + (a-b)a^{n-1}u[n-1]$$

b). $y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]a^{n-k}u[-n-1-k] =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a^{n-k}u[-n-1-k] = a^n\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k}u[-(n+1)-k] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a^n}{1-a^{-1}}, & n < -1 \\ \dfrac{a^{-1}}{1-a^{-1}}, & n \geq -1 \end{cases}$$

c). $y[n] = x[n]*h[n] =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k-4]2^{n-k}u[-n-1-k] =$$

$$= \sum_{k=4}^{\infty} a^{n-k}u[-n-1-k] = 2^n\sum_{k=4}^{\infty} 2^{-k}u[-(n+1)-k] =$$

$$= \begin{cases} 1, & n > 2 \\ 2^{(n-3)}, & n \le 2 \end{cases}$$

d). $$y[n] = \begin{cases} 1, & n \ge 0 \\ 2^n, & n < 0 \end{cases}$$

e). $$y[n] = \begin{cases} 0, & n \ge 9 \\ 1 - 2^{(n-9)}, & 9 > n > 0 \\ 2^{(n+1)} - 2^{(n-9)}, & n < -1 \end{cases}$$

2.6. a). $y_1[n] = x_1[n]*h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]h_1[n-k]$

Ta thấy dãy $x_1[n]$ có 4 mẫu: $x_1[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{0} \quad 2 \quad 0 \quad -0,5 \right\}$

$x_2[n] = \left\{ 1 \quad \underset{\uparrow}{0} \quad -3 \right\}$

$h_1[n]$ cũng có 4 mẫu là: $h_1[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{2} \quad 1 \quad 0 \quad -3 \right\}$.

$h_2[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{0} \quad -0,5 \quad -1 \quad 3 \right\}$

Vậy lối ra $y_1[n]$ tính được là: $y_1[n] = \sum_{k=0}^{3} x_1[k]h_1[n-k]$

Từ đó tính được:

$$y_1[0] = \sum_{k=0}^{6} x_1[k]h_1[-k] = x_1[0]h_1[0] + x_1[1]h_1[-1] + x_1[2]h_1[-2] + x_1[3]h_1[-3] = 0$$

$$y_1[1] = \sum_{k=0}^{6} x_1[k]h_1[1-k] = x_1[0]h_1[1] + x_1[1]h_1[0] + x_1[2]h_1[-1] + x_1[3]h_1[-2] = 4$$

$$y_1[2] = \sum_{k=0}^{6} x_1[k]h_1[2-k] = x_1[0]h_1[2] + x_1[1]h_1[1] + x_1[2]h_1[0] + x_1[3]h_1[-1] = 2$$

$$y_1[3] = \sum_{k=0}^{6} x_1[k]h_1[3-k] = x_1[0]h_1[3] + x_1[1]h_1[2] + x_1[2]h_1[1] + x_1[3]h_1[0] = -1$$

$y_1[4]=$

$$\sum_{k=0}^{6} x_1[k]h_1[4\text{-}k] = x_1[0]h_1[4] + x_1[1]h_1[3] + x_1[2]h_1[2] + x_1[3]h_1[1] = -6,5$$

$$y_1[5]=\sum_{k=0}^{6} x_1[k]h_1[5\text{-}k] = x_1[2]h_1[3] + x_1[3]h_1[2] + x_1[4]h_1[1] + x_1[5]h_1[0] = 0$$

$$y_1[6]=\sum_{k=0}^{6} x_1[k]h_1[6\text{-}k] = x_1[2]h_1[4] + x_1[3]h_1[3] + x_1[4]h_1[2] = 1,5$$

$$y_1[n]=\left\{\underset{\uparrow}{0} \quad 4 \quad 2 \quad -1 \quad -6,5 \quad 0 \quad 1,5\right\}$$

Tín hiệu lối ra có 4 + 4 - 1=7 mẫu.

b). Trước tiên ta dịch dãy $x_2[n]$ về gốc: $x_2[n]=\left\{\underset{\uparrow}{1} \quad 0 \quad -3\right\}$ sau đó tiến hành nhân với $h_2[n]$ như thông thường. Kết quả cuối cùng sau khi nhân chập sẽ dịch phải một mẫu.

$y_2[n] = \sum_{k=0}^{5} x_2[k]h_2[n-k]$. Thay giá trị $x_2[n]$ và $h_2[n]$ vào ta tính được:

$$y_2[0]=\sum_{k=0}^{5} x_2[k]h_2[0\text{-}k] = x_2[0]h_2[0] + x_2[1]h_2[\text{-}1] + x_2[2]h_2[\text{-}2] = 0$$

$$y_2[1]=\sum_{k=0}^{5} x_2[k]h_2[1\text{-}k] = x_2[0]h_2[1] + x_2[1]h_2[0] + x_2[2]h_2[\text{-}1] = -0,5$$

$$y_2[2]=\sum_{k=0}^{5} x_2[k]h_2[2\text{-}k] = x_2[0]h_2[2] + x_2[1]h_2[1] + x_2[2]h_2[0] = -1$$

$$y_2[3]=\sum_{k=0}^{5} x_2[k]h_2[3\text{-}k] = x_2[0]h_2[3] + x_2[1]h_2[2] + x_2[2]h_2[1] = 4,5$$

$$y_2[4]=\sum_{k=0}^{5} x_2[k]h_2[4\text{-}k] = x_2[1]h_2[3] + x_2[2]h_2[2] = 3$$

$$y_2[5]=\sum_{k=0}^{5} x_2[k]h_2[5\text{-}k] = x_2[3]h_2[2] + x_2[2]h_2[3] = -9$$

Vậy: $y_2[n]=\left\{0 \quad \underset{\uparrow}{-0,5} \quad -1 \quad 4,5 \quad 3 \quad -9\right\}$

c) Làm tương tự như trên, ta được:

$$y_3[n] = x_1[n]*h_2[n] = \sum_{k=0}^{5} x_2[k]h_2[n-k] = \left\{\underset{\uparrow}{0} \quad 0 \quad \text{-}1 \quad \text{-}2 \quad 6.25 \quad 0.5 \quad \text{-}1.5\right\}$$

d). Làm tương tự như trên, ta được:

$$y_4[n] = x_2[n]*h_1[n] = \sum_{k=0}^{5} x_2[k]h_1[n-k] = \left\{ 2 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad -6 \quad -6 \quad 0 \quad 9 \right\}$$

2.7. a). Tín hiệu lối ra là nhân chập của tín hiệu lối vào với đáp ứng xung của hệ thống:

$y[n] = x[n]*h[n] =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k]\{u[n-k]-u[n-N-k]\}, \quad 0 \le n \le N-1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \{u[n-k]-u[n-N-k]\}, \quad 0 \le n \le N-1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a^k u[n-k] - \sum_{k=0}^{\infty} a^k u[n-N-k], \quad 0 \le n \le N-1$$

Từ đây ta thấy nếu $n < 0$ thì $u[k] = 0$; do vậy tổng sẽ bằng 0; tức là $y[n] = 0$.

Khi $n > 0$, thì: $y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad 0 \le n \le N-1$

Khi $n > N-1$, thì: $y[n] = \sum_{k=n-N+1}^{n} a^k = \dfrac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1-a} = a^{n-N+1}\dfrac{1-a^N}{1-a}, \quad n > N-1$

Tóm lại: $y[n] = x[n]*h[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \le n \le N-1 \\ a^{n-N+1}\dfrac{1-a^N}{1-a}, & n > N-1 \end{cases}$

b). $y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n-k]$

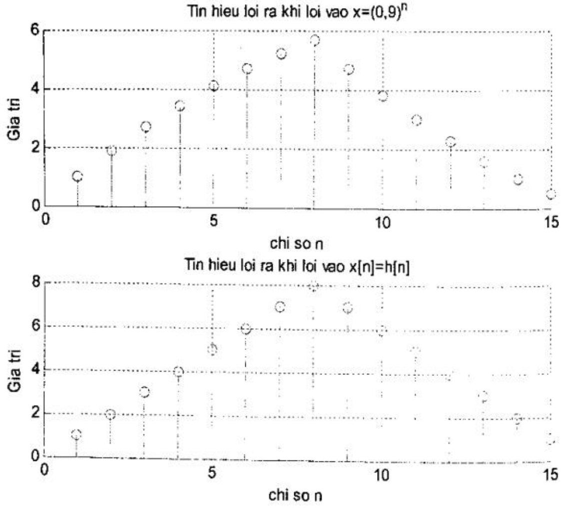
Vì $x[k] = 0$ khi $k < 0$ và $x[n-k] = 0$ khi $k > n$, nện tổng trên trở thành:

$$y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=n}^{N-1} x[k]x[n-k] = \begin{cases} n+1, & 0 \le n \le N-1 \\ 2N-n, & N \le n \le 2N-2 \end{cases}$$

Như vậy y[n] là một xung tam giác với giá trị cực đại bằng N.

c). Tại vị trí mà mẫu lối ra có giá trị y[n] = N/4 thì $n = \frac{N}{4} - 1$ và $n = 2N - \frac{N}{4} - 1 = \frac{7N}{4} - 1$. Vị trí mà mẫu lối ra có giá trị y[n] = N/2 thì $n = \frac{N}{2} - 1$ và $n = 2N - \frac{N}{2} - 1 = \frac{3N}{2} - 1$.

d) Hình BG2.7 vẽ hai tín hiệu lối ra đối với hai tín hiệu lối vào ở câu a) và b) với N = 8 mẫu.



Hình BG2.7.

2.8. Tín hiệu lối ra $y[n] =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (0,9)^{n-k} u[n-k]\cos(\omega_0 k)u[k]$$

$$= (0,9)^n \sum_{k=0}^{n} (0,9)^{-k} \cos(\omega_0 k)$$

$$= \frac{(0,9)^n}{2}\left[\frac{1-\left(0,9^{-1}e^{j\omega_0}\right)^{n+1}}{1-0,9^{-1}e^{j\omega_0}} + \frac{1-\left(0,9^{-1}e^{-j\omega_0}\right)^{n+1}}{1-0,9^{-1}e^{-j\omega_0}}\right]$$

$$= (0,9)^n \frac{1-0,9^{-1}\cos\omega_0 - (0,9)^{-(n+1)}\cos(n+1)\omega_0 + (0,9)^{-(n+2)}\cos\omega_0 n}{1-2.0,9^{-1}\cos\omega_0 + 0,9^{-2}}$$

Vậy: $$y[n] = \frac{(0,9)^{n+2} - (0,9)^{n+1}\cos\omega_0 - (0,9)\cos(n+1)\omega_0 + \cos\omega_0 n}{1,81 - 1,8\cos\omega_0}$$

Tín hiệu lối ra y[n] này chứa hai thành phần: *đáp ứng quá độ* và *đáp ứng dừng*. Đáp ứng quá độ sẽ dần tới không khi cho n dần ra v"cùng ; khi đó đáp ứng trạng thái dừng có giá trị bằng:

$$y[n] = \frac{\cos\omega_0 n - (0,9)\cos(n+1)\omega_0}{1,81 - 1,8\cos\omega_0} u[n]$$

❒ NHẬN DẠNG TÍN HIỆU, NHẬN DẠNG HỆ THỐNG

2.9. a). Ta thấy lối ra của hệ thống LTI bằng nhân chập của lối vào với đáp ứng xung:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] = h[0]x[n] + \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$$

Từ đó tìm được: $$x_1[n] = \frac{1}{h_1[0]}\left\{y_1[n] - \sum_{k=1}^{M} h_1[k]x_1[n-k]\right\}$$

Dãy x[n] có chiều dài $N_X = 7 - 4 + 1 = 4$. Vậy, ta tính x[n] với n = 0,1,2,3.

$h_1[0] = 2$. Vậy: $x_1[n] = \frac{1}{2}\left\{y_1[n] - \sum_{k=1}^{M} h_1[k]x_1[n-k]\right\}$:

$$x[0]=\frac{1}{2}\left\{0-\sum_{k=1}^{3}h[k]x[-k]\right\}=0$$

$$x[1]=\frac{1}{2}\left\{y[1]-\sum_{k=1}^{3}h[k]x[-k]\right\}=\frac{1}{2}\left\{4-\sum_{k=1}^{3}h[k]x[1-k]\right\}=2$$

$$x[2]=\frac{1}{2}\left\{y[2]-\sum_{k=1}^{3}h[k]x[2-k]\right\}=\frac{1}{2}\left\{2-\sum_{k=1}^{3}h[k]x[2-k]\right\}=0$$

$$x[3]=\frac{1}{2}\left\{y[3]-\sum_{k=1}^{3}h[k]x[-k]\right\}=\frac{1}{2}\left\{-1-\sum_{k=1}^{3}h[k]x[3-k]\right\}=-0,5$$

Vậy: $h_1[n]=\left\{\underset{\uparrow}{0} \quad 2 \quad 0 \quad -0,5\right\}$

b). Ta thấy lối ra của hệ thống LTI bằng nhân chập của lối vào với đáp ứng xung:

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M}h[k]x[n-k]=h[0]x[n]+\sum_{k=0}^{M}h[k]x[n-k]$$

Từ đó tìm được: $x_2[n]=\frac{1}{h_2[0]}\left\{y_2[n]-\sum_{k=1}^{M}h_{21}[k]x_2[n-k]\right\}$

Dãy x[n] có chiều dài N_X = 9 - 5 + 1 = 5. Vậy, ta tính x[n] với n = 0,1,2,3.

$h_2[0]$ = 1, nên: $x_2[n]=\left\{y_2[n]-\sum_{k=1}^{M}h_{21}[k]x_2[n-k]\right\}$.

Tính ra ta được:

$$x_2[n]=\left\{\underset{\uparrow}{1} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\right\}$$

c). Ta thấy lối ra của hệ thống LTI bằng nhân chập của lối vào với đáp ứng xung:

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M}h[k]x[n-k]=h[0]x[n]+\sum_{k=0}^{M}h[k]x[n-k]$$

Từ đó tìm được: $x[n]=\frac{1}{h[0]}\left\{y[n]-\sum_{k=1}^{9}h[k]x[n-k]\right\}$

Dãy $x_3[n]$ có chiều dài N_X = 5 - 3 + 1 = 3.

Vậy, ta tính x[n] với n = 0,1,2.

$$h_3[0] = 3+j2, \text{ nên: } x_3[n] = \frac{1}{3+j2}\left\{y_3[n] - \sum_{k=1}^{5} h_3[k]x_3[n-k]\right\}$$

Tình ra ta được:

$$x_3[n] = \left\{\underset{\uparrow}{-4+j} \quad -0,6923+j0,4615 \quad 3,4556+j1,1065\right\}$$

2.10. a) Đáp ứng xung của hệ thống:

$$h[n] = (\,h[n] = (-\frac{1}{a})h[n-1] + \delta[n-1]:$$

$$h[0] = 0$$

$$h[1] = 1$$

$$h[2] = (-\frac{1}{a})h[1] = (-\frac{1}{a})$$

$$h[3] = (-\frac{1}{a})h[2] = (-\frac{1}{a})^2$$

$$\vdots$$

$$h[n] = (-\frac{1}{a})h[n-1] = (-\frac{1}{a})^{n-1}u[n-1]$$

b) Để hệ thống ổn định thì a > 1; vì khi đó đáp ứng xung sẽ giới nội.

2.11. Lối ra:

$$y[n] = x[n]*h[n] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\alpha^k + \beta^k\right)u[k].Au[n-k] =$$

$$= A\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha^k + \beta^k\right)u[n-k] = A\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha^k + \beta^k\right) = A\left[\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} + \frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}\right]u[n]$$

Vậy:

$$y[n]=\left[\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}+\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}\right]u[n]$$

❑ TÍNH CHẤT CỦA HỆ THỐNG LTI DỰA TRÊN ĐÁP ỨNG XUNG

2.12. a). Trước hết, ta thiết lập quan hệ giữa lối ra y[n] với lối vào x[n]:

$$y[n] = v[n].u[n] = \{x[n]*(1/4)^n u[n+10]\}.u[n]$$
$$= x[n]*(1/4)^n u[n+10], \quad n \geq 0$$

Từ đây, ta thấy nếu lối vào $x[n] = \delta[n]$, thì lối ra sẽ là:

$$y[n] = \delta[n]*(1/4)^n u[n+10] = (1/4)^n u[n+10], \quad n \geq 0$$

Bây giờ, nếu ta cho lối vào $x[n] = \delta[n-1]$, ta sẽ thu được lối ra:

$$y[n] = \delta[n-1]*(1/4)^n u[n+10] = (1/4)^{n-1}u[n+9]$$

Mặt khác, nếu ta trễ tín hiệu lối ra đi 1 đơn vị, đối với lối vào $x[n] = \delta[n]$, ta sẽ thu được:

$$y[n-1] = \delta[n-1]*(1/4)^{n-1}u[n+9] = (1/4)^{n-2}u[n+8]$$

Rõ ràng là $y[n-1] = Z^{-1}\{y[n]\} \neq R\{\delta[n-1]\}$, nên hệ thống không bất biến với thời gian; nghĩa là không LTI.

b). Hệ thống không nhân quả vì y[n] có giá trị $\neq 0$, khi $n < 0$. Thật vậy, nếu tác động vào lối vào $x[n] = \delta[n-1]$ thì lối ra $y[n-1] = (1/4)^{n-2} u[n+8] \neq 0$ với $n \geq 0$.

c). Hệ thống là ổn định, vì với lối vào giới nội thì lối ra cũng giới nội. Vì vậy hệ thống ổn định theo nghĩa BIBO.

2.13. a) Hệ thống này không ổn định vì đáp ứng xung không giới nội. Thật vậy, chuẩn L_1 của đáp ứng xung này bằng ∞ là:

$$L_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|4^n u[n]\right| = \sum_{n=0}^{\infty}|4|^n = \infty$$

b) Hệ thống này ổn định vì đáp ứng xung hữu hạn.

c) Hệ thống này ổn định vì đáp ứng xung giới nội; tức là chuẩn L_1 có giá trị hữu hạn:

$$L_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|3^n u[-n-1]\right| = \sum_{n=-1}^{-\infty}|3|^n = \sum_{m=1}^{\infty}|3|^{-m} = -1+\frac{1}{1-3^{-1}} = 0,5$$

d) Hệ thống này không ổn định vì đáp ứng xung không giới nội.
e) Hệ thống này không ổn định vì đáp ứng xung không giới nội.
f) Hệ thống này ổn định vì đáp ứng xung hữu hạn.

2.14. a). Vì lối ra $y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$, nên ta tìm được:

$$N_4 = N_0 + N_2;\ N_5 = N_1 + N_2$$

b). Theo kết quả của câu a), thì y[n] có ít nhất N + M -1 giá trị khác không.

2.15. Lối ra : $y[n] = x[n]*h[n] =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k](a^{(-n-k)}u[-n-k]) =$$

$$= a^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k}u[-n-k] = \begin{cases} \dfrac{a^{-n}}{1-a}, n<0 \\ \dfrac{1}{1-a}, n \geq 0 \end{cases}$$

2.16. Từ các tín hiệu cho trong sơ đồ, ta tìm được:

$$y[n] = x[n] - aw[n-1]$$
$$w[n] = y[n] + aw[n-1]$$

Từ đó tìm được: $w[n] = x[n]$.

Vậy: $y[n] = x[n] - ax[n-1]$

Đây là một hệ thống tiên đoán tín hiệu lối vào, có đáp ứng xung h[n]:

$$h[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$$
$$h[0] = 1;\ h[1] = -a$$

Đây là hệ thống có đáp ứng xung hữu hạn chỉ 2 mẫu là 1 và -a.
Lối ra y[n] là sai số tiên đoán.

2.17. a). Đáp ứng xung đơn vị: $h[n] = ah[n-1] + b\delta[n]$:

$$h[0] = b$$
$$h[1] = ab$$
$$h[2] = a^2b$$

$$h[n] = ba^n u[n]$$

b) Đáp ứng của hệ thống đối với lối vào $x[n] = 3u[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ba^k u[k].2u[n-k] = 3\sum_{k=-\infty}^{\infty} ba^k u[n-k] =$$

$$= 3\sum_{k=0}^{n} ba^k = 3b\frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad a \neq 1$$

c). Hệ thống là tuyến tính và bất biến với thời gian nếu các điều kiện ban đầu bằng không.

2.18. a). $y[n] = b_0(x[n] + x[n\text{-}4]) + b_1(x[n\text{-}1] + x[n\text{-}3]) + b_2x[n\text{-}2]$

Đáp ứng xung đơn vị:

$$h[n] = b_0(\delta[n] + \delta[n\text{-}4]) + b_1(\delta[n\text{-}1] + \delta[n\text{-}3]) + b_2\delta[n\text{-}2]$$

b). Từ sơ đồ, ta tìm được các phương trình:

$$Y = Z^{-1}W + \alpha W$$

$$W = X - \alpha Z^{-1}W \Rightarrow W = \frac{X}{1+\alpha Z^{-1}}$$

Thay W vào phương trình trên, ta được:

$$Y = (Z^{-1}+\alpha)W = \frac{(Z^{-1}+\alpha)X}{1+\alpha Z^{-1}}$$

Hay: $Y + \alpha Z^{-1}Y = Z^{-1}X + \alpha X$

Chuyển sang lĩnh vực thời gian, ta được:

$$y[n] + \alpha y[n\text{-}1] = \alpha x[n] + x[n\text{-}1]$$

Đáp ứng xung:

$$h[n] = \alpha\delta[n] + \delta[n\text{-}1] - \alpha h[n\text{-}1]$$

2.19. a). Ta thấy ngay hệ thống không tuyến tính, vì:

$$R\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_1 x_1[n]\} \neq y[\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]]$$

b). Để xem hệ thống có bất biến với thời gian không, trước hết ta tính:

$$R\{x[n-k]\}. \text{ Vì } y[n] = R\{x[n]\} = x[n] - y^2[n-1] + y[n-1],$$

nên:

$$R\{x[n-k]\} = x[n-k] - y^2[n-k-1] + y[n-k-1]$$

Bây giờ ta áp dụng toán tử trễ lên tín hiệu lối vào y[n] đi k đơn vị, ta sẽ được:

$$Z^{-k}\{y[n]\} = y[n-k] = x[n-k] - y^2[n-1-k] + y[n-1-k]$$

Ta thấy:

$$R\{x[n-k]\} = Z^{-k}\{y[n]\} = y[n-k],$$

nên hệ thống là bất biến với thời gian.

c). Khi lối vào $x[n] = \alpha u[n]$, thì lối ra y[n] sẽ hội tụ tới hằng số C khi $n \to \infty$, có nghĩa là ta sẽ thu được hệ thức từ phương trình sai phân:

$$C = \alpha - C^2 + C \Rightarrow C = \to \sqrt{\alpha}.$$

Có nghĩa là: $y[n] = \sqrt{\alpha}$ khi $n \to \infty$

2.20. a). $y_1[n] = x_1[n]*h_1[n] = x_1[n]*(2\delta[n] + \delta[n-1] - 3\delta[n-3])$

$$= 2x_1[n]*\delta[n] + x_1[n]*\delta[n-1] - 3x_1[n]*\delta[n-3]$$

Ta thấy:

$$x_1[n]*\delta[n] = x_1[n]$$

nên:

$$x_1[n]*\delta[n-1] = x_1[n-1], \ldots,$$

vậy:

$$y_1[n] = 2x_1[n] + x_1[n-1] - 3x_1[n-3]$$

b). Làm tương tự như câu a), ta tìm được:

$$y_2[n] = -2x_2[n-2] - 0,5x_2[n-1] + 3x_2[n-3]$$

c). $y_2[n] = -2x_3[n-2] - 0,5x_3[n-1] + 3x_3[n-3]$

d). $y_4[n] = 2x_4[n] + x_4[n-1] - 3x_4[n-3]$

2.21. Giả sử số đó có dạng: $f[n] = \alpha r^n = \alpha r^{n-1} + \alpha r^{n-2}$. Hay: $r^2 - r - 1 = 0$. Từ đây, ta xác định được $r = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Vì r có hai nghiệm, nên ta có thể chọn số Fibonacci dạng:

$$f[n] = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Trong đó: α_1 và α_2 là những hệ số được xác định từ điều kiện ban đầu $f[0] = 0$ và $f[1] = 1$.

2.22. a). Nghiệm thuần nhất thỏa mãn phương trình sai phân:

$$y[n] - \frac{1}{4} y[n-1] - \frac{1}{8} y[n-2] = 0$$

Phương trình này có đa thức đặc trưng:

$$\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{8} = 0$$

Đa thức đặc trưng có hai nghiệm:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{4}$$

Vì vậy nghiệm thuần nhất có dạng:

$$y_C[n] = C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

b) Đáp ứng xung của hệ thống chính là đáp ứng của hệ thống đối với lối vào $x[n] = \delta[n]$. Nó bằng đáp ứng với lối vào để trống (nghiệm thuần nhất); Tức là:

$$h[n] = C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n \quad n \geq 0$$

Bây giờ xác định các hằng số C_1 và C_2:

$$h[0] = C_1 + C_2$$

$$h[1] = C_1 \left(\frac{1}{2}\right) + C_2 \left(-\frac{1}{4}\right)$$

Mặt khác từ phương trình gốc, khi cho $x[n] = \delta[n]$, ta có lối ra $y[n] = h[n]$. Từ đó thu được:

$$h[n]-\frac{1}{4}h[n-1]-\frac{1}{8}h[n-2]=3\delta[n]$$

Từ đây, tìm được: $h[0]=3$; $h[1]=\frac{3}{4}$. Từ đó ta tìm được 2 phương trình để xác định các hằng số C_1 và C_2:

$$h[0]=C_1+C_2=3$$

$$h[1]=C_1\left(\frac{1}{2}\right)+C_2\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

Từ đây tìm được: $C_1=2$; $C_1=1$.

Vậy đáp ứng xung đơn vị của hệ thống nhân quả là:

$$h_C[n]=\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

Đáp ứng xung của hệ thống phản nhân quả là:

$$h_{ac}[n]=\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]u[-n-1]$$

c). Rõ ràng hệ thống nhân quả là ổn định, vì đáp ứng xung $h_C[n]$ giới nội vì chuẩn L_1 của nó có giá trị:

$$L_1=\sum_0^{\infty}\left\|\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]\right\|=2\frac{1}{1-0,5}+\frac{1}{1-0,25}=\frac{16}{3}$$

Hệ thống phản nhân quả không ổn định vì chuẩn L_1 của nó vô hạn.

d). Nghiệm riêng tìm được dưới dạng: $y_P[n]=Cn(1/2)^n$.

Để xác định hằng số C. ta thay giá trị này vào phương trình gốc, ta được:

$$Cn(1/2)^n-\frac{1}{4}C(n-1)(1/2)^{n-1}-\frac{1}{8}(n-2)C(1/2)^{n-2}=3(1/2)^n$$

Từ đây, tìm được C = 2. Vậy nghiệm riêng tìm được là: $2n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

Từ đó tìm được nghiệm tổng quát của phương trình trên là:

$$y[n]=\left[C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_2\left(-\frac{1}{4}\right)^n+2n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện ban đầu.

2.23. Cách 1: Khi lối vào $x[n] = \delta[n]$ thì lối ra $y[n] = h[n]$ là đáp ứng xung đơn vị của hệ thống. Vì vậy từ phương trình sai phân, ta tìm được:

$$h[n]-\frac{3}{4}h[n-1]+\frac{1}{8}h[n-2]=2\delta[n-1]$$

Hay:

$$h[n]=\frac{3}{4}h[n-1]-\frac{1}{8}h[n-2]+2\delta[n-1]$$

Nhưng :

$$y[n]=0 \text{ khi } n<0$$

vì vậy:

$$h[n]=0 \text{ khi } n<0$$

Như vậy $y[n] = h[n]$ chính là đáp ứng xung đơn vị của hệ thống:

$$y[n]=\frac{3}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]+2\delta[n-1]$$

$$y[0]=0$$

$$y[1]=2$$

$$y[2]=\frac{3}{4}h[1]=\frac{3}{2}$$

$$y[3]=\frac{3}{4}h[2]-\frac{1}{8}h[1]=\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}-\frac{1}{8}\times 2+0=\frac{7}{8}$$

.

.

.

Cách 2: Theo bài ra thì $y[n]$ chính là nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân của hệ thống:

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=0$$

Phương trình này có đa thức đặc trưng: $\lambda^2-\frac{3}{4}\lambda+\frac{3}{8}=0$. Phương trình này có hai nghiệm là: $\lambda_1=\frac{1}{2};\lambda_2=\frac{1}{4}$. Vậy nghiệm thuần nhất có dạng:

$$y[n]=\left[C_1(\frac{1}{2})^n+C_2(\frac{1}{4})^n\right]u[n]$$

Dựa vào điều kiện ban đầu y[0] = 0, ta xác định được các hằng số C_1 và C_2: $C_1 = -C_2 = C$. Vậy:

$$y[n] = C\left[(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{4})^n \right] u[n]$$

Trong đó C là hằng số được xác định bằng 2.

2.24. a) Đây chính là nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân với $x[n] = 0$. Phương trình này có đa thức đặc trưng:

$$\lambda^n + \lambda^{n-1} - 6\lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 + \lambda - 6)$$
$$= \lambda^{n-2}(\lambda^2 + \lambda - 6) = 0$$

Đa thức đặc trưng:

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + \lambda - 6) = 0$$

có hai nghiệm phân biệt là $\lambda_1 = -3$ và $\lambda_2 = 2$. Do đó nghiệm thuần nhất tìm được dưới dạng:

$$y_C[n] = C_1(-3)^n + C_2(2)^n$$

trong đó C_1 và C_2 là những hệ số hằng số được xác định từ các điều kiện ban đầu. Ta thấy:

$$y_C[0] = C_1 + C_2 = -y[-1] + 6y[-2] = -1-6 = -7$$
$$y_C[1] = C_1 + C_2 = -y[0] + 6y[-1] = 7+6 = 13$$

Từ đây tìm được $C_1 = -5,4$; $C_2 = -1,6$. Vậy đáp ứng của hệ thống với lối vào để trống là:

$$y_C[n] = -5,4(-3)^n - 1,6(2)^n$$

b) Đáp ứng xung đơn vị chính là đáp ứng của hệ thống với lối vào $x[n] = \delta[n]$. Nó chính là nghiệm thuần nhất với lối vào bằng $\delta[n]$. Vậy đáp ứng xung có dạng:

$$h[n] = C_1'(-3)^n + C_2'(2)^n$$

Các hằng số được xác định từ phương trình khi cho $x[n] = \delta[n]$:

$$h[n] + h[n-1] - 6h[n-2] = \delta[n]$$
$$h[0] = C_1' + C_2' = 1$$
$$h[1] = -3C_1' + 2C_2' = -1$$

Từ đó tìm được $C_1' = 0,6$; $C_2' = 0,4$. Vậy đáp ứng xung tìm được:

$$h[n] = [0,6(-3)^n + 0,4(2)^n]u[n]$$

c) 1). Vì tín hiệu lối vào x[n] là hằng số, nên nghiệm riêng $y_P[n]$ cũng là hằng số và được tìm dưới dạng:

$$y_P[n] = \alpha$$

Thay giá trị này vào phương trình sai phân của hệ thống đã cho ta được:

$$\alpha + \alpha - 6\alpha = 8u[n]$$

với $n \geq 0$ ta được $\alpha = -2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình sai phân đã cho là:

$$y[n] = c_1(-3)^n + c_2(2)^n - 2, \quad \text{với } n \geq 0$$

Các hệ số hằng số c_1 và c_2 được xác định nhờ điều kiện ban đầu:

$y[-1] = 1$ và $y[-2] = -1$:

$$c_1(-3)^{-2} + c_2(2)^{-2} - 2 = -1$$

$$c_1(-3)^{-1} + c_2(2)^{-1} - 2 = 1$$

Giải hệ hai phương trình này sẽ tìm được $c_1 = -1{,}8$, $c_2 = 4{,}8$

Cuối cùng nghiệm tổng quát của phương trình sai phân của hệ thống là:

$$y[n] = 4{,}8(2)^n - 1{,}8(-3)^n - 2 \quad \text{với } n \geq 0$$

2). Ta thấy tín hiệu lối vào có dạng giống như số hạng của nghiệm thuần nhất nên, nghiệm riêng tìm được dưới dạng:

$$y_p[n] = C.n.(2)^n$$

Trong đó C là một hằng số được xác định sau khi thay nghiệm này vào phương trình gốc, ta được:

$$C.n.(2)^n = (2)^n u[n] - C.(n-1).(2)^{n-1} + 6C.(n-2).(2)^{n-2} \quad n \geq 0$$

Hay: $C.n = 1 - C.(n-1).(2)^{-1} + 6C(n-2)(2)^{-2}$

Từ phương trình này ta thu được $C = 0{,}4$.

Do đó, nghiệm tổng quát: $y[n] = y_c[n] + y_p[n]$ là:

$$y[n] = C_1(2)^n + C_2(-3)^n + 0{,}4n.(2)^n \quad n \geq 0$$

Áp dụng các điều kiện ban đầu ta tìm được hệ hai phương trình độc lập để xác định hai hằng số C_1 và C_2:

$$y[-1] = C_1(2)^{-1} + C_2(-3)^{-1} + 0{,}4(-1)(2)^{-1} = 1$$

$$y[-2] = C_1(2)^{-2} + C_2(-3)^{-2} + 0{,}4(-2)(2)^{-2} = -1$$

Giải hệ hai phương trình này đối với C_1 và C_2, ta tìm được:

$C_1 = -0{,}96$ và $C_2 = -5{,}04$

Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình trên đối với tín hiệu vào $x[n] = (2)^n u[n]$ và với các điều kiện ban đầu đã cho tìm được dưới dạng:

$$y[n] = -0{,}96(2)^n - 5.04(-3)^n + 0{,}4n(2)^n, \quad n \geq 0$$

2.25. a) Nghiệm thuần nhất tìm được nhờ giải phương trình sai phân:

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 0$$

Đa thức đặc trưng tương ứng là: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm là: $\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 2$. Vậy nghiệm thuần nhất có dạng:

$$y_C[n] = \left[C_1(3)^n + C_2(2)^n\right]u[n]$$

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện ban đầu.

b). Đáp ứng xung đơn vị :

$$h[n] = 5h[n-1] - 6h[n-2] - 2\delta[n-1]$$

$$h[n] = 0 \text{ khi } n \leq 0.$$

Hoặc đáp ứng xung chính là nghiệm thuần nhất của phương trình với lối vào để trống:

$$h[n] = \left[C_1(3)^n + C_2(2)^n\right]$$

Từ đây tìm được:

$$h[0] = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2 = C$$

Vậy đáp ứng xung tìm được là:

$$h[n] = C\left[(3)^n - (2)^n\right]u[n]$$

Với C là hằng số tùy ý.

c). Bây giờ ta phải tìm lối ra khi lối vào x[n] = u[n]. Đây chính là nghiệm tổng quát $y[n] = y_C[n] + y_P[n]$ với $y_P[n]$ là nghiệm riêng. Nghiệm riêng có dạng giống với tín hiệu vào; có nghĩa là ta tìm nghiệm riêng dưới dạng: $y_P[n] = \alpha$. Thay vào phương trình chính, ta thu được:

$$\alpha - 5\alpha + 6\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$$

Vậy nghiệm tổng quát là:

$$y[n] = \left[C_1(3)^n + C_2(2)^n + 1\right]u[n]$$

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện y[0] = 0 và y[-1] = 0:

$$C_1 + C_2 + 1 = 0$$

$$C_1(3)^{-1} + C_2(2)^{-1} + 1 = 0$$

Giải hệ phương trình này và sau đó chọn $C_2 = -4$, ta sẽ được $C_1 = 3$.

Thay vào nghiệm tổng quát, ta thu được:

$$y[n] = \left[(3)^{n+2} - (2)^{n+2} + 1\right]u[n]$$

2.26. a). Đa thức đặc trưng:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 0{,}3\lambda - 0{,}4$$

b). Đa thức đặc trưng có hai nghiệm:

$$\lambda_1 = 0{,}8;\ \lambda_2 = -0{,}5.$$

Vậy đáp ứng của hệ thống với lối vào để trống:

$$y_C[n] = C_1(0,8)^n + C_2(-0,5)^n$$

Các hằng số được xác định từ điều kiện ban đầu:

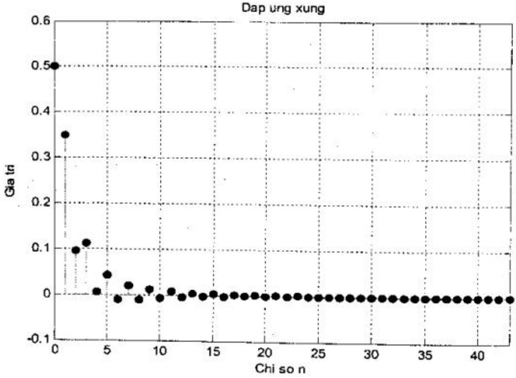
$$y_C[-1] = C_1(0,8)^{-1} + C_2(-0,5)^{-1} = 1$$
$$y_C[-2] = C_1(0,8)^{-2} + C_2(-0,5)^{-2} = 1$$

Từ đó tìm được: $C_2 = -1/26$; $C_1 = 0,74$;

b). Hệ thống luôn luôn ổn định vì đáp ứng xung:

$$h[n] = \frac{1}{2}\left(\delta[n] + \delta[n-1]\right) - 0,3h[n-1] + 0,4h[n-2]$$

giới nội như thấy trên hình BG2.26.



Hình BG2.26.

2.27. a). Đa thức đặc trưng: $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$

b). Đa thức đặc trưng có hai nghiệm: λ_1 ; $\lambda_2 = \frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2} = e^{\pm j\pi/3} =$

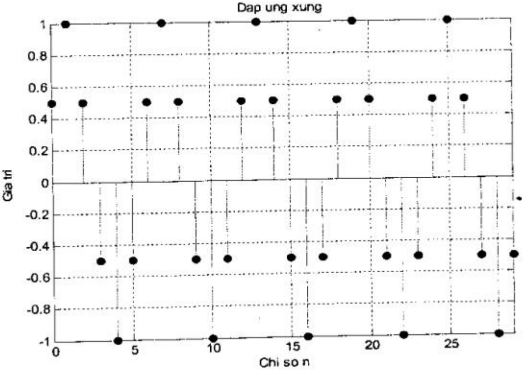
Vậy đáp ứng của hệ thống với lối vào để trống:

$$y_C[n] = C_1(e^{j\pi/3})^n + C_2(e^{-j\pi/3})^n$$

c). Hệ thống luôn luôn ổn định vì đáp ứng xung:

$$h[n] = \frac{1}{2}\left(\delta[n] + \delta[n-1]\right) + h[n-1] - h[n-2]$$

giới nội như thấy trên hình BG2.27.



Hình BG2.27.

2.28. Nghiệm tổng quát có dạng: $y[n] = C(-0{,}5)^n + 4/3$

Dùng điều kiện $y[-1] = 2$, tìm được $C = -1/3$.

Vậy:

$$y[n] = -1/3(-0{,}5)^n + 4/3$$

2.29. Nghiệm tổng quát bằng nghệm thuần nhất cộng nghiệm riêng. Nghiệm thuần nhất có dạng:

$$y_C[n] = C_1 e^{jn\pi/2} + C_2 e^{-jn\pi/2}$$

Nghiệm riêng có dạng:

$$y_P[n] = \alpha u[n].$$

Thay vào phương trình có vế phải, ta tìm được:

$$\alpha + \alpha = 10 + 10$$

Từ đó tìm được: $\alpha = 10$.

Vậy nghiệm tổng quát tìm được:

$$y[n] = C_1e^{jn\pi/2} + C_2e^{-jn\pi/2} + 10$$

Các hằng số C được xác định từ điều kiện ban đầu:

$$y[0] = -y[-2] + 10u[0] = -(-10) + 10 = 20;$$
$$y[1] = -y[-1] + 10u[1] + 10u[0] = -(0) + 10 + 10 = 20;$$

Từ đó ta tìm được 2 phương trình để xác định C_1, C_2:

$$C_1 + C_2 = 10$$
$$C_1e^{j\pi/2} + C_2e^{-j\pi/2} = 10$$

Từ đó tìm được: $C_1 = 5\sqrt{2}e^{-j\pi/4}; C_2 = 5\sqrt{2}e^{j\pi/4}$

Thay vào ta tìm được nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y[n] = 10(1+\sqrt{2})\cos(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}).u[n]$$

2.30. a). Đa thức đặc trưng:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - |2\alpha\cos\phi|\lambda + |\alpha^2|$$

b). Đó chính là nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân:

$$y_C[n] = C_1(\lambda_1)^n + C_2(\lambda_2)^n$$

Trong đó λ_1 và λ_2 là nghiệm của đa thức đặc trưng $P(\lambda) = 0$.

Giải phương trình $P(\lambda) = 0$ ta được: $\lambda_{1,2} = \alpha e^{\pm j\phi}$

Do vậy, nghiệm thuần nhất tìm được:

$$y_C[n] = C_1(\alpha e^{j\phi})^n + C_2(\alpha e^{-j\phi})^n$$

c). Đáp ứng xung đơn vị chính là nghiệm thuần nhất nhưng với lối vào $x[n] = \delta[n]$.

Vậy:

$$h[n] = C_1'(\alpha e^{j\phi})^n + C_2'(\alpha e^{-j\phi})^n$$

Các hằng số C_1' và C_2' được xác định từ điều kiện:

$$h[n] = \delta[n] + |2\alpha\cos\varphi|\, h[n-1] - |\alpha^2| h[n-2]$$
$$h[0] = 1 = C_1' + C_2'$$
$$h[1] = |2\alpha\cos\varphi| = C_1'(\alpha e^{j\phi}) + C_2'(\alpha e^{-j\phi})$$

Giải hệ phương trình này, ta tìm được:

$$C_1' = \frac{e^{j\phi}}{2j\sin\phi}; C_2' = \frac{e^{-j\phi}}{-2j\sin\phi}$$

Vậy đáp ứng xung tìm được:

$$h[n] = \frac{e^{j\phi}(\alpha e^{j\phi})^n}{2j\sin\phi} + \frac{e^{-j\phi}(\alpha e^{-j\phi})^n}{-2j\sin\phi} = \frac{(\alpha)^n}{\sin\phi}\sin(\phi n + \phi)u[n]$$

Vậy: $$h[n] = \frac{(\alpha)^n}{\sin\phi}\sin(\phi n + \phi)u[n]$$

2.31. a). Ta phải tìm nghiệm tổng quát của phương trình này với tín hiệu lối vào :

$$x[n] = \cos(n\pi/3)u[n]$$

Đa thức đặc trưng của phương trình:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}$$

Đa thức này có hai nghiệm: $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm j}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$

Vậy nghiệm thuần nhất:

$$y_C[n] = C_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^n + C_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

Nghiệm riêng có dạng sin giống với tín hiệu lối vào x[n]. Sau khi sử dụng điều kiện ban đầu đã cho, ta tính được:

$$y[n] = \left\{1,118\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4} + 1,107\right) + 1,733\sin\frac{n\pi}{3}\right\}u[n]$$

b). y[0] = 5; y[1] = 1,25; y[2] = 1; y[3] = -0,375

2.32. a) Đa thức đặc trưng của phương trình tìm được:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Đa thức này có hai nghiệm: $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 2$. Vậy nghiệm thuần nhất có dạng:

$$y_C[n] = C_1(5)^n + C_2(2)^n$$

Nghiệm này cũng chính là đáp ứng xung với lối vào $x[n] = \delta[n]$ thì lối ra $y[n] = h[n]$. Do đó, từ phương trình ta tìm được:

$$h[n] = 20\delta[n] + 7h[n-1] - 10h[n-2]$$

Từ đây ta tìm được: $h[0] = 20 = C_1 + C_2$

$$h[1] = 7h[0] = 140 = 5C_1 + 2C_2$$

Từ đó tìm được $C_1 = \frac{100}{3}; C_2 = -\frac{40}{3}$. Do đó đáp ứng xung tìm được:

$$h[n] = \frac{40}{3}\left[\frac{5}{2}(5)^n - (2)^n\right]u[n]$$

b). Nghiệm tổng quát bằng nghiệm riêng cộng với nghiệm thuần nhất. Nghiệm riêng có dạng giống với tín hiệu lối vào:

$$y_P[n] = \alpha u[n] + \beta n u[n]$$

Thay vào phương trình, ta xác định được $\alpha = 20$; $\beta = 20$. Vậy nghiệm tổng quát tìm được:

$$y[n] = y_C[n] + y_P[n] = C_1(5)^n + C_2(2)^n + 80 + 20n$$

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện ban đầu $y[-1] = y[-2] = 0$: $C_1 = \frac{500}{3}$; $C_2 = \frac{560}{3}$. Vậy nghiệm tổng quát tìm được:

$$y[n] = \left[\frac{500}{3}(5)^n + \frac{560}{3}(2)^n + 80 + 20n\right]u[n]$$

c). $y[0] = 60$; $y[1] = 560$; $y[2] = 3540$; $y[3] = 19.480$;...

2.33. Đa thức đặc trưng của phương trình tìm được:

$$\lambda^2 + 0,1\lambda - 0,06 = 0$$

Đa thức này có hai nghiệm: $\lambda_1 = -0,3$; $\lambda_2 = 0,2$. Vậy nghiệm thuần nhất có dạng:

$$y_C[n] = C_1(-0,3)^n + C_2(0,2)^n$$

Nghiệm tổng quát bằng nghiệm riêng cộng với nghiệm thuần nhất. Nghiệm riêng có dạng giống với tín hiệu lối vào:

$$y_P[n] = \alpha(2)^n u[n]$$

Thay vào phương trình, ta xác định được $\alpha = 0,966$. Vậy nghiệm tổng quát tìm được:

$$y[n] = y_C[n] + y_P[n] = C_1(-0,3)^n + C_2(0,2)^n + 0,966(2)^n$$

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện ban đầu y[-1] = y[-2] = 0: C_1 = -0,102; C_2 = 0,036. Vậy nghiệm tổng quát tìm được:

$$y[n] = \left[-0,102(-0,3)^n + 0,036(0,2)^n + 0,966(2)^n\right]u[n]$$

2.34. a). Đa thức đặc trưng của phương trình tìm được:

$$\lambda^2 + 0,1\lambda - 0,06 = 0$$

Đa thức này có hai nghiệm: λ_1 = -0,3; λ_2 = 0,2. Vậy nghiệm thuần nhất có dạng:

$$y_C[n] = C_1(-0,3)^n + C_2(0,2)^n$$

Với lối vào $x[n] = 2^n u[n]$, thì phương trình trở thành:

$$y[n] + 0,1y[n-1] - 0,06y[n-2] = 2^n u[n] - 22^{n-1}u[n-1] = \delta[n]$$

Vậy nghiệm của phương trình này chính là nghiệm thuần nhất: $y[n] = y_C[n]$.

Sử dụng điều kiện ban đầu, tính được các hằng số:

$$y[-1] = C_1(-0,3)^{-1} + C_2(0,2)^{-1} = 1$$

$$y[-2] = C_1(-0,3)^{-2} + C_2(0,2)^{-2} = 0$$

Giải ra, ta được: C_1 = -0,18; C_2 = 0,08. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$y[n] = -0,18(-0,3)^n + 0,08(0,2)^n$$

b). Đáp ứng xung chính là nghiệm thuần nhất với lối vào x[n] = δ[n] thì lối ra y[n] = h[n]. Do vậy:

$$h[n] = C_1'(-0,3)^n + C_2'(0,2)^n$$

Mặt khác, từ phương trình ta tìm được:

$$h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] - 0,1h[n-1] + 0,06h[n-2] \quad n \geq 0$$

Từ đây ta tìm được: $h[0] = 1 = C_1' + C_2'$

$$h[1] = -2-0,1h[0] = -2,1 = -0,3C_1' + 0,2C_2'$$

Từ đó tìm được $C_1' = 3,8; C_2' = -2,8$. Do đó đáp ứng xung tìm được:

$$h[n] = \left[3,8(-0,3)^n - 2,8(0,2)^n\right]u[n]$$

2.35. a). Từ hệ thức trên ta thu được:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{0} x[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k] + x[0] = y[-1] + x[0]$$

Vậy:

$$y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k]$$

Mặt khác:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k] + \sum_{k=0}^{n} x[k] = y[-1] + \sum_{k=0}^{n} x[k]$$

nên:

$$y[n] = y[-1] + \sum_{k=0}^{n} x[k]$$

Vậy, hệ thức đã được chứng minh.

b) Với lối vào $x_1[n]$, ta được lối ra: $\alpha_1 y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha_1 x_1[k]$. Nhân hai vế với α_1, ta được: $y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k]$. Tương tự, với lối vào $x_2[n]$, ta cũng thu được tín hiệu lối ra $y_2[n]$ và sau khi nhân với α_2, ta sẽ thu được: $\alpha_2 y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha_2 x_2[k]$. Bây giờ, nếu lối vào là $x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$, thì sẽ thu được tín hiệu lối ra là:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (\alpha_1 x_1[k] + \alpha_2 x_2[k]) = \alpha_1 \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + \alpha_2 \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k] =$$

$$= \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$$

Vậy hệ thống là tuyến tính.

2.36. Từ phương trình ta có:

$$y[n] = y_{re}[n] + jy_{im}[n] = x[n] + (a + jb)(\, y_{re}[n-1] + jy_{im}[n-1])$$

$$= x[n] + ay_{re}[n-1] + jay_{im}[n-1] + jby_{re}y[n-1] - by_{im}[n-1]$$

Từ đây, ta suy ra 2 phương trình bằng cách so sánh phần thực với phần thực, phần ảo với phần ảo:

$$y_{re}[n] = x[n] + ay_{re}[n-1] - by_{im}[n-1] \quad (1)$$

$$y_{im}[n] = ay_{im}[n-1] + by_{re}[n-1] \quad (2)$$

Từ phương trình (2), ta tìm được:

$$y_{im}[n-1] = \frac{1}{a}y_{im}[n] - \frac{b}{a}y_{re}[n-1] \quad (3)$$

Thay (3) vào (1), ta được:

$$y_{re}[n] = x[n] + ay_{re}[n-1] - \frac{b}{a}y_{im}[n] + \frac{b^2}{a}y_{re}[n-1]$$

Hay:

$$y_{re}[n] = x[n] - \frac{b}{a}y_{im}[n] + (\frac{b^2}{a} + a)y_{re}[n-1] \quad (4)$$

Từ (4), ta tìm được:

$$by_{im}[n] = -ay_{re}[n] + ax[n] + (a^2 + b^2)y_{re}[n-1]$$

Hay:

$$by_{im}[n-1] = ax[n-1] - ay_{re}[n-1] + (a^2 + b^2)y_{re}[n-2] \quad (5)$$

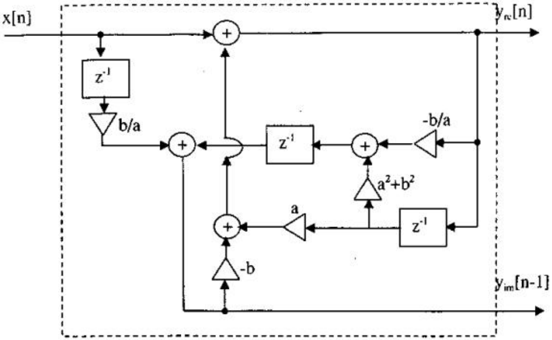
Như vậy, với một lối vào x[n], ta đã thu được hai lối ra là $y_{re}[n]$ và $y_{im}[n]$, tương đương với hai phương trình : (1) và (5).

b). Lấy phương trình (5) trừ đi (1), ta sẽ được nột phương trình:

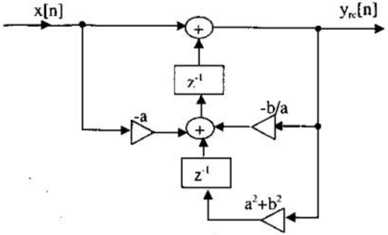
$$y_{re}[n] - 2ay_{re}[n-1] + (a^2 + b^2)y_{re}[n-2] = x[n] - ax[n-1]$$

Có nghĩa là hệ thống bây giờ là SISO.

c). Hình BG2.36a vẽ sơ đồ dòng tín hiệu thực thi mạch lọc dưới dạng một lối vào hai lối ra: Một lối ra cho phần thực, một cho phần ảo. Hình BG2.36b là sơ đồ dòng tín hiệu thực thi mạch lọc dưới dạng một lối vào, một lối ra. Đó là một tín hiệu thực, mô tả phần thực của tín hiệu phức lối ra y[n].



Hình BG.2.36a.



Hình BG.2.36b.

2.37. Cho $x[n] = \delta[n]$, ta sẽ thu được:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m \delta[n-m] = b_n$$

Vậy:

$$b_n = \sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = a_n * h[n] = h[n] * a_n$$

Đáp ứng tần số của hệ thống LTI

2.38. a). Đáp ứng tần số của hệ thống LTI khi cho đáp ứng xung, tìm được theo công thức:

$$H_1(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k] e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{3} e^{j2\pi k/3} e^{-j\omega k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} e^{-j(\omega - 2\pi/3)k} = \frac{1 - e^{-j(\omega-2\pi/3)4}}{1 - e^{-j(\omega-2\pi/3)}} = \frac{\sin(2\omega - 4\pi/3)}{\sin(\frac{\omega}{2} - \pi/3)} e^{-j\frac{3}{2}(\omega - 2\pi/3)}$$

Từ đây ta tìm được đáp ứng biên độ và đáp ứng pha:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{\sin(2\omega - 4\pi/3)}{\sin(\frac{\omega}{2} - \pi/3)}\right|$$

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} -\frac{3}{2}\omega + \pi, & \text{neu } \dfrac{\sin(2\omega - 4\pi/3)}{\sin(\frac{\omega}{2} - \pi/3)} > 0 \\ -\frac{3}{2}\omega + 2\pi, & \text{neu } \dfrac{\sin(2\omega - 4\pi/3)}{\sin(\frac{\omega}{2} - \pi/3)} < 0 \end{cases}$$

b). $H_2(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k] e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[(0,5)^k\right] e^{-j\omega k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[(0,4)^k\right] e^{-j\omega k} =$

$$= \frac{1}{1 - 0,5e^{-j\omega}} + \frac{1}{1 - 0,4e^{-j\omega}} = \frac{2 - 0,9e^{-j\omega}}{1 - 0,9e^{-j\omega} + 0,2e^{-j2\omega}}$$

Vậy:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2 - 0,9e^{-j\omega}}{1 - 0,9e^{-j\omega} + 0,2e^{-j2\omega}}$$

c). $H_3(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_3[k] e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2)^k u[-k-1] . e^{-j\omega k} =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1}(2)^k e^{-j\omega k} = -1 + \sum_{m=0}^{\infty}(2)^{-m}.e^{j\omega m} = \frac{0,5e^{j\omega}}{1-0,5e^{j\omega}}$$

Vậy:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0,5e^{j\omega}}{1-0,5e^{j\omega}}$$

d). $H_4(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_4[k]e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(0,5)^k \cos(0,1\pi k)u[k].e^{-j\omega k} =$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(0,5)^k e^{j0,1\pi k}.e^{-j\omega k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(0,5)^k e^{-j0,1\pi k}.e^{-j\omega k} = \quad =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-0,5e^{j0,1\pi}.e^{-j\omega}} + \frac{1}{1-0,5e^{-j0,1\pi}.e^{-j\omega}}\right] = \frac{1-0,5\cos(0,1\pi).e^{-j\omega}}{1-0,5\cos(0,1\pi).e^{-j\omega}+0,25.e^{-j2\omega}}$$

Vậy:

$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{1-0,5\cos(0,1\pi).e^{-j\omega}}{1-0,5\cos(0,1\pi).e^{-j\omega}+0,25.e^{-j2\omega}}$$

e). $H_5(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_5[k]e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^k e^{-j\omega k} + \left\{\sum_{m=0}^{\infty}\left[(4)^{-m}\right]e^{j\omega m} - 1\right\} =$

$$= \frac{1}{1-0,25e^{-j\omega}} + \frac{0,25e^{j\omega}}{1-0,25e^{j\omega}} = \frac{0,875}{1-0,5\cos\omega+0,125}$$

Vậy:

$$H_5(e^{j\omega}) = \frac{0,875}{1-0,5\cos\omega+0,125}$$

2.39. a). Dựa vào cách tính của bài 2.12d, ta tìm được ngay đáp ứng tần số của hệ thống này:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{2}\frac{2-\alpha\cos(\phi).e^{-j\omega}}{1-2\alpha\cos(\phi).e^{-j\omega}+\alpha^2.e^{-j2\omega}}$$

b). Biến đổi Fourier của tín hiệu lối ra với biến đổi Fourier của tín hiệu lối vào liên hệ với nhau bằng phương trình:

$$Y(e^{j\omega}) - 2\alpha\cos\varphi.\ e^{-j\omega}\ Y(e^{j\omega}) + \alpha^2\ e^{-j2\omega}\ Y(e^{j\omega}) = A\ X(e^{j\omega}) - \frac{A\alpha\cos\phi}{2}e^{-j\omega}$$

Từ đó tìm được phương trình sai phân:

$$y[n] - 2\alpha\cos\varphi.y[n-1] + \alpha^2 y[n-2] = Ax[n] - \frac{A\alpha\cos\phi}{2}x[n-1]$$

c).1). Với A = 1; $\alpha = 0{,}9$; $\varphi = \pi/3$, đáp ứng tần số tìm được:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-0{,}45.e^{-j\omega}}{1-0{,}9.e^{-j\omega}+0{,}81.e^{-j2\omega}}$$

Do vậy đáp ứng trạng thái dừng của hệ thống khi lối vào x[n] đã cho là:

$$y_{ss}[n] = H(e^{j\pi/6}).x[n] = \frac{1-0{,}45.e^{-j\pi/6}}{1-0{,}9.e^{-j\pi/6}+0{,}81.e^{-j\pi/3}}\cos(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{12})$$

$$= \frac{0{,}61+j0{,}225}{0{,}626-j0{,}251}\cos(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{12}) = 1{,}92\cos(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{12}+0{,}73)$$

Vậy:

$$y_{ss}[n] = 1{,}92\cos(\frac{\pi}{6}n+0{,}992)$$

2). Làm tương tự như trên, ta tính được tín hiệu lối ra $y_2[n]$:

$$y_2[n] = H(e^{j\pi/2})x_2[n] = \frac{1-0{,}45e^{-j\pi/2}}{1-0{,}9e^{-j\pi/2}+0{,}81e^{-j\pi}}\times 6\sin(n\pi/2+\pi/6)$$

$$= y_2[n] = 7.2\sin(n\pi/2-1.46)$$

❐ XÁC ĐỊNH ĐÁP ỨNG TẦN SỐ TỪ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

3.40. a). Gọi $Y(e^{j\omega})$ và $X(e^{j\omega})$ là biến đổi Fourier của y[n] và của x[n]. Lấy biến đổi Fourier hai vế của phương trình sai phân, ta được:

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) + e^{-j2\omega}X(e^{j\omega})$$

Từ đó tìm được đáp ứng tần số của hệ thống:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}$$

b). Quan hệ vào-ra của hệ thống trên lĩnh vực tần số được biểu thị bằng hệ thức:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

Từ đó tìm được:

$$Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) =$$

$$= X(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) + e^{-j3\omega}X(e^{j\omega})$$

Lấy biến đổi Fourier nghịch đảo hệ thức này, ta được:

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{3}{4}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] + x[n-3]$$

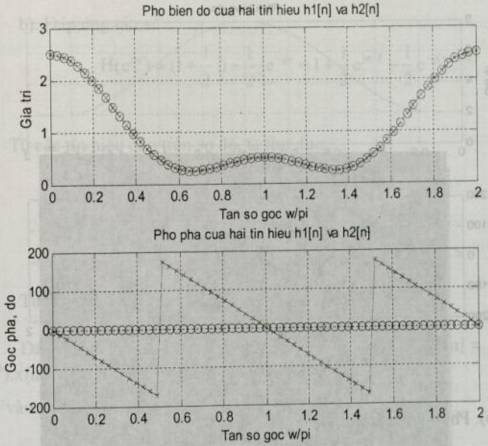
2.41. a). $H_1(e^{j\omega}) = 1 + \cos\omega + \frac{1}{2}\cos 2\omega;$

$$H_2(e^{j\omega}) = \left[1 + \cos\omega + \frac{1}{2}\cos 2\omega\right]e^{-j\omega}$$

b). $H_2(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}H_1(e^{j\omega})$

c). $\left|H_2(e^{j\omega})\right| = \left|H_1(e^{j\omega})\right|;\quad \angle H_1(e^{j\omega}) = 0;\quad \angle H_2(e^{j\omega}) = -2\omega$

Hình BG2.41 vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hai hệ thống đã cho.



Hình BG2.41.

2.42. $$H(e^{j\pi/4}) = \frac{1 - e^{-j2\pi/4}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\pi/4}} = 2(1+j) = 2\sqrt{2}e^{j\pi/4}$$

Vậy tín hiệu lối ra với mọi n là:

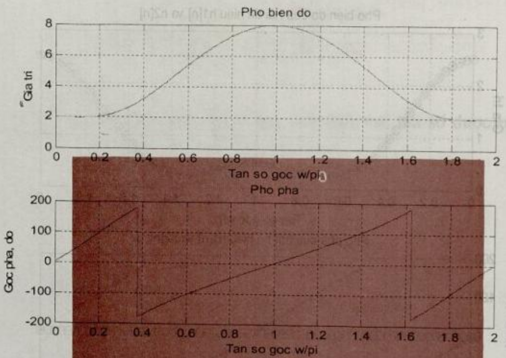
$$y[n] = 2\sqrt{2}e^{j\pi/4}\sin(\pi n/4) = 2\sqrt{2}\sin(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$$

2.43. a): $$\left|H(e^{j\omega})\right| = \sqrt{(1 - 3\cos\omega + 4\cos 2\omega)^2 + (3\sin\omega - 4\sin 2\omega)^2}\, e^{\Phi(\omega)}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \sqrt{26 - 30\cos\omega + 8\cos 2\omega}\, e^{\Phi(\omega)}$$

$$\Phi(\omega) = a\tan\frac{3\sin\omega - 4\sin 2\omega}{1 - 3\cos\omega + 4\cos 2\omega}$$

Hình BG2.43a vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống này.

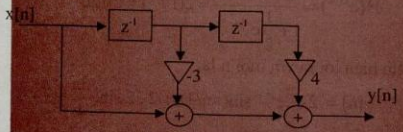


Hình BG2.43a.

b). Phương trình sai phân:

$$y[n] = x[n] - 3x[n-1] + 4x[n-2]$$

c). Sơ đồ dòng tín hiệu cho trên hình BG2.43b.



Hình BG2.43b.

2.44. a). $y[n] = x[n] + x[n] * \frac{1}{2}\{\delta[n] - \delta[n-1]\} \times j = x[n] +$

$$+\frac{1}{2}jx[n] - \frac{1}{2}jx[n-1]$$

Vậy:

$$y[n] = (1 + \frac{1}{2}j)x[n] - \frac{1}{2}jx[n-1]$$

b). Đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = (1+\frac{1}{2}j) - \frac{1}{2}je^{-j\omega} = 1+\frac{1}{2}e^{j\pi/2} - \frac{1}{2}e^{-j(\omega-\pi/2)}$$

2.45. Từ các tín hiệu cho trên sơ đồ, ta tìm được:

$$w[n] = x[n] + \frac{1}{2}w[n-1]$$

$$y[n] = w[n] + \frac{1}{2}w[n-1]$$

Từ đó tìm được: $y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{2}y[n-1]$

Đáp ứng tần số tìm được khi cho $x[n] = e^{j\omega n}$, thì lối ra $y[n] = H(e^{j\omega}).x[n]$.

Thay vào phương trình sai phân, ta tìm được đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1+0,5e^{-j\omega}}{1-0,5e^{-j\omega}}$$

2.46. a). Từ sơ đồ, ta tìm được ngay phương trình sai phân của hệ thống:

$$y[n] = x[n] + x[n-4] - 0,81y[n-4]$$

Đáp ứng xung đơn vị khi đó sẽ là:

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-4] - 0,81h[n-4]$$

Đáp ứng tần số:

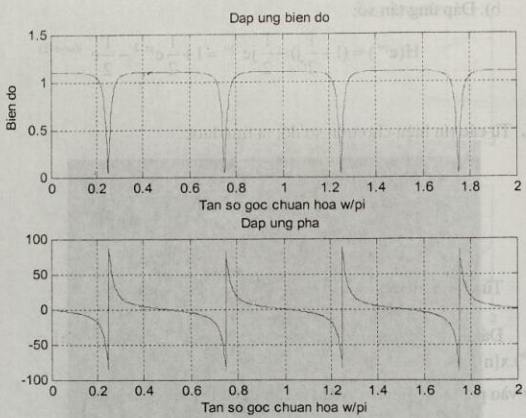
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1+e^{-j4\omega}}{1+0,81e^{-j4\omega}}$$

Hình BG2.46 vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha.

b). Tín hiệu lối ra:

$$y[n] = H(e^{j\pi/4})\cos(n\pi/4) = \frac{1+e^{-j\pi}}{1+0,81e^{-j\pi}}\cos(n\pi/4) = 0$$

Điều này cho thấy tín hiệu lối vào đã bị loại bỏ hoàn toàn.



Hình BG2.46.

2.47. a). Đáp ứng biên độ tìm được:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sqrt{1+2,5^2+1,5^2-5\cos\omega+3\cos2\omega-7,5\cos3\omega}.e^{j\Phi_1(\omega)}}{\sqrt{1+0,4^2+0,05^2+0,8\cos\omega-0,1\cos2\omega-0,04\cos3\omega}.e^{j\Phi_2(\omega)}}$$

Trong đó:

$$\Phi_1(\omega) = a\tan\frac{2,5\sin\omega-1,5\sin2\omega}{1-2,5\cos\omega+1,5\cos2\omega}$$

$$\Phi_2(\omega) = a\tan\frac{-0,4\sin\omega+0,05\sin2\omega}{1+0,4\cos\omega-0,05\cos2\omega}$$

Từ đó tìm được đáp ứng biên độ:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{\sqrt{9,5-5\cos\omega+3\cos2\omega-7,5\cos3\omega}}{\sqrt{1,2+0,8\cos\omega-0,1\cos2\omega-0,4\cos3\omega}}$$

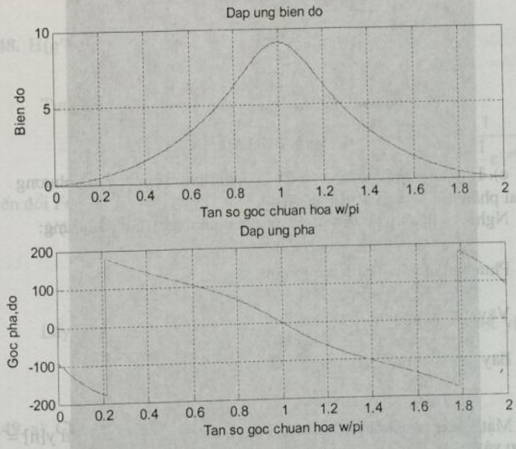
Đáp ứng pha:

$$\Phi(\omega) = \Phi_1(\omega) - \Phi_2(\omega)$$

Hình BG2.47a sau đây vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha với $0 \le \omega \le 2\pi$.

Khi $\omega = 0$ và 2π, thì biên độ bằng 0. Khi $\omega = \pi$, biên độ có giá trị cực đại và bằng:

$$\left|H(e^{j\pi})\right| = \frac{\sqrt{9,5+5+3+7,5}}{\sqrt{1,2-0,8-0,1+0,04}} = \frac{5}{\sqrt{0,34}} \approx 8,6$$



Hình BG2.47a.

b). Để tìm phương trình sai phân, trước hết ta viết quan hệ vào-ra trên phương diện tần số:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}).\ H(e^{j\omega})$$

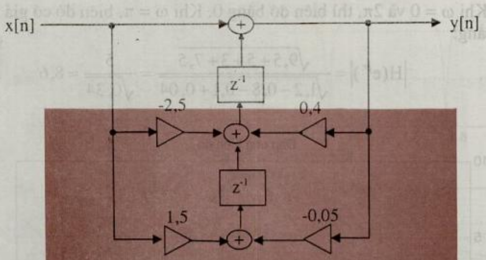
Thay biểu thức của $H(e^{j\omega})$, ta tìm được:

$$Y(e^{j\omega}) + 0,4e^{-j\omega}\ Y(e^{j\omega}) - 0,05\ e^{-j2\omega}\ Y(e^{j\omega})$$
$$= X(e^{j\omega}) + 2,5e^{-j\omega}\ X(e^{j\omega}) - 1,5\ e^{-j2\omega}\ X(e^{j\omega})$$

Từ đây suy ra phương trình sai phân:

$$y[n] - 0,4y[n-1] + 0,05y[n-2] = x[n] + 2,5x[n-1] - 1,5x[n-2]$$

c). Sơ đồ dòng tín hiệu để thực thi phương trình sai phân này cho trên hình BG2.47b.



Hình BG 2.47b.

c). Đáp ứng xung đơn vị chính là nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân với lối vào $x[n] = \delta[n]$.

Nghiệm thuần nhất tìm được nhờ giải phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 + 0,4\lambda - 0,05 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm:

$$\lambda_1 = 0,1 \text{ và } \lambda_2 = 0,5$$

Vậy đáp ứng xung tìm được dưới dạng:

$$h[n] = C_1(0,1)^n + C_2(0,5)^n,\ n \geq 0$$

Bây giờ xác định các hằng số C_1 và C_2. Ta tính:

$$h[0] = C_1 + C_2$$

$$h[n] = C_1 + 0,5C_2$$

Mặt khác, từ phương trình sai phân, khi cho $x[n] = \delta[n]$, thì $y[n] = h[n]$. Do vậy:

$$h[n] = -0,4h[n-1] + 0,05h[n-2] + \delta[n] + 2,5\delta[n-1] - 1,5\delta[n-2]$$

Do đó:

$$h[0] = 1 = C_1 + C_2$$

$$h[1] = 2,1 = C_1 + 0,5C_2$$

Từ đó tìm được: $C_2 = -2,2$; $C_1 = 3,2$. Vậy đáp ứng xung đơn vị tìm được là:

$$h[n] = \left\{3,2(0,1)^n - 2,2(0,5)^n\right\} u[n]$$

d). Đáp ứng của hệ thống với lối vào để trống $x[n] = 0$ chính là nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân:

$$y_C[n] = C_1'(0,1)^n + C_2'(0,5)^n$$

Để xác định C_1' và C_2', ta sử dụng điều kiện ban đầu:

$$y_C[0] = C_1' + C_2' = 0$$

$$y_C[1] = 0,1C_1' + 0,5C_2' = 3$$

Từ đó tìm được:

$$C_2' = 7,5;\ C_1' = -7,5$$

Vậy:

$$y_C[n] = -7,5(0,1)^n + 7,5(0,5)^n,\ n \geq 0$$

2.48. $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 5(-\frac{1}{2})^n u[n]e^{-j\omega n} = 5\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2}e^{-j\omega})^n = \dfrac{5}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

Tương tự:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{3})^n u[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3}e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

Biến đổi Fourier của tín hiệu lối ra sẽ là:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) =$$

$$= \frac{5}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})} = \frac{5}{1+\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

Lấy biến đổi Fourier nghịch đảo hệ thức này, ta sẽ thu được y[n]:

$$y[n] = 5\delta[n] - \frac{1}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2]$$

2.49. a). Cho tín hiệu vào $x[n] = e^{j\omega n}$, ta sẽ thu được tín hiệu ra là :

$$y[n] = H(e^{j\omega}).e^{j\omega n}$$

Thay hai hệ thức này vào phương trình sai phân, ta tìm được:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1}\sum_{m=0}^{M} e^{-j\omega m} = \frac{1}{M+1}\frac{1-e^{-j(M+1)\omega}}{1-e^{-j\omega}} =$$

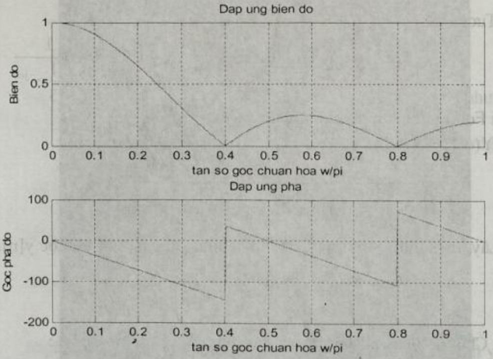
$$= \frac{1}{M+1}\frac{\sin(\frac{M+1}{2})\omega}{\sin(\frac{1}{2})\omega}e^{-j\frac{M}{2}\omega}$$

Từ đó tìm được đáp ứng biên độ và đáp ứng pha:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{M+1}\left|\frac{\sin(\frac{M+1}{2})\omega}{\sin(\frac{1}{2})\omega}\right|$$

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} -\frac{M}{2}\omega, & \text{nếu } \frac{\sin(M+1)\omega/2}{\sin\omega/2} > 0 \\ -\frac{M}{2}\omega + \pi, & \text{nếu } \frac{\sin(M+1)\omega/2}{\sin\omega/2} < 0 \end{cases}$$

Hình BG2.49 vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha với tần số góc $0 \le \omega \le \pi$ và $M = 4$.



Hình BG2.49.

b). Đáp ứng trạng thái dừng tìm được: $y_{SS}[n] = H(e^{j\pi/4}).\cos(\pi n/4-\pi/2)$

Trong đó:

$$H(e^{j\pi/4}) = \frac{1}{5}\frac{\sin(\frac{5\pi}{8})}{\sin(\frac{\pi}{8})}e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0,48e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Vậy:

$$y_{SS}[n] = 0,48e^{j\pi/2}.\cos(\pi n/4-\pi/2) = 0,24\cos(n\pi/4)$$

2.50. a). $h[n] = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$;

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

$$y_u[n] = u[n]*h[n] = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]*u[n] =$$

$$= \left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1\right]u[n]$$

b). $y_C[n] = \left[C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$

❒ GHÉP NỐI CÁC HỆ THỐNG LTI

2.51. $h[n] = h_1[n]*h_2[n] = \alpha^n u[n]*\beta^n u[n] =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^k u[k]\beta^{n-k}u[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\beta^{n-k}u[n-k] = \sum_{k=0}^{n}\alpha^k\beta^{n-k} =$$

$$= \beta^n\sum_{k=0}^{n}(\alpha\beta^{-1})^k = \beta^n\frac{1-(\alpha\beta^{-1})^{n+1}}{1-\alpha\beta^{-1}} = \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}u[n]$$

Vậy:

$$h[n] = \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}u[n]$$

2.52. a). Đáp ứng xung tìm được bằng cách cho $x[n] = \delta[n]$ thì $y[n] = h[n]$.

Từ sơ đồ ta thấy:

$$h[n] = \{(\delta[n] + \beta.\delta[n]*\delta[n-1]\}*\alpha^n u[n]$$
$$= \delta[n]*\alpha^n u[n] + \beta\delta[n-1]*\alpha^n u[n] = \alpha^n u[n] + \beta\alpha^{n-1}u[n-1]$$

Vậy: $h[n] = \alpha^n u[n] + \beta\alpha^{n-1}u[n-1]$

b). Đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha^k u[k] + \beta\alpha^{k-1}u[k-1])e^{-j\omega k} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha^k u[k])e^{-j\omega k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\beta\alpha^{k-1}u[k-1])e^{-j\omega k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-j\omega k} + \frac{\beta}{\alpha}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-j\omega k} - 1\right\} = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{\beta e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

Vậy:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1+(\beta-\alpha)e^{-j\omega}}{1-2\alpha e^{-j\omega}+\alpha^2 e^{-j2\omega}}$$

với điều kiện $0 < \alpha < 1$.

c). Từ đáp ứng tần số, ta viết ngay được phương trình sai phân:

$$y[n] = x[n] + (\beta-\alpha)x[n-1] + 2\alpha y[n-1] - \alpha^2 y[n-2]$$

d). Từ đáp ứng xung ta thấy hệ thống tổng thể là nhân quả vì đáp ứng xung $h[n] = 0$ khi $n < 0$. Hệ thống ổn định khi : $0 < \alpha < 1$.

2.53. Từ sơ đồ, ta tìm được các phương trình:

$$y[n] = x[n] - y[n]*h_1[n] - r[n]*h_2[n]$$
$$r[n] = y[n] + y[n]*h_1[n] + r[n]*h_2[n]$$

Lấy phương trình trên cộng với phương trình dưới, ta được:

$$r[n] = x[n]$$

Do vậy:

$$y[n] = x[n] - y[n]*h_1[n] - x[n]*h_2[n]$$

Thay biểu thức của $h_1[n]$ và $h_2[n]$ đã cho vào hệ thức trên, ta tìm được phương trình sai phân mô tả quan hệ vào-ra của hệ thống:

$$y[n] = x[n] - y[n]*(a_1\delta[n-1]+ a_2\delta[n-2]+ a_3\delta[n-3])- x[n]*(b_1\delta[n-1]+ b_2\delta[n-2])$$

$$y[n] = x[n] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2] - a_3y[n-3])- b_1x[n-1] + b_2x[n-2])$$

Hệ thống này là một bộ tiên đoán tín hiệu. Tín hiệu lối ra là hiệu giữa tín hiệu lối vào x[n] và tín hiệu tiên đoán x'[n]: y[n] = x[n] - x'[n] . Vậy y[n] chính là sai số tiên đoán.

2.54. a). Cho x[n] = δ[n], thì lối ra y[n] = h[n], vì thế, từ sơ đồ, ta tìm được:

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n]*h_2[n] + h[n]*h_1[n] =$$
$$=\delta[n] + h_2[n] + h[n]*a_1\delta[n-1] = \delta[n] + b_1\delta[n-1] + b_2\delta[n-2] + a_1h[n-1]$$

Vậy đáp ứng xung đơn vị của hệ thống tổng thể tìm được dưới dạng:

$$h[n] = \delta[n] + b_1\delta[n-1] + b_2\delta[n-2] + a_1h[n-1]$$

b). Phương trình sai phân:

$$y[n] = x[n] + x[n]*h_2[n] + y[n]*h_1[n] = x[n] + x[n]*(b_1\delta[n-1] + b_2\delta[n-2]) + y[n]*a_1\delta[n-1] = x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + a_1y[n-1]$$

Vậy phương trình sai phân của hệ thống tổng thể tìm được:

$$y[n] - a_1y[n-1] = x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2]$$

* Bây giờ ta tìm phương trình sai phân liên hệ x[n] với w[n]:

$$w[n] = x[n]*h_2[n] + y[n]*h_1[n] = b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + a_1y[n-1] = y[n] - x[n]$$

Vậy: $w[n] = b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + a_1y[n-1] = y[n] - x[n]$

2.55. a) $h[n] = h_1[n]*h_1[n]*h_1[n] =$

$$= (\delta[n] - 0,9\delta[n-5])*(\delta[n] - 0,9\delta[n-5])*(\delta[n] - 0,9\delta[n-5]) =$$
$$= \delta[n]*\delta[n]*\delta[n] + 3(0,9)^2\delta[n]*\delta[n-5]*\delta[n-5] - 3(0,9)\delta[n]*\delta[n]*\delta[n-5] - (0,9)^3\delta[n-5]*\delta[n-5]*\delta[n-5] =$$
$$= \delta[n] - 3(0,9)\delta[n-5] + 3(0,9)^2\delta[n-10] - (0,9)^2\delta[n-15]$$

Vậy:

$$h[n] = \delta[n] - 3(0,9)\delta[n-5] + 3(0,9)^2\delta[n-10] - (0,9)^2\delta[n-15]$$

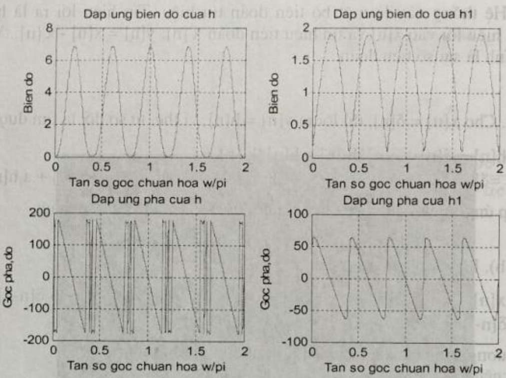
b). Đáp ứng tần số của hệ thống tổng thể:

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega})$$
$$= (1-0,9e^{-j5\omega})(1-0,9e^{-j5\omega})(1-0,9e^{-j5\omega}) =$$
$$= 1-3(0,9)e^{-j5\omega} + 3(0,9)^2e^{-j10\omega} - 0(,9)^3e^{-j15\omega}$$

Vậy:

$$H(e^{j\omega}) = 1-3(0,9)e^{-j5\omega} + 3(0,9)^2e^{-j10\omega} - 0(,9)^3e^{-j15\omega}.$$

Hình BG2.55 vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống tổng thể (h) và của hệ thống thành phần (h1), với $0 \le \omega \le 2\pi$.



Hình BG2.55.

2.56. Nếu ta cho tín hiệu lối vào x[n] = δ[n], thì lối ra của hệ thống tổng thể là: y[n] = h[n] là đáp ứng xung của hệ thống. Do vậy, từ sơ đồ, ta tìm được:

$$h[n] = h_1[n] + \delta[n-1]*h_2[n] + \delta[n-2]*h_3[n] =$$
$$= h_1[n] + h_2[n-1] + h_3[n-2] =$$

$$= -2(\frac{1}{2})^n u[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2] + \frac{1}{2}\delta[n-2] + \frac{1}{4}\delta[n-3]$$

$$h[n] = -2(\frac{1}{2})^n u[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{1}{4}\delta[n-3]$$

Đáp ứng tần số tìm được:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + \frac{1}{4}e^{-j3\omega} - 2\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} =$$

$$= e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + \frac{1}{4}e^{-j3\omega} - 4\frac{1}{2-e^{-j\omega}}$$

b). Ta viết lại đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega} - \frac{1}{4}e^{-j3\omega} - \frac{1}{8}e^{-j4\omega} - 2}{1 - e^{-j\omega}}$$

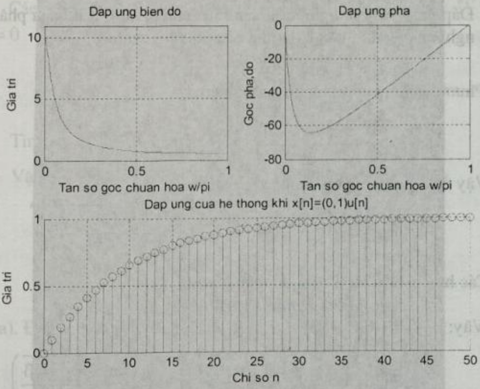
Từ đó ta tìm được quan hệ vào-ra trên lĩnh vực tần số:

$$Y(e^{j\omega}) = \left[e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega} - \frac{1}{4}e^{-j3\omega} - \frac{1}{4}e^{-j4\omega} - 2\right]X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})$$

Chuyển sang lĩnh vực thời gian, ta được:

$$y[n] = y[n-1] - 2x[n] + x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-2] - \frac{1}{4}x[n-3] - \frac{1}{8}x[n-4]$$

2.57. Đáp ứng tần số:



Hinh BG2.57.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 0,9^k u[k]e^{-j\omega k} = \sum_{k=}^{\infty} 0,9^k e^{-j\omega k} = \frac{1}{1 - 0,9e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1,81 - 1,8\cos\omega}} \, a\tan\left(-\frac{0,9\sin\omega}{1 - 0,9\cos\omega}\right)$$

Hình BG2.57 vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống này.

Đáp ứng của hệ thống với tín hiệu lối vào $x[n] = 0{,}1u[n]$ được xác định nhờ nhân chập tín hiệu lối vào với đáp ứng xung:

$$y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (0{,}9)^k u[k].(0{,}1)u[n-k] =$$

$$= 0{,}1\sum_{k=0}^{n}(0{,}9)^k = 0{,}1\frac{1-(0{,}9)^{n+1}}{1-0{,}9} = \left[1-(0{,}9)^{n+1}\right]u[n]$$

Tín hiệu lối ra gồm đáp ứng quá độ và đáp ứng dừng. Đáp ứng quá độ dẫn đến không khi chỉ số thời gian $n \to \infty$; khi đó lối ra chỉ còn đáp ứng dừng. Vậy đáp ứng trạng thái dừng bằng 1. Hình BG2.57 vẽ đáp ứng này.

2.58. a). Đáp ứng xung là nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân, nên phải tìm nghiệm của đa thức đặc trưng của phương trình:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$$

Vậy đáp ứng xung có dạng:

$$h[n] = C_1\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}\right)^n$$

Các hằng số C_1 và C_2 tìm được từ hệ thức:

$$h[n] = \delta[n] + \alpha h[n-1] + \beta h[n-2]$$

Vậy: $h[0] = 1 = C_1 + C_2$

$$h[1] = \alpha = C_1\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}\right) + C_2\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}\right)$$

Giải hệ phương trình này, tìm được C_1, C_2:

$$C_1 = \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}\right); C_2 = \left(\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}\right)$$

Thay vào, ta tìm được:

$$h[n]=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+4\beta}}\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+4\beta}}\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)^{n+1}\quad n\geq 0$$

Vậy: $h[0] = 1$; $h[1] = \alpha$; $h[2] = \alpha^2+\beta$; $h[3] = \alpha^3+2\alpha\beta$,...

b). Tín hiệu lối ra khi lối vào $x[n] = 2^n u[n]$ là tổng của nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng:

$$y[n] = y_C[n] + y_P[n] = C_1^{'}(-2)^n + C_2^{'}(1)^n + y_P[n]$$

$y_P[n] = C\,2^n u[n]$, thay vào phương trình: $y[n] = x[n] - y[n-1] + 2y[n-2]$, với $x[n] = 2^n u[n]$, ta tìm được $C = 1$. Do vậy:

$$y[n] = C_1^{'}(-2)^n + C_2^{'}(1)^n + 2^n$$

Các hằng số $C_1^{'}$ và $C_2^{'}$ được xác định từ điều kiện ban đầu: $y[-1] = y[-2] = 0$

$$y[-1] = C_1^{'}(-2)^{-1} + C_2^{'}(1)^{-1} + 1/2 = 0$$

$$y[-2] = C_1^{'}(-2)^{-2} + C_2^{'}(1)^{-2} + 1/4 = 0$$

Tìm được $C_1 = 1/3$; $C_2 = -1/3$.

Vậy:

$$y[n] = \left[\frac{1}{3}(-2)^n - \frac{1}{3}(1)^n + 2^n\right]u[n]$$

$y[0] = 1$; $y[1] = 1$; $y[2] = 5$, ...

2.59. a). Đáp ứng tần số tìm được:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0 + b_1e^{-j\omega} + b_2e^{-j2\omega}}{1 + a_1e^{-j\omega} + a_2e^{-j2\omega}}$$

Để đáp ứng tần số là hằng số; tức là:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0 + b_1e^{-j\omega} + b_2e^{-j2\omega}}{1 + a_1e^{-j\omega} + a_2e^{-j2\omega}} = \frac{b_0e^{j\omega} + b_2e^{-j\omega} + b_1}{1 + a_1e^{-j\omega} + a_2e^{-j2\omega}}e^{-j\omega} =$$

$$= \frac{(b_0 + b_2)\cos\omega + j(b_0 - b_2)\sin\omega + b_1}{(1 + a_2)\cos\omega + j(1 - a_2)\sin\omega + a_1}e^{-j\omega}$$

Từ đây tìm được đáp ứng biên độ:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{\sqrt{\left[(b_0+b_2)\cos\omega + b_1\right]^2 + (b_0-b_2)^2\sin^2\omega}}{\sqrt{\left[1+a_2)\cos\omega + a_1\right]^2 + (1-a_2)^2\sin^2\omega}} = c$$

Hay:

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{\left[(b_0+b_2)\cos\omega + b_1\right]^2 + (b_0-b_2)^2\sin^2\omega}{\left[1+a_2)\cos\omega + a_1\right]^2 + (1-a_2)^2\sin^2\omega} = c$$

Từ đây, ta tìm được mối liên hệ giữa các hệ số b_m, $m = 0,1,2$ với các hệ số a_k:

Khi cho $\omega = 0$, ta được: $b_0 + b_1 + b_2 = \pm c(1+a_1+a_2)$ (1)

Khi cho $\omega = \pi$, ta được: $b_0 - b_2 = \pm c(1-a_2)$ (2)

Nếu chọn $b_0 = c$ thì từ (2) ta trìm được: $b_2 = ca_2$;

Thay giá trị này vào (1) ta sẽ được $b_1 = ca_1$.

Bây giờ nếu lấy với: $b_0 - b_2 = -c(1-a_2)$, thì khi chọn $b_0 = ca_2$, thì $b_2 = c$, thay vào (1) nhưng lấy dấu trừ, ta được $b_1 = ca_1$. Khi đó đáp ứng tần số sẽ có dạng:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{ca_2 + ca_1e^{-j\omega} + ce^{-j2\omega}}{1+a_1e^{-j\omega}+a_2e^{-j2\omega}} = \frac{a_2e^{j2\omega}+a_1e^{j\omega}+1}{1+a_1e^{-j\omega}+a_2e^{-j2\omega}}ce^{-j2\omega}$$

Hằng số c có thể chọn tùy ý. Ta có thể chọn c = 1.

2.60. a). Từ sơ đồ, ta tìm được phương trình sai phân:

$$y[n] = \frac{1}{6}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{6}x[n-2]$$

b). Đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\omega} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(e^{j\omega} + \frac{1}{6}e^{-j\omega})\right]e^{-j\omega} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(\cos\omega)\right]e^{-j\omega}$$

Từ đó suy ra đáp ứng biên độ và pha:

$$H(e^{j\omega}) = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos\omega\right|$$

$$\Phi(\omega)=\begin{cases}-\omega, & \text{nếu } 1/2+1/3\cos\omega>0\\ -\omega+\pi, & \text{nếu } 1/2+1/3\cos\omega<0\end{cases}$$

2.61. a). Đáp ứng tần số tính được ngay:

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-0,4e^{-j\omega}}=\frac{1}{\sqrt{1,81-0,8\cos\omega}}e^{-j\arctan\frac{0,4\sin\omega}{1-0,4\cos\omega}}$$

b). Đáp ứng của hệ thống với tín hiệu x[n] = sin(nπ/4)u[n] là:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sin(\frac{k\pi}{4})u[k](0,4)^{n-k}u[n-k]=\sum_{k=0}^{n}\sin(\frac{k\pi}{4})(0,4)^{n-k}$$

$$=(0,4)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{j\frac{k\pi}{4}}-e^{-j\frac{k\pi}{4}}}{2j}(0,4)^{-k}=$$

$$=\frac{(0,4)^n}{2j}\left[\frac{1-(0,4)^{-(n+1)}e^{j(n+1)\pi/4}}{1-(0,4)^{-1}e^{j\pi/4}}-\frac{1-(0,4)^{-(n+1)}e^{-j(n+1)\pi/4}}{1-(0,4)^{-1}e^{-j\pi/4}}\right]$$

$$y[n]=\frac{\left\{2,5\sqrt{2}(0,4)^n-2,5\sin\frac{(n+1)\pi}{4}+6,25\sin\frac{n\pi}{4}\right\}}{3,7}u[n]$$

Đáp ứng này gồm đáp ứng quá độ và đáp ứng dừng. Khi n → ∞ chỉ còn lại đáp ứng trạng thái dừng:

$$y[n]=\frac{\left\{6,25\sin\frac{n\pi}{4}-2,5\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right\}}{3,7}u[n]$$

2.62. a). Đáp ứng tần số: $H(e^{j\omega})=1+e^{-j\omega}=2\left|\cos\frac{\omega}{2}\right|e^{-j\frac{\omega}{2}}$

b). Đáp ứng trạng thái dừng khi tín hiệu vào

x[n] = 1 + 10cos(nπ/10) là:

$$y_{ss}[n]=2+20\cos\frac{\pi}{20}e^{-j\frac{\pi}{20}}\cos\frac{n\pi}{20}=2+20\cos\frac{\pi}{20}\cos(\frac{n\pi}{10}-\frac{\pi}{20})=$$

$$y_{ss}[n] = 2+19,75\cos(\frac{n\pi}{10}-\frac{\pi}{20})$$

2.63. a). $h[n] = \frac{1}{5}\{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\} =$

$$= \frac{1}{5}\{\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]\}$$

b). Đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{5}\left\{1+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}+e^{-j3\omega}+e^{-j4\omega}\right\} =$$

$$= \frac{1}{5}\{1+2\cos\omega+2\cos 2\omega\}e^{-j2\omega} =$$

$$= \frac{1-e^{-j5\omega}}{5(1-e^{-j\omega})} = \frac{1}{5}\frac{\sin\frac{5\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}e^{-j2\omega}$$

Vậy đáp ứng tần số tìm được:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{5}|1+2\cos\omega+2\cos 2\omega|e^{-j2\omega}$$

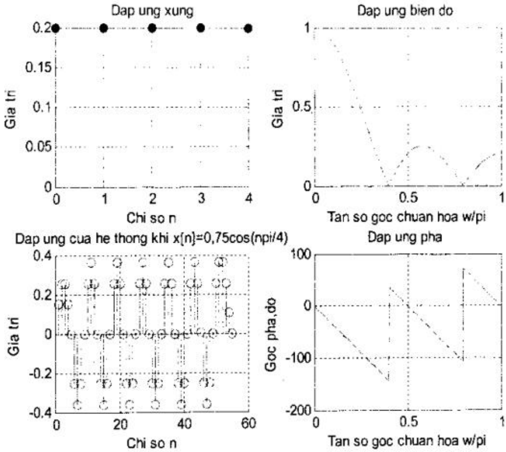
Hoặc: $$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{5}\left|\frac{\sin\frac{5\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right|e^{-j2\omega}$$

c). Tín hiệu lối ra khi lối vào $x[n] = 0,75\cos(n\pi/4)$:

$$y[n] = x[n]*h[n] = \frac{1}{5}\{x[n]+x[n-1]+x[n-2]+x[n-3]+x[n-4]\} =$$

$$\frac{3}{20}\{\cos[n\pi/4]+\cos[(n-1)\pi/4]+\cos[(n-2)\pi/4]+\cos[(n-3)\pi/4]+\cos[(n-4)\pi/4]\}$$

Hình BG2.63 vẽ đáp ứng xung đơn vị, đáp ứng tần số, đáp ứng pha và tín hiệu lối ra y[n].



Hình BG2.63.

2.64. Từ sơ đồ ta tìm được:

$$Y = \alpha W + -\beta X \ - \beta Z^{-2}Y$$
$$W = X + Z^{-1}Y$$

a). Mối liên hệ giữa W và X:

$$W = X + Z^{-1}Y = X + Z^{-1}(\alpha X + \alpha Z^{-1}Y + \beta X + \beta Z^{-2}Y)$$
$$= X + (\alpha+\beta)Z^{-1}X + Z^{-2}Y + Z^{-3}Y$$

Hay: $w[n] = x[n] + (\alpha+\beta)x[n-1] + \alpha y[n-2] + \beta y[n-3]$

b). Loại W khỏi 2 phương trình trên, ta tìm được mối liên hệ giữa Y và X:

$$Y = \alpha X + \alpha Z^{-1}Y - \beta X - \beta Z^{-2}Y$$

Hay: $y[n] = (\alpha-\beta)x[n] + \alpha y[n-1] - \beta y[n-2]$

c). Để xác định tính ổn định của hệ thống, ta sử dụng đáp ứng xung đơn vị:

$$h[n] = (\alpha-\beta)\delta[n] + \alpha h[n-1] - \beta h[n-2]$$

$$h[0] = \alpha-\beta$$

$$h[1] = \alpha$$

$$h[2] = \alpha h[1] - \beta h[0] = \alpha^2 - \beta\alpha + \beta^2$$

$$h[3] = \alpha h[2] + \beta h[1] = \alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\beta$$

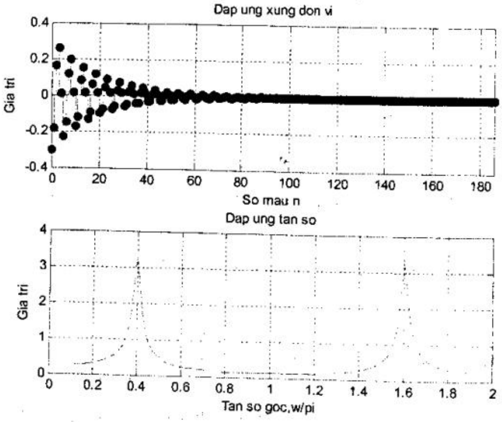
Như vậy điều kiện để đáp ứng xung hội tụ: $0 < \alpha < 1; 0 < \beta < 1$

d). Đáp ứng tần số của hệ thống:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{(\alpha-\beta)}{1-\alpha e^{-j\omega}+\beta e^{-j2\omega}} =$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)}{\sqrt{(1-\alpha\cos\omega+\beta\cos 2\omega)^2+(\alpha\sin\omega-\beta\sin 2\omega)^2}} e^{-j\Phi(\omega)} =$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2-2\alpha(1+\beta)\cos\omega+2\beta\cos 2\omega}} e^{-j\Phi(\omega)}$$



Hình BG2.64.

Hình BG2.64 vẽ đáp ứng xung và đáp ứng tần số của hệ thống với $\alpha = 0{,}6$ và $\beta = 0{,}9$; ω thay đổi từ 0 đến 2π. Rõ ràng đáp ứng xung là hội tụ. Tại $\omega = \pi/2$ biên độ có giá trị bằng:

$$\left|H(e^{j\pi/2})\right| = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{\alpha^2 + (1-\beta)^2}}$$

❐ HỆ THỐNG NGHỊCH ĐẢO

2.65. a). Đối với hệ thống nối tiếp, đáp ứng xung của hệ thống tổng thể là:

$$h[n] = h_1[n]*h_2[n] = \alpha^n u[n]*\delta[n] - \alpha\alpha^n u[n]*\delta[n-1] =$$

$$= \alpha^n u[n] - \alpha^n u[n-1] = \delta[n]$$

Vậy hệ thống tổng thể là hệ thống đồng nhất: Lối vào bằng lối ra:

$$y[n] = x[n]$$

Đáp ứng tần số cũng tìm được: $H(e^{j\omega}) = 1$

b). Đối với hệ thống ghép song song, đáp ứng xung:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] = \alpha^n u[n] + \delta[n] - \alpha\delta[n-1]$$

Đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} + 1 - \alpha e^{-j\omega} = \frac{2 + \alpha e^{-j\omega} + \alpha^2 e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

2.66. a) $H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{2}(1 + e^{-j\omega}) = \cos\dfrac{\omega}{2}.e^{-j\frac{\omega}{2}}$

b). Biến đổi Fourier của tín hiệu lối ra:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})H_1(e^{-j\omega})$$

Từ đó tìm được đáp ứng tần số của hệ thống tổng thể là:

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_1(e^{-j\omega}) = \frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega}) + \frac{1}{2}(1 + e^{j\omega}) = 1 + \cos\omega$$

Vậy đáp ứng tần số của hệ thống tổng thể là một hàm số thực của tần số góc ω, nên có pha bằng không.

2.67. Để tìm hệ thống nghịch đảo thì ta chỉ cần thay đổi lối ra cho lối vào; nghĩa là lối vào thành lối ra và lối ra thành lối vào. Từ phương trình trên ta có:

$$x[n] = (1/b_0)y[n] - (b_1/b_0)x[n-1] - (a_1/b_0)y[n-1]$$

Từ đây, ta tìm được hệ thống nghịch đảo:

$$y[n] = (1/b_0)x[n] - (a_1/b_0)x[n-1] - (b_1/b_0)y[n-1]$$

2.68. a). Đối với hệ thống nối tiếp, đáp ứng xung của hệ thống tổng thể là:

$$h[n] = h_1[n]*h_2[n]$$

Lối ra của hệ thống tổng thể $y_2[n]$ liên hệ với lối vào $x[n]$ bằng hệ thức:

$$y_2[n] = h[n]*x[n] = h_1[n]*h_2[n]*x[n] = x[n]$$

Vậy hệ thống tổng thể là hệ thống đồng nhất: có đáp ứng xung:

$$h[n] = \delta[n] = h_1[n]*h_2[n]$$

Vì vậy $h_2[n]$ là hệ thống nghịch đảo của $h_1[n]$. Do vậy, đáp ứng tần số của $h_2[n]$ tìm được:

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{H_1(e^{j\omega})} = \frac{1}{1-2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}$$

b). Phương trình sai phân liên hệ $y_2[n]$ với $y_1[n]$ là:

$$y_2[n] = y_1[n] + 2y_2[n-1] - y_2[n-2]$$

2.69. a). Hệ thống $h_1[n]$ và $h_2[n]$ là nghịch đảo của nhau nên $h_1[n]*h_2[n] = \delta[n]$. Vậy:

$$y_2[n] = x[n]*\delta[n] = x[n]$$

Do đó phương trình sai phân liên hệ giữa $y[n]$ với $x[n]$:

$$y[n] = y_2[n] + y_3[n] = 2x[n] - x[n-1] + x[n-3] - 2x[n-4]$$

b). Đáp ứng tần số của hệ thống tổng thể:

$$H(e^{j\omega}) = 2 - e^{-j\omega} + e^{-j3\omega} - 2e^{-j4\omega}$$

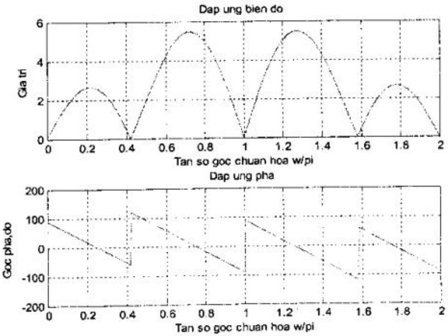
$$= j(4\sin\omega + \sin 2\omega)e^{-j2\omega} = (4\sin\omega + 2\sin 2\omega)e^{-j(2\omega-\pi/2)}$$

Từ đó tìm được biên độ và pha:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|4\sin\omega + 2\sin 2\omega\right|$$

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} -2\omega + \dfrac{\pi}{2}, & \text{nếu} \quad 4\sin\omega + \sin 2\omega > 0 \\ -2\omega + \dfrac{3\pi}{2}, & \text{nếu} \quad 4\sin\omega + \sin 2\omega < 0 \end{cases}$$

Hình BG2.69 vẽ đáp ứng biên độ và pha của hệ thống tổng thể. Từ biểu thức đáp ứng biên độ ta thấy có 4 giá trị cực đại và cực tiểu xen kẽ nhau. Đáp ứng biên độ bằng 0 tại $\omega = 0$, π và 2π.



Hình BG2.69.

2.70. a). Đáp ứng xung đơn vị của hệ thống tổng thể: $h[n] = h_1[n]*h_2[n]$

h[n] tìm được khi biết y[n] và x[n]:

$$h[n] = \frac{1}{x[0]}\left\{y[n] - \sum_{k=1}^{N-1} x[k]h[n-k]\right\}$$

Từ đây tính được: $h[n] = \left\{\underset{\uparrow}{3} \quad 4 \quad 4 \quad 6 \quad 8\right\}$;

Vì $h[n] = h_1[n]*h_2[n]$, nên ta cũng tính được $h_2[n]$ nhờ công thức:

$$h_2[n] = \frac{1}{h_1[0]}\left\{h[n] - \sum_{k=1}^{8} h_1[k]h_2[n-k]\right\}$$

Ở đây: $h[0] = h_1[0].h_2[0] \Rightarrow h_2[0] = h[0]/h_1[0]$.

Tính ra ta được:

$$h_2[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{3} \quad -2 \quad 4 \quad -6 \quad 7 \right\}$$

b). $y_2[n] = 3y_1[n] - 2y_1[n-1] + 4y_1[n-2] - 6y_1[n-3] + 7y_1[n-4]$

❐ CÁC LOẠI MẠCH LỌC SỐ

2.71. Hệ thống có đáp ứng tần số: $H(e^{j\omega}) = 2.e^{-j\omega}$, với $3\pi/4 \le \omega \le \pi$, và bằng không ở các khoảng khác. Tín hiệu lối ra bằng đáp ứng tần số nhân với tín hiệu lối vào (chính là đáp ứng trạng thái dừng):

$$y[n] = -10.e^{-j4\pi/5}\cos(4\pi n/5 - \pi/2) + 7e^{-j9\pi/10}\cos(9\pi n/10 + 3\pi/8) =$$

$$= -10.\cos(4\pi n/5 - 13\pi/10) + 7\cos(9\pi n/10 - 21\pi/40)$$

Đây là bộ lọc thông dải lý tưởng.

2.72. a). Tín hiệu lối ra bằng đáp ứng tần số của hệ thống nhân với lối vào:

$$y[n] = H(e^{j\omega}).x[n] = (0,5).e^{-j\omega/2}.x[n] = 1,5\cos(n\pi/6+\pi/3-\pi/12) =$$

$$y[n] = 1,5\cos(n\pi/6+\pi/4)$$

Đây là bộ lọc thông thấp lý tưởng.

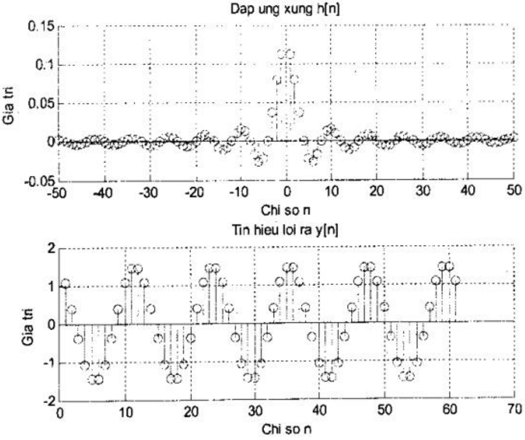
b). Bộ lọc thông thấp này có đáp ứng xung đơn vị tính được từ:

$$h[n] = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{1}{2}e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{4\pi j}\left[e^{j\omega n}\right]_{-\omega_c}^{\omega_c} =$$

$$h[n] = \frac{1}{2}\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty$$

Trong đó $\omega_C = \pi/4$ là tần số cắt của mạch lọc đã cho.

c). Hình BG2.72 vẽ tín hiệu lối vào và lối ra của bộ lọc lý tưởng này với n = -50: 50 mẫu.



Hình BG2.72.

2.73. Đáp ứng tần số:

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{4}e^{j2\omega} + \frac{1}{2}e^{j\omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega} =$$

$$= 1 + \cos\omega + \frac{1}{2}\cos 2\omega$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + \frac{1}{2}e^{-j3\omega} + \frac{1}{4}e^{-j4\omega} =$$

$$= \left\{\frac{1}{4}e^{j2\omega} + \frac{1}{2}e^{j\omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}\right\}e^{-j2\omega} =$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\cos 2\omega + \cos\omega + 1\right\}e^{-j2\omega}$$

Từ đây ta thấy hai hệ thống có cùng đáp ứng biên độ là:

$$\left|1 + \cos\omega + \frac{1}{2}\cos 2\omega\right|$$

Hệ thống nhân quả có pha tuyến tính; trong khi hệ thống không nhân quả thì có pha bằng không.

Một hệ thống không nhân quả có đáp ứng xung đối xứng chẵn luôn luôn có pha bằng không; Trong khi hệ thống nhân quả có đáp ứng xung đối xứng chẵn luôn luôn có pha tuyến tính.

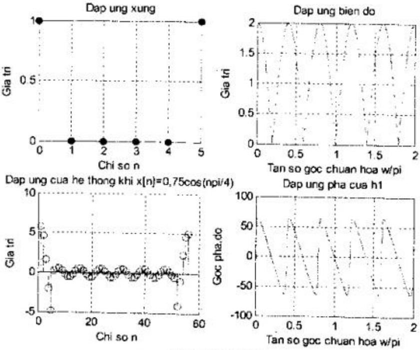
2.74. a). Đáp ứng tần số: $H(e^{j\omega}) = 1 - \alpha e^{-jR\omega} = \sqrt{1+\alpha^2 - 2\cos(R\omega)}e^{j\Phi(\omega)}$

$$\Phi(\omega) = \text{actan}\frac{\alpha \sin R\omega}{1 - \alpha \cos R\omega}$$

Khi ω thay đổi từ 0 đến 2π thì đáp ứng biên độ có R cực đại và R cực tiểu. Các cực đại liên tiếp nhau cách nhau một khoảng bằng $2\pi/R$ radians. Cực đại đầu tiên ứng với $\omega = 0$. Giá trị cực đại là $1+|\alpha|$; cực tiểu là $1-|\alpha|$. Hệ thống này chính là bộ lọc răng lược.

Hình BG2.74 vẽ đáp ứng xung, đáp ứng biên độ và pha cũng như tín hiệu lối ra của hệ thống với $R = 5$; $\alpha = 1$, khi tín hiệu lối vào:

$$x[n] = 0.75\cos(n\pi/4) + 5*\cos(n*pi/5)$$



Hình BG2.74.

2.75. a). Đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{4} \alpha^k e^{-j\omega k} = \frac{1-(\alpha e^{-j\omega})^5}{1-(\alpha e^{-j\omega})} = \sqrt{\frac{1-2\alpha^5\cos 5\omega + \alpha^{10}}{1-2\alpha\cos\omega + \alpha^2}}e^{j\Phi(\omega)}$$

$$\Phi(\omega) = a\tan\frac{\alpha^5 \sin 5\omega}{1-\alpha^5\cos 5\omega} - a\tan\frac{\alpha\sin\omega}{1-\alpha\cos\omega}$$

b). Đáp ứng biên độ:

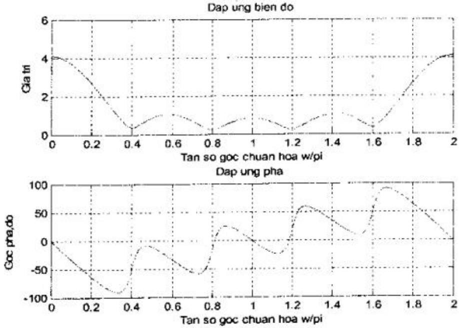
$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \sqrt{\frac{1-2\alpha^5\cos 5\omega + \alpha^{10}}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}}$$

có 5 cực đại và cực tiểu khi ω thay đổi từ 0 đến 2π, vì khi đó $\cos 5\omega$ có 5 cực đại và 5 cực tiểu. Cực tiểu khi $\cos 5\omega = 1$; cực đại khi $\cos 5\omega = -1$. Tại $\omega = 0$ đáp ứng biên độ có giá trị cực đại vì mẫu số có giá trị nhỏ nhất. Các cực đại liên tiếp cách nhau $2\pi/5$.

$$\left|H(e^{j\omega})\right|_{max} = \sqrt{\frac{1-2\alpha^5+\alpha^{10}}{1-2\alpha+\alpha^2}}$$

Giá trị cực tiểu đầu tiên nằm tại $\omega = \pi/5$. Các cực tiểu liên tiếp cũng cách nhau $2\pi/5$. Vậy, giá trị của cực tiểu của biên độ:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \sqrt{\frac{1+2\alpha^5+\alpha^{10}}{1-2\alpha\cos(\frac{\pi}{5})+\alpha^2}}$$



Hình BG2.75.

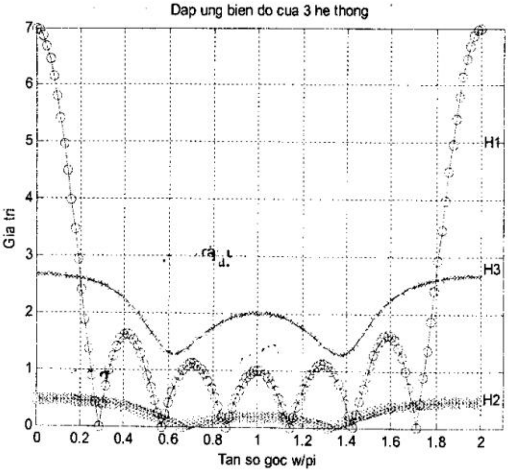
Hình BG2.75 vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống với $\alpha = 0,9$ và $M = 5$.

2.76. a) Đáp ứng tần số của 3 hệ thống:

$$H_1(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega} + \ldots + e^{-j6\omega} = \frac{1-e^{-j7\omega}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{\sin(7\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j3\omega}$$

Đáp ứng biên độ: $\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\dfrac{\sin(7\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$

Đáp ứng pha: $\Phi(\omega) = \begin{cases} -3\omega, & \text{nếu } \dfrac{\sin(7\omega/2)}{\sin(\omega/2)} > 0 \\ -3\omega + \pi, & \text{nếu } \dfrac{\sin(7\omega/2)}{\sin(\omega/2)} < 0 \end{cases}$



Hình BG2.76.

b).

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}{1+0,5e^{-j\omega}+5e^{-j2\omega}} = \frac{\sqrt{3+4\cos\omega+2\cos 2\omega}}{\sqrt{26,25+6\cos\omega+10\cos 2\omega}} e^{j\Phi(\omega)}$$

$$\Phi(\omega)=\text{atan}\frac{-(\sin\omega+\sin 2\omega)}{1+\cos\omega+\cos 2\omega}-\text{a}\tan\frac{-(0,5\sin\omega+5\sin 2\omega)}{1+0,5\cos\omega+5\cos 2\omega}$$

c). $$H_2(e^{j\omega})=\frac{2+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}{1+0,25e^{-j\omega}+0,25e^{-j2\omega}}=$$

$$=\frac{\sqrt{6+6\cos\omega+4\cos 2\omega}}{\sqrt{1,125+0,625\cos\omega+0,5\cos 2\omega}}e^{j\Phi(\omega)}$$

$$\frac{-(\sin\omega+\sin 2\omega)}{2+\cos\omega+\cos 2\omega}-\text{a}\tan\frac{-(0,25\sin\omega+0,25\sin 2\omega)}{1+0,25\cos\omega+0,25\cos 2\omega}$$

Hình BG2.76 vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của ba hệ thống.

2.77.

$b_{-2}=b_2$; $b_{-1}=b_1$; b_0 số thực tùy ý $\neq 0$.

2.78.

$b_0=b_6$; $b_1=b_5$; $b_2=b_4$; b_3 là hằng số tùy ý $\neq 0$.

2.79. a). Đáp ứng biên độ và pha của 2 hệ thống tìm được:

$$H_1(e^{j\omega})=0,5-e^{-j\omega}+0,5e^{-j2\omega}=(-1+\cos\omega)e^{-j\omega}=(1-\cos\omega)e^{-j(\omega-\pi)}$$

$$H_2(e^{j\omega})=0,5+e^{-j\omega}+0,5e^{-j2\omega}=(1+\cos\omega)e^{-j\omega}$$

Vậy:

$$\left|H_1(e^{j\omega})\right|=\left|1-\cos\omega\right|=2\sin^2\frac{\omega}{2};\quad \Phi_1(\omega)=-\omega+\pi$$

$$\left|H_2(e^{j\omega})\right|=\left|1+\cos\omega\right|=2\cos^2\frac{\omega}{2};\quad \Phi_2(\omega)=-\omega$$

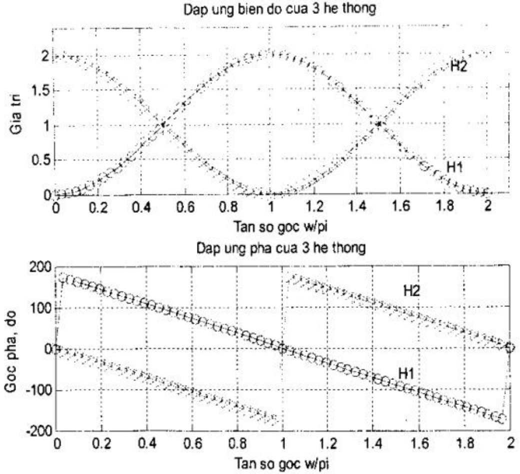
Các đáp ứng này được vẽ trong hình BG2.79. Từ hình vẽ cũng như từ biểu thức ta thấy hai hệ thống có pha ngược nhau 1 góc bằng π.

b). $H_3(e^{j\omega})=H_1(-e^{j\omega})=$

$$=0,5+e^{-j\omega}+0,5e^{-j2\omega}=(1+\cos\omega)e^{-j\omega}=(1+\cos\omega)e^{-j\omega}$$

Như vậy:

$$H_3(e^{j\omega})=H_1(-e^{j\omega})=H_2(e^{j\omega})$$



Hình BG2.79.

2.80. a). Đáp ứng tần số của hệ thống:

$$H(e^{j\omega}) = b_0 + b_1e^{-j\omega} + b_2e^{-j2\omega}$$
$$= b_0(1+e^{-j2\omega}) + b_1e^{-j\omega} = (2b_0\cos\omega + b_1)e^{-j\omega}$$

Từ đây tìm được:

$$\left|H(e^{j0,1})\right| = 2b_0\cos(0.1) + b_1 = 1$$
$$\left|H(e^{j0,4})\right| = 2b_0\cos(0,4) + b_1 = 0$$

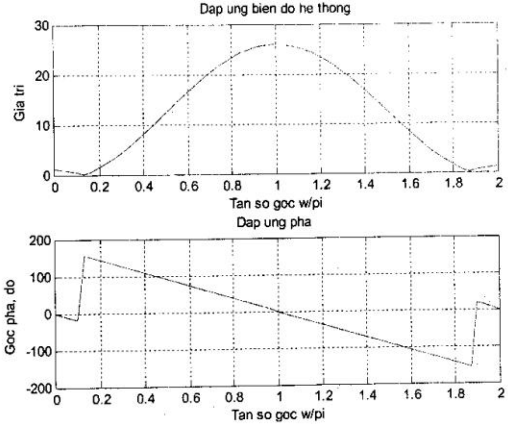
Từ hai phương trình này, ta tìm được 2 ẩn số b_0, b_1:

$b_0 =$ 6.7619 $= b_2$; $b_1 =$ -12.4563;

b). Biểu thức chính xác đối với h[n]:

$$h[n] = 6{,}7619 - 12{,}4563\delta[n-1] + 6{,}7619\delta[n-2]$$

Hình BG2.80 vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha.



Hình BG2.80.

2.81. a). Đáp ứng tần số của hệ thống:

$$H(e^{j\omega}) = b_0 + b_1e^{-j\omega} + b_2e^{-j2\omega} - b_1e^{-j3\omega} - b_0e^{-j4\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = b_0(1 - e^{-j4\omega}) + b_1(e^{-j\omega} - e^{-j3\omega}) + b_2e^{-j2\omega}$$

$$= \left(2jb_0 \sin 2\omega + 2jb_1 \sin\omega + b_2\right)e^{-j2\omega}$$

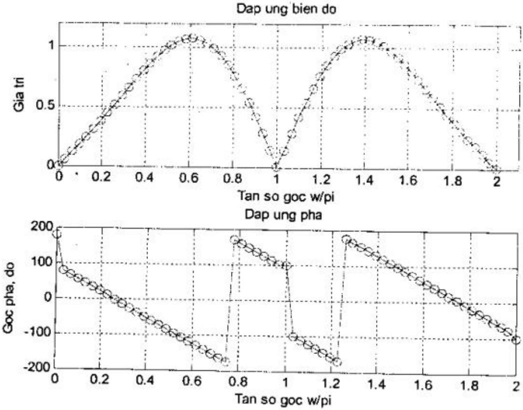
Nếu chọn $b_2 = 0$, thì:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\left(2b_0 \sin 2\omega + 2b_1 \sin\omega\right)\right|$$

$$\left|H(e^{j\pi/4})\right| = \left|\left(2b_0 \sin\pi/2 + 2b_1 \sin\pi/4\right)\right| = 0,5$$

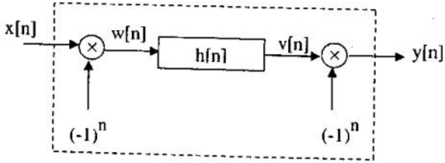
$$\left|H(e^{j\pi/2})\right| = \left|\left(2b_0 \sin\pi + 2b_1 \sin\pi/2\right)\right| = 1$$

Giải hệ phương trình này, ta tìm được b_0 = -0,1036 = -b_4; b_1 = 0,5 = -b_3. Đáp ứng biên độ và pha cho trên hình BG2.81.



Hình BG2.81.

2.82. Ta đánh dấu các tín hiệu trong hình vẽ như trong hình BG2.82.



Hình B2.82.

Bây giờ ta thiết lập mối liên hệ giữa các tín hiệu với nhau:

$$w[n] = (-1)^n x[n] \quad (1)$$

$$y[n] = (-1)^n v[n] \quad (2)$$

$$v[n] = w[n]*h[n] = (-1)^n x[n]*h[n] \quad (3)$$

Trên lĩnh vực tần số, các hệ thức trên được viết dưới dạng:

$$W(e^{j\omega}) = X(-e^{j\omega}) \quad (4)$$

$$Y(e^{j\omega}) = V(-e^{j\omega}) \quad (5)$$

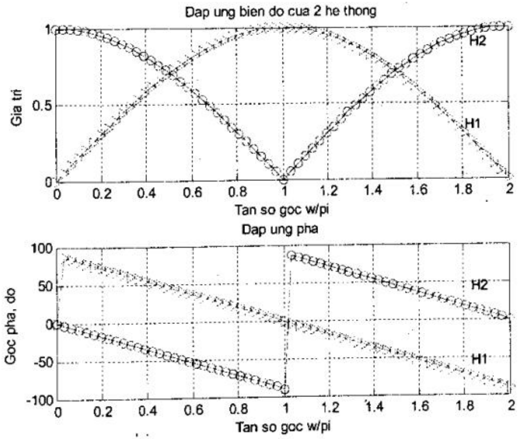
$$V(e^{j\omega}) = X(-e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (6)$$

Từ (6) suy ra:

$$V(-e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(-e^{j\omega}) \quad (7)$$

Thay (7) vào (5), ta được:

$$Y(e^{j\omega}) = V(-e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(-e^{j\omega}) \quad (8)$$



Hình BG2.82.

Theo bài ra:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega})$$

Vậy:

$$H(-e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-j\omega}) \quad (9)$$

Thay (9) vào (8), ta được liên hệ giữa lối ra với lối vào trên phương diện tần số:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}X(e^{j\omega})$$

Chuyển sang lĩnh vực thời gian ta được:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

b). Đáp ứng xung đơn vị của hệ thống tổng thể:

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

c). Hình BG2.82 vẽ đáp ứng biên độ của hai hệ thống.

2.83. a). Đáp ứng xung của hệ thống tổng thể:

$$h[n] = \delta[n]*h_1[n]*h_2[n] + \delta[n]*h_3[n]*h_4[n]$$

Thay biểu thức các đáp ứng xung thành phần bằng các biểu thức đã cho ta tính được :

$$h[n] = \delta[n-1]$$

b). $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}$

c). $y[n] = x[n]*h[n] = x[n]*\delta[n-1] = x[n-1] = \alpha^{n-1}u[n-1]$

Như vậy, tín hiệu lối ra của hệ thống tổng thể là một phiên bản trễ của tín hiệu lối vào.

2.84. a). Hai hệ thống $h_1[n]$ và $h_2[n]$ mắc song song với nhau, nên đáp ứng xung của hệ thống với lối ra $y_{01}[n]$ và lối vào $x[n]$ là :

$$h_{01}[n] = h_1[n] + h_2[n] = 3\delta[n-1]$$

Đáp ứng xung đơn vị của hệ thống tổng thể là:

$$h[n] = h_{01}[n]*h_3[n] = 3\delta[n-1]*\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

b). Đáp ứng tần số của hệ thống tổng thể sẽ là:

$$H(e^{j\omega}) = \left[H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})\right]H_3(e^{j\omega})$$

$$H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega}) = 3e^{-j\omega}$$

$$H_3(e^{j\omega}) = \sum_k h_3[k]e^{-j\omega k} = \sum_k \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k]e^{-j\omega k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k e^{-j\omega k} = \frac{1}{1-0,5e^{-j\omega}}$$

Vậy đáp ứng tần số của hệ thống tổng thể:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{3e^{-j\omega}}{1-0,5e^{-j\omega}}$$

c). Quan hệ vào-ra trên lĩnh vực tần số:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}).\frac{3e^{-j\omega}}{1-0,5e^{-j\omega}}$$

Hay:

$$Y(e^{j\omega}) - 0,5e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = 3e^{-j\omega}X(e^{j\omega})$$

Chuyển về lĩnh vực thời gian:

$$y[n] = 0,5y[n-1] + 3x[n-1]$$

và:

$$y_{01}[n] = x[n]*h_{01}[n] = x[n]*3\delta[n-1] = 3x[n-1]$$

d). Đáp ứng trạng thái dừng của hệ thống tổng thể:

$$y[n] = H(e^{j\omega})x[n] = H(e^{j\pi/2})\cos(n\pi/2)u[n]$$

$$H(e^{j\pi/2}) = \frac{3e^{-j\pi/2}}{1-0,5e^{-j\pi/2}} = \frac{3e^{-j\pi/2}}{1-j0,5} = 1,118e^{-j1.107}$$

Vậy:

$$y[n] = 1,118\cos(n\pi - 1,117)u[n]$$

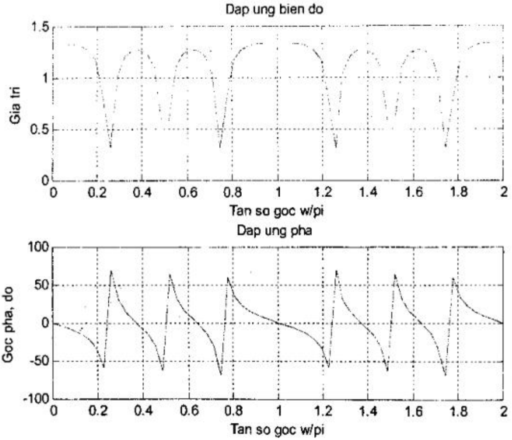
2.85. a). Trước hết tìm đáp ứng tần số của hệ thống:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1+e^{-j2\omega}+e^{-j4\omega}+e^{-j6\omega}}{1+0.81e^{-j2\omega}+0,81^2e^{-j4\omega}+0,81^3e^{-j6\omega}} = \frac{\left(1-e^{-j8\omega}\right)\left(1-0,81e^{-j2\omega}\right)}{\left(1-e^{-j2\omega}\right)\left(1-0,81^4e^{-j8\omega}\right)}$$

$$= \frac{4\cos 2\omega\cos 4\omega.e^{-j6\omega}}{\left(1+0,81e^{-j2\omega}\right)\left(1+0,81^2e^{-j4\omega}\right)} =$$

$$= \frac{4\cos 2\omega\cos 4\omega.e^{-j6\omega}}{\left(\sqrt{(1,6561+1,62\cos 2\omega)(1,4305+1,3122\cos 4\omega)}\right)e^{j\Phi(\omega)}}$$

Hệ thống này có đáp ứng biên độ và pha cho trên hình BG2.85. Đây chính là đáp ứng tần số của mạch lọc đa dải.



Hình BG2.85.

Tại $\omega = 0$, $H(e^{j0}) = \dfrac{4}{2,9975} \approx 4/3$

Tại $\omega = \pi/2$, đáp ứng biên độ:

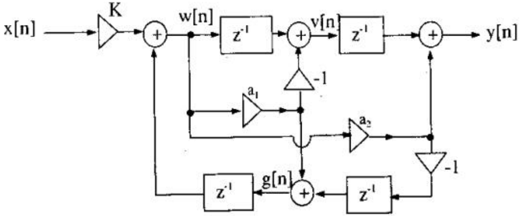
$$|H(e^{j\pi/2})| = \frac{4}{0,3146} = 12,7126\text{ ; Pha } \Phi(\pi/2) = 0$$

Vậy pha của hệ thống tại $\omega = \pi/2$ là $-2(\pi/2) = -\pi$.

Vậy đáp ứng trạng thái dừng của hệ thống đối với tín hiệu lối vào đã cho là:

$$y_{ss}[n] = \frac{4}{3} + 12,7\cos(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2})$$

2.86. Đưa một số các tín hiệu trung gian như chỉ trên sơ đồ hình BG 2.86.



Hình BG2.86.

Ta tìm được các phương trình:

$$Y = Z^{-1}V + a_2W$$
$$W = KX + Z^{-1}G$$
$$V = Z^{-1}W - a_1W$$
$$G = a_1W - a_2W$$

Loại các biến số trung gian W, V, G, ta sẽ thu được mối liên hệ giữa Y và X với các bộ trễ đơn vị:

$$Y - a_1Z^{-1}Y + a_2Z^{-2}Y = K(a_2X - a_1Z^{-1}X + Z^{-2}X)$$

Như vậy phương trình sai phân liên hệ giữa lối ra y[n] với lối vào x[n] là:

$$y[n] = K(a_2x[n] - a_1x[n-1] + x[n-2]) + a_1y[n-1] - a_2y[n-2]$$

b). Đáp ứng tần số tìm được:

$$H(e^{j\omega}) = K\frac{a_2 - a_1e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{a_2e^{-j2\omega} - a_1e^{-j\omega} + 1}$$

Từ đó suy ra:

$$H(e^{j0}) = K\frac{a_2 - a_1 + 1}{a_2 - a_1 + 1} = K$$

$$H(e^{j\pi}) = K\frac{a_2 + a_1 + 1}{a_2 + a_1 + 1} = K$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = H(e^{j\omega}).H^*(e^{j\omega}) =$$

$$= K^2 \frac{a_2 - a_1 e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{a_2 e^{-j2\omega} - a_1 e^{-j\omega} + 1} \cdot \frac{a_2 - a_1 e^{j\omega} + e^{j2\omega}}{a_2 e^{j2\omega} - a_1 e^{j\omega} + 1} = K^2$$

Vậy K có thể lấy 2 giá trị là +K và -K. Nếu lấy: $K = \pm 1$, thì đáp ứng biên độ luôn luôn bằng đơn vị với mọi ω.

Hệ thống này chính là bộ lọc truyền qua (allpass). Bộ lọc này cho đi qua tất cả các tín hiệu; vì thế nó còn có tên là "allpass: thông tất".

☐ PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI CỦA CÁC HỆ THỐNG LTI

2.87. Các biến số trạng thái xuất hiện ở sau các bộ trễ đơn vị, như chỉ ra trong hình vẽ. Từ sơ đồ, ta tìm được các phương trình trạng thái:

$$s_1[n+1] = s_1[n] - 0{,}5s_2[n] + x[n]$$
$$s_2[n+1] = s_1[n]$$
$$s_3[n+1] = 0{,}81s_4[n] + x[n]$$
$$s_4[n+1] = s_3[n]$$

Tín hiệu lối ra y[n] liên hệ với các trạng thái:

$$y[n] = 8s_1[n] - 1{,}5s_2[n] + 0{,}4s_3[n] + 0{,}5184s_4[n] - 1{,}24x[n]$$

Dưới dạng ma trận trạng thái:

$$\begin{bmatrix} s_1[n+1] \\ s_2[n+2] \\ s_3[n+1] \\ s_4[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}81 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n] \\ s_4[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [8 \;\; -1{,}5 \;\; 0{,}4 \;\; 0{,}5184\;] \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n] \\ s_4[n] \end{bmatrix} - 1{,}24x[n]$$

Vậy các ma trận trạng thái:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}81 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C^t = [8 \;\; -1{,}5 \;\; 0{,}4 \;\; 0{,}5184];\; d = -1{,}24$$

d). Từ sơ đồ ta thấy:

$$y[n] = -2{,}4x[n] + y_1[n] + y_2[n]$$

Trong đó:

$$y_1[n] = 3x[n] + 5x[n-1] + y[n-1] - 0{,}5y[n-2]$$
$$y_2[n] = 0{,}64x[n] + 0{,}4x[n-1] - 0{,}81y[n-2]$$

Vậy:

$$y[n] = -2{,}4x[n] + 3x[n] + 5x[n-1] + y[n-1] - 0{,}5y[n-2] + 0{,}64x[n] + 0{,}4x[n-1] - 0{,}81y[n-2] =$$
$$y[n] = 1{,}24x[n] + 5{,}4x[n-1] + y[n-1] - 1{,}31y[n-2]$$

2.88. a). Các ma trận trạng thái tìm được:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1{,}5 & 2{,}5 & 2 \end{bmatrix};\; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\; \mathbf{C}^t = [12 \;\; 5 \;\; 0];\; d = 2$$

b). Các ma trận biến đổi:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{TAT}^{-1};\quad \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{Tb};\; \hat{\mathbf{C}}^t = \mathbf{C}^t\mathbf{T}^{-1};\quad \hat{d} = d$$

Từ đó tìm được:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}67 \\ -0{,}25 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}}^t = [4.3333 \;\; -13.6667 \;\; 7.6667];\quad \hat{d} = 2$$

2.89. a). Với các biến số trạng thái đã cho trong sơ đồ, ta tìm được các phương trình trạng thái:

$$s_1[n+1] = s_2[n]$$
$$s_2[n+1] = s_3[n]$$
$$s_3[n+1] = s_4[n]$$
$$s_4[n+1] = -s_1[n] - 2s_2[n] - 5s_3[n] - 6s_4[n] + x[n]$$
$$y[n] = 3s_4[n+1] + 5s_4[n] - 2s_3[n]$$
$$= -3s_1[n] - 6s_2[n] - 15s_3[n] - 18s_4[n] + 3x[n] + 5s_4[n] - 2s_3[n]$$
$$y[n] = -3s_1[n] - 6s_2[n] - 17s_3[n] - 13s_4[n] + 3x[n]$$

Dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} s_1[n+1] \\ s_2[n+1 \\ s_3[n+1 \\ s_4[n+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n] \\ s_4[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [-3 \quad -6 \quad -17 \quad -13] \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n] \\ s_4[n] \end{bmatrix} + 3x[n]$$

c). Các ma trận trạng thái:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & -6 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C^t = [-3 \quad -6 \quad -17 \quad -13]; \; d = 3$$

2.90. Từ các phương trình trạng thái:

$$S[n+1] = AS[n] + bx[n]$$
$$y[n] = C^t S[n] + dx[n]$$

Khi $x[n] = \delta[n]$ thì $y[n] = h[n]$ với điều kiện ban đầu bằng không $S[0] = 0$;
ta được:

$$S[n+1] = AS[n] + b\delta[n]$$
$$h[n] = C^t S[n] + d\delta[n]$$

Vậy:

$$S[1] = AS[0] + b\delta[0] = b$$
$$S[2] = AS[1] = Ab$$
$$S[3] = AS[2] = A^2b$$

$$S[n] = AS[n-1] = A^{n-1}b$$

Từ đó, ta tính được đáp ứng xung theo các ma trận trạng thái:

$$h[n] = C^t A^{n-1} bu[n-1] + d\delta[n] \quad (1)$$

b). Giả sử hệ thống IIR bậc 2 này được mô tả bằng phương trình sai phân dạng tổng quát:

$$y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] \qquad (2)$$

Bây giờ ta phải xác định các hệ số của phương trình sai phân theo đáp ứng xung h[n] vừa tìm được:

$$h[n] + a_1h[n-1] + a_2h[n-2] = b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1] + b_2\delta[n-2]$$

Từ đây, ta tìm được liên hệ giữa các hệ số của phương trình với đáp ứng xung:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

(3)

Mặt khác, cũng từ phương trình sai phân này, ta tìm được:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} h[2] & h[1] \\ h[3] & h[2] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h[3] \\ h[4] \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Từ (1), ta tính được:

$$h[0] = 0,7;\ h[1] = [2\ \ 3]\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,6 \end{bmatrix} = 2,8;\ h[2] = [2\ \ 3]\begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,6 \end{bmatrix} = 1,51;$$

$$h[3] = [2\ \ 3]\begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,6 \end{bmatrix} = 0,811;\ h[4] = [2\ \ 3]\begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}^3\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,6 \end{bmatrix} = 0,4357;$$

Thay các giá trị của đáp ứng xung vào (4), ta tìm được các hệ số:

$a_1 = -0,5;\ a_2 = -0,01$

Thay các hệ số a_1, a_2 này và các giá trị của đáp ứng xung vào (3), ta tìm được các hệ số b_i:

$b_0 = 0,7;\ b_1 = 2,45;\ b_2 = 0,096$

Vậy phương trình sai phân của hệ thống IIR này có dạng:

$$y[n] - 0,5y[n-1] - 0,01y[n-2] = 0,7x[n] + 2,45x[n-1] + 0,096x[n-2]$$

2.91. Từ sơ đồ tìm được:

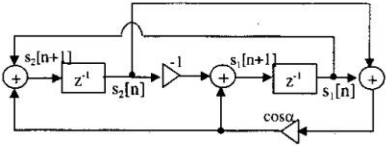
$$s_2[n+1] = (-\beta/\alpha)s_1[n] + \cos\varphi.s_2[n]$$

$$s_1[n+1] = \cos\varphi.s_1[n] - s_2[n]$$

Dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} s_1[n+1] \\ s_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -1 \\ -\beta/\alpha & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \end{bmatrix}$$

2.92. a). Sơ đồ máy phát sóng sin số cho trong hình BG2.92.

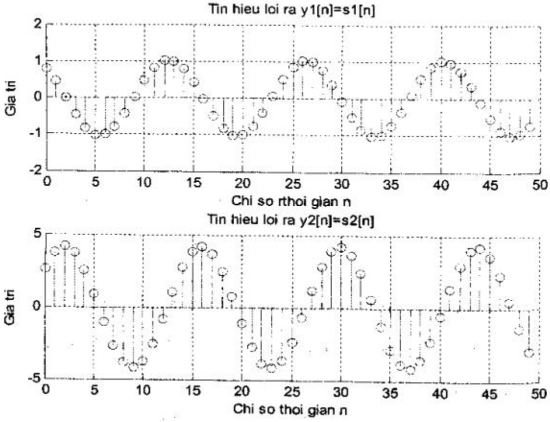


Hình BG2.92.

b). Từ sơ đồ, ta cũng tìm được:

$s_1[n+1] = (s_1[n] + s_2[n])\cos\alpha - s_2[n]$

$s_2[n+1] = (s_1[n] + s_2[n])\cos\alpha + s_1[n]$



Hình BG2.92.

Hay:

$$s_1[n] = (s_1[n-1] + s_2[n-1])\cos\alpha - s_2[n-1] = y_1[n]$$

$$s_2[n] = (s_1[n-1] + s_2[n-1])\cos\alpha + s_1[n-1] = y_2[n]$$

Từ đây, tìm được:

$$s_1[0] = (s_1[-1] + s_2[-1])\cos\alpha - s_2[-1] = 0{,}2\cos\alpha - 0{,}1$$

$$s_2[0] = (s_1[-1] + s_2[-1])\cos\alpha + s_1[-1] = 0{,}2\cos\alpha + 0{,}1$$

Hình BG2.92 vẽ tín hiệu lối ra ở hai lối ra của hai bộ trễ đơn vị của máy phát với $\cos\alpha = 0{,}9$. Từ đây ta thấy nếu điều kiện ban đầu bằng 0 thì máy sẽ không phát.