BỘ CÔNG THƯƠNG

TRƯỜNG CAO ĐẲNG CÔNG NGHIỆP & XÂY DỰNG

BÀI GIẢNG MÔN HỌC

TOÁN KINH TẾ

Dùng cho hệ: Cao đẳng chuyên nghiệp

Chuyên ngành:

(Lưu hành nội bộ)

Người biên soạn: **Phạm Ngọc Thế**

Người phản biện: **Nguyễn Thị Thu Hà**

Uông Bí, năm 2010

LỜI MỞ ĐẦU

Để đáp ứng kịp thời cho nhu cầu về tài liệu giảng dạy cũng như học tập của trường Bộ môn kế toán đã tổ chức biên soạn giáo trình "Toán Kinh tế”

Trong khi biên soạn, các giáo viên đã tiếp thu nghiêm túc những đóng góp của người đọc về những điểm cần chỉnh lý và bổ sung đảm bảo tính cơ bản, hiện đại, chính xác, khoa học và cập nhật được nhiều thông tin, những thay đổi

Giáo trình "Toán kinh tế" là tài liệu giảng dạy cho chuyên ngành hạch toán kế toán của trường Cao đẳng Công nghiệp và Xây dựng đồng thời giáo trình là tài liệu tốt cho các bạn đọc quan tâm khác.

Giáo trình là nền tảng cần có để tiếp tục học các chuyên ngành như kế toán tài chính, kế toán hành chính sự nghiệp và kế toán quản trị, kiểm toán,...

Mong rằng giáo trình sẽ là tài liệu hữu ích trong công tác giảng dạy và nghiên cứu của học sinh trong và ngoài trường. Tuy nhiên trong quá trình biên soạn và xuất bản không tránh khỏi những sai sót, rất mong người đọc đóng góp ý kiến để hoàn thiện hơn cho lần xuất bản sau.

Tổ bộ môn kế toán.

CHƯƠNG MỞ ĐẦU : BỔ TÚC KIẾN THỨC ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

I.Véc tơ n chiều và các phép tính

1 - Các khái niệm

Mỗi vectơ n chiều là một bộ n số thực có thứ tự $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_j \in R$ (tập số thực), $j = 1..n$.

Hai vectơ bằng nhau nếu các thành phần tương ứng bằng nhau :

$$X=(x_j),\ Y=(y_j) \in R^n,\ X = Y \Leftrightarrow x_j = y_j,\ j=1..n.$$

Xét tích Descartes $R^n = R \times R \times ... \times R = \{X=(x_i)_n, x_i \in R,\ j=1..n\}$ trên đó định nghĩa hai phép toán :

. Phép cộng vectơ : $X=(x_j),\ Y=(y_j),\ Z=(z_j) \in R^n$

$$Z= X + Y \quad \Leftrightarrow \quad z_j = x_j + y_j,\ j=1..n.$$

. Phép nhân vô hướng : $k \in R$; $X=(x_j)$, $Y=(y_j) \in R^n$

$$Y= kX \quad \Leftrightarrow \quad y_j = k x_j,\ j=1..n.$$

Tập hợp R^n với hai phép toán trên thỏa mãn các tiên đề không gian vectơ với phần tử trung hòa $\theta = (0, 0, ..., 0)$, vectơ đối của vectơ $X = (x_j)$ là vectơ $-X = (-x_j)$.

2 - Tổ hợp tuyến tính

Cho các vectơ $X_1, X_2,...,X_m \in R^n$ và các số thực $k_1, k_2, ...,k_m \in R$. Khi đó vectơ $X = \sum_{i=1}^{m} k_i X_i \in R^n$ được gọi là *tổ hợp tuyến tính* của các vectơ đã cho.

Hơn nữa, nếu $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$, $i = 1..m$ thì $x_j = \sum_{i=1}^{m} k_i x_{ij}$, $j=1..n$ là các biểu thức tọa độ tương ứng với tổ hợp tuyến tính trên.

Ví dụ, cho các vectơ $X_1 = (2, -4, 5, 0)$, $X_2 = (0, 2, 4, 3)$, $X_3 = (4, -1, 0, 7)$ trong không gian R^4 và tổ hợp tuyến tính

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = 5X_1 + 2X_2 - 3X_3$$

Khi đó

$$x_1 = 5 \times 2 + 2 \times 0 - 3 \times 4 = -2$$
$$x_2 = 5 \times (-4) + 2 \times 2 - 3 \times (-1) = -13$$
$$x_3 = 5 \times 5 + 2 \times 4 - 3 \times 0 = 33$$
$$x_4 = 5 \times 0 + 2 \times 3 - 3 \times 7 = -15$$

hay $X = (-2, -13, 33, -15)$.

3- Hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính

Hệ vectơ $\{X_1, X_2, ..., X_m\}$ trong không gian R^n được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu tồn tại ít nhất một hệ số thực $k_i \neq 0$ sao cho $\sum_{i=1}^{m} k_i X_i = \theta$.

Trường hợp ngược lại thì hệ được gọi là *độc lập tuyến tính*, nói cách khác , hệ $\{X_1, X_2, ..., X_m\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi nếu $\sum_{i=1}^{m} k_i X_i = \theta$ thì $k_i = 0$, $i = 1..m$.

Ví dụ , hệ vectơ $X_1 = (2, -3, 0, 4)$, $X_2 = (0, 6, -2, 5)$, $X_3 = (4, -6, 0, 8)$ trong không gian R^4 phụ thuộc tuyến tính vì $2X_1 + 0X_2 - X_3 = \theta$.

Hệ vectơ $X_1 = (2, -3, 0, 4)$, $X_2 = (0, 6, -2, 5)$, $X_3 = (1, 0, 5, 0)$ trong không gian R^4 độc lập tuyến tính vì nếu có tổ hợp tuyến tính

$$k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 = \theta$$

suy ra

$$\begin{cases} 2k_1 + k_3 = 0 \\ -3k_1 + 6k_2 = 0 \\ -2k_2 + 5k_3 = 0 \\ 4k_1 + 5k_2 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên chỉ có nghiệm duy nhất $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Suy ra hệ đã cho độc lập tuyến tính

Trong không gian Rn , một hệ vectơ độc lập tuyến tính có không quá n vectơ và một hệ vectơ có nhiều hơn n vectơ thì phụ thuộc tuyến tính.

II.MA TRẬN VÀ CÁC PHÉP TÍNH

1.Các khái niệm

+ Khái niệm về ma trận: Ma trận là bảng gồm mxn số thực được sắp sếp thành m hàng và n cột là một ma trận cấp mxn.

Ký hiệu ma trận cấp mxn la (A)mxn=(aij)mxn, trong đó aij là phần tử tổng quát của ma trận A.

+ Ma trận không

+ Ma trận tam giác

+ Ma trận đường chéo

+ Ma trận vuông

+ Ma trận đơn vị

+ Ma trận chuyển vị

2.Các phép tính

Cho các ma trận A = (aij)mxn và ma trận B = (bij)mxn

+ Hai ma trận bằng nhau: Hai ma trận A và B được gọi là hai ma trận bằng nhau nếu các phần tử tương ứng của hai ma trận bàng nhau nghĩa la aij = bij.

+ Phép cộng hai ma trận: Tổng hai ma trận A và B được gọi là hai ma trận C trong đó các phần tử của nó bằng tổng tương ứng các phần tử tương ứng của hai ma trận nghĩa là cij = aij + bij.

+ Tích ma trận với số b: Tích của ma trận A với một số b nào đó là một ma trận bA cùng cấp trong đó các phần tử của nó bằng tương ứng các phần tử của ma trân A sau khi nhân nên b lần..

+ Phép nhân hai ma trận: Tích ma trận A=(aij)mxn với ma trận B= (bij)nxp là ma trận C = (cij)mxp trong đó các phần tử của nó bằng tổng tương ứng của các phần tử hàng i ma trận A nhân các phần tử cột i ma trận B.

3.Hạng của ma trận

Người ta gọi hạng của của hệ véc tơ cột của A là hạng của ma trận A ký hiệu là r hoặc rank(A). Như vậy hạng của ma trận A cung là hạng của hệ véc tơ dòng.

Tính chất : Rank(A) $\leq$ Min(m,n)

Các phép biến đổảô cấp, đồng nhất không làm thay đổi hạng của ma trận

4.Ma trận nghịch đảo

Cho Ma trận là ma trận vuông cấp n và Rank(A) = n thì bao giờ cũng tồn tại ma trận A^{-1} sao cho $A.A^{-1}$=E (Ma trận đơn vị) thì A^{-1} được goi là ma trân nghịch đảo của ma trận A.

Cách tính ma trận nghịch đảo:

Để tính được ma trận nghịch đảo A^{-1} ta viết ma trận mở rộng (A/E) sau đó thực hiện phép biến đổi sơ cấp sao cho ma trận mở rộng trên chuyển trành (A/A^{-1}) thì A^{-1} là ma trận nghịch đảo cần tìm.

III.Hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính :

Khái niệm: Hệ phương trình tuyến tính tổng quát là hệ có m phương trình và n ẩn số .

Có thể giải hệ phương trình tuyến tính bằng nhiều phương pháp khác nhau (thế , khử , định thức ...) . Phương pháp thế được thể hiện bằng cách thực hiện phép quay . Để ứng dụng thêm trong việc giải bài toán Qui hoạch tuyến tính sau này, ta giải hệ phương trình bằng phép quay biến dạng.

Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = u_i \quad , \quad i = 1..m \qquad (3\text{-}29)$$

Để giải hệ (3-29) bằng phép quay biến dạng, ta biến đổi thành hệ tương đương (3-30) :

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-x_j) + u_i \quad , \quad i = 1..m \qquad (3\text{-}30)$$

Hệ (3-30) được thể hiện trong bảng quay (3-31) .Thực hiện phép quay biến dạng tâm $a_{rs} \neq 0$ ta được bảng (3- 32) :

	$-x_1$	...	$-x_s$	...	$-x_n$	1
0=	a_{11}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	u_1
...	...	...	...	...	...	...
0=	a_{r1}	...	$\boxed{a_{rs}}$	...	a_{rn}	u_r
...	...	...	....	...	...	...
0=	a_{m1}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	u_m

(3-31)

$\longrightarrow$

	$-x_1$	...	$-x_{s-1}$	$-x_{s+1}$	...	$-x_n$	1
0=	b_{11}	...	$b_{1\,s-1}$	$b_{1\,s+1}$	...	b_{1n}	v_1
...	...	...	...	...	...	...	...
x_s=	b_{r1}	...	$b_{r\,s-1}$	$b_{r\,s+1}$	...	b_{rn}	v_r
...	...	...	...	...	...	...	...
0=	b_{m1}	...	$b_{m\,s-1}$	$b_{m\,s+1}$	...	b_{mn}	v_m

(3-32)

Trong bảng (3- 32) , cột quay có số 0 ở vị trí biến độc lập nên có thể bỏ đi . Như vậy , bảng (3-32) ít hơn bảng (3-31) một cột .

Giả sử hạng của ma trận các hệ số của các ẩn x_1 , x_2 ,... ,x_n bằng k , thực hiện liên tiếp các phép quay biến dạng, ta có bảng (3-33) :

$\rightarrow \quad \ldots \quad \rightarrow$

	$-x_{k+1}$	...	$-x_n$	1
$x_1=$	$c_{1\,k+1}$	...	c_{1n}	t_1
...	...	...	...	...
$x_k=$	$c_{k\,k+1}$	...	$c_{k\,n}$	t_k
$0=$	0	...	0	0
...	...	...	...	..
$0=$	0	...	0	0

(3-33)

Các dòng còn lại chứa toàn số 0 là các phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị ẩn số nên có thể loại bỏ khỏi hệ phương trình. Chú ý rằng nếu cột số hạng tự do của các dòng này khác 0 thì hệ đã cho vô nghiệm.

Từ bảng (3-33) có thể viết công thức nghiệm tổng quát của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 = c_{1\,k+1}(-x_{k+1}) + \ldots + c_{1n}(-x_n) + t_1 \\ \ldots \\ x_k = c_{k\,k+1}(-x_{k+1}) + \ldots + c_{kn}(-x_n) + t_k \\ x_{k+1} \quad \text{tùy ý} \\ \ldots \\ x_n \quad \text{tùy ý} \end{cases} \qquad (3\text{-}34)$$

Đặc biệt, từ (3-34) , cho các biến độc lập bằng 0 ta có một nghiệm của hệ phương trình trong đó các biến phụ thuộc bằng cột số hạng tự do :

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ \ldots \\ x_k = t_k \\ x_{k+1} = 0 \\ \ldots \\ x_n = 0 \end{cases} \qquad (3\text{-}35)$$

Ví dụ Cho hệ phương trình tuyến tính :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ x_3 + \ x_4 + 2x_5 \ = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 9x_5 = 22 \\ -3x_1 \qquad\quad + x_3 + 2x_4 + \ x_5 = 10 \\ x_1 - x_2 \quad + 6x_3 \qquad\quad + 5x_5 = 16 \end{cases} \qquad (3\text{-}36)$$

Để giải hệ (3-36) bằng cách thực hiện các phép quay biến dạng , ta biểu diễn bởi bảng (3-37) :

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	1
0=	$\boxed{1}$	-2	1	1	2	3
0=	3	-5	8	2	9	22
0=	-3	0	1	2	1	10
0=	1	-1	6	0	5	16

(3-37)

$\rightarrow$

	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	1
x_1=	-2	1	1	2	3
0=	$\boxed{1}$	5	-1	3	13
0=	-6	4	5	7	19
0=	1	5	-1	3	13

(3-38)

Thực hiện phép quay biến dạng tâm quay là số 1 (được đóng khung) , ta được bảng (3-38) . Bảng (3-38) có có cột quay tương ứng với số 0 nên được bỏ đi, do đó ít hơn bảng (3-37) một cột . Tiếp tục thực hiện phép quay biến dạng với tâm quay là số 1 ta được bảng (3-39) . Dòng cuối cùng của bảng (3-39) chứa toàn số 0 nên có thể bỏ đi . Thực hiện phép quay biến dạng với tâm quay là số -1 ta được bảng (3-40) và việc giải hệ phương trình kết thúc .

$\rightarrow$

	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	1
x_1=	11	-1	8	29
x_2=	5	-1	3	13
0=	34	$\boxed{-1}$	25	97
0=	0	0	0	0

(3-39)

$\rightarrow$

	$-x_3$	$-x_5$	1
x_1=	-23	-17	-68
x_2=	-29	-22	-84
x_4=	-34	-25	-97

(3-40)

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình phụ thuộc hai biến độc lập được viết từ bảng (3-40) :

$$
\begin{cases}
x_1 = 23x_3 + 17x_5 - 68 \\
x_2 = 29x_3 + 22x_5 - 84 \\
x_3 \quad \text{tùy ý} \\
x_4 = 34x_3 + 25x_5 - 97 \\
x_5 \quad \text{tùy ý}
\end{cases} \qquad (3\text{-}41)
$$

Từ (3-41) , cho các biến độc lập bằng 0 ta được một nghiệm của hệ phương trình đã cho :

$$
\begin{cases}
x_1 = -68 \\
x_2 = -84 \\
x_3 = 0 \\
x_4 = -97 \\
x_5 = 0
\end{cases} \qquad (3\text{-}42)
$$

CHƯƠNG I: BAI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

I .Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát và các dạng đặc biềt

1- Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát

Các khái niệm:

Có thể tạm định nghĩa quy hoạch tuyến tính là lĩnh vực toán học nghiên cứu các bài toán tối ưu mà *hàm mục tiêu* (vấn đề được quan tâm) và các *ràng buộc* (điều kiện của bài toán) đều là hàm và các phương trình hoặc bất phương trình tuyến tính. Đây chỉ là một định nghĩa mơ hồ, bài toán quy hoạch tuyến tính sẽ được xác định rõ ràng hơn thông qua các ví dụ .

Các bước nghiên cứu và ứng dụng một bài toán quy hoạch tuyến tính điển hình là như sau :

- Xác định vấn đề cần giải quyết, thu thập dữ liệu.
- Lập mô hình toán học.
- Xây dựng các thuật toán để giải bài toán đã mô hình hoá bằng ngôn ngữ thuận lợi cho việc lập trình cho máy tính.
- Tính toán thử và điều chỉnh mô hình nếu cần.
- Áp dụng giải các bài toán thực tế.

Hay nói gọn hơn:

Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát là bài toán đi tìm cực trị (cực tiểu hoặc cực đại) của một hàm tuyến tính xác định trên tập hợp nghiệm của một hệ thống hỗn hợp các phương trình và bất phương trình tuyến tính.Bài toán được mô tả dưới dạng toán học như sau :

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \min (\max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i \in I_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq (\leq)\ b_i \ (i \in I_2)$$

Trong đó f(x) gọi là hàm mục tiêu ,mỗi phương trình hoặc bất phương trình tuyến tính gọi là một ràng buộc.

-Phương án

Véctơ x thoả mãn mọi ràng buộc của một bài toán gọi là một phương án.

-Phương án x thoả mãn ràng buộc i với dấu " = " , nghĩa là : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, thì ràng buộc i gọi là " chặt " đối với phương án x , hoặc phương án x thoả mãn chặt ràng buộc i .

- Phương án x thoả mãn ràng buộc i với dấu bất đẳng thức thực sự ,nghĩa là $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq (\leq)\ b_i$ thì ràng buộc i gọi là " lỏng " đối với phương án x ,hoặc phương án x thoả mãn lỏng ràng buộc i.

-Phương án cực biên

Một phương án thoả mãn chặt n ràng buộc độc lập tuyến tính, gọi là phương án cực biên . Một phương án cực biên thoả mãn chặt đúng n ràng buộc gọi là phương án cực biên *không suy biến*, thoả mãn chặt hơn n ràng buộc gọi là phương án cực biên *suy biến* .

-Phương án tối ưu

Một phương án mà tại đó hàm mục tiêu đạt chỉ số cực tiểu (cực đại) gọi là phương án tối ưu (tốt nhất)

-Bài toán giải được và không giải được

Bài toán có ít nhất một phương án tối ưu gọi là bài toán giải được .Bài toán không có phương án hoặc có phương án nhưng trị số hàm mục tiêu không bị chặn dưới (trên) - cũng có nghĩa là giảm (tăng) vô hạn - trên tập phương án gọi là không giải được .

Cơ sở của phương án cực biên

Gọi m véctơ [A_j] độc lập tuyến tính bao hàm hệ thống các véctơ tương ứng với các thành phần dương của phương án cực biên là cơ sở của phương án cực biên ấy .Ký hiệu một cách quy ước cơ sở là J . Các đặc trưng của một cơ sở j : | J |= m ,trong đó| J | là số phần tử của j ; { A_j: $j \in J$ } độc lập tuyến tính ,{ A_j: $j \in J$ } $\supset \{A_j : x_j \geq 0\}$.

-Phương án cực biên không suy biến chỉ có một cơ sở duy nhất ,đó là các véctơ tương ứng với các thành phần dương.

-Phương án cực biên suy biến có nhiều cơ sở khác nhau,phần chung của chúng là các véctơ tương ứng với các thành phần dương.

$x_j (j \in J)$ gọi là thành phần cơ sở ;

2. Các dạng đặc biệt

Bài toán dạng chính tắc

Bài toán dạng đặc biệt có một hệ phương trình ràng buộc và mọi biến số đều không âm như sau :

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \min (\max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1 \div m)$$

$$X_j \geq 0 (j = 1 \div n)$$

Ký hiệu A = [a_{ij} $]_{mn}$ gọi là ma trận điều kiện của bài toán;

A_j - véctơ cột j của ma trận A- gọi là véctơ điều kiện ;

b-véctơ vế phải của hệ phương trình ràng buộc .

-Bài toán chính tắc còn có thể viết dưới dạng :

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \min (\max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b$$

$$X_j \geq 0 (j = 1 \div n);$$

$$F(x)=(c,x) \Rightarrow \min(\max)$$

$$Ax=b$$

$$x \geq 0.$$

- **Cách đưa một bài toán về dạng chính tắc**

Định lí 1 . Mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có thể quy về bài toán dạng chính tắc tương đương theo nghĩa trị tối ưu của hàm mục tiêu trong hai bài toán là trùng nhau và từ phương án tối ưu của bài toán này suy ra phương án tối ưu của bài toán kia .

Chứng minh

Trước hết , ta chứng tỏ rằng bài toán Qui hoạch tuyến tính tổng quát có thể đưa về dạng chính tắc

Người ta có thể biến đổi bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát thành bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc nhờ các quy tắc sau đây :

- Nếu gặp ràng buộc i có dạng ≤ thì người ta cộng thêm vào vế trái của ràng buộc một *biến phụ* $x_{n+i} \geq 0$ để được dấu = ..

- Nếu gặp ràng buộc i có dạng ≥ thì người ta trừ vào vế trái của ràng buộc một *biến phụ* $x_{n+i} \geq 0$ để được dấu = .

Các biến phụ chỉ là những đại lượng giúp ta biến các ràng buộc dạng bất đẳng thức thành đẳng thức, nó phải không ảnh hưởng gì đến hàm mục tiêu nên không xuất hiện trong hàm mục tiêu.

- Nếu biến $x_j \leq 0$ thì ta đặt $x_j = -x'_j$ với $x'_j \geq 0$ rồi thay vào bài toán.

- Nếu biến x_j là tuỳ ý thì ta đặt $x_j = x_{jj} - x'_{jj}$, các x_{jj} đều ≥ 0 rồi thay vào bài toán.

- Trong trường hợp trong số các ràng buộc có dòng mà vế phải của dòng đó là giá trị âm thì đổi dấu cả hai vế để được vế phải là một giá trị không âm.

Dựa vào các phép biến đổi trên mà người ta có thể nói rằng bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc là bài toán quy hoạch tuyến tính mà trong đó các ràng buộc chỉ có dấu = , vế phải và các biến số đều không âm.

Sau khi giải bài toán mới có phương án tối ưu

$\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, x_{n+1}^*, ...)$ thì $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ là phương án tối ưu của bài toán ban đầu , thu được bằng cách bỏ đi các ẩn phụ và nếu ẩn số x_i không bị ràng buộc về dấu thì tính $x_i^* = x_i'^* - x_i''^*$ trong đó $x_i'^*$ và $x_i''^*$ là hai thành phần tương ứng trong $\overline{X}^*$.

Việc đưa bài toán Qui hoạch tuyến tính tổng quát về dạng chuẩn tắc được lập luận tương tự như trên , với chú ý là dấu bất đẳng thức $\leq$ có thể đưa về dạng $\geq$ bằng cách nhân hai vế của bất phương trình với -1 .

Ví dụ Cho bài toán Qui hoạch tuyến tính tổng quát

$$f = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 15 \\ 6x_1 - x_5 \leq 20 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 4x_5 \leq 18 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_4 - x_5 \geq 16 \\ x_j \geq 0 \;,\; j = 1..4 \end{cases} \qquad (1\text{-}5)$$

Để đưa bài toán trên về dạng chính tắc , ta đặt $g = -f$ (đổi dấu hàm f) , sau đó đưa thêm các ẩn phụ x_6 , x_7 , x_8 vào các bất phương trình tương ứng trong điều kiện ràng buộc bắt buộc . Ẩn số x_5 không bị ràng buộc về dấu nên đặt $x_5 = x_5' - x_5''$, $x_5' \geq 0$, $x_5'' \geq 0$ và thay thế vào hàm g cũng như các điều kiện ràng buộc . Bài toán dạng chính tắc thu được như sau:

$$g = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 3x_5' + 3x_5'' \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_5' + x_5'' = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_4 + 3x_5' - 3x_5'' = 15 \\ 6x_1 - x_5' + x_5'' + x_6 = 20 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 4x_5' - 4x_5'' + x_7 = 18 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_4 - x_5' + x_5'' - x_8 = 16 \\ x_j \geq 0;\; j = 1...4 \,,\, j = 6...8 \;;\; x_5' \geq 0 \,,\; x_5'' \geq 0 \end{cases} \qquad (1\text{-}6)$$

Bài toán (1-6) có phương án tối ưu

$$\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5'^*, x_5''^*, x_6^*, x_7^*, x_8^*)$$

trong đó $x^*_1 = 7/3$, $x^*_2 = 0$, $x^*_3 = 0$, $x^*_4 = 7/3$, $x'^*_5 = 1/3$, $x''^*_5 = 0$, $x^*_6 = 19/3$, $x^*_7 = 43/3$, $x^*_8 = 0$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm g : $g_{min} = g(\overline{X}^*) = 11/3$.

Như vậy phương án tối ưu của bài toán (1-5) là (chú ý $x_5 = x_5' - x_5''$) :

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)$$

trong đó $x^*_1 = 7/3$, $x^*_2 = 0$, $x^*_3 = 0$, $x^*_4 = 7/3$, $x^*_5 = 1/3$.

Giá trị lớn nhất của hàm f : $f_{max} = f(X^*) = -g_{min} = -11/3$.

Tương tự , bài toán (1- 5) có thể đưa về dạng chuẩn tắc như sau :

$$g = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 3x_5' + 3x_5'' \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_5' + x_5'' + x_6 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_4 + 3x_5' - 3x_5'' + x_7 \geq 15 \\ -6x_1 + x_5' - x_5'' \geq -20 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 - 4x_5' + 4x_5'' \geq -18 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_4 - x_5' + x_5'' \geq 16 \\ x_j \geq 0;\ j = 1...4,\ j = 6...7\ ;\ x_5' \geq 0,\ x_5'' \geq 0 \end{cases} \qquad (1\text{-}7)$$

Định lí 1 cho thấy rằng chỉ cần xây dựng thuật toán giải cho bài toán Qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc (hoặc chuẩn tắc) và từ đó có thể giải được bài toán Qui hoạch tuyến tính tổng quát.

b) Bài toán dạng chuẩn: là bài toán QHTT có dạng

-Bài toán dạng chính tắc đặc biệt thể hiện ở :$b_i \geq 0 (i = 1 \div m)$,mỗi phương trình có một biến với hệ số bằng 1 và không có mặt ở các phương trình khác.Có thể mô tả dưới dạng :

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \min (\max)$$

$$x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + a_{1m+2}x_{m+2} + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + a_{2m+2}x_{m+2} + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

....

$$x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + a_{mm+2}x_{m+2} + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_j \geq 0 (j = 1 \div n)$$

Bài toán Qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc có tất cả điều kiện ràng buộc là bất phương trình và tất cả các ẩn số đều không âm :

II.Các tính chất chung

1.Sự tồn tại phương án cực biên

-Nếu bài toán có phương án và hạng của ma trận hệ ràng buộc n thì bài toán có phương án cực biên .
-Nếu bài toán dạng chính tắc có phương án thì chắc chắn có phương án cực biên vì hạng của ma trận hệ ràng buộc luôn bằng n.

Định lý 1.

Tập D các phương án của bài toán QHTT chính tắc là một tập lồi.

Định lý 2.

Nếu tập D các phương án của bài toán QHTT chíng tắc không rỗng và bị chặn, thì D là một đa diện lồi.

• Định lý có thể chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo số biến của bài toán. Để chứng minh D là một đa diện lồi, ta chỉ cần chứng tỏ rằng, trong D có một số hữu hạn các phương án, mà mỗi phương án thuộc D đều là tổ hợp lồi của các phương án trong D.

Định lý 3. Nếu bài toán QHTT chính tắc có lời giải và tập D các phương án của nó là một đa diện lồi, thì có ít nhất một điểm cực biên của D là phương án tối ưu.

Định lý 4. Nếu bài toán QHTT chính tắc có lời giải, thì tồn tại ít nhất 1 điểm cực biên của tập D các phương án là phương án tối ưu (*gọi là phương án cực biên tối ưu*).

• Định lý này làm cơ sở lý luận cho phương pháp giải bài toán. Nhờ nó đáng lẽ phải phải tìm phương án tối ưu trong tập vô số phương án, ta chỉ cần tìm trong tập hữu hạn các phương án cực biên.

Tuy vậy, không loại trừ có những phương án tối ưu không phải là điểm cực biên, thể hiện ở định lý sau:

Định lý 5. Nếu bài toán QHTT chính tắc có x1 , x2 , ... , xk là những phương án cực biên tối ưu, thì mọi tổ hợp lồi của chúng cũng là phương án tối ưu.

Nếu tập các phương án của một quy hoạch tuyến tính chính tắc không rỗng thì quy hoạch tuyến tính đó có ít nhất một phương án cực biên.

Bổ đề

Nếu x là một phương án tối ưu của quy hoạch tuyến tính.

x^1, x^2 là các phương án của quy hoạch tuyến tính.

x là tổ hợp lồi thực sự của x^1, x^2

thì x^1, x^2 cũng là phương án tối ưu của quy hoạch tuyến tính.

Nếu tập các phương án của một quy hoạch tuyến tính không rỗng và là một đa diện lồi thì quy hoạch tuyến tính đó sẽ có ít nhất một phương án cực biên là phương án tối ưu

2.Sự tồn tại phương án tối ưu

-Nếu bài toán có phương án và trị số hàm mục tiêu bị chặn dưới (trên) trên tập hợp phương án thì bài toán có phương án tối ưu (giải được).

-Nếu bài toán có phương án cực biên và giải được thì phải có phương án cực biên tối ưu .Do đó nếu bài toán dạng chính tắc giải được thì phải có phương án cực biên tối ưu.

-Nếu bài toán có hơn một phương án tối ưu thì sẽ có vô số phương án tối ưu .

3.Tính hữu hạn của số phương án cực biên

-Số phương án cực biên của mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều hữu hạn.

Điều kiện cần và đủ để x^0 là phương án cực biên (điểm cực biên của S) là các cột A^j ứng với >0 là độc lập tuyến tính.

Số phương án cực biên của một quy hoạch tuyến tính chính tắc là hữu hạn. Số thành phần > 0 của một phương án cực biên tối đa là bằng m.

Khi số thành phần > 0 của một phương án cực biên bằng đúng m thì phương án đó được gọi là một phương án cơ sở.

NX: Tập hợp các phương án D của bài toán Qui hoạch tuyến tính thường là vô hạn, tuy nhiên số phương án cực biên là hữu hạn. Định lí 5 cho thấy rằng chỉ cần tìm nghiệm trong các điểm cực biên (hữu hạn) của D , suy ra tính hữu hạn của thuật toán đơn hình sau này.

III.Phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính

1. Nội dung của phương pháp

-Nội dung của phương pháp

Xuất phát từ một phương án cực biên của bài toán dạng chính tắc, tìm cách đánh giá nó ,nếu chưa tối ưu thì tìm cách chuyển sang một phương án cực biên khác tốt hơn .Vì số phương án cực biên là hữu hạn nên sau một số hữu hạn bước hoặc sẽ kết luận bài toán không giải được vì trị số hàm mục tiêu không bị chặn trên tập phương án hoặc sẽ tìm được phương án cực biên tối ưu .

Có một số phương pháp khác nhau để giải bài toán Qui hoạch tuyến tính : phương pháp hình học , phương pháp phân tích sự biến động của hàm mục tiêu và phương pháp đơn hình .

Trong một số trường hợp , dựa vào sự phân tích các hệ số của hàm mục tiêu f , có thể chỉ ra được sự tăng lên hoặc giảm xuống của một số ẩn số theo hướng có lợi cho hàm mục tiêu từ đó suy ra phương tối ưu . Tất nhiên , phương pháp này không phải khi nào cũng sử dụng hiệu quả .

Ở thời điểm hiện nay , máy tính cá nhân được sử dụng phổ biến cũng như có nhiều chương trình hoặc phần mềm lập cho máy tính để giải bài toán Qui hoạch tuyến tính nên việc xây dựng một phương pháp vạn năng cho tất cả các bài toán Qui hoạch tuyến tính cần thiết . Đó chính là phương pháp đơn hình và phương pháp đơn hình mở rộng được trình bày ở mục sau . Sử dụng phương pháp đơn hình.

Có nhiều hình thức trình bày cơ sở lý thuyết cho phương pháp đơn hình : ma trận, cơ sở của không gian vectơ và tọa độ vectơ .. . Mặc dù vậy , phần tính toán thực hành đều giống nhau . Định lí 1 cho thấy rằng chỉ cần xây dựng thuật toán giải cho bài toán Qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc (hoặc chuẩn tắc) thì mọi bài toán tổng quát xem như giải được. Mặt khác , từ Định líí 5 và hệ quả của nó suy ra rằng chỉ cần tìm phương án tối ưu trong các phương án cực biên (hữu hạn) . Phương pháp (thuật toán) đơn hình được xây dựng để tìm nghiệm cực biên của bài toán Qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc .

với cơ sở J0, ta tìm cách đánh giá $x^{(0)}$, nếu $x^{(0)}$ chưa tối ưu thì tìm cách chuyển sang phương án cực biên $x^{(1)}$ tốt hơn. Vì số phương án cực bkên là hữu hạn nên sau một số hữu hạn bước lập sẽ tìm được phương án cực biên tối ưu hoặc phát hiện bài toán không có lời giải.

Nội dung chính của phương pháp đơn hình như sau :

- Đưa bài toán về dạng chính tắc (chính tắc hóa bài toán) nếu cần . Cách làm cụ thể được trình bày khi chứng minh Định líí 1.

- Xây dựng một phương án cực biên xuất phát .

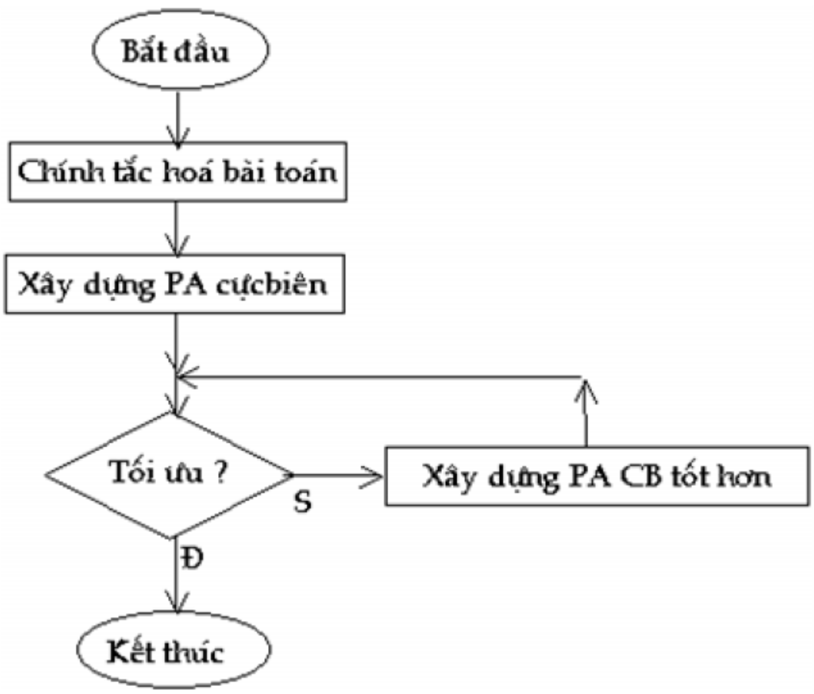
- Đánh giá phương án cực biên đang có .

Nếu phương án tối ưu thì việc giải bài toán kết thúc .

Nếu phương án chưa tối ưu thì chuyển sang bước 4) .

- Xây dựng phương án cực biên mới tốt hơn phương án đang có , sau đó trở lại bước 3).

Thuật toán đơn hình được thể hiện bởi lưu đồ (3 -1) sau đây:



(3-1)

Chú ý rằng phương pháp đơn hình chỉ xét trên các phương án cực biên , mà tập hợp các phương án cực biên của bài toán Qui hoạch tuyến tính là hữu hạn (hệ quả Định lí 4) do đó thuật toán đơn hình kết thúc sau hữu hạn bước .

Sau đây chúng ta lần lượt phân tích chi tiết các bước trong thuật toán đơn hình với giả thiết bài toán đã được chính tắc hóa.

2.Đặc điểm phương án cực biên của bài toán dạng chính tắc

Định lý 6. Để phương án x = (x1 , x2 ,... ,xn) của bài toán QHTT chíng tắc là phương án cực biên, điều kiện cần và đủ là các véc tơ cột Aj của ma trận hệ số ứng với các thành phần xj > 0 lập thành hệ độc lập tuyến tính.

3.Cơ sở của phương án cực biên

Cơ sở của phương án cực biên

Gọi m véctơ $[A_j]$ độc lập tuyến tính bao hàm hệ thống các véctơ tương ứng với các thành phần dương của phương án cực biên là cơ sở của phương án cực biên ấy .Ký hiệu một cách quy ước cơ sở là J . Các đặc trưng của một cơ sở j : | J |= m ,trong đó| J | là số phần tử của j ; $\{A_j : j \in J\}$ độc lập tuyến tính ,$\{A_j : j \in J\}$ $\supset \{A_j : x_j \geq 0\}$.

-Phương án cực biên không suy biến chỉ có một cơ sở duy nhất ,đó là các véctơ tương ứng với các thành phần dương.

-Phương án cực biên suy biến có nhiều cơ sở khác nhau,phần chung của chúng là các véctơ tương ứng với các thành phần dương.

$x_j (j \in J)$ gọi là thành phần cơ sở ;

$x_k (k \notin J)$ gọi là thành phần phi cơ sở , chúng luôn bằng 0.

-Thành phần cơ sở của phương án cực biên chính là hệ số phân tích véctơ b qua cơ sở của phương án cực biên ấy ,xác định bởi $x_j = A_j^{-1} b$.

Ma trận cơ sở

Người ta gọi cơ sở của bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc (f) là mọi ma trận J không suy biến (có ma trận nghịch đảo) mxm trích ra từ m cột của ma trận ràng buộc A. Các cột còn lại được gọi là ma trận ngoài cơ sở, ký hiệu là N .

Phương án cơ sở

Người ta gọi một phương án cơ sở tương ứng với cơ sở J là một phương án đặc biệt(Cơ sỏ)

IV.Thuật toán đơn hình

1.ước lượng các biến

Giả sử $x^{(0)}$ là một phương án cực biên, cơ sở Jo. Gọi Δk là ước lượng của biến xk theo cơ sở J0 được xác định bởi:

$\Delta_k = \sum_{j \in J} c_j x_{jk} - c_k$, trong đó Xjk là hệ số phân tích của véc tơ Ak qua cơ sở Jo, Ta có

$$b = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j = \sum_{j \in J} x_j A_j + \sum_{k \notin J} x_k A_k = \sum_{j \in J} x_j A_j$$

đưa vào các kí hiệu: $x_J = \{x_j : j \in J\}$

Khi đó vì $x_k = 0$ $(\forall k \notin J)$

Ta sẽ xác định đại lượng Δ_k ($k \notin J$) bằng công thức sau:

Nếu $\forall k \notin J$ thì $\Delta_k = \sum_{j \in J} c_j x_{jk} - c_k$

Nếu $k \in J$ thì $\Delta_k = 0$

Ước lượng của các biến

Cho x là phương án cực biên ,cơ sở j .Gọi Δ_k là ước lượng của biến x_k ,xác định theo công thức : $\Delta_k = \sum_{j=J} c_j x_{jk} - c_k = (c_{j,} X_k) - c_k$, trong đó $X_k = \{x_{jk}\}$ véctơ hệ số phân tích của A_k qua cơ sở J ,nghĩa là $A_k = \sum_{j \in J} x_{jk} A_j$,do đó $X_k = A_j^{-1} A_k$ .Chú ý rằng ước lượng của các biến cơ sở $\Delta_j = 0 (\forall j \in J)$

2.Dấu hiệu tối ưu

Dấu hiệu tối ưu (Đối với bài toán tiến đến min)

Nếu đối với phương án cực biên x^0,cơ sở J_0 của bài toán dạng chính tắc có $f(x) \Rightarrow$ min (max) mà $\Delta_k \le (\ge) 0, \forall k \notin J_0$ thì x^0 là phương án tối ưu.

-Trường hợp riêng : nếu $\Delta_k < (>) 0, \forall k \notin J_o$ thì x^0 là phương án tối ưu duy nhất.

- Nếu đối với phương án cực biên x^0, cơ sở J_0 thoả mãn dấu hiệu tối ưu mà tồn tại một $\Delta_k = 0$ với $k \notin J_0$ thì bài toán có thể có nhiều phương án tối ưu ngoài x^0.

chứng minh: Trước hết ta thấy $x^0_k=0$ $(\forall k \notin J_0)$, do đó:

$f(x^0) = \sum_{j \in J_0} c_j x_j^0$, đồng thời $b = \sum_{j \in J_0} x_j^0 A_j$

Lấy một phương án x bất kỳ, ta có

$$b = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j = \sum_{j \in J_0} x_j A_j + \sum_{k \notin J_0} x_k A_k =$$

$$= \sum_{j \in J_0} x_j A_j + \sum_{k \notin J_0} x_k \left(\sum_{j \in J_0} x_{jk} A_j \right) = \sum_{j \in J_0} \left(x_j + \sum_{k \notin J_0} x_k x_{jk} \right) A_j$$

cũng là biểu thức phân tích b qua cơ sở J_0, do phép phân tích vectơ qua cơ sở là duy nhất, suy ra:

$$x_j^0 = x_j + \sum_{k \notin J_0} x_k x_{jk} \, (j \in J_0)$$

tức là $x_j = x_j^0 - \sum_{k \notin J_0} x_k x_{jk} (j \in J_0)$

Khi đó: f(x) = $\sum_{j \in J_0} c_j x_j + \sum_{k \notin J_0} c_k x_k$

$$= \sum_{j} c_j \left(x_j^0 - \sum_{k \notin J_0} x_k x_{jk} \right) + \sum_{k \notin J_0} c_k x_k =$$

$$= \sum_{j \in J_0} c_j x_j^0 - \sum_{k \notin J_0} \left(\sum_{j \in J_0} c_j x_{jk} - c_k \right) x_k = f(x^0) - \sum_{k \notin J_0} \Delta_k x_k$$

Theo giả thiết: $\Delta_k \le 0 \quad (\forall k \notin J_0)$, còn $x_k \ge 0$, suy ra $\sum_{k \notin J_0} \Delta_k x_k \le 0$, do đó $f(x) \ge f(x^0)$, vì x là phương án bất kỳ, bất đẳng thức trên chứng tỏ x^0 là phương án tối ưu.

Chứng minh:

$$z_j^k = \begin{cases} -x_{jk} (j \in J_0) \\ 0 (j \notin J_0, j \ne k) \\ 1 (j = k, z_k^k = 1) \end{cases}$$, gọi là phương z^k

xét điểm $x(\theta) = x^0 + \theta z^k$ với $\theta > 0$

Khi đó $f(x(\theta)) = (c, x(\theta)) = (c, x^0) + \theta (c, z^k) = f(x^0) + \theta (c, z^k)$.

Theo định nghĩa của z^k ta có:

$$(c, z^k) = \sum_{j=1}^{n} c_j z_j^k = -\sum_{j \in J_0} c_j x_{jk} + c_k = -\Delta_k$$

Mặt khác $Az^k = \sum_{j=1}^{n} z_j^k A_j = \sum_{j \in J_0} x_{jk} A_j + A_k = 0$

Với $j \in J_0$, $j \neq r$ thì $x^1_j = x^0_j - \theta_0 x_{jk} > 0$

$j \notin J_0$,

$\sum_{j \in J_1} \alpha_j A_j = 0$, hay $\sum_{j \in J_0, j \neq r} \alpha_j A_j + \alpha_k A_k = 0$ với nhất thiết $\alpha_k \neq 0$

$$\sum_{j \in J_0, j \neq r} \alpha_j A_j + \alpha_k \left(\sum_{j \in J_0, j \neq r} x_{jk} A_j + x_{rk} A_r \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j \in J_0, j \neq r} \{\alpha_j + x_{jk} \alpha_k\} A_j + \alpha_k x_{rk} A_r = 0$$

trong đó $\alpha_k x_{rk} \neq 0$

Trước hết ta có: $A_k = \sum_{j \in J_0} x_{jk} A_j = \sum_{j \in J_1} x'_{jk} A_j$

Như vậy: $A_k = \sum_{j \in J_1, j \neq s} x'_{jk} A_j + x'_{sk} A_s =$

$$= \sum_{j \in J_0, j \neq r} x'_{jk} A_j + x'_{sk} \left(\sum_{j \in J_0, j \neq r} x_{js} A_j + x_{rs} A_r \right) =$$

$$= \sum_{j \in J_0, j \neq r} \{x'_{jk} + x'_{sk} x_{js}\} A_j + x'_{sk} x_{rs} A_r$$

Mặt khác $A_k = \sum_{j \in J_0, j \neq r} x_{jk} A_j + x_{rk} A_r$. Do phân tích vectơ qua cơ sở là duy nhất, từ hai đẳng thức trên đối với A_k, ta có:

$x'_{jk} = x_{jk} - \frac{x_{rk}}{x_{rs}} x_{js} (j \in J_1, j \neq s)$

$x'_{sk} = \dfrac{x_{rk}}{x_{rs}}\left(j = s\right)$

$x_j^1 = x_j^0 - \dfrac{x_r^0}{x_{rs}} x_{js}\left(j \in J_1, j \neq s\right)$

$x_s^1 = \dfrac{x_r^0}{x_{rs}}\left(j = s\right)$

Thật vậy, theo định nghĩa ta có:

$$\Delta'_k = \sum_{j \in J_1} x'_{jk} c_j - c_k = \sum_{j \in J_1, j \neq s} c_j \left\{ x_{jk} - \frac{x_{rk}}{x_{rs}} x_{js} \right\} + c_s \frac{x_{rk}}{x_{rs}} - c_k$$

$$= \sum_{j \in J_0, j \neq r} x_{jk} c_j - \frac{x_{rk}}{x_{rs}} \left\{ \sum_{j \in J_0, j \neq r} c_j x_{js} + c_r x_{rs} - c_s \right\} + c_r x_{rk} - c_k$$

$$= \sum_{j \in J_0} x_{jk} c_j - c_k - \frac{x_{rk}}{x_{rs}} \left\{ \sum_{j \in J_0} c_j x_{js} - c_s \right\}$$

2. Công thức đổi cơ sở:

Định lý cơ bản(định lý về sự cải tiến phương án)

Nếu đối với phương án cực biên x^0,cơ sở J_0 của bài toán dạng chính tắc mà $\exists \Delta_k > (<) 0$ thì có thể cải tiến phương án ,hoặc tìm được một dãy phương án trên đó trị số hàm mục tiêu giảm (tăng) vô hạn – bài toán không giải được - hoặc chuyển sang một phương án cực biên mới x^1 tương đối tốt hơn $x^0 : f\left(x^1\right) \leq (\geq) f\left(x^0\right)$.Trường hợp bài toán không suy biến (mọi phương án cực biên đều không suy biến)thì phương án cực biên x^1 thực sự tốt hơn x^0.

Công thức đổi cơ sở

giả sư j_1 là cơ sở của phương án cực biên x^1 thu được từ cơ sở j_0 của phương án cực biên x^0 bằng cách đưa véctơ A_s vào cơ sở thay cho véctơ A_r, nghĩa là : $j_1 = \left[j_0 \setminus \{r\}\right] \cup \{s\}$.Khi đó quan hệ giữa các hệ số phân tích của cùng một véctơ A_k qua cơ sở j_o và j_1 được biểu hiện thông qua công thức đổi cơ sở tổng quát sau :

$$x'_{jk} = x_{jk} - \frac{x_{rk}}{x_{rs}} x_{js} \left(j \in J_1 , j \neq s \right)$$

$$x'_{sk} = \frac{x_{rk}}{x_{rs}} \left(j = s \right)$$

trong đó x'_{jk} và x_{jk} tương ứng là các hệ số phân tích của A_k qua j_1 và j_o.số phân tích x_{rs} gọi là phần tử trục của phép biến đổi cơ sở.

4.C¸c b-¬c thùc hiÖn thuËt to¸n

Toàn bộ quá trình tính toán được sắp xếp theo một trình tự chặt chẽ đảm bảo hiệu quả của việc tìm lời giả của bài toán QHTT. Trình tự đó được gọi là thuật toán.

Không mất tính tổng quát ta xét bài toán QHTT dạng chuẩn.

Giả sử đã biết phương án cực biên x^0,cơ sở j_0 .lập bảng đơn hình tương ứng .Thuật toán được thực hiện theo các bước :

1) Kiểm tra dấu hiệu tối ưu

Nếu $= \Delta_k \leq (\geq) 0, \forall k \notin j_0$ thì x^0 là phương án tối ưu.Nếu $\exists \Delta_k > (<) 0$

2)kiểm tra tính không giải được của bài toán

3)Chọn véctơ đưa vào cơ sở ,xác định véctơ loại khỏi cơ sở

4)Biến đổi bảng

Bài toán có ngay phương án cực biên $x^{(0)} = (x_1, x_2, ..., x_m, 0.... 0) = (b1, b2, ...,bm,0,...,0)$ Với cơ sở J0 gồm m véctơ đơn vị A1, A2, ..., Am;

Thuật toán đơn hình gồm các bước sau:

B**ước**1. Lập bảng đơn hình

Ta lập một bảng ghi các hệ số phân tích của véctơ B và véctơ Ak,

k = (1,2, ..., n) qua cơ sở J0 theo mẫu dưới đây. Với phương án này thì Zjk = ajk (j □ J0). Bảng này gọi là bảng đơn hình với phương án cực biên $x^{(0)}$, cơ sở J0.

Hệ số	Cơ sở	Phương án	c_1 c_2... c_r...c_m c_{m+1}...... c_k... c_s .....c_n x_1 x_2... x_r...x_m x_{m+1}...... x_k... x_s .....x_n
c_1	x_1	x^0_1	1 0... 0....0 x_{1m+1} ... x_{1k}... x_{1s} .....x_{1n}
c_2	x_2	x^0_2	0 1... 0....0 x_{2m+1} ... x_{2k}... x_{2s} .....x_{2n}

...	...	...	....
c_r	x_r	x^0_r	0 0... 1....0 x_{rm+1} ... x_{rk}... x_{rs} .....x_{rn}
...	...	...	....
c_m	x_m	x^0_m	0 0... 0....1 x_{mm+1} ... x_{mk}... x_{ms} ....x_{mn}
	(x)	$f(x^0)$	0 0... 0....0 Δ_{m+1} ... Δ_k... Δ_s ..... Δ_n

***B**ước 2*. Kiểm tra tính tối ưu của phương án cực biên $x^{(0)}$.

Dấu hiệu tối ưu

Nếu phương án cực biên $x^{(0)}$, cơ sở J0 của bài toán $\Delta_k \leq 0$. (k không thuôc J0)

thì $X^{(0)}$ là phương án tối ưu duy nhất.

Nếu phương án cực biên $X^{()}$, cơ sở J0 thoả mãn dấu hiệu tối ưu mà $\Delta_k = 0$. (k không thuôc J0) thì bài toán có thể có phương án tối ưu khác ngoài $X^{(0)}$. thì chuyển sang bước 3.

***B**ước 3*. Tìm véctơ đưa vào cơ sở và véctơ loại khỏi cơ sở.

Chọn phương đi là phương ứng với sử max(Δk)

Giả sử max(Δk) = (Δs) trong đó (Δk>0) thì véc tơ As được đưa vào cơ sở

Tiếp theo chọn bước đi θo = $Min(X^0_j/X_{js})$, giả sử θo đạt tại chỉ số s=r lúc đó θo = $Min(X^0_j/X_{jr})$, thì véc tơ Ar được đưa vào cơ sở mới. Bây giờ ta được cơ sở mới băng cơ sở cũ sau khi đã bỏ véc tơ Ak và thêm vào véc tơ Ar. Để tìm phương án cực biên mới ta thực hiện phép biến đổi tương đương, sơ cấp trên toàn bộ bảng đơn hình sao cho các véc tơ trong cơ sở mới vừa tìm được trở thành các véc tơ đơn vị khác nhau. Như vậy sau khi áp dụng công thức đổi cơ sở ta thu được phương án cực biên mới ứng với cơ sở mới tương đối tôt hơn là x^1 và J_1 với f(x1) ≤f(xo) .

***B**ước 4*. Biến đổi bảng, xây dựng phương án cực biên mới $x^{(1)}$ với cơ sở J1. Trong bảng đơn hình tương ứng với phương án cực biến $x^{(1)}$, cơ sở J1 ta thay cs, As vào vị trí của cr, Ar các cj, Aj (j ≠ r,).Như vậy sau khi áp dụng công thức đổi cơ sở ta thu được phương án cực biên mới ứng với cơ sở mới tương đối tôt hơn là x^1 và J_1 với f(x1) ≤f(xo) .

Xem $X^{(1)}$ đóng vai trò như $X^{(0)}$, lập lại quá trình trên từ bước hai trở đi sau một số hữu hạn lần hoặc phát hiện bài toán không có lời giải hoặc tìm được phương án tối ưu của bài toán.

Ví dụ 1 Giải bải toán QHTT sau:

$f(x) = 2x1 + 3x2 - x3 - 1/2x4 \longrightarrow \min.$

$$
\begin{aligned}
x1 - x2 + x3 + 1/2x4 &= 18 \\
x2 - 4x3 + 8x4 + x5 &= 8 \\
-2x2 + 2x3 - 3x4 + x6 &= 20
\end{aligned}
$$

$xj \geq 0 \ (j = 1,6)$

c_J	J	x_J	2 x_1	3 x_2	-1 x_3	-1/2 x_4	0 x_5	0 x_6
2	x_1	18	1	-1	1	1/2	0	0
0	x_5	8	0	1	-4	8	1	0
0	x_6	20	0	-2	[2]	-3	0	1
	(x)	36	0	-5	3	3/2	0	0
2	x_1	8	1	0	0	[2]	0	-1/2
0	x_5	48	0	-3	0	2	1	2
-1	x_3	10	0	-1	1	-3/2	0	1/2
	(x)	6	0	-2	0	6	0	-3/2
-1/2	x_4	4	1/2	0	0	1	0	-1/4
0	x_5	40	-1	-3	0	0	1	[5/2]
-1	x_3	16	3/4	-1	1	0	0	1/8
	f(x)	-18	-3	-2	0	0	0	0

Từ bảng đơn hình ứng với phương án cực biên tối ưu x* ta thấy $\Delta_6 = 0$, đưa A_6 vào cơ sở thực hiện một bước biến đổi của phương pháp đơn hình ta sẽ thu được bản đơn hình ứng với phương án cực biên tối ưu $\bar{x}$:

-1/2	x_4	8	2/5	-3/10	0	1	1/10	0
0	x_6	16	-2/5	-6/5	0	0	2/5	1

-1	x_3	14	4/5	-17/20	1	0	-1/20	0
	f(x)	-18	-3	-2	0	0	0	0

• Trong trường hợp cơ sở xủa bài toán chưa phải là cơ sở đơn vị ta thực hiện phép biến đổi ma trận hệ số phân tích để trở thành cơ sở đơn vị rồi thực hiện tthuật toán bình thường

Ví dụ 2 Xét bài to án có ma trận hệ số phân tích như sau:

Giải bải toán QHTT sau:

$f(x) =- 2x1 \ -6x2 \ +8 x3 \ -5x4 \longrightarrow$ min.

$x1 + 2 x2 \ -3 x3 + x4 = 8$

$-2x1 + x2 + x3 - 5x4 + x5 = 2$

$4x1 + 7x2 - 8x3 + 2x4 - x6 = 20$

$xj \geq 0 \ (j = 1,6)$

Chứng tỏ x^o=(8,0,0,0) là phương án cực biên, lợi dụng x^o giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

Quá trình biến đổi thực hiện trên các ma trận sau:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & -5 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & -8 & 2 & 0 & -1 & 20 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right]$$

Trên cở sở ma trận hệ số phân tích, lập bảng đơn hình, thực hiện quá trình giải. Từ bảng cuối ta có Δ_3=4, z_3 là phương giảm, đồng thời x_{j3}<0 ($\forall j \in J$), bài toán không giải được vì hàm mục tiêu không bị chặn dưới. Gọi là án tương ứng là x*, từ x* theo phương z^3 được các phương án có dạng:

c_J	J	x_J	-2 x_1	-6 x_2	8 x_3	-5 x_4	0 x_5	0 x_6
-2	x_1	8	1	2	-3	1	0	0
0	x_5	18	0	5	-5	-3	1	0
0	x_6	12	0	1	-4	[2]	0	1

	$f(x)$	-16	0	2	-2	3	0	0
-2	x_1	2	1	3/2	-1	0	0	-1/2
0	x_5	36	0	13/2	-11	0	1	3/2
-5	x_4	6	0	1/2	-2	1	0	1/2
	$f(x)$	-34	0	1/2	4	0	0	-3/2

Từ bảng đơn hình ứng với phương án cực biên tối ưu x*

5 .Tập phương án tối ưu và các chú ý

Đối với bài toán có $f(x) \Rightarrow max$ có thể giải trực tiếp bằng thuật toán tương ứng ,đồng thời cũng có thể chuyển thành bài toán với g(x) = - $f(x) \Rightarrow$ min nhưng cần chú ý là f_{max} =-g $_{min.}$

Về nguyên tắc có thể đưa bất kì véctơ nào ứng với $\Delta_k > 0(\Delta_k < 0)$ vào cơ sở cũng đều cải tiến được phương án.

Khi thực hiện bài toán chỉ cần làm việc với bài toán QHTT dạng chính tắc và trị số hàm mục tiêu tiến đến min bởi vì:

Đối với bài toán QHTT dạng tổng quát ta co thể chuyển về dạng chính tắc

Đối với bài toán f(x) $\longrightarrow$max có thể giải trực tiếp bằng thuật toán đơn hình hoặc cũng có thể chuyển thành bài toán g(x) = - f(x) $\longrightarrow$ min những chú ý rằng fmax = - gmin.

Khi θo = 0 (bài toán có dấu hiệu suy biến) vẫn thực hiện thuật toán đơn hình một cách bình thường nghia la ứng với θo = 0 vẫn đưa véc tơ Ar ứng với nó vào cơ sở mới.

Trong trường hợp Δk ≤ 0, bài toán xuất hiện dấu hiệu nhiều phương án tối ưu , lúc đó đi theo phương ứng với Δk = 0 ta được phương án cực biên tối ưu mới của bài toán. Giả sử x0, x1 là hai phương án cực biên tối ưu của bài toán thì tập phương án tối ưu của bài toán được xác định là x^* = b.x0+(1-b)x1 trong đó 0 ≤ b ≥ 1.

7.Tìm phương án cực biên(Xây dựng bài toán phụ P)

Xây dựng bài toán phụ P

Tìm phương án cực biên

Từ bài toán dạng chính tắc có $b_1 \geq 0$ xây dựng bài toán phụ P bằng cách cộng vào vế trái phương trình ràng buộc i một biến giả $x_i^g \geq 0(i = 1 \div m)$ với hàm mục tiêu $P(x,x^g)=\sum_{i=1}^{m} x_1^g \Rightarrow \min$.P là bài toán dạng chuẩn và luôn giải được .Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình ,sau một số hữu hạn bước tìm được phương án cực biên tối ưu $(\bar{x},\bar{x}^g)$ kí hiệu P$(\bar{x},\bar{x}^g)$=P_{min}

-Nếu P_{min}>0 thì bài toán đã cho không có phương án

-Nếu p_{min}=0 thì $\bar{x}$ là phương án cực biên của bài toán đã cho

a) Trong cơ sở của phương án cực biên tối ưu $(\bar{x},\bar{x}^g)$ không có các véctơ ứng với các biến giả x_i^g thì đó cũng là cơ sở của phương án cực biên $\bar{x}$.Để có bảng đơn hình tương ứng chỉ cần tính lại các ước lượng Δ_k theo hàm f.

b) Trong cơ sở của phương án cực biên tối ưu $(\bar{x},\bar{x}^g)$ có ít nhất một véctơ ứng với biến giả g_i^g .Trường hợp này để tiếp tục thuật toán ,trước hết loại các cột ứng với $\Delta_k(p)<0$,sau đó tính lại các ước lượng Δ_k theo hàm f.

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i=1 \div m)$$

$$x_j \geq 0 (j=1 \div n)$$

$$P(x,x^g)= \sum_{i=1}^{m} x_i^g \Rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_i^g = b_i (i=1 \div m)$$

$$x_j \geq 0 (j=1 \div n),\ x_i^g \geq 0 (i=1 \div m)$$

Người ta có thể biến đổi một bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc thành dạng chuẩn bằng cách cộng một cách phù hợp vào vế trái của ràng buộc i một biến giả xn+i ≥ 0 để làm xuất hiện ma trận đơn vị. Vì các biến giả cải biên có ảnh hưởng đến hàm mục tiêu nên cũng sẽ có sự cải biên hàm mục tiêu.

Vậy, người ta có thể biến đổi bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát, gọi là bài toán xuất phát, thành bài toán dạng chuẩn, gọi là bài toán cải biên (mở rộng

Vậy nếu bài toán cải biên không có phương án tối ưu thì bài toán xuất phát cũng sẽ không có phương án tối ưu.

• Nếu bài toán cải biên có một phương án tối ưu mà trong đó có ít nhất một biến giả có giá trị dương thì bài toán xuất phát không có phương án tối ưu.

• Nếu bài toán cải biên (dạng chuẩn) có phương án tối ưu thì cũng sẽ phương án cơ sở tối ưu.

• **Đánh giá phương án cực biên đang có của bài toán phụ**

Sử dụng dấu hiệu tối ưu đối với hàm g để đánh giá phương án cực biên đang có . Nếu bảng đơn hình có dấu hiệu vô nghiệm hoặc phương án cực biên đang có tối ưu thì kết thúc pha thứ nhất . Ngược lại , chuyển sang bước 3 .

• **Xây dựng phương án cực biên mới tốt hơn phương án đang có**

Cách xác định tâm quay để thực hiện phép quay biến dạng đã dược trình bày trong phương pháp đơn hình .Thực hiện phép quay biến dạng , thu được PA cực biên mới . Quay lại bước 2 và tiếp tục quá trình cho đến khi kết thúc .

-Khi xây dựng bài toán P chỉ cộng biến giả vào những phương trình cần thiết (nhằm để ma trận điều kiện của bài toán P có đủ m véctơ đơn vị).
-Một véctơ đã bị loạ khỏi cơ sở thì cột tương ứng không cần tính ở các bước tiếp sau.

Thí dụ 3. Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình:

$f(x)= 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \Rightarrow \min$

$2x_1 + 2x_2 \qquad x_4 = 28$

$x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 \leq 31$

$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 16$

$x_j \geq 0 (j = 1 \div 4)$

Lập bảng giải bài toán P theo mẫu dưới đây:

c_J	J	x_J	3 x_1	4 x_2	2 x_3	2 x_4	0/ x_5/	1 x^g_1	1 x^g_1
1	x^g_1	28	2	2	0	1	0	1	0
0	x_5	31	0	5	3	-2	1	0	0
1	x^g_3	16	[2]	-2	2	1	0	0	1
	P	4	4	0	2	2	0	0	0

1	x^g_1	12	0	[4]	-2	0	0	1
0	x_5	23	0	6	2	-5/2	1	0
0	x_1	8	1	-1	1	1/2	0	0
	P	12	0	4	-2	0	0	0
4	x_2	3	0	1	-1/2	0	0	
0	x_5	5	0	0	5	-5/2	1	
3	x_1	11	1	0	1/2	1/2	0	
	f(x)	45	0	0	-5/2	-1/2	0	

CHƯƠNG II: BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

I .Cách thành lập

Đối ngẫu là một khái niệm cơ bản của việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính vì lý thuyết đối ngẫu dẫn đến một kết quả có tầm quan trọng về mặt lý thuyết và cả mặt thực hành.

Lý thuyết đối ngẫu là một trong những công cụ hữu hiệu của Toán học nói chung . Nhiều mệnh đề Toán học được suy ra từ mệnh đề đã biết nhờ qui tắc đối ngẫu mà không cần chứng minh .

Bài toán Qui hoạch tuyến tính đối ngẫu là bài toán được thành lập từ một bài toán Qui hoạch tuyến tính gốc cho trước , có mối liên hệ chặt chẽ với bài toán gốc . Nhiều khi , việc giải bài toán gốc được thực hiện dễ dàng thông qua việc giải bài toán đối ngẫu của nó , đặc biệt là đối với các bài toán Qui hoạch tuyến tính có nhiều ẩn số nhưng lại có ít điều kiện ràng buộc

Chúng ta sẽ lần lượt xây dựng bài toán đối ngẫu của các bài toán Qui hoạch tuyến tính dạng đặc biệt (dạng chính tắc , dạng chuẩn tắc) và cuối cùng là của Qui hoạch tuyến tính tổng quát .

1.Cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng

Xét bài toán dạng chính tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = 1 \div m)$$

$$x_j \geq 0 (j = 1 \div n)$$

Bài toán này được gọi là bài toán đối ngẫu của bài toán ban đầu. Trong phần sau người ta sẽ chứng minh giá trị mục tiêu tối ưu của bài toán đối ngẫu bằng với giá trị mục tiêu tối ưu của bài toán gốc ban đầu. bài toán đối ngẫu của bài toán (I) có dạng sau:

$$\begin{cases} f(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j (j = 1 \div n) \end{cases}$$

Nếu $f(x) \Rightarrow \min$ thì $\widetilde{f}(y) \Rightarrow \max$ và hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu có dạng "$\leq$"

Cặp ràng buộc đối ngẫu: Trong hai bài toán (I) và ($\widetilde{I}$) có n cặp ràng buộc đối ngẫu:

$$x_j \geq 0 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j (j = 1 \div n)$$

Dùng các ký hiệu của bài toán gốc, bài toán đối ngẫu có thể viết dưới dạng:

$$\widetilde{f}(y) = (b, y) \Rightarrow \max$$

$$A_j y \leq c_j (j = 1 \div n)$$

2.Cặp bài toán đối ngẫu đối xứng

Cho bài toán Qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq u_i, \; i = 1..m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1..n \end{cases} \qquad (1\text{-}7)$$

Bài toán Qui hoạch tuyến tính đối ngẫu của bài toán (1-7) được thành lập như sau

$$g = \sum_{i=1}^{m} u_i y_i \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} y_i \geq 0 \,, \; i = 1..m \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \quad , \quad j = 1..n \end{cases} \qquad (1\text{-}8)$$

Với các ma trận đã được đặt ở trên , bài toán dạng chuẩn tắc (1-7) được viết dưới dạng ma trận (1-9) và bài toán đối ngẫu (1-8) được viết dưới dạng ma trận (1-10)

$$f = C'X \to \min \qquad (1\text{-}9)$$
$$\begin{cases} AX \geq U \\ X \geq \theta \end{cases}$$

$$g = U'Y \to \max \qquad (1\text{-}10)$$
$$\begin{cases} Y \geq \theta \\ A'Y \leq C \end{cases}$$

Ví dụ 2 Cho bài toán Qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc

$$f = 7x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 3x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_5 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_4 + 3x_5 \geq 15 \\ 6x_1 - x_5 \geq 4 \\ x_j \geq 0 \;,\; j = 1..5 \end{cases} \qquad (1\text{-}11)$$

Bài toán Qui hoạch tuyến tính đối ngẫu của bài toán (1-11) được thành lập như sau

$$g = 2y_1 + 15y_2 + 4y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} y_i \geq 0 \;,\; i = 1..3 \\ y_1 + 3y_2 + 6y_3 \leq 7 \\ y_2 \leq -1 \\ 2y_1 \leq 3 \\ 3y_2 \leq -4 \\ -y_1 + 3y_2 - y_3 \leq 3 \end{cases} \qquad (1\text{-}12)$$

Cặp ràng buộc đối ngẫu

Gọi hai cặp ràng buộc (kể cả ràng buộc về dấu) trong hai bài toán đối ngẫu cùng tương ứng với một chỉ số là một cặp ràng buộc đối ngẫu.

Chẳng hạn, với cặp bài toán đối ngẫu đối xứng có tất cả m+n cặp ràng buộc đối ngẫu sau:

Bài toán đối ngẫu tổng quát

-Định nghĩa bài toán đối ngẫu

-Nếu $f(x) \Rightarrow$ min (max) thì $\tilde{f}(y) \Rightarrow$ min (max) và hệ ràng buộc củab bài toán đối ngẫu có dạng :"≤"("≥").

-Số ràng buộc (không kể ràng buộc dấu $x_{j \geq 0}$) trong bài toán này bằng số biến số trong bài toán kia, nói khái quát hơn nghĩa là tương ứng với một ràng buộc (không kể ràng buộc dấu) trong bài toán này là một biến số trong bài toán kia .

-Hệ số trong hàm mục tiêu của bài toán này là vế phải của hệ ràng buộc trong bài toán kia .

-Ma trận điều kiện trong hai bài toán là chuyển vị của nhau.

-Trong bài toán $(\tilde{I})$ không có ràng buộc về dấu đối với các biến y_i.

sử dụng các kí hiệu của bài toán gốc : A - ma trận điều kiện , A_i - véctơ cột j của ma trận A còn có thể viết $(\tilde{I})$ dưới dạng $\tilde{f}(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow$ max

Đối với bài toán bất kì ta sẽ gọi bài toán đối ngẫu của bài toán dạng chính tắc tương đương với nó là bài toán đối ngẫu của nó.Từ đây suy ra quan hệ của hai bài toán đối ngẫu là không có thứ tự và gọi chúng là một cặp bài toán đối ngẫu.Đồng thời cũng rút ra hai nhận xét quan trọng cho phép xây dựng bài toán đối ngẫu mà không cần đưa về dạng chính tắc :

- Một ràng buộc là dấu "BẰNG" trong bài toán này khi và chỉ khi biến số tương ứng trong bài toán kia " KHÔNG" buộc dấu .
- Một ràng buộc là "BẤT ĐẲNG THỨC " trong bài toán này khi và chỉ khi biến số tương ứng trong bài toán kia "CÓ" ràng buộc dấu .

Dựa vào qui tắc (1-15) ta thấy rằng bài toán đối ngẫu của bài toán dạng chuẩn tắc cũng là bài toán dạng chuẩn tắc . Vì vậy cặp bài toán dạng chuẩn tắc và bài toỏn đối ngẫu của nú được gọi là cặp bài toỏn đối ngẫu đối xứng .

II.Các tính chất và định lý đối ngẫu

1.Các tính chất

Mối liên hệ giữa bài toán Qui hoạch tuyến tính gốc và bài toán đối ngẫu của nó được thể hiện trong các Định lí đối ngẫu sau đây .

Cho bài toán Qui hoạch tuyến tính tổng quát (D , f) và giả sử bài toáïn Qui hoạch tuyến tính đối ngẫu của nó là (E , g) . Khi đó, bài toán đối ngẫu của bài toán (E , g) là bài toán (D , f) .

Như vậy , nếu thành lập bài toán đối ngẫu của bài toán đối ngẫu thì được bài toán gốc ban đầu . Định lí 1 được chứng minh dễ dàng dựa vào qui tắc thành lập bài toán đối ngẫu và các mũi tên hai chiều.

Tính chất 1: Đối với hai phương án bất kỳ X,Y của một cặp bài toán đối ngẫu f(X)$\longrightarrow$min ta luôn có: f(X) $\geq$f(Y)

Tính chất 2: Nếu đối với hai phương án $\bar{x}$ và $\bar{y}$ của một cặp bài toán đối ngẫu mà:

$f(\bar{x}) = \tilde{f}(\bar{y})$ thì $\bar{x}$ và $\bar{y}$ tương ứng là hai phương án tối ưu.

Chứng minh:

Xét các ràng buộc của bài toán đối ngẫu ứng với các chỉ số $k \notin J$. Trước hết tính:

$(A_k,y) = (A_k,c_JA_J^{-1}) = (c_J,A_J^{-1}A_k) = (c_J,x_k) = \Delta_k + c_k \leq c_k$ vì $\Delta_k \leq 0$ $(\forall k \notin J)$

Quan hệ của cặp bài toán đối ngẫu

Định lý: Đối với một cặp bài toán đối ngẫu, bao giờ cũng chỉ xẩy ra 1 trong 3 trường hợp sau:

Đối với cặp bài toán đối ngẫu (P) và (D) chỉ xảy ra một trong ba trường hợp sau :

- Cả hai bài toán đều không có phương án tối ưu .

- Cả hai bài toán đều có phương án, lúc đó chúng đều có phương án tối ưu và giá trị hàm mục tiêu đối với hai phương án tối ưu là bằng nhau.

- Một trong hai bài toán không có phương án, còn bài toán kia thì có phương án, khi đó bài toán có phương án không có phương án tối ưu.

$$f(X)= 7x1+6x2-12x3+x4 \longrightarrow \max.$$

$$2x1 - 2x2 - 3x3 + 2x4 = 8$$

$$3x2 + 2x3 - 2x4 \leq - 1$$

$$2x1 - 3x3 + x4 = 10$$

$$x3 \geq 0 \ (j = 1,4)$$

Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và xác định các cặp ràng buộc đối ngẫu.

Xét 2 véctơ $X^0 = (0,6,0,10)$, $Y^0 = (-3,0,7)$. Chứng tỏ rằng X^0, Y^0 là phương án tối ưu của cặp bài toán đối ngẫu.

Giải

Bài toán đối ngẫu có dạng:

Theo tính chất 2 đối ngẫu, để chứng minh X^0, Y^0 là phương án tối ưu ta phải chứng minh: X^0, Y^0 là phương án của cặp bài toán đối ngẫu và $f(X^0)= f(Y^0)$.

Thật vậy, thay $X^0 = (0,6,0,10)$ vào tất cả các ràng buộc của bài toán gốc ta thấy X^0 thoả mãn mọi ràng buộc của bài toán gốc.

Suy ra X^0 là phương án của bài toán gốc.

Thay Y^0 = (-3,7,0) vào các ràng buộc của bài toán đối ngẫu thấy thoả mãn suy ra Y^0 là phương án của bài toán đối ngẫu.

Mặt khác ta lại có:

$f(X^0) = 7.0+6.6-12.0+10 = 46$

$f(Y^0) = 8.(-3)-0+10.7 \quad = 46$

Nên $\quad f(X^0) = f(Y^0)$.

Vậy X^0, Y^0 là phương án tối ưu của cặp bài toán đối ngẫu .

2.Các định lý

2.1Định lý đối ngẫu thứ nhất

Định lý 1 (đối ngẫu).

Nếu một trong hai bài toán đối ngẫu giải được thì bài toán kia cũng giải được và khi đó với mọi cặp phương án tối ưu x* và y* ta luôn luôn có : $f(x^*) = \tilde{f}(y^*)$.

Hệ quả

Suy ra hai hệ quả :

-Điều kiện cần và đủ để hai bài toán đối ngẫu giải được là mỗi bài toán có ít nhất một phương án .

- Điều kiện cần và đủ để một bài toán có phương án có phương án còn một bài toán không có phương án là trị số hàm

Quan hệ giữa hai bài toán đối ngẫu :

Đối với một cặp bài toán đối ngẫu chỉ xảy ra một trong ba trường hợp :

-Cả hai bài toán không có phương án ,hiển nhiên cả hai không giải được .

-Cả hai bài toán có phương án thì cả hai giải được khi đó mọi cặp phương án tối ưu x* và y* ta luôn luôn có : $f(x^*) = \tilde{f}(y^*)$

-Một bài toán có phương án ,một bài toán không có phương án khi đó trị số hàm mục tiêu của bài toán có phương án không bị chặn trên tập phương án của nó.

2.2.Định lý đối ngẫu thứ hai

Định lý 2 (đối ngẫu): Điều kiện cần và đủ để hai phương án x và y của cặp bài toán đối ngẫu chính tắc để tối ưu là:

$$\textit{nếu}\ \ x_j > 0\ \ \textit{thì}\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$$

$$\textit{(hoặc nếu}\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i < c_j\ \ \textit{thì}\ x_j = 0)$$

Chứng minh: Qua tính chất 2 và định lý 1 ta suy ra điều kiện cần và đủ để hai phương án tối ưu là: f(x) = $\widetilde{f}(y)$ hay f(x) - $\widetilde{f}(y)$=0.

Tính hiệu số này:

f(x) - $\widetilde{f}(y)$=0

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i = \sum_{j=1}^{n}\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = 0$$

2.3.Định lý bù yếu

Điều kiện cần và đủ để 2 phương án X, Y của một cặp bài toán đối ngẫu tối ưu là trong các cặp ràng buộc đối ngẫu nếu một ràng buộc thoả mãn với dấu bất đẳng thức thực sự (lỏng) thì ràng buộc kia phải thoả mãn với dấu bằng(chặt).

Hệ quả

Điều kiện cần và đủ để hai phương án x và y của một cặp bài toán đối ngẫu tối ưu là trong các cặp ràng buộc đối ngẫu nếu một ràng buộc thoả mãn với dấu bất đẳng thức thực sự (lỏng) thì ràng buộc kia phải thoả mãn với dấu bằng (chặt)

Trực tiếp suy ra hệ quả :

-Một ràng buộc là lỏng đối với **MỘT** phương án tối ưu của bài toán này thì ràng buộc đối ngẫu với nó phải là chặt đối với **MỌI** phương án tối ưu của bài toán kia.

7-Phân tích tính chất tối ưu của một phương án :

-Phân tích tính chất tối ưu của một phương án : cho x^0 là phương án của bài toán gốc .Gỉa sử x^0 là phương án tối ưu , theo định lý bù yếu mọi phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu phải thoả mãn chặt các ràng buộc đối ngẫu và các ràng buộc mà x^0 thoả mãn lỏng .Các ràng buộc chặt này tạo thành một hệ phương trình đối với y .Giải hệ này , nếu hệ vô nghiệm thì phương án x^0 không tối ưu .Nếu hệ có nghiệm thì thử các nghiệm vào các ràng buộc còn lại của bài toán đối ngẫu .Nếu mọi nghiệm đều không phải là phương án x^0 và y đều tối ưu . Do đó đã xác định được toàn bộ tập phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu tương tự sẽ tìm được một tập phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Ứng dụng của định lý độ lệch bù phân tích tính chất tối ưu của một phương án

Cho X là phương án của bài toán gốc, để phân tích tính chất tối ưu của X ta làm như sau: Giả sử X là phương án tối ưu, theo định lý độ lệch bù mọi phương án tối ưu Y của bài toán

đối ngẫu phải thoả mãn chặt các ràng buộc đối ngẫu với các ràng buộc mà X thoả mãn lỏng. Các ràng buộc này tạo thành một hệ phương trình đối với Y.

Giải hệ phương trình này để tìm nghiệm nếu:

Hệ vô nghiệm thì kết luận phương án X không tối ưu.

Hệ có nghiệm thì thử các nghiệm vào các ràng buộc còn lại của bài toán đối ngẫu nếu:

- Mọi nghiệm Y đều không thoả mãn các ràng buộc còn lại của bài toán đối ngẫu, nghĩa là mọi nghiệm đều không phải là phương án thi X không tối ưu.
- Có nghiệm Y là phương án (thoả mãn tất cả các ràng buộc còn lại của bài toán đối ngẫu) thì phương án này là phương án tối ưu đồng thời X là phương án tối ưu, từ đó sẽ xác định được toàn bộ tập phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Đồng thời nhờ một phương án tối ưu nào đó của bài toán đối ngẫu ta lại xác định được tập phương án tối ưu (nếu có) của bài toán gốc.

Ý nghĩa hình học

Khi có $c_j > 0$, thì biết ngay được 1 phương án cực biên của bài toán đối ngẫu.

Nếu Y^0 là phương án cực biên của bài toán đối ngẫu thì khi bài toán gốc thêm 1 ràng buộc ta có $(Y^0, 0)$ vẫn là phương án cực biên của bài toán đối ngẫu.

Đôi khi dùng cặp bài toán đối ngẫu để giải gần đúng theo ý nghĩa sau: Giải cả hai bài toán và nếu hiệu giữa các giá trị tương ứng của các hàm mục tiêu đủ nhỏ thì dừng lại và phương án cực biên thu được lấy làm nghiệm gần đúng.

Ý nghĩa kinh tế

Giả sử bài toán (P) mang nội dung kinh tế sau: có n phương pháp khác nhau để sản xuất m loại sản phẩm. Khi sử dụng 1 đơn vị thời gian cho phương pháp j ($j=\overline{1,n}$) sẽ thu được đồng thời a_{ij} đơn vị sản phẩm i ($i=\overline{1,m}$) và mất một chi phí là c_j ($j=\overline{1,n}$). Nhu cầu xã hội về sản phẩm i là b_i ($i=\overline{1,m}$).

Hãy xác định các khoảng thời gian xj sử dụng mỗi mỗi phương pháp j (j= $\overline{1,n}$) sao cho tổng chi phí sản xuất là nhỏ nhất với điều kiện tổng số đơn vị sản phẩm i mỗi loại sản xuất ra không ít hơn bi (i= $\overline{1,m}$).

III.Phương pháp đơn hình đối ngẫu

1 .Nội dung phương pháp

Áp dụng phương pháp đơn hình cho bài toán đối ngẫu của bài toán dạng chính tắc nhằm tìm lời giải của bài toán gốc do đó sẽ mô tả toàn bộ quá trình bằng ngôn ngữ của bài toán gốc . Bài toán đối ngẫu có dạng :

$$\tilde{f}(y) = \sum_{i=1}^{m} b_1 y_1 \Rightarrow m\text{ax}$$

$$(A_j, y) \le c_j \left(j = 1 \div n \right)$$

$y \in R^m$ nên một phương án cực biên phải thỏa mãn chặt m ràng buộc độc lập tuyến tính .

Đối với cặp bài toán đối ngẫu đối xứng , lời giải của bài toán này có thể thông qua lời giải của bài toán kia (bằng phương pháp đơn hình) mà không cần giải trực tiếp nó.

Xét cặp bài toán đối ngẫu đối xứng sau:

Giả sử Y* =(y1*, y2*, ...,ym*) là phương án tối ưu của bài toán (Q).

Để tìm Y* ta giải bài toán (P).

Đưa bài toán (P) về dạng chính tắc, ta dược bài toán (P'):

Giải bài toán (P') bằng phương pháp đơn hình:

- Nếu bài toán (P') vô nghiệm thì bài toán (Q) cũng vô nghiệm.

- Nếu bài toán (P') có nghiệm tức có phương án tối ưu thì bà toán (Q) cũng có phương án tối ưu và từ dòng cuối cùng của bảng đơn hình ứng với phương án tối ưu của bài toán (P') ta suy ra được phương án tối ưu của bài toán (Q).

Như vây ta có thể mô tả nội dung cơ bản của phương pháp như sau : Áp dụng phương pháp đơn hình cho bài toán đối ngẫu của bài toán dạng chính tắc nhưng nhằm tìm lời giải của bài toán gốc. Do đó ta mô tả toàn bộ quá trình của thuật toán bằng ngôn ngữ của bài toán gốc.

Xuất phát từ bài toán đối ngẫu

Xét phương án cực biên y của bài toán đối ngẫu

- Phương án y cực biên của bài toán đối ngẫu nếu y thoả mãn chặt m rằng buộc độc lập tuyến tính.

-Cơ sở của phương án cực biên

Gọi m véc tơ Aj độc lập tuyến tính tương ứng với các rằng buộc chặt của phương án cực biên y là cơ sở của phương án ấy ký hiệu là J

Đặc trưng của J

Số véc tơ của J đúng băng m véc tơ

m véc tơ Aj là hệ véc tơ độc lập tuyến tính

(Aj,y) = Cj hay y = A_j^{-1}.Cj

- Cơ sở đối ngẫu ngườui ta gọi cơ sơ J có $\Delta k \le 0$ với mọi k không thuộc J là cơ sở đối ngẫu hay một cơ sở của phương án cực biên của bài toán đối ngẫu.

2.Dấu hiệu tối ưu(TL)

Cơ sở đối ngẫu

Gọi m véctơ $\{A_j\}$ độc lập tuyến tính tương ứng với các ràng buộc chặt của phương án cực biên y là cơ sở của phương án cực biên ấy ,ký hiệu là J.Những đặc trưng của cơ sở J:|J|=m; $\{A_j : j \in J\}$ độc lập tuyến tính .

$(A_j,y) = c_j, j \in J$ .Cơ sở J của một phương án cực biên y của hai bài toán đối ngẫu còn gọi là cơ sở đối ngẫu .

-Cơ sở J của bài toán dạng chính tắc là cơ sở đối ngẫu khi và chỉ khi : $\Delta_k \le 0(\forall k \notin J)$, phương án cực biên y tương ứng được xác định bởi : $y = c_j A_j^{-1}$ đồng thời $(A_k, y) = \Delta_k + c_k, \forall k \notin J$

-Phương án cực biên không suy biến chỉ có một cơ sở duy nhất ,đối với nó : $\Delta_k \le 0(\forall k \notin j)$

-Phương án cực biên suy biến có nhiều cơ sở khác nhau ,đối với mỗi cơ sở này đều có ít nhất một $k \notin j$ mà $\Delta k = 0$

- Xây dựng giả phương án x^0:

Cho j là một cơ sở đối ngẫu ,gọi vecto x –nghiệm cảu hệ phương trình: $\sum_{j\in J} x_j A_j = b, x_{k=0}(\forall k \notin J)$, tức là $x = \left(x_j = A_j^{-1}b, x_{k=0}, k \notin J\right)$ nlaf giả phương án của bài toán gốc ứng với cơ sở $J; x_J, j \in J$ gọi là thành phần cơ sở của giả phương án $x_k, k \notin J$ - thành phần phi cơ sở .

Các loại cơ sở của bài toán chính tắc

Với một cơ sở J bất kì của bài toán chính tắc luôn luôn lập được bản đơn hình tương ứng .Căn cứ vào các phần tử trên bảng ,để phân biệt ta sẽ sử dụng các tên gọi sau:

-Cơ sở gốc là cơ sở có $x_1 \geq 0$ (cũng chính là dấu hiệu tối ưu đối với phương án cực biên của bài toán đối ngẫu) đó là cơ sở của một phương án cực biên của bài toán gốc .-Cơ sở đối ngẫu là cơ sở có $\Delta_k \leq (\geq) 0 (\forall k \notin j)$ (cũng chính là dấu hiệu tối ưu đối với phương án cực biên của bài toán gốc) đó là cơ sở của phương án cực biên y của bài toán đối ngẫu , y được xác định bởi công thức : $y = c_j A_j^{-1}$

-Cơ sở tối ưu là cơ sở vừa gốc vừa đối ngẫu ,đó là cơ sở của hai phương án cực biên tối ưu tương ứng của cặp bài toán đối ngẫu .

Dấu hiệu tối ưu

Giả sử y là phương án cực biên của bài toán đối ngẫu ,cơ sở j,giả phương án tương ứng là x.Nếu mọi thành phần cơ sở của giả phương án x đều không âm thì x trở thành phương án và hơn nữa là phương án cực biên tối ưu của bài toán gốc với cùng cơ sở j ,đồng thời y cũng là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Đặc điểm của lời giải qua cơ sở tối ưu

-Nếu phương án cực biên của bài toán này không suy biến (x_j >0) hoặc $\Delta_k < (>) 0, \forall k \notin j$ thì phương án tối ưu của bài toán kia là duy nhất .

-Nếu phương án cực biên tối ưu của bài toán này suy biến $(\exists x_j = 0, j \in J$ hoặc $\Delta_k = 0, k \notin J)$ thì nói chung bài toán kia sẽ có nhiều phương án tối ưu .

3.Quá trình cải tiến phương án

Giả sử bài toán đối ngẫu không suy biên và y^o là phương án cực biên của bài toán đối ngẫu ứng với cơ sở Jo. Xét giả phương án x^0 có các thành phần cơ sở âm. Theo dấu hiệu tối ưu thì y^o chưa phải là phương án tối ưu ta sẽ cải tiên phương án như sau:

Xét giả phươn án $x^o = (xj^0 = A_j^{-1}.b$ với xj thuộc cơ sở, $xj^0 = 0$ với xj không thuộc cơ sở)

Nếu tồn tại $xj^0 < 0$ đồng thời mọi xjk ≥ 0 thì bài toán đối ngẫu không giải được lúc đó bài gốc không có phương án. Trong trường hợp ngược lại.

Nếu tồn tại $xj^0 < 0$ đồng thời tồn tại xjk < 0 thì cải tiên phương án như sau:

Giả sử min($xj^0 < 0$) = $xr^0 < 0$ thì véc tơ Ar bị loại khỏi cơ sở

Xét bước đi θo = Min(Δk/Xrk^0) $Xrk^0 < 0$, Giả sử r đạt tại chỉ số r = s lúc này θo = Min(Δk/Xsk^0) $Xsk^0 < 0$, nhưư vậy véc tơ được đua vào cơ sở là véc tơ Ar . Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp , tương đương ta thu được giả phương án mới tương đối tốt hơn ứng với cơ sở mới.

Hướng dẫn chứng minh:

$(A_j, w^r) = 0$ ($j \in J_0, j \neq r$)

$(A_r, w^r) = -1$ ($j = r$).

Khi đó:

$\tilde{f}(y(\theta)) = (b, y(\theta)) = (b, y^0) + \theta(b, w^r)$.

Tính $(b, w^r) = (\sum_{j \in J_0} x^0{}_j A_j, w^r) = \sum_{j \in J_0} x^0{}_j (A_j, w^r) = -x^0{}_r$.

Như vậy:

$\tilde{f}(y(\theta)) = \tilde{f}(y^0) - \tilde{f}(\theta x^0{}_r > y^0)$.

Với $j \in J_0, j \neq r$, $(A_j, y(\theta)) = (A_j, y^0) + \theta(A_j, w^r) = c_j$,

$j = r$, $(A_r, y(\theta)) = (A_r, y^0) + \theta(A_r, w^r) = c_r - \theta \leq c_r$ với $\theta \geq 0$, nghĩa là các ràng buộc này thoả mãn $\forall \theta \geq 0$

$$(A_k, y(\theta)) = (A_k, y^0) + \theta(A_k, w^r) = \Delta_k + c_k + \theta(\sum_{j \in J_0} x_{jk} A_j, w^r)$$

$$= \Delta_k + c_k + \theta\left\{\sum_{j \in J_0} x_{jk}(A_j, w^r)\right\} = \Delta_k + c_k - \theta x_{rk}$$

Do đó để $y(\theta)$ là phương án chỉ cần:

$\Delta_k + c_k - \theta x_{rk} \leq c_k$ $(k \notin J_0)$, tức là: $\Delta_k - \theta x_{rk} \leq 0$ $(k \notin J_0)$

4.Thuật toán của phương pháp đơn hình đối ngẫu

Giả sử bài toán đối ngẫu không suy biên và y^o là phương án cực biên của bài toán đối ngẫu ứng với cơ sở Jo.

Giả sử đã biết phương án cực biên y của bài toán đối ngẫu của bài toán dạng chính tắc ,cơ sở j.Thành lập bảng đơn hình tương ứng ,chú ý là : $\Delta_k \leq 0(k \notin j)$.Nói một cách khác là đã biết một cơ sở j của bài toán dạng chính tắc mà $\Delta_k \leq 0(k \notin j)$.Thuật toán được thực hiện cho các bước sau :

1)kiểm tra dấu hiệu tối ưu

-Nếu $x_j \geq 0$ - mọi thành phần cơ sở của giả phương án đều không âm - thì giả phương án x là phương án cực biên tối ưu .Nếu $\exists x_j < 0$ với $j \in J$.

2)Kiểm tra tính không giải được của bài toán

-Nếu $\exists x_j < 0$ với $j \in J$ mà $x_{jk} \geq 0 (\forall k \notin j)$ thì bài toán đối ngẫu không giả được vì trị số của hàm $\widetilde{f}(y)$ không bị chặn trên tập phương án,do đó bài toán gốc không có phương án .Nếu ứng với mỗi x_j <0 đều có ít nhất 1 x_{jk} <0

3-Chọn véctơ loại khỏi và xác định véctơ đưa vào cơ sở :

4-Biến đổi bảng

Bước 1 : Kiểm tra dấu hiệu tối ưu

Nếu mọi thành phần cơ sở của giả phương án x đều không âm thì giả phương án x trở thành phương án và là phương án cực biên tối ưu của bài toán gốc đồng thời phương án cực biên y tương ứng bên bài toán đối ngẫu cũng tối ưu.

Bước 2 : Kiểm tra tính không giải được của bài toán

Nếu tồn tại xj^0 <0 đồng thời mọi xjk ≥ 0 thì bài toán đối ngẫu không giải được lúc đó bài gốc không có phương án. Trong trường hợp ngược lại chuyển bước 3

Bước 3 : Cải tiến phương án

Nếu tồn tại xj^0 <0 đồng thời tồn tại xjk < 0 thì cải tiên phương án như sau:

Giả sử min(xj^0 <0) = xr^0 <0 thì véc tơ Ar bị loại khỏi cơ sở

Xét bước đi θo = Min(Δk/Xrk^0) Xrk^0< 0, Giả sử r đạt tại chỉ số r = s lúc này θo = Min(Δk/Xsk^0) Xsk^0< 0, như vậy véc tơ được đua vào cơ sở là véc tơ Ar . Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp , tương đương ta thu được giả phương án mới tương đối tốt hơn ứng với cơ sở mới.

Bước 4 : Biến đổi bảng: Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp , tương đương ta thu được giả phương án mới tương đối tốt hơn ứng với cơ sở mới. sau đó lại quay lại chu trình của thuật toán sau hưu hạn bước sé kết luận bài toán

5.Các chú ý khi áp dụng thuật toán

Các chú ý khi thực hiện thuật toán

-Đối với bài toán có $f(x) \Rightarrow \max$,có thể giải trực tiếp với dấu hiệu cơ sở đối ngẫu tương ứng là cơ sở mà $\Delta_k \geq 0 (k \notin j)$,do đó θ_0 tính theo công thức :

$\theta_0 = \min\limits_{x_{jk}<0} \{-\Delta_k / X_{rk}\}$,các yếu tố khác của thuật toán không đổi ,hoặc có thể chuyển về giải bbài toán với hàm $g(x) = -f(x) \Rightarrow \min$,cần chú ý là f_{max}=-g_{min}

-Về nguyên tắc có thể loại khỏi cơ sở bất kì véctơ nào ứng với x_j<0 cũng đều cải tiến được phương án của bài toán đối ngẫu .

- Trường hợp bài toán đối ngẫu suy biến thì θ_0 có thể bằng 0.khi $\theta_0 = 0$,vẫn thực hiện thuật toán một cách bình thường ,nghĩa là vécơ ứng với θ_0 vẫn được đưa vào cơ sở . Tuy nhiên kết quả tính toán trong trường hợp này chỉ cho ta bảng đơn hình ứng với một cơ sở khác ,do đó giả phương án khác ,của cùng một phương án cực biên suy biến của bài toán đối ngẫu .Trên bảng đơn hình hàng ước lượng Δ_k không đổi .

- Dấu hiệu suất hiện phương án cực biên suy biến của bài toán đối ngẫu là θ_0 đạt tại nhiều chỉ số , khi đó sẽ chọn vectơ đưa vào cơ sở là một trong số những vecto ứng với θ_0 theo quy tắc ngẫu nhiên .

-Nếu j^* là cơ sở ứng với phương án cực biên tối ưu thì phương án tối ưu y* được xác định bởi hệ phương trình : $(A_j,y)=c_j(j \in J^*)$ .Trường hợp đặc biệt nếu có vécto điều kiện $A_k = \pm c^i$ thì $\pm y_i^* = \Delta_k + c_k$ điều này làm đơn giản quá trình giải hệ phương trình trên

$$f(X)= x1+3x2 +2x3+3x4 +5x5 \longrightarrow \min.$$

$$x1 + 2x2 - x3 + x4 - x5 = -3$$

$$-x2 - x3 + 2x4 +4x5 -x6 =18$$

$$- x2 - 3x3 +2 x5 + x7 = 10$$

$$xj \geq 0 \ (j = 1,7)$$

c_J	J	x_J	1 x_1	3 x_2	2 x_3	3 x_4	5 x_5	0 x_6	0 x_7
1	x_1	-3	1	2	-1	1	-1	0	0
0	x_6	-18	0	1	1	[-2]	-4	1	0
0	x_7	10	0	-1	-3	0	2	0	1
	$\tilde{f}(y)$	-3	0	-1	-3	-2	-6	0	0
1	x_1	-12	1	5/2	-1/2		0	[-3]	1/2
			0						
3	x_4	9							
			0	-1/2	-1/2	1	2	-1/2	0
0	x7	10							
			0	-1	-3	0	2	0	1
	$\tilde{f}(y)$	15	0	-2	-4	0	-2	-1	0

5	x_5	4	-1/3	-5/6	1/6	0	1	-1/6	0
3	x_4	1	2/3	7/6	5/6	1	0	-1/6	0
0	x_7	2	2/3	2/3	-10/3	0	0	1/3	1
	$\tilde{f}$(y)	23	-2/3	-11/3	-11/3	0	0	-4/3	0

-Tìm cơ sở đối ngẫu (giả đối ngẫu)xuất phát

a) trường hợp đặc biệt bài toán có dạng :

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (\geq) b_i \ (i = 1 \div m)$$

$x_j \geq 0 (j = 1 \div n)$ trong đó $c_j \geq 0 (j = 1 \div n)$

Đưa bài toán về dạng chính tắc ,các véctơ điều kiện ứng với các biến phụ tạo thành cơ sở $\pm E$,lập bảng đơn hình ,dễ thấy $\Delta_k = -c_k \leq 0 (k = 1 \div n)$ đó là cơ sở đối ngẫu áp dụng được thuật toán .

b)Bài toán dạng chính tắc ,biết được cơ sở J không phải cơ sở đối ngẫu ,nghĩa là $\exists \Delta_k > 0$ .Xây dựng bài toán mở rộng (M) bằng cách thêm vào một ràng buộc gỉa với vế trái là tổng các biến phi cơ sở nhỏ thua hoặc bằng một hằng số dương tuỳ ý M.Cộng biến phụ x_0 vào ràng buộc này để đưa bài toán về dạng chính tắc .

Giải bài toán M bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu sẽ gặp các trường hợp :

-Xuất hiện dấu hiệu bài toán M không có phương án thì bài toán xuất phát cũng không có phương án

-Tìm được cơ sở đối ngẫu của bài toán M có dạng $\bar{J} = J \cup \{0\}$ nghĩa là vecto $\bar{A}_0$,nằm trong cơ sở .Khi đó J chính là cơ sở đối ngẫu của bài toán xuất phát .Để có bảng đơn hình tương ứng chỉ cần bỏ hàng và cột ứng với x_0 .sau đó tiếp tục thuật toán giải bằng toán xuất phát .

-Tìm được phương án cực biên tối ưu của bài toán M với $\bar{A}_0$ là vecto phi cơ sở .Khi đó các thành phần cơ sở của phương án cực biên tối ưu phụ thuộc M:

Nếu trị tối ưu của hàm mục tiêu phụ thuộc M ,hệ số của M phải là số âm vì nó bằng $\bar{\Delta}_0 < 0$ thì bài toán không giải được vì trị số hàm mục tiêu không bị chặn .

Nếu trị tối ưu của hàm mục tiêu không phụ thuộc M ,nghĩa là $\bar{\Delta}_0 = 0$ thì đưa $\bar{A}_0$ vào cơ sở theo thuật toán đơn hình ta sẽ được một phương án cực biên tối ưu khác của bài toán M .Vì $\bar{A}_0$ nằm trong cơ sở nên bỏ hàng và cột ứng với x_0 sẽ được bản đơn hình ứng với cơ sở tối ưu của bài toán xuất phát .Tuy nhiên trường hợp này sẽ không xảy ra nếu khi thực hiện thuật toán ta luôn ưu tiên đưa vecto $\bar{A}_0$ vào cơ sở khi nó ứng với θ_0 .

- Đặc điểm tính toán khi giải bài toán M

Vì thành phần cơ sở của giả phương án phụ thuộc M nên trong bảng đơn hình cột phương án chia làm hai : Một cột ghi phần phụ thuộc M ,một cột ghi hệ số của M trong thành phần cơ sở .Khi hệ số của M khác 0 thì dấu của nó chính là dấu của thành phần cơ sở .Chú ý rằng cột hệ số của M hoàn toàn trùng với cột $x_0, c_0 = 0$,nên Δ_0 trùng với hệ số của M trong $\bar{f}(y)$

Vì vậy để đơn giản trong bảng có thể dùng chính cột này làm cột x_0.

CHƯƠNG III: BÀI TOÁN VẬN TẢI

I.Nội dung và đặc điểm

1.Nội dung kinh tế và dạng toán học

Nội dung bài toán.

Giả sử trên một khu vực địa lý ,tại một thời điểm nhất định có m nơi sản xuất (kho) một loại hàng hoá thuần nhất .Ký hiệu nơi sản xuất i là A_i và gọi là trạm phát A_i $i = 1 \div m$; lượng hàng hiện có ở A_i là a_i .Đồng thời có n nơi tiêu thụ loại hàng hoá đó .Ký hiệu nơi tiêu thụ j là B_j và gọi là trạm thu $B_j\left(j = 1 \div n\right)$; yêu cầu của trạm thu B_j là b_j .Để thuận tiện từ đây ta sẽ gọi a_i và b_j là yêu cầu của các trạm phát và thu .Chi phí vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ trạm phát A_i tới trạm thu B_j là c_{ij} $\left(i = 1 \div m, j = 1 \div n\right)$.Lập phương án vận chuyển đáp ứng đầy đủ yêu cầu của các trạm thu bằng tát cả các hàng hóa có ở cấc trạm phát với tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất .

. Hãy lập kế hoạch vận chuyển từ mỗi điểm phát đến mỗi điểm thu bao nhiêu hàng để :

- Các điểm phát đều phát hết hàng

- Các điểm thu đều nhận đủ hàng

- Tổng cước phí phải trả là ít nhất

Gọi xij là lượng hàng chuyển từ điểm phát Ai đến điểm thu Bj , xij ≥ 0 . Vì tổng lượng hàng phát đi từ mỗi điểm phát Ai đến mọi điểm thu Bj bằng lượng hàng phát từ Ai nên :

Dạng toán học

Gọi x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ trạm phát A_i tới trạm thu B_j .Mô hình bài có dạng :

$$f\left(x\right) = \sum_{j-1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \left(i = 1 \div m\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \left(j = 1 \div n\right), x_{ij} \geq o\left(\forall i, j\right)$$

Bài toán trên gọi là bài toán vận tải cổ điển hay bài toán dạng đóng .Rõ ràng bài toán chỉ có nghĩa khi $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$,với điều kiện này bài toán gọi là cân bằng thu phát .

Bài toán không cân bằng thu phát có 2 dạng và gọi chúng là bài toán dạng mở .

a) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \ (i = 1 \div m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1 \div n), x_{ij} \ge 0 (\forall i, j)$$

b) $\sum_{i=1}^{m} a_i \le \sum_{j=1}^{n} b_j$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1 \div m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \ (j = 1 \div n), x_{ij} \ge 0 (\forall i, j)$$

2.Các đặc điểm

Tính chất chung của bài toán vận tải đóng

-Đó là bài toán dạng chính tắc .Trong hệ m+ n phương trình ràng buộc chỉ có m+n-1 phương trình độc lập tuyến tính , do đó một phương án cực biên có tối đa m+n-1 thành phần dương .

- Các vecto điều kiện A_{ij} tương ứng với biến x_{ij} có thành phần I và thành phần m+j bằng 1 ,các thành phần còn lại đều bằng 0.

-Bài toán cân bằng thu phát luôn giải được .

3.Mô tả bài toán dưới dạng bảng

Bài toán vận tải dạng bảng

Xây dựng một bản gồm m hàng và n cột ;mỗi hàng dặc trwung cho một trạm phát ,mỗi cột đặc trưng cho một trạm thu .Tương ứng với mỗi hàng hoặc cột ghi yêu cầu của trạm phát hoặc trạm thu .

-Phương pháp chi phí nhỏ nhất (đường gần):luôn ưu tiên phân phối cho ô có c_{ij} nhỏ nhất trong bảng .

-Phương pháp Fogels : Luôn ưu tiên phân phối cho ô có c_{ij} nhỏ nhất nằm trên hàng hoặc cột có hiệu số giữa chi phí nhỏ nhì và nhỏ nhất và lớn nhất .

Ta đưa bài toán vào một bảng gọi là bảng vận tải.

Bảng gồm (m+1) hàng và (n+1) cột, cột 1 ghi tên và lượng hàng ở các điểm phát (Ai và ai). Hàng 1 ghi tên và lượng hàng ở các điểm thu (Bj và bj), ô còn lại trong mỗi ô góc trên bên trái ghi cước phí cij, góc dưới bên phải ghi lượng hàng xij.

- Các khái niệm về bài toán dạng bảng:

- Ô chọn: Là ô có lượng hàng xij ≥0, còn gọi là ô sử dụng, khoanh tròn xij lại.

- Ô loại: Là ô không có hàng, tức xij=0, ta để trống ô đó.

- Dây chuyền: là một đoạn thẳng hay một dãy liên tiếp các đoạn thẳng gấp khúc mà hai đầu mút là hai ô chỉ nằm trên cùng một hàng hoặc một cột với một ô chọn khác thuộc dây truyền của bảng vận tải.

- Chu trình: Là dây chuyền khép kín

Như vậy một hàng hoặc một cột mà chu trình đi qua thì chỉ đi qua hai ô và số ô. Do đó số ô ít nhất của một chu trình là 4.

- Ma trận X = (xi j)m.n thỏa mãn hệ (2) - (4) được gọi là một phương án của bài toán.

- Phương án: X = (xi j)m.n thỏa mãn được gọi là phương án cực biên của bài toán vận tải nếu tập hợp các ô tương ứng với các thành phần dương của nó không tạo thành chu trình.

- Phương án X = (xi j)m.n được gọi là phương án cực biên không suy biến nếu số ô chọn của nó đúng bằng m+n+1.

- Phương án X = (xi j)m.n được gọi là phương án cực biên suy biến nếu số ô chọn của nó nhỏ thua m+n+1.

- Một phương án thoả mãn yêu cầu (1) được gọi là phương án tối ưu (nghiệm) của bài toán, ký hiệu là Xopt.

Cho bài toán vận tải dạng bảng kích thước m x n. Một tập hợp các ô có thứ tự được gọi là một dây chuyền nếu:

- Hai ô liên tiếp cùng dòng hoặc cùng cột.
- Ba ô liên tiếp không cùng dòng hoặc cùng cột.

Một dây chuyền khép kín, nghĩa là ô cuối cùng dòng hoặc cùng cột với ô đầu tiên được gọi là một chu trình.

Chú ý rằng mệnh đề ngược lại của Định lí 3 không đúng. Số m+n-1 chỉ là dấu hiệu cần nhưng không phải là điều kiện đủ để xét tập hợp các ô có chứa chu trình hay không.

Hệ quả Một phương án cực biên có không quá m+n-1 ô chọn hay một *phương án có từ m+n ô chọn trở lên thì không phải là phương án cực biên* .

Mệnh đề ngược lại không đúng . Số ô chọn không quá m+n-1 chỉ là dấu hiệu cần nhưng không đủ để xét một phương án có phải là cực biên hay không .

II.Xây dựng phương án cực biên

Bài toán vận tải là bài toán Qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc nên có thể giải bằng phương pháp đơn hình (Chương I) .Tuy nhiên , bài toán vận tải thường có số ẩn rất lớn (mxn) và có cấu trúc đặc biệt : ma trận các hệ số hầu hết bằng 0 ,do đó , chúng ta sẽ không giải bài toán theo phương pháp đơn hình đã biết mà xây dựng một phương pháp giải đơn giản hơn , đó là phương pháp (thuật toán) phân phối .

Có 3 phương pháp xây dựng phương án cực biên thường sử dụng là phương pháp góc .

Nội dung chính của phương pháp phân phối gồm các bước như sau :

1.Nguyên tắc phân phối tối đa(TL)

Lây ô(i,j) bất kỳ và phân phối lượng hàng xij = min(ai,bj) sẽ có ba trường hợp xẩy ra như sau.

Trường hợp 1: xij = ai nghĩa là trạm phát Ai đã hết hàng, loại bỏ hàng i đồng thời sửa lại nhu cầu của trạm thu Bj lượng hàng mới là b'j = bj- ai.

Trường hợp 2: xij = bj nghĩa là trạm thu Bi đã hết hàng, loại bỏ cột j đồng thời sửa lại nhu cầu của trạm phát Aj lượng hàng mới là a'j = ai – bj

Trường hợp 3: xij = ai = bj nghĩa là trạm phát Ai đã hết hàng và trạm thu Bj đã thoả mãn nhu cầu loại bỏ hàng i và cột J

Quá trình cứ tiếp tục như vậy cho đến khi toàn bộ lượng hàng ở các tram phát phân phối hết và các trạm thu thoả mãn nhu cầu về hàng hoá.

2.Các phương pháp xây dựng phương án cực biên

a. Phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát.

Để xây dựng một phương án cực biên xuất phát người ta thường sử dụng một trong ba phương pháp sau:

- Phương pháp góc Tây-Bắc.

Phương pháp góc tây bắc gồm những bước sau:

Bước 1. Chọn ô nằm ở dòng 1, cột 1 của bảng vận tải. Bước 2. Phân lượng hàng h = min{a1, b1} vào ô(1,1)

Bước 3. Đánh dấu hàng (cột), theo đó lượng hàng ở trạm phát (trạm thu) tương ứng đã hết

(đã đủ).

Bước 4. Quay trở về bước 1 thực hiện công việc ở những ô còn lại.

- Phương pháp min- cước.

Nội dung phương pháp min cước gồm các bước sau đây.

Bước 1. Chọn ô có cước phí thấp nhất để phân hàng giả sử là ô (i,j). Bước 2. Phân lượng hàng h = min {a_i, b_j} vào ô(i,j)

Bước 3. Đánh dấu các ô thuộc hàng i, hoặc cột j nếu trạm phát A_i đã phát hết hàng, hoặc trạm thu B_j đã nhận đủ hàng.

Bước 4. Quay trở lại bước 1 thực hiện công việc ở những ô còn lại.

- Phương pháp xấp xỉ Phoghel.

- Định nghĩa. Độ lệch của hàng (cột) là hiệu số giữa ô có cước phí thấp thứ nhì trừ đi ô có cước phí thấp thứ nhất của hàng (cột) đó.

Nội dung của phương pháp Phoghen gồm các bước sau:

Bước 1. Chọn hàng hoặc cột có độ chênh lệchlớnnhất

Bước 2. Chọn ô có cước phí thấp nhất thuộc hàng (cột) có độ chênh lệch lớn nhất, giả sử ô(i,j).

Bước 3. Phân lượng hàng h = min{ai, bj} vào ô(i,j)

Bước 4. Đánh dấu các ô thuộc hàng (cột), theo đó trạm phát Ai đã phát hết hàng hoặc trạm

thu Bj đã nhận đủ hàng, quay trở về từ bước 1 tiếp tục thực hiện thuật toán.

Phương pháp góc Tây - Bắc

- Phân phối tối đa vào ô góc Tây - Bắc của bảng (góc trên bên trái) .

- Tính lại lượng hàng ở dòng và cột vừa tham gia phân phối . Tạm thời loại dòng hoặc cột có lượng hàng còn lại bằng 0 ra khỏi quá trình phân phối . Quay lại bước ở trên và tiếp tục phân phối cho đến hết .

Các số ai được viết ở cột đầu tiên , các số bj được viết ở dòng đầu tiên . Các dòng và cột này không tính vào kích thước bài toán . Ma trận cước phí [ci j] được viết nhỏ hơn ở phía dưới mỗi ô .

Phương pháp ưu tiên cước phí nhỏ nhất

- Phân phối tối đa vào ô có cước phí nhỏ nhất của toàn bảng .

- Tính lại lượng hàng ở dòng và cột vừa tham gia phân phối . Tạm thời loại dòng hoặc cột có lượng hàng còn lại bằng 0 ra khỏi quá trình phân phối . Quay lại bước - ở trên và tiếp tục phân phối cho đến hết . ***- Phương pháp xấp xỉ Fogen***

- Tính độ lệch của các dòng [cột] bằng hiệu số giữa cước phí nhỏ thứ nhì và cước phí nhỏ nhất trong dòng [cột] đó .

- Xác định ô trũng : ô có cước phí nhỏ nhất ở trên dòng và cột cùng có độ lệch lớn nhất . Phân phối tối đa vào ô trũng nếu có và chuyển sang bước tiếp theo.

- Phân phối tối đa vào ô có cước phí nhỏ nhất ở trên dòng [cột] có độ lệch lớn nhất .

- Tính lại lượng hàng trên dòng và cột vừa phân phối . Loại bỏ dòng hoặc cột có lượng hàng bằng 0 khỏi quá trình phân phối . Quay lại bước và tiếp tục quá trình cho đến hết .

Phương án thu được theo nguyên tắc phân phối tối đa là phương án cực biên .

III.Phương pháp thế vị giải bài toán vận tải

1.Tiêu chuẩn tối ưu

Tiêu chuẩn tối ưu :

Điều kiện cần và đủ để phương án $x = \{x_{ij}\}$ của bài toán vận tải tối ưu là tồn tại một hệ thống số $\{u_i v_j\}$ thỏa mãn :

a) $v_j - u_i \le c_{ij} \ (\forall i, j)$

b) $v_j - u_i = c_{ij}$ nếu $x_{ij} > 0$

Các số u_i, v_j trong tiêu chuẩn tối ưu và trong các tính toán sẽ gặp được gọi là các thế vị hàng và cột .

3. Thuật toán của phương pháp thế vị

Thuật toán của phương pháp thế vị

Giả sử đã biết một phương án cực biên với tập ô cơ sở S tương ứng .Thuật toán gồm các bước sau :

Bước 1: Tìm phương án cực biên xuất phát $X^0 = (xij)m..xn$

Sử dụng một trong 3 phương pháp đã trình bầy ở trên để tìm phương án cực biên xuất phát

(nếu phương án tìm được là phương án suy biến thì ta phải bổ xung ô chọn không để được phương án không suy biến, ô chọn có vai trò như các ô chọn khác).

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu của phương án.

- Xây dựng hệ thống thế vị.

1)Xây dựng hệ thống thế vị $\{u_i, v_j\}$

Lấy một hàng I bất kì và cho nó một thế vị u ,tùy ý .Các thế vị còn lại được xác định theo quy tắc :

-Nếu hàng I đã có u_i và (I,j) $\in S$ thì thế vị của cột j được tính bởi :

$V_j = u_i + c_{ij}$

-Nếu cột j đã có v_j và (I,j) $\in S$ thì thế vị của hàng I được tính bởi :

$U_i = v_j - c_{ij}$

Quá trình tiếp tục cho tới khi xác định được toàn bộ hệ thống thế vị .

2) Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu

-Các ô cơ sở (I,j) $\in S$,hiển nhiên thỏa mãn điều kiện b vì vậy chỉ cần kiểm tra điều kiện a đối với các ô phi cơ sở (I,j) $\in S$.

-Nếu $v_j - u_i \le c_{ij}, \forall (i, j) \notin S$ thì phương án tương ứng tối ưu .

-Nếu tồn tại một ô $(i, j \in S)$ mà $v_j - u_i > c_{ij}$ thì phương án không tối ưu .Các ô có $v_j - u_i > c_{ij}$ gọi là các ô vi phạm ,tính $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ đối với các ô vi phạm ,như vậy $\Delta_{ij} > 0$

3) Điều chỉnh phương án

-Giả sử $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{rk}$.Ô (r,k) được lấp làm ô điều chỉnh .Tìm vòng tạo bởi ô điều chỉnh với các ô cơ sở .Trên vòng đánh dấu lẻ chẵn các ô với ô điều chỉnh (r,k) là ô lẻ .Ký hiệu v_i,v_c tương ứng là tập ô lẻ ,chẵn trên vòng .Xác định q=min $x_{ij}, (i, j) \in V_c$ .Thực hiện phép biến đổi biến số trên vòng : $x_{ij} = \begin{cases} x_{ij,} (i, j) \notin V \\ x_{ij} + q, (i, j) \in V_i \\ x_{ij} - q(i, j) \in V_c \end{cases}$

-Thực chất phép biến đổi trên là tăng q cho ô lẻ và giảm q ở ô chẵn .

-Kết quả của quá trình biến đổi ta được phương án cực biên mới x' tốt hơn x : $f(x') = f(x) - q.\Delta_{rk}$ sau điều chỉnh ô điều chỉnh thành ô cơ sở ,ô ứng với q sẽ trở thành phi cơ sở.

3.Trường hợp suy biến

- Trường hợp bài toán suy biến thì q có thể bằng 0.Khi q=0 ta vẫn thực hiện thuật toán một cách bình thường ,nghĩa là ô ứng với q vẫn bị loại khỏi tập ô cơ sở .Tuy nhiên kết quả của quá trình điều chỉnh chỉ chuyển sang một tập ô cơ sở khác của cùng một phương án cực biên suy biến .

- Dấu hiệu xuất hiện phương án cực biên suy biến là q đạt tại nhiều ô .Khi đó ta sẽ loại một trong những ô ứng với q ra khỏi tập ô cơ sở theo quy tắc ngẫu nhiên ,các ô còn lại ứng với q vẫn giữ trong tập ô cơ sở với tư cách ô bổ sung.

IV.Bài toán không cân bằng thu phát

1.Phát lớn hơn thu

Trường hợp $\sum_{i=1}^{m} a_1 > \sum_{j=1}^{n} b_j$ ta đưa về bài toán cân bằng thu phát bằng cách thêm vào một trạm thu giả B_{n+1} với yêu cầu $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_1 - \sum_{j=1}^{n} b_j$,đồng thời $c_{i.n+1}$=0 $(\forall j)$.Lượng hàng lấy từ trạm phát A_1 cung cấp cho trạm thu giả B_{n+1} nghĩa là lượng hàng được giữ lại ở trạm phát A_1

P.hương pháp giải

- Giải bài toán vận tải cung lớn hơn cầu:

Ta thêm vào bài toàn một trạm thu giả Bn+1 với lượng hàng thu là:

Cước phí từ trạm phát giả Am+1 đến các trạm thu Bj là cm+1,j = 0 (j = ,1 n).

Khi đó bài toán đã cho trở về bài toán cung bằng cầu mà ta đã biết cách giải.

Chú ý: - Khi giải bài toán trên, nếu sử dụng phương pháp min- cước tìm phương án cực biên xuất phát ta ưu tiên phân phối hàng tối đa vào ô có cược phí dương nhỏ nhất trước rồi mới mới đến ô có cước phí bằng không.

- Giá trị hàm mục tiêu: f (Xopt) = f (X opt) = fmin.

2.Phát it hơn thu

-Trường hợp $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ .Ta đưa về bài toán cân bằng thu phát bằng cách thêm vào một trạm phát giả A_{m+1} với yêu cầu $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$,đồng thời $c_{m+ij} = 0(\forall j)$.Lượng hàng lấy từ trạm phát giả A_{m+1} cung cấp cho trạm thu B_j ,nghĩa là lượng yêu cầu của trạm thu B_j không được thoả mãn .

hàng.

Phương pháp giải

- Giải bài toán vận tải cung lớn hơn cầu:

Ta thêm vào bài toàn một trạm thu giả Bn+1 với lượng hàng thu là:

Cước phí từ trạm phát giả Am+1 đến các trạm thu Bj là cm+1,j = 0 (j = ,1 n).

Khi đó bài toán đã cho trở về bài toán cung bằng cầu mà ta đã biết cách giải.

Chú ý: - Khi giải bài toán trên, nếu sử dụng phương pháp min- cước tìm phương án cực biên xuất phát ta ưu tiên phân phối hàng tối đa vào ô có cược phí dương nhỏ nhất trước rồi mới mới đến ô có cước phí bằng không.

- Giá trị hàm mục tiêu: fmin.

Thực hành giải bài toán QHTT trên máy tính

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Toán kinh tế - Đại học Mỏ địa chất.

2. Toán kinh tế - Học viện Tài chính Hà Nội.

3. Trần Túc - Quy hoạch tuyến tính Đại học Kinh tế quốc dân -Hà Nội 1998

4. Bài giảng giải các bài toán tối ưu và thống kê trên Excel- PGS.TS Bùi Thế Tâm - Phòng tối ưu và điều khiển viện toán học Việt Nam.

5. Hoàng Tuỵ - Lý thuyết quy hoạch Tập I nhà xuất bản khoa học hà nội - 1968.