KHÁI NIỆM VỀ ĐỒ THỊ

Toán rời rạc 2

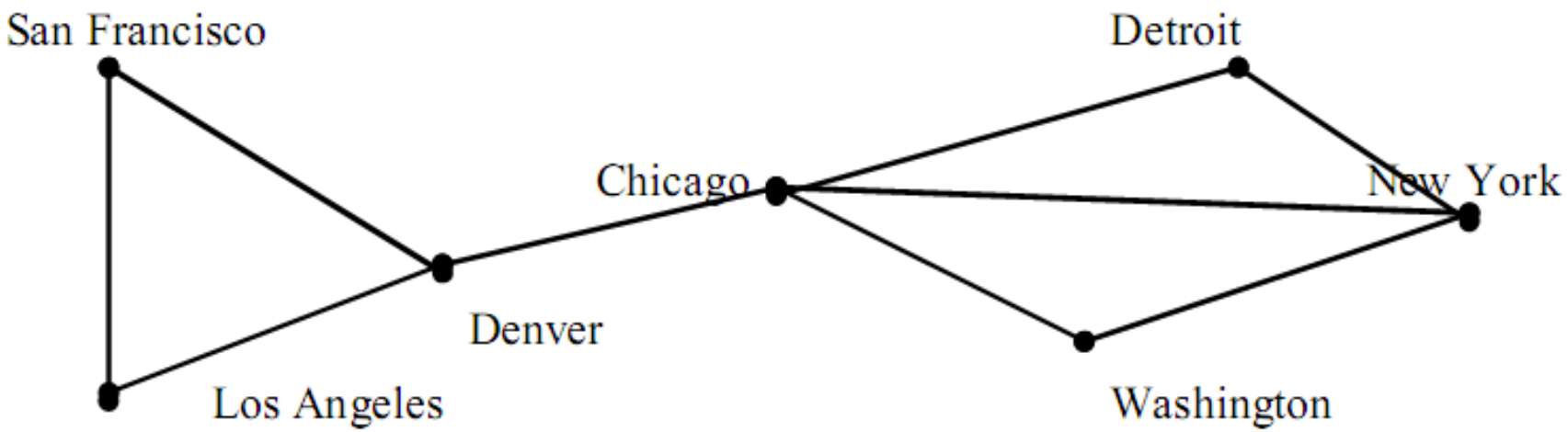
Nội dung

- Định nghĩa đồ thị
- Một số thuật ngữ cơ bản trên đồ thị vô hướng
- Một số thuật ngữ cơ bản trên đồ thị có hướng
- Một số dạng đồ thị đặc biệt
- Bài tập

Định nghĩa đồ thị

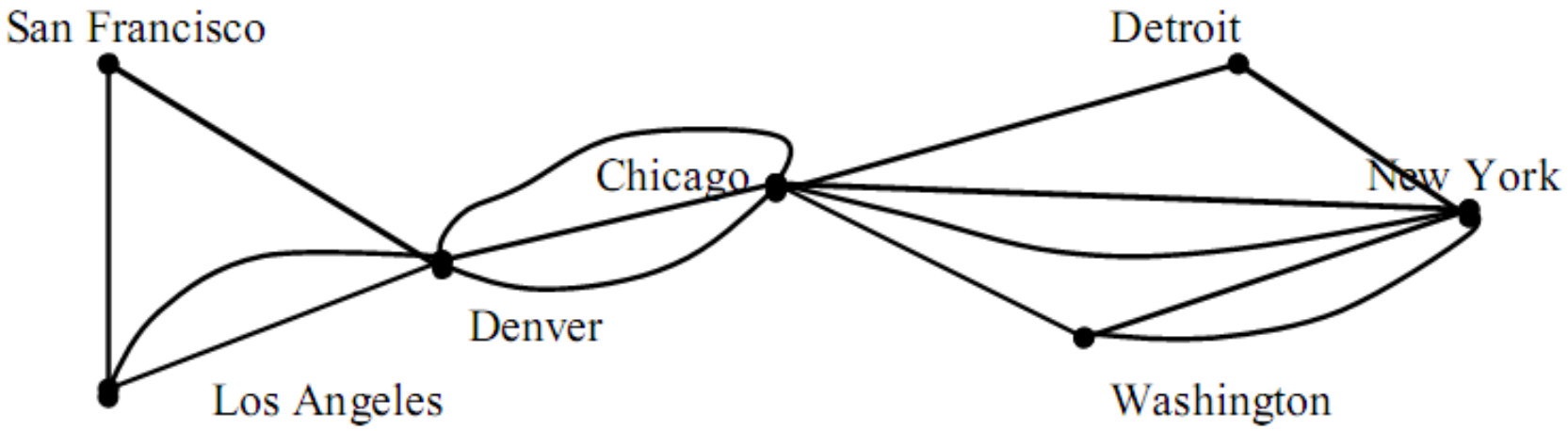
Đơn đồ thị vô hướng

- Đơn đồ thị vô hướng G= < V, E> bao gồm *V* là tập các đỉnh, *E* là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của *V* gọi là các cạnh.



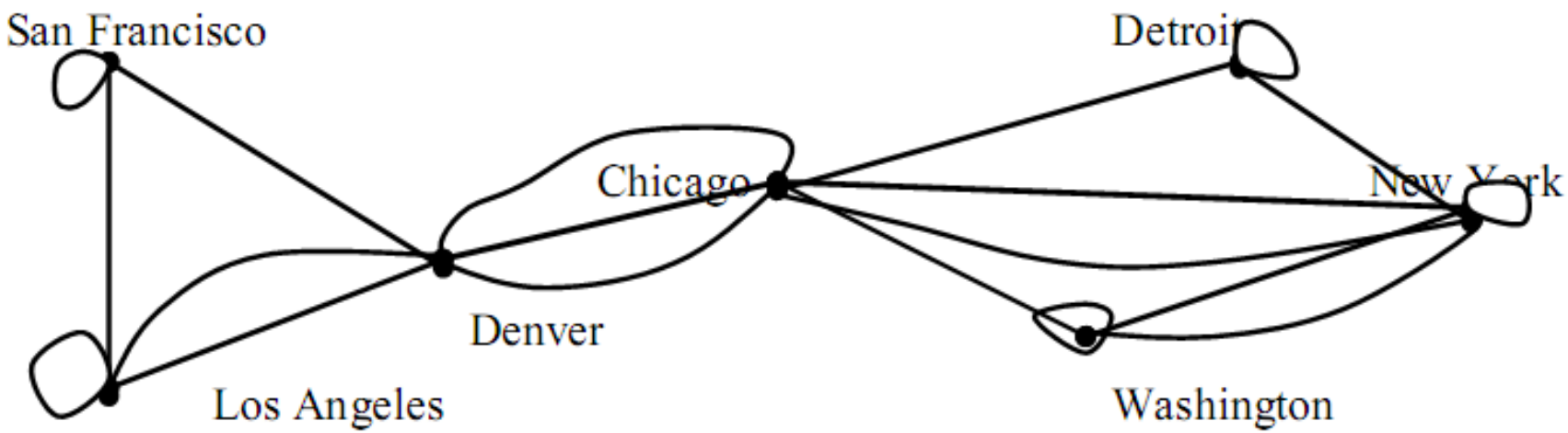
Đa đồ thị vô hướng

- Đa đồ thị vô hướng G = <V, E> bao gồm V là tập các đỉnh, E là họ các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là tập các cạnh.
- e1∈E, e2∈E được gọi là cạnh bội nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh.



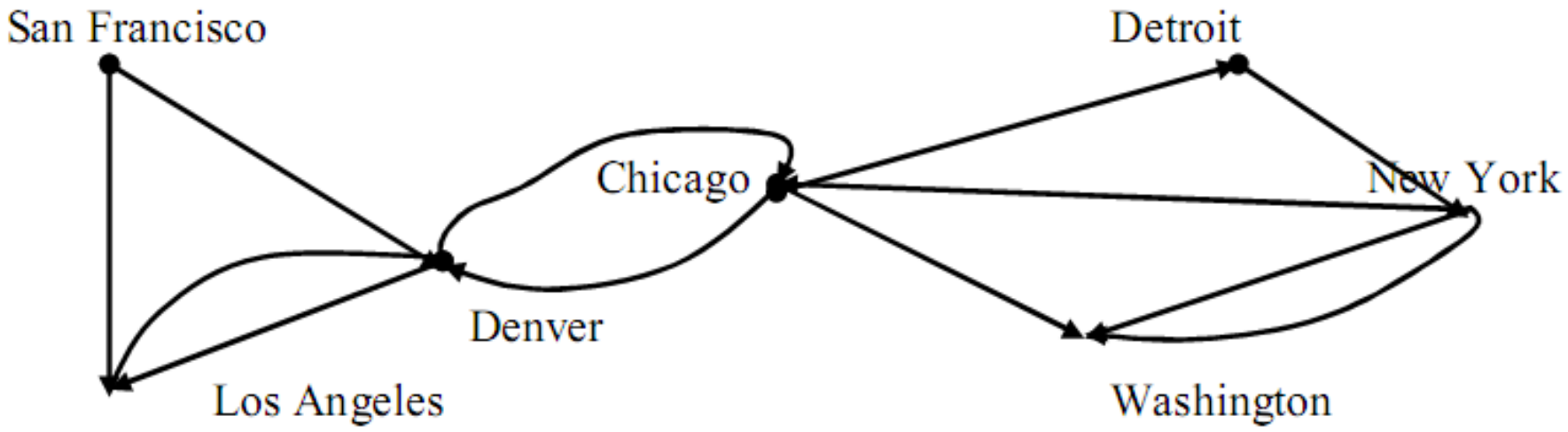
Giả đồ thị vô hướng

- Giả đồ thị vô hướng G = <V, E> bao gồm V là tập đỉnh, E là họ các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử (*hai phần tử không nhất thiết phải khác nhau*) trong V được gọi là các cạnh.
- Cạnh e được gọi là khuyên nếu có dạng e =(u, u), trong đó u là đỉnh nào đó thuộc V.



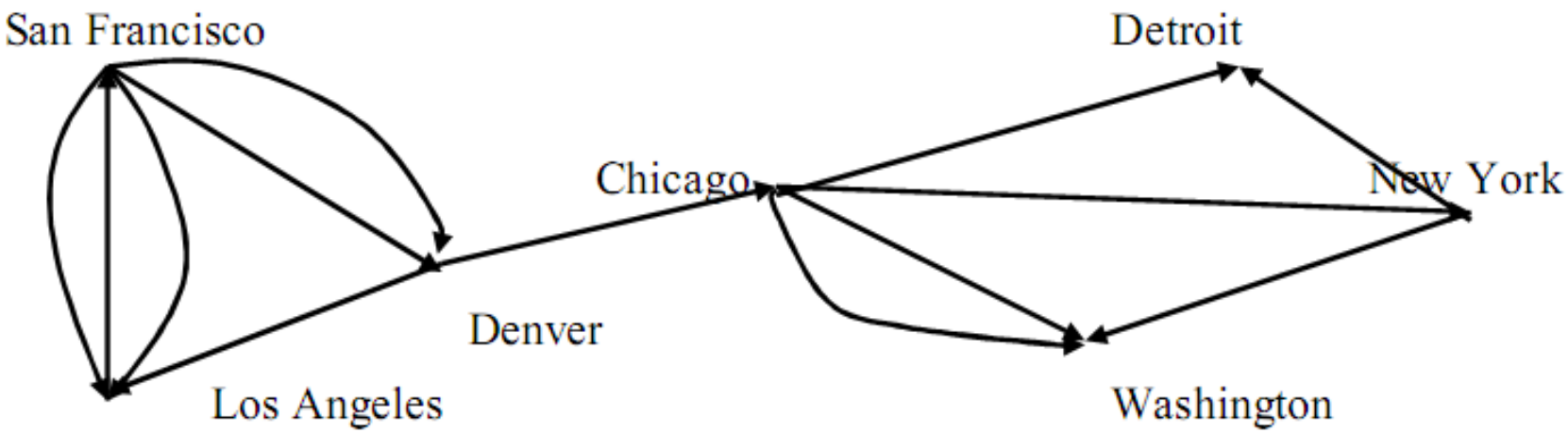
Đơn đồ thị có hướng

- Đơn đồ thị có hướng G = <V, E> bao gồm V là tập các đỉnh, E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử của V gọi là các cung.



Đa đồ thị có hướng

- Đa đồ thị có hướng G = <V, E> bao gồm V là tập đỉnh, E là cặp có thứ tự gồm hai phần tử của V được gọi là các cung.
- Hai cung e1, e2 tương ứng với cùng một cặp đỉnh được gọi là cung lặp.



Phân biệt các loại đồ thị

Loại đồ thị	Cạnh	Có cạnh bội	Có khuyên
Đơn đồ thị vô hướng	Vô hướng	Không	Không
Đa đồ thị vô hướng	Vô hướng	Có	Không
Giả đồ thị vô hướng	Vô hướng	Có	Có
Đơn đồ thị có hướng	Có hướng	Không	Không
Đa đồ thị có hướng	Có hướng	Có	Có

Quy ước

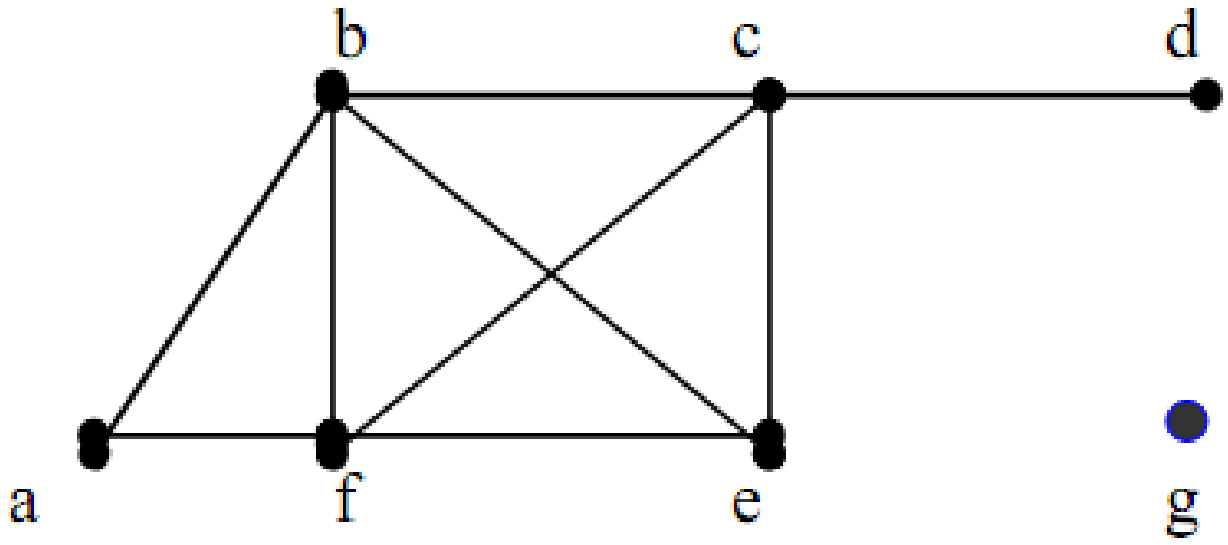
- Ta chủ yếu làm việc với đơn đồ thị vô hướng và đơn đồ thị có hướng.
- Khi viết “đồ thị vô hướng” ta hiểu là “đơn đồ thị vô hướng”.
- Khi viết “đồ thị có hướng” ta hiểu là “đơn đồ thị có hướng”.

Một số thuật ngữ cơ bản trên đồ thị vô hướng

Bậc của đỉnh

- **ĐN 1.** Hai đỉnh u và v của đồ thị vô hướng G =<V, E> được gọi là kề nhau nếu (u,v) là cạnh thuộc đồ thị G.
  - Nếu e =(u, v) là cạnh của đồ thị G thì ta nói cạnh này liên thuộc với hai đỉnh u và v, hoặc ta nói cạnh e nối đỉnh u với đỉnh v, đồng thời các đỉnh u và v sẽ được gọi là đỉnh đầu của cạnh (u,v).
- **ĐN 2.** Ta gọi bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc với nó và ký hiệu là *deg(v)*.

Ví dụ



- *deg(a) = 2, deg(b) =deg(c) = deg(f) = 4;*
- *deg(e) = 3, deg(d) = 1, deg(g)=0.*
- Đỉnh có bậc 0 được gọi là đỉnh cô lập (*g*)
- Đỉnh bậc 1 được gọi là đỉnh treo (d)

Tổng bậc các đỉnh

- **Định lý 1.** Giả sử G = <V, E> là đồ thị vô hướng với *m* cạnh. Khi đó:

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

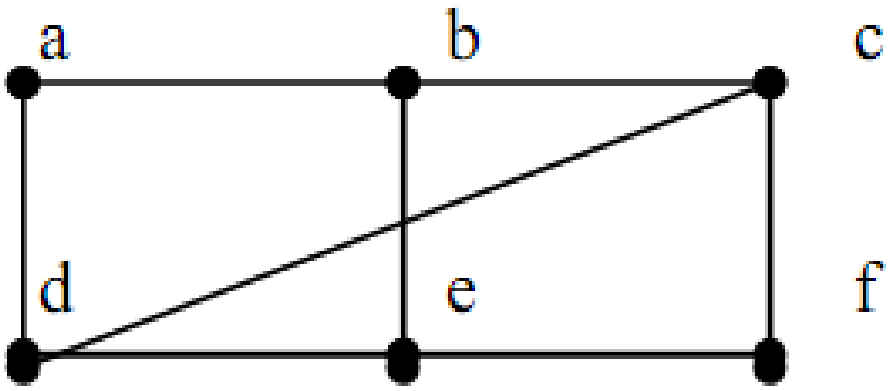
- **Hệ quả.** Trong đồ thị vô hướng G=<V, E>, số các đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.

Đường đi, chu trình

- **ĐN 1.** Đường đi độ dài *n* từ đỉnh u đến đỉnh v trên đồ thị vô hướng G=<V,E> là dãy $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, trong đó n là số nguyên dương, $x_0=u$, $x_n=v$, $(x_i, x_{i+1}) \in E$, i=0,1,2,...,n-1.
- Đường đi như trên còn có thể biểu diễn thành dãy các cạnh $(x_0, x_1), (x_1,x_2),\ldots,(x_{n-1}, x_n)$.
- Đỉnh u là đỉnh đầu, đỉnh v là đỉnh cuối của đường đi.
- Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (u=v) được gọi là chu trình.
- Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu như không có cạnh nào lặp lại.

Ví dụ

- a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4.
- d, e, c, a không là đường đi vì (e,c) không phải là cạnh của đồ thị.
- Dãy b, c, f, e, b là chu trình độ dài 4.
- Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài 5 không phải là đường đi đơn vì cạnh (a,b) có mặt hai lần.

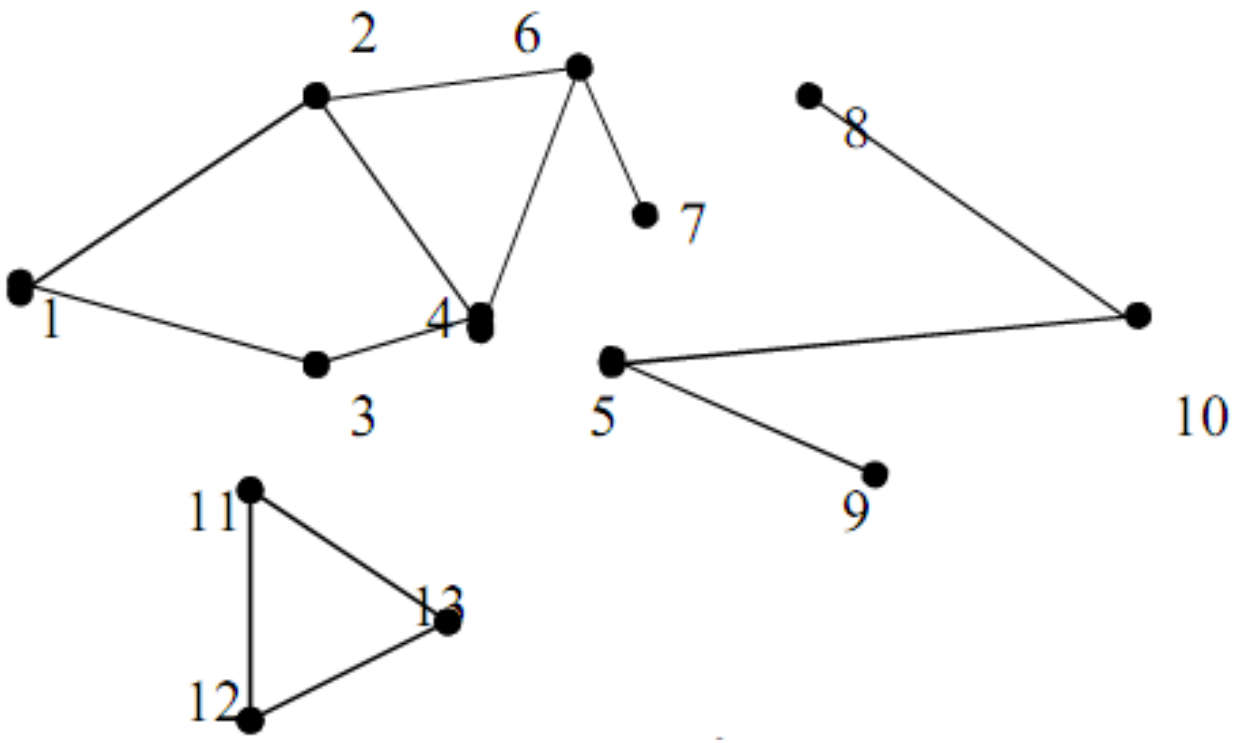


. Đồ thị liên thông

- **ĐN 2.** Đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.
- Trong trường hợp đồ thị G=<V, E> không liên thông, ta có thể phân rã G thành một số đồ thị con liên thông mà chúng đôi một không có đỉnh chung.
  - Mỗi đồ thị con như vậy được gọi là một thành phần liên thông của G.
  - Như vậy, đồ thị liên thông khi và chỉ khi số thành phần liên thông của nó là 1.
- Đối với đồ thị vô hướng, nếu tồn tại đỉnh $u \in V$ sao cho u có đường đi đến tất cả các đỉnh còn lại của đồ thị thì ta kết luận được đồ thị là liên thông.

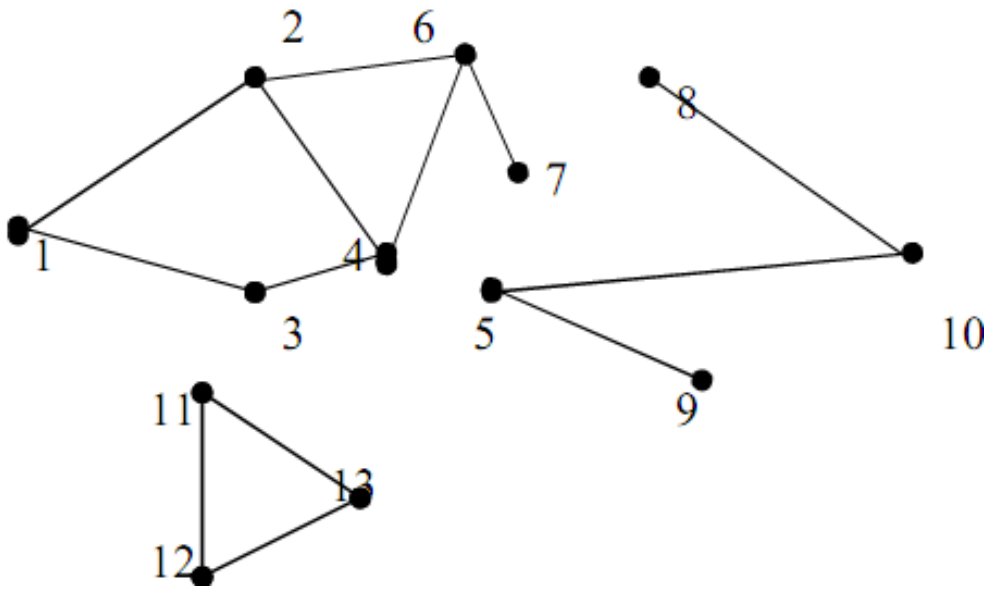
Ví dụ

- Số thành phần liên thông của G là 3



Cầu, trụ

- **ĐN 3.**
  - Cạnh $e \in E$ được gọi là cầu nếu loại bỏ e làm tăng thành phần liên thông của đồ thị.
  - Đỉnh $u \in V$ được gọi là đỉnh trụ nếu loại bỏ u cùng với các cạnh nối với u làm tăng thành phần liên thông của đồ thị.
- VD: Cạnh (5,10) là cầu, đỉnh 6 là trụ.

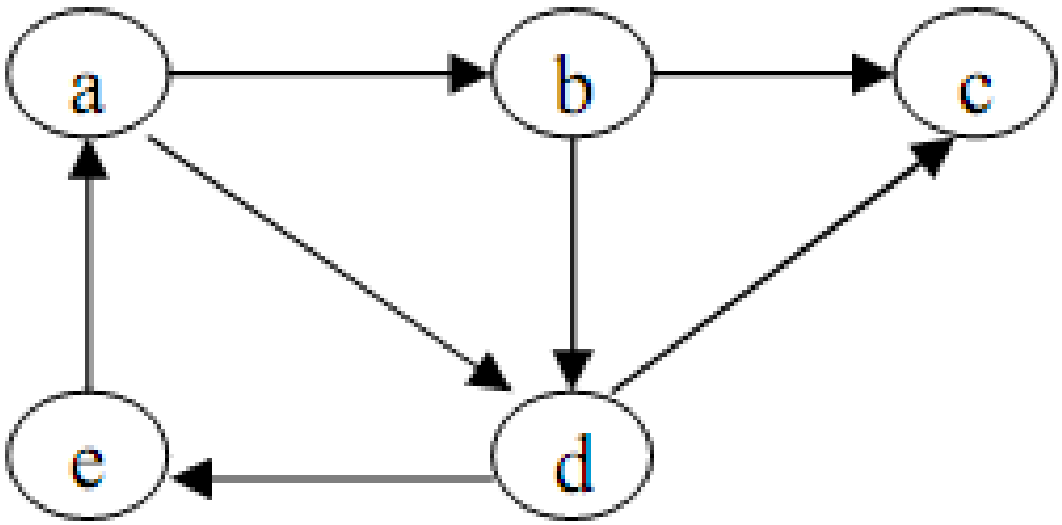


Một số thuật ngữ cơ bản trên đồ thị có hướng

Bán bậc của đỉnh

- **ĐN 1.** Nếu e=(u,v) là cung của đồ thị có hướng G thì ta nói hai đỉnh u và v là kề nhau, và nói cung (u, v) nối đỉnh u với đỉnh v, hoặc nói cung này đi ra khỏi đỉnh u và đi vào đỉnh v.
  - Đỉnh u được gọi là đỉnh đầu, đỉnh v được gọi là đỉnh cuối của cung (u,v).
- **ĐN 2.**
  - Ta gọi bán bậc ra của đỉnh v trên đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi ra khỏi v và ký hiệu là $deg^+(v)$.
  - Ta gọi bán bậc vào của đỉnh v trên đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi vào v và ký hiệu là $deg^-(v)$.

Ví dụ



- $\deg^+(a) = 2$, $\deg^+(b) = 2$, $\deg^+(c) = 0$, $\deg^+(d) = 1$, $\deg^+(e) = 1$.
- $\deg^-(a) = 1$, $\deg^-(b) = 1$, $\deg^-(c) = 2$, $\deg^-(d) = 2$, $\deg^-(e) = 1$.

Tổng bán bậc các đỉnh

- **Định lý 1.** Giả sử G = <V, E> là đồ thị có hướng. Khi đó:

$$\sum_{v \in V} \deg^{+}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = |E|$$

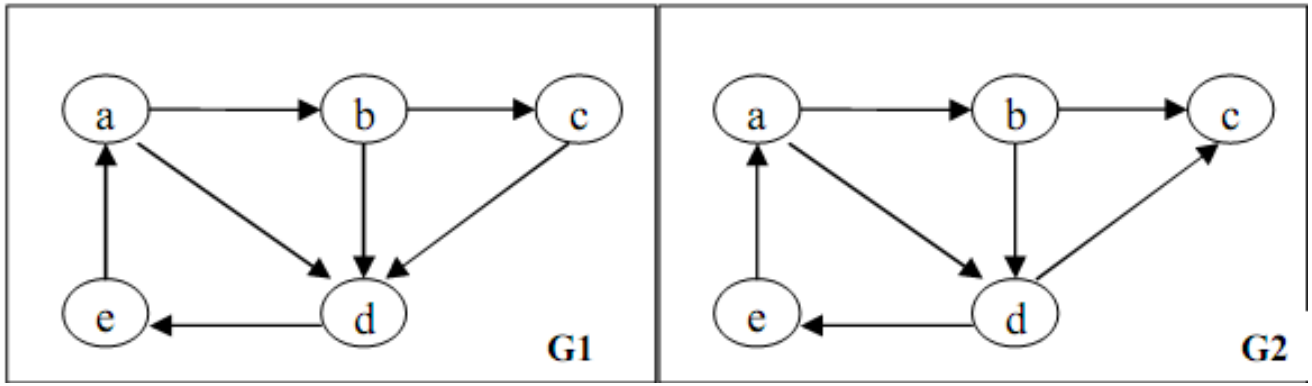
- **Lưu ý:**
  - Rất nhiều tính chất của đồ thị có hướng không phụ thuộc vào hướng trên các cung của nó. Vì vậy, trong nhiều trường hợp, ta bỏ qua các hướng trên cung của đồ thị.
  - Đồ thị vô hướng nhận được bằng cách bỏ qua hướng trên các cung được gọi là đồ thị vô hướng tương ứng với đồ thị có hướng đã cho.

Đường đi, chu trình

- **ĐN 1.** Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trong đồ thị có hướng G=<V,A> là dãy $x_0, x_1, \ldots, x_n$, trong đó, n là số nguyên dương, $u = x_0$, $v = x_n$, $(x_i, x_{i+1}) \in E$.
- Đường đi như trên có thể biểu diễn thành dãy các cung : $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$.
- Đỉnh u được gọi là đỉnh đầu, đỉnh v được gọi là đỉnh cuối của đường đi.
- Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (u=v) được gọi là một chu trình. Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu như không có hai cạnh nào lặp lại.

Đồ thị có hướng liên thông mạnh, liên thông yếu

- **ĐN2.** Đồ thị có hướng G=<V,E> được gọi là liên thông mạnh nếu giữa hai đỉnh bất kỳ u∈V, v∈V đều có đường đi từ u đến v.
- **ĐN 3.** Đồ thị có hướng G=<V,E> được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là liên thông.



Đồ thị G1 là liên thông mạnh, đồ thị G2 là liên thông yếu.

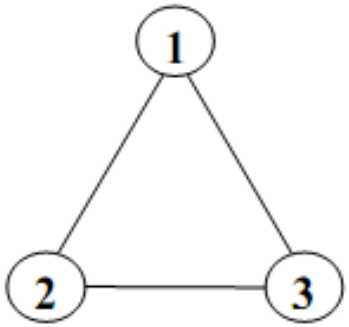
Định chiều được

- **ĐN 4.** Đồ thị vô hướng G=<V,E> được gọi là định chiều được nếu ta có thể biến đổi các cạnh trong G thành các cung tương ứng để nhận được một đồ thị có hướng liên thông mạnh.
- **ĐL1.** Đồ thị vô hướng G=<V,E> định chiều được khi và chỉ khi các cạnh của nó không phải là cầu.

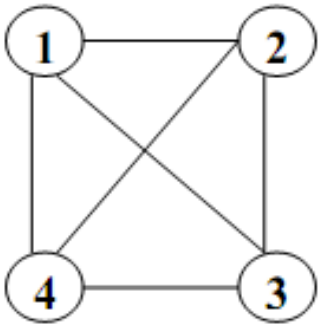
Một số dạng đồ thị đặc biệt

Đồ thị đầy đủ

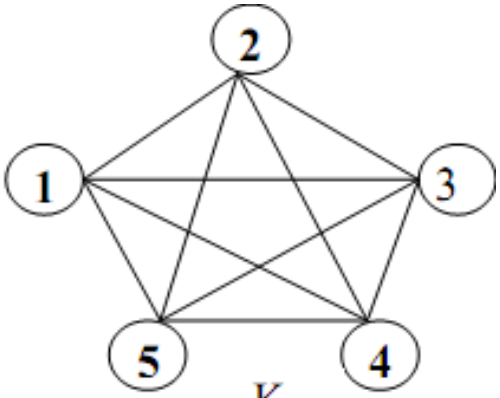
- Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu là K_n, là đơn đồ thị vô hướng mà giữa hai đỉnh bất kỳ của nó đều có cạnh nối.



K_3



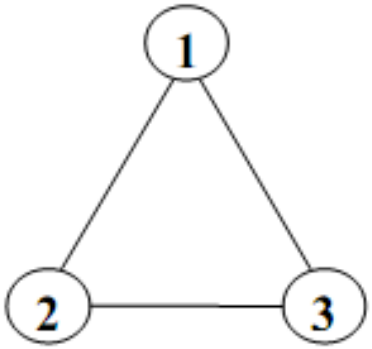
K_4



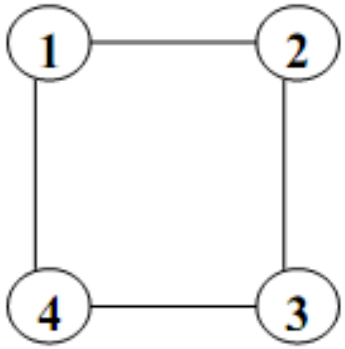
K_5

Đồ thị vòng

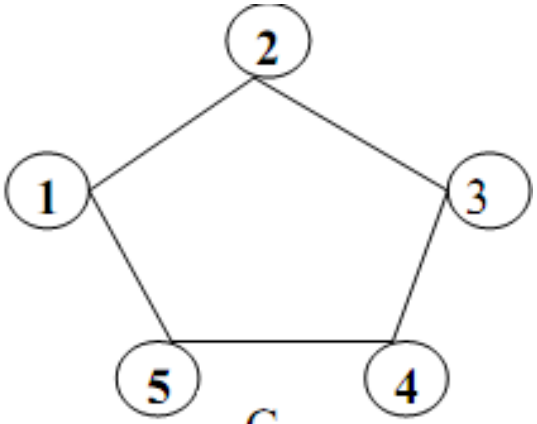
- Đồ thị vòng C_n ($n \geq 3$) có các cạnh (1,2),(2,3),..,(n-1,n), (n,1).



C_3



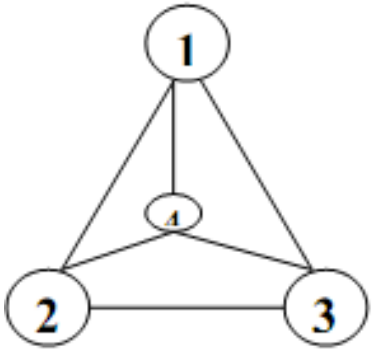
C_4

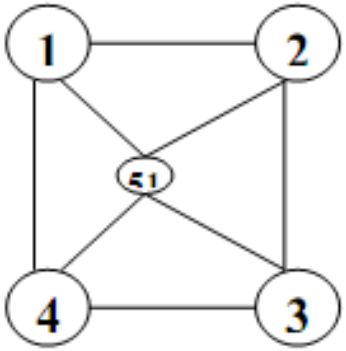


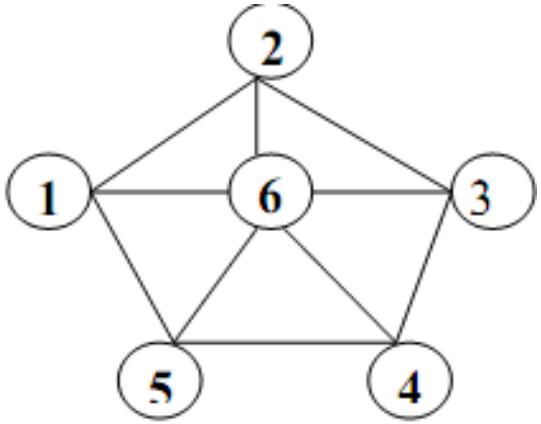
C_5

Đồ thị bánh xe

- Đồ thị bánh xe W_n thu được bằng cách bổ sung một đỉnh nối với tất cả các đỉnh của C_n.

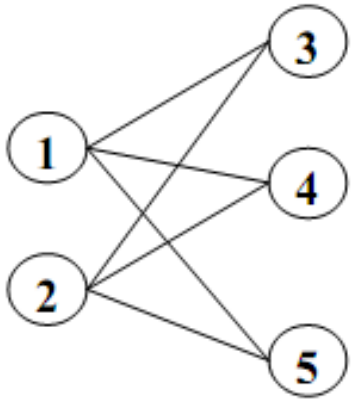


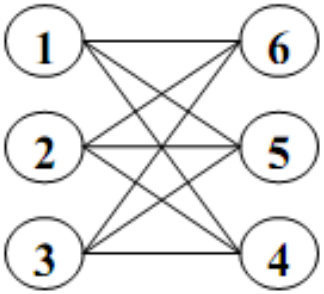


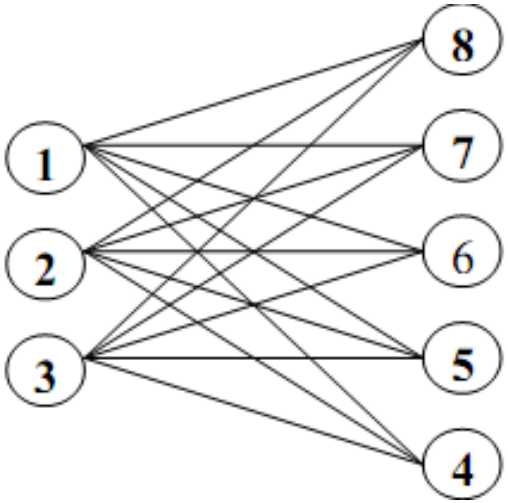


Đồ thị hai phía

- Đồ thị G =<V,E> được gọi là đồ thị hai phía nếu tập đỉnh V của nó có thể phân hoạch thành hai tập X và Y sao cho mỗi cạnh của đồ thị chỉ có dạng (x, y), trong đó $x \in X$ và $y \in Y$.
- VD: Đồ thị $K_{2,3}$; $K_{3,3}$; $K_{3,5}$.

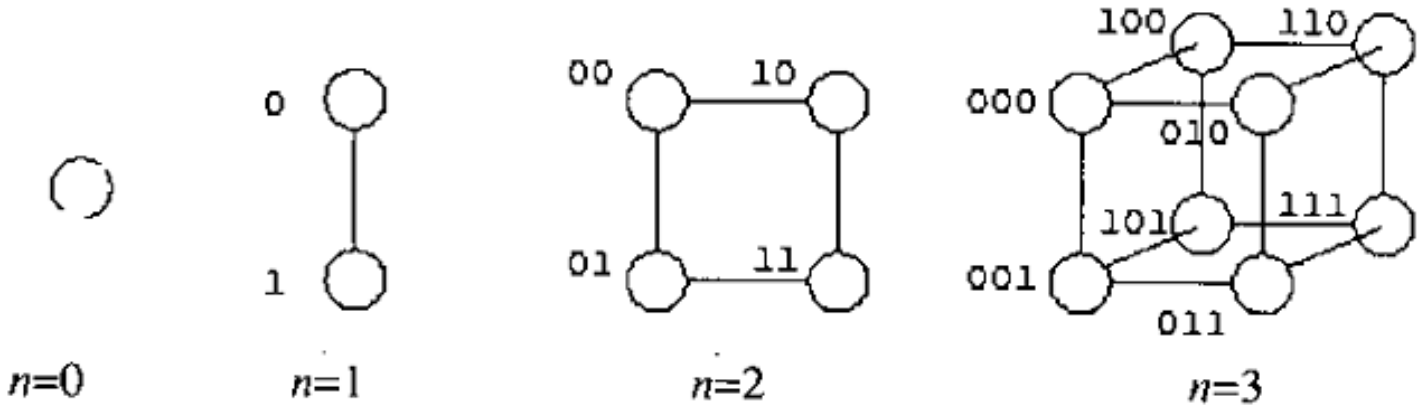






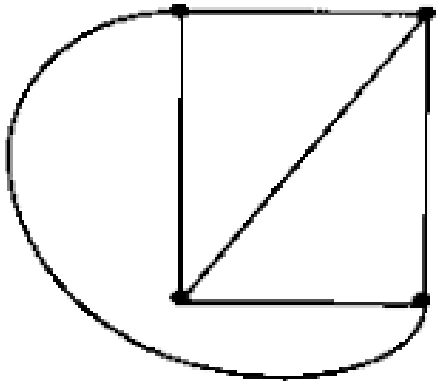
Đồ thị lập phương

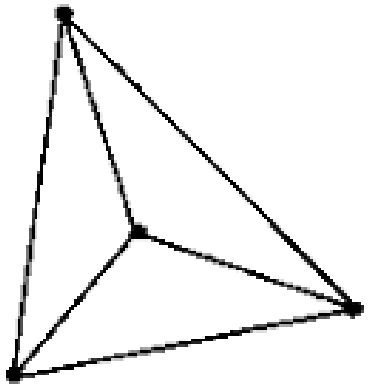
- Đồ thị lập phương n đỉnh Q_n là đồ thị với các đỉnh biểu diễn 2^n chuỗi nhị phân độ dài n bit.
  - Hai đỉnh của nó là kề nhau nếu như hai chuỗi nhị phân tương ứng chỉ khác nhau 1 bit.
- Ví dụ: Q_n với n = 0, 1, 2, 3.



Đồ thị phẳng

- Đồ thị được gọi là đồ thị phẳng nếu ta có thể vẽ nó trên một mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau.
- Ví dụ:





Đồ thị con và đồ thị riêng

- Giả sử G = (V, E) là một đồ thị.
  - Đồ thị G’ = (V’, E’) được gọi là đồ thị con của đồ thị G nếu V’⊆V và E’⊆E.
  - Đồ thị G” = (V, E”) với E” ⊆ E, được gọi là đồ thị riêng của đồ thị G.
- Nhận xét:
  - Mỗi tập con các đỉnh V’ của đồ thị G tương ứng duy nhất với một đồ thị con.
  - Để xác định một đồ thị con ta chỉ cầnnêu tập đỉnh của nó.
  - Đồ thị riêng là đồ thị giữ nguyên tập đỉnh và bỏ bớt một số cạnh.

Sự đẳng hình

- Hai đồ thị G1= (V1, E1) và G2= (V2, E2) được gọi là đẳng hình với nhau nếu tồn tại một song ánh S trên các tập đỉnh bảo toàn các cạnh:

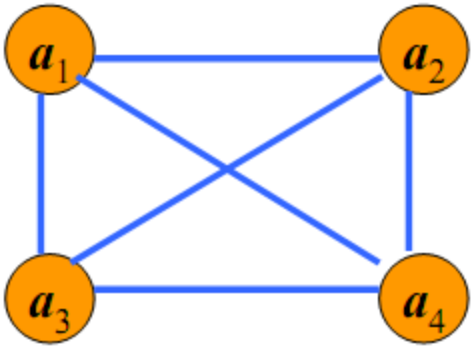
  $\forall x, y \in V1: (x, y) \in E1 \Leftrightarrow (S(x), S(y)) \in E2.$

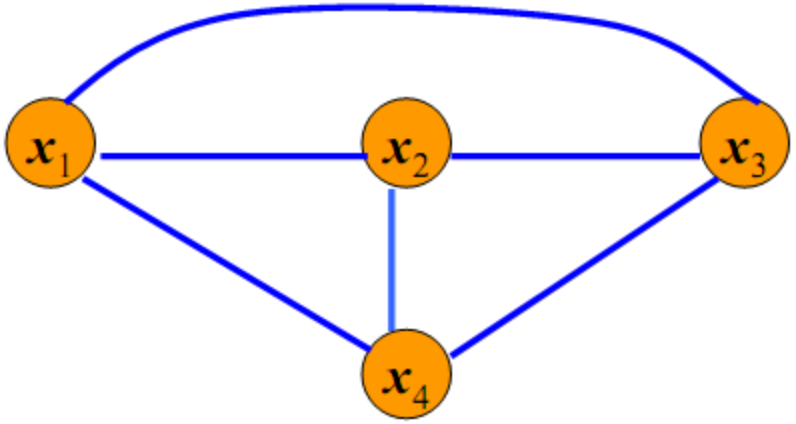
- Hai đồ thịđẳng hình chỉ khác nhau về tên gọi của các đỉnh và cách biểu diễn bằng hình vẽ.
  - Do vậy, ta không phân biệthai đồ thịđẳng hình với nhau.

Ví dụ về sự đẳng hình

- Hai đồ thị sau là đẳng hình với song ánh:

$$S(a_i) = x_i,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

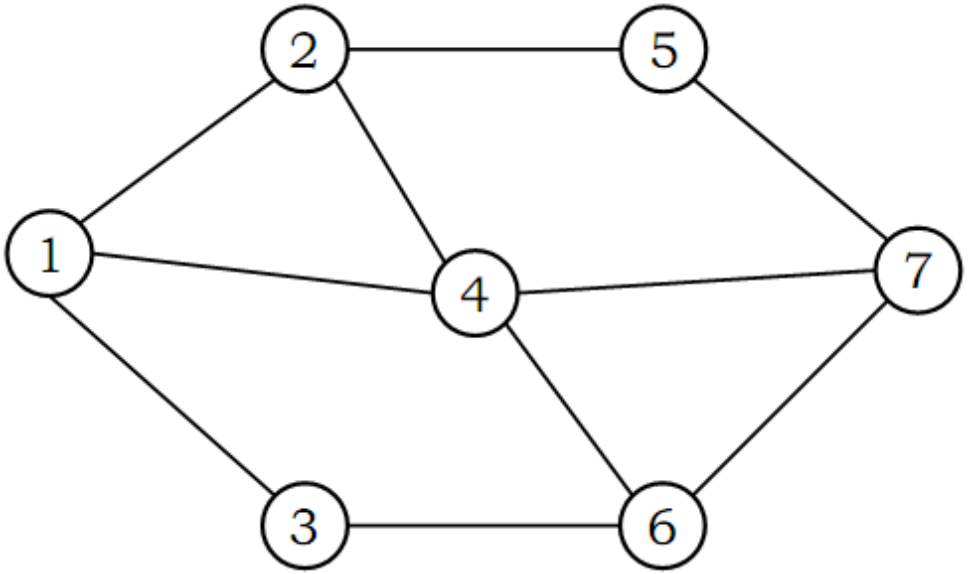


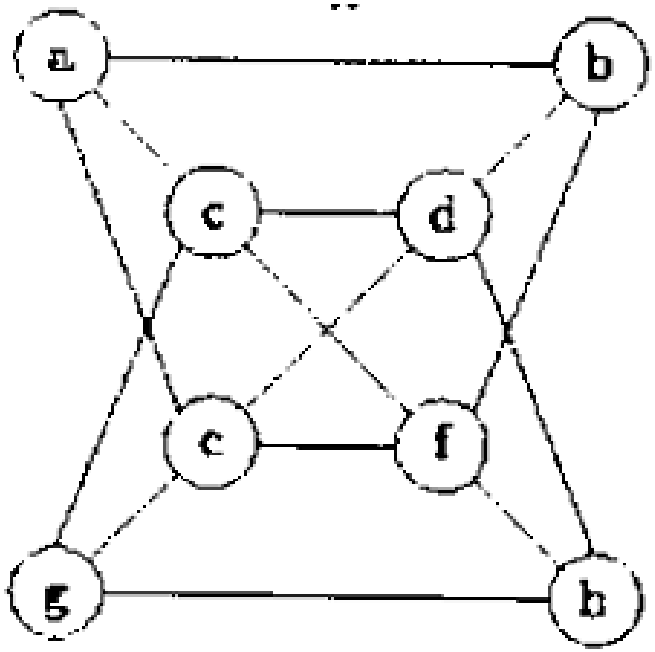


Bài tập

Bài tập 1

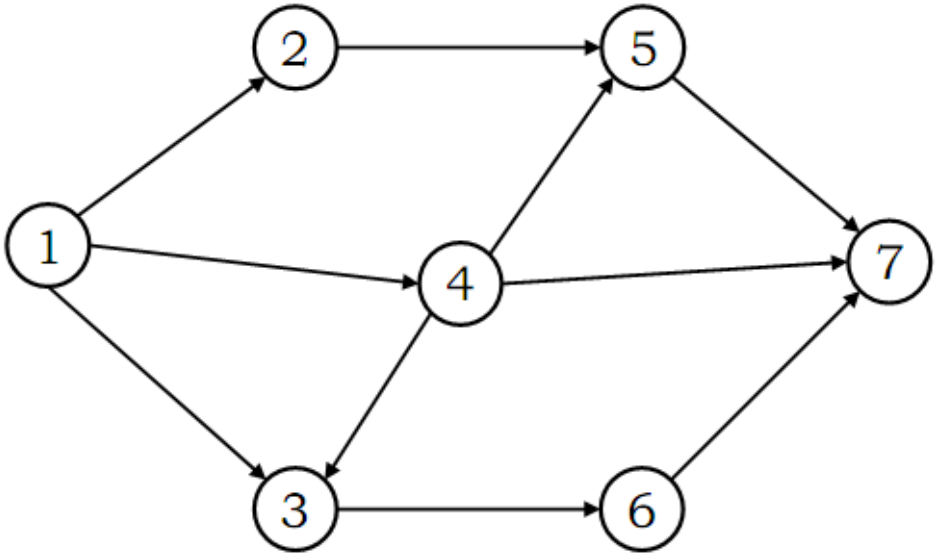
- Xác định bậc của mỗi đỉnh trong các đồ thị vô hướng sau.

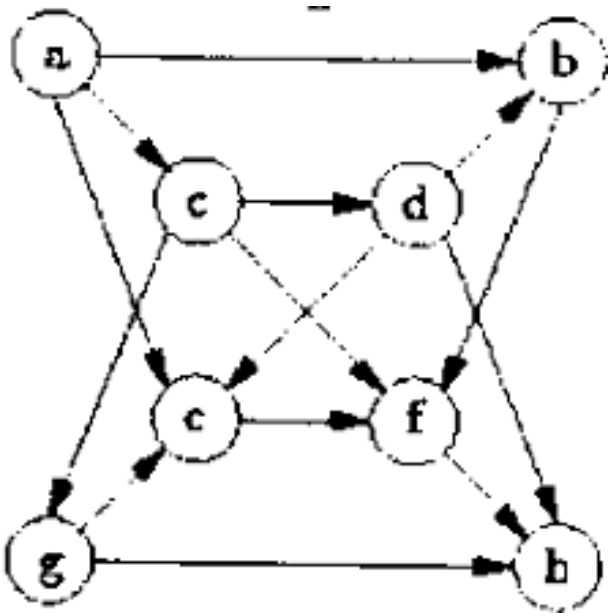




Bài tập 2

- Xác định bán bậc vào deg^- và bán bậc ra deg^+ của mỗi đỉnh trong các đồ thị có hướng sau.





Bài tập 3

- Vẽ đồ thị vô hướng G=(V,E) cho bởi:

$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$

và

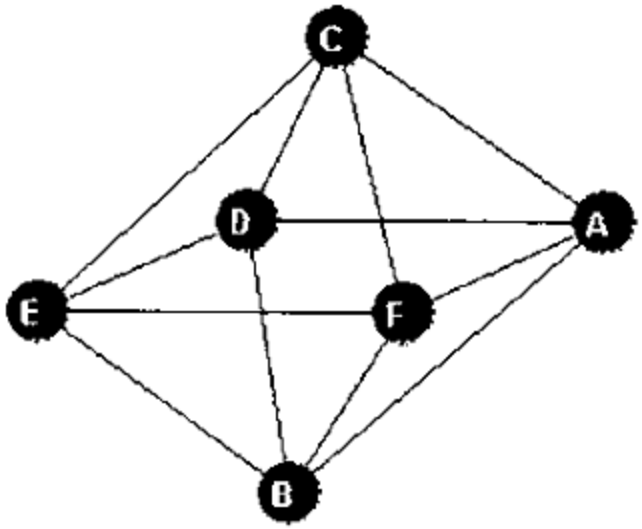
$$E = \{(E,G),(B,F),(D,C),(D,F),(F,B),(C,F), (A,F),(E,D)\}$$

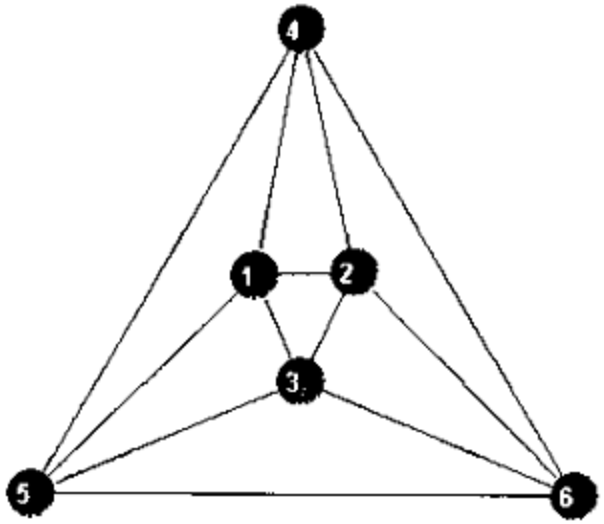
Bài tập 4

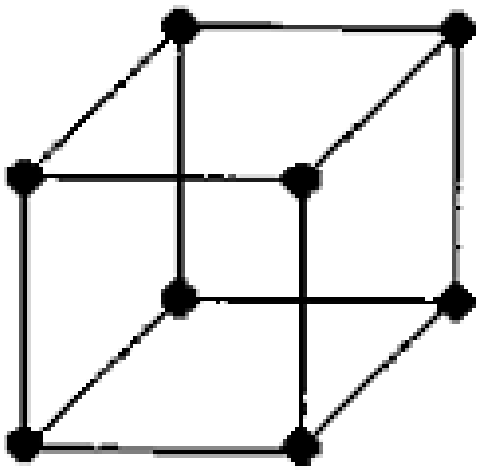
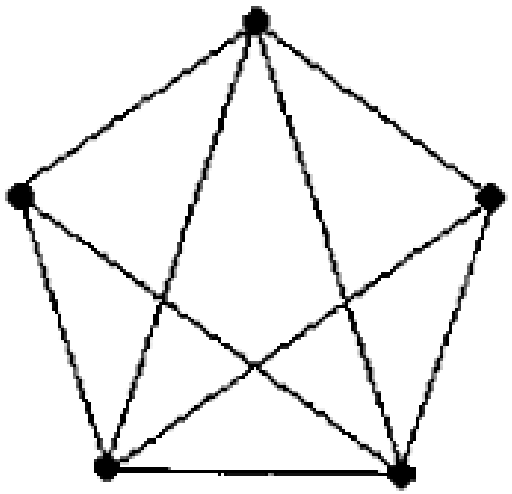
- Cho song ánh f như sau:

  f(A)=1, f(B)=2, f(C)=3, f(D)=4, f(E)=5, f(F)=6.

- Kiểm tra hai đồ thị sau có đẳng hình hay không?





Bài tập 5

- Với mỗi đồ thị sau, cho biết nó có phải là đồ thị phẳng không? Nếu phải, trình bày cách vẽ.