BÀI 2
ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

ThS. Đoàn Trọng Tuyến
Trường Đại học Kinh tế Quốc dân

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG

Giả sử lượng cung đối với một loại sản phẩm có dạng

$$Q_s = 500 + p + 2p^2$$

Trong đó Q_s là lượng cung, p là giá của sản phẩm.

Qua biểu thức quan hệ giữa lượng cung Q_s và giá p ta thấy rằng hàm cung là hàm đơn điệu tăng – nghĩa là khi giá p tăng thì lượng cung Q_s cũng tăng theo, bạn hãy ước lượng "tốc độ tăng tức thời" của lượng cung tại mức giá p_0?

MỤC TIÊU

- Trình bày khái niệm đạo hàm: đạo hàm tại 1 điểm, đạo hàm trên một miền;
- Áp dụng được các quy tắc tính đạo hàm để tính được thành thạo đạo hàm của một hàm số cụ thể (quy tắc đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương và đạo hàm của hàm hợp);
- Biết sử dụng phương pháp mũ hóa hoặc logarit hóa để tính đạo hàm của biểu thức lũy thừa mũ;
- Nắm được khái niệm, cách tính vi phân tại 1 điểm, biểu thức vi phân;
- Tính được đạo hàm và vi phân cấp cao (cấp 2).

NỘI DUNG

1. Khái niệm đạo hàm
2. Đạo hàm của các hàm sơ cấp cơ bản
3. Các quy tắc tính đạo hàm
4. Vi phân của hàm số
5. Đạo hàm cấp cao và vi phân cấp cao

1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

1.1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

1.2. Đạo hàm của hàm số trên một miền

1.1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

- Cho hàm số y = f(x) xác định trong khoảng (a;b); $x_0 \in (a;b)$.
- Hàm số f(x) được gọi là có đạo hàm tại điểm x_0 nếu tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k$$

- Số thực k được gọi là đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x_0. Ký hiệu: $k = f'(x_0)$.

Chú ý: Ký hiệu $x = x_0 + \Delta x$, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1.1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = x^2$. Tính $f'(x_0)$

Giải:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

1.2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT MIỀN

- Hàm số f(x) được gọi là có đạo hàm trên miền D nếu f(x) có đạo hàm tại mọi điểm thuộc D.
- Đạo hàm của f(x) trên miền D ký hiệu là f '(x) và là một hàm số xác định trên D.

$$f' : \quad D \longrightarrow R$$
$$x_0 \mapsto f'(x_0)$$

2. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SƠ CẤP CƠ BẢN

1) $(C)' = 0$

2) $(x^{\alpha})' = \alpha.x^{\alpha-1}; \quad (x)' = 1$

3) $(a^x)' = a^x.\ln a; \quad (e^x)' = e^x$

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x.\ln a}; \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

5) $(\sin x)' = \cos x$

6) $(\cos x)' = -\sin x$

7) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

8) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

3. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

3.1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số

3.2. Đạo hàm của hàm hợp

3.3. Đạo hàm của biểu thức lũy thừa mũ và phương pháp logarit hóa

3.1. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG CÁC HÀM SỐ

Nếu hàm số u = u(x) và v = v(x) có đạo hàm tại x_0 (trên miền D) thì tại điểm đó:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(k.u)' = k.u'$

3) $(u.v)' = u'.v + u.v'$

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

3.2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

Nếu hàm số u = φ(x) có đạo hàm tại điểm x_0 và y = f(u) có đạo hàm tại $u_0 = \varphi(x_0)$ thì hàm hợp y = f[φ(x)] có đạo hàm tại điểm x_0 và:

$$y'(x_0) = f'(u_0).u'(x_0)$$

Chú ý: Với u = φ(x) là một hàm số có đạo hàm thì

1) $(u^{\alpha})' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$

1') $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

2) $(a^u)' = a^u.(\ln a).u'$

2') $(e^u)' = e^u.u'$

3) $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$

3') $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

4) $(\sin u)' = u'.\cos u$

5) $(\cos u)' = -u'.\sin u$

6) $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

7) $(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

VÍ DỤ 1

Tính đạo hàm của hàm số:

$$y = (3x^2 - 1)^{2014}$$

Giải: Sử dụng công thức 1) ta có

$$y' = 2014.(3x^2 - 1)^{2013}.(3x^2 - 1)'$$

$$y' = 2014.(3x^2 - 1)^{2013}.6x$$

$$y' = 12084x.(3x^2 - 1)^{2013}$$

VÍ DỤ 2

Tính đạo hàm của hàm số: $y = (5x^2 - 4x + 2)e^{3-4x}$

Giải:

- Sử dụng công thức đạo hàm của tích ta có:

  $y = (5x^2 - 4x + 2)'.e^{3-4x} + (5x^2 - 4x + 2).(e^{3-4x})'$
- Ta dễ thấy: $(5x^2 - 4x + 2)' = 10x - 4$
- Dùng công thức 2') ta được: $(e^{3-4x})' = e^{3-4x}.(3 - 4x)' = -4.e^{3-4x}$
- Do đó ta được:

  $y' = (10x - 4).e^{3-4x} - 4(5x^2 - 4x + 2).e^{3-4x}$

  $= e^{3-4x}.(-20x^2 + 26x - 12) = 2e^{3-4x}.(-10x^2 + 13x - 6)$

VÍ DỤ 3

Tính đạo hàm của hàm số: $y = \tan^6 2x$

Giải:

- Sử dụng công thức 1) ta có:

  $y' = 6\tan^5 2x.(\tan 2x)'$

- Dùng công thức 6) ta được:

$$(\tan 2x)' = \frac{(2x)'}{\cos^2 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x}$$

- Do đó ta được:

$$y' = 6\tan^5 2x.\frac{2}{\cos^2 2x} = 12\frac{\tan^5 2x}{\cos^2 2x}$$

3.3. ĐẠO HÀM CỦA BIỂU THỨC LŨY THỪA MŨ VÀ PHƯƠNG PHÁP LOGARIT HÓA

Tính đạo hàm của hàm số $y = u^v$ (lũy thừa mũ):

$y = e^{\ln y} = e^{v\ln u}$

$y' = e^{v\ln u}.(v\ln u)' = u^v.(v\ln u)'$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số $y = (1 + e^x)^{\sin x}$

Giải:

$$y = e^{\ln(1+e^x)^{\sin x}} = e^{\sin x.\ln(1+e^x)}$$

$$y' = e^{\sin x.\ln(1+e^x)}.[\sin x.\ln(1+e^x)]'$$

$$= e^{\sin x.\ln(1+e^x)}.\left[\cos x.\ln(1+e^x) + (\sin x)\frac{e^x}{1+e^x}\right]$$

$$= (1+e^x)^{\sin x}.\left[\cos x.\ln(1+e^x) + (\sin x)\frac{e^x}{1+e^x}\right]$$

3.3. ĐẠO HÀM CỦA BIỂU THỨC LŨY THỪA MŨ VÀ PHƯƠNG PHÁP LOGARIT HÓA (tiếp theo)

Sử dụng phương pháp logarit hóa:

- ln y = v.ln u
- Lấy đạo hàm hai vế:

$$\frac{y'}{y} = v'.\ln u + v.\frac{u'}{u} \Rightarrow y' = u^v.\left(v.\ln u + v.\frac{u'}{u}\right)$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số: $y = (1 + e^x)^{\sin x}$

Giải:

$$\ln y = \sin x.\ln(1+e^x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \left[\sin x.\ln(1+e^x)\right]' = \left[\cos x.\ln(1+e^x) + (\sin x).\frac{e^x}{1+e^x}\right]$$

$$\Rightarrow y' = (1+e^x)^{\sin x}.\left[\cos x.\ln(1+e^x) + (\sin x).\frac{e^x}{1+e^x}\right]$$

4. VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

4.1. Khái niệm hàm khả vi và vi phân

4.2. Biểu thức vi phân

4.3. Các quy tắc tính vi phân

4.1. KHÁI NIỆM HÀM KHẢ VI VÀ VI PHÂN

Định nghĩa: Hàm số f(x) được gọi là hàm khả vi tại x_0 khi và chỉ khi nó có đạo hàm tại điểm đó. Tích của đạo hàm $f'(x_0)$ với số gia Δx của biến độc lập được gọi là vi phân của hàm số f(x) tại điểm x_0 và được ký hiệu là $df(x_0)$:

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$$

Ví dụ: Hàm số $f(x) = x^2$ khả vi tại điểm x bất kỳ vì nó có đạo hàm tại mọi điểm:

$$f'(x) = 2x, \forall x \in R$$

Vi phân của hàm số f(x) tại điểm x_0 bất kỳ là:

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x = 2x_0.\Delta x$$

4.2. BIỂU THỨC VI PHÂN

- Nếu hàm số y = f(x) khả vi tại mọi điểm thuộc khoảng X thì biểu thức vi phân

$$df(x) = f'(x).\Delta x$$

là một hàm số đối số x, xác định trên khoảng X (Δx là số gia bất kỳ, không phụ thuộc x).

- Biểu thức vi phân toàn phần của hàm số y = f(x) thường được viết dưới dạng:

$$df(x) = f'(x).dx$$

Ví dụ:

$$d(x^3 - \sin 2x) = (x^3 - \sin 2x)'.dx = (3x^2 - 2\cos 2x).dx$$

$$d(x.e^{-2x}) = (x.e^{-2x})'.dx = e^{-2x}(1 - 2x).dx$$

4.3. CÁC QUY TẮC TÍNH VI PHÂN

- Định lý 1: Nếu các hàm số u = u(x) và v = v(x) khả vi tại điểm x thì tại điểm đó ta có:

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$
2) $d(k.u) = k.du$
3) $d(u.v) = vdu + u.dv$
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u.dv}{v^2}$

- Định lý 2: (Tính bất biến)

Giả sử hàm số y = f(u) khả vi đối với biến u và u = $\varphi(x)$ là hàm số khả vi theo biến x. Khi đó:

$$dy = y'(u).du = y'(u).u'(x).dx = [y(\varphi(x))]'.dx = y'_x.dx$$

Nhận xét: Biểu thức vi phân vẫn giữ nguyên dạng trong trường hợp x không phải biến độc lập, mà phụ thuộc vào biến khác.

5. ĐẠO HÀM CẤP CAO VÀ VI PHÂN CẤP CAO

5.1. Đạo hàm cấp cao

5.2. Vi phân cấp cao

5.1. ĐẠO HÀM CẤP CAO

Định nghĩa: Đạo hàm cấp n ($n \geq 2$) của f(x) trên miền D là đạo hàm của đạo hàm cấp n – 1 của f(x) trên D.

Ký hiệu: $f^{(n)}(x)$.

Ví dụ: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số: $y = x.e^{-2x}$

- Trước hết, đạo hàm cấp 1 là: $y' = (1 - 2x).e^{-2x}$
- Đạo hàm cấp 2 là đạo hàm của hàm y': $y'' = 4(x - 1).e^{-2x}$

5.2. VI PHÂN CẤP CAO

- **Định nghĩa:** Vi phân cấp n ($n \geq 2$) của f(x) trên miền D là vi phân của vi phân cấp n – 1 của f(x) trên D.

  Ký hiệu: $d^{(n)}f(x)$.
- Liên hệ giữa đạo hàm và vi phân cấp cao: $d^{(n)}f(x) = f^{(n)}(x).\ (dx)^n$

GIẢI QUYẾT TÌNH HUỐNG

- Ta xét tại mức giá p_0 thì lượng cung tương ứng là $Q(p_0)$.
- Khi giá tăng một đại lượng Δp (nghĩa là tại mức giá $p_0 + \Delta p$) thì lượng cung tương ứng là $Q(p_0 + \Delta p)$.
- Khi đó thương $\dfrac{Q(p_0+\Delta p)-Q(p_0)}{(p_0+\Delta p)-p_0} = \dfrac{Q(p_0+\Delta p)-Q(p_0)}{\Delta p}$

  là tốc độ tăng trung bình của lượng cầu trên khoảng giá $[p_0, p_0 + \Delta p]$.
- Khi lượng Δp đủ bé ($\Delta p \to 0$) thì thương trên là đạo hàm của hàm cầu tại p_0 và cũng là tốc độ tăng tức thời của hàm cầu Q_s tại mức giá p_0:

$$Q_s'(p_0) = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{Q(p_0+\Delta p)-Q(p_0)}{\Delta p}$$

$$= \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\left[500+(p_0+\Delta p)+2(p_0+\Delta p)^2\right]-\left[500+p_0+2p_0^2\right]}{\Delta p}$$

$$= \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta p + 2(2p_0\Delta p + \Delta p^2)}{\Delta p} = \lim_{\Delta p \to 0}(1+4p_0+2\Delta p) = 1+4p_0$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 1

Đạo hàm của hàm số $y=(\sqrt[3]{x^2}-3\sin\sqrt{x})$ **là:**

A. $y'=2\sqrt[3]{x}-3\cos\sqrt{x}$

B. $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

C. $y'=2\sqrt[3]{x}-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

D. $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}-3\cos\sqrt{x}$

Trả lời:

- Đáp án đúng là: B. $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$
- Vì:

Ta có $y'=(\sqrt[3]{x^2})'-3(\sin\sqrt{x})'$ nhưng $(\sqrt[3]{x^2})'=(x^{\frac{2}{3}})'=\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

và $(\sin\sqrt{x})'=(\sqrt{x})'\cos\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 2

Vi phân của $y = \sin^3 6x$ **tại** $x_0 = \frac{\pi}{24}$ **với số gia** $\Delta x = 0,1$ **là:**

A. $\frac{0,3}{2\sqrt{2}}$

B. $0,15$

C. $\frac{0,9}{\sqrt{2}}$

D. $\frac{0,3}{\sqrt{2}}$

Trả lời: Đáp án đúng là: C. $\frac{0,9}{\sqrt{2}}$

Vì: $y' = 3\sin^2 6x.\cos 6x.6 = 18\sin^2 6x.\cos 6x$

$$\rightarrow y'\left(\frac{\pi}{24}\right) = 18\sin^2\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{18}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow dy\left(\frac{\pi}{24}\right) = y'\left(\frac{\pi}{24}\right)\times\Delta x = \frac{9}{\sqrt{2}}\times 0,1 = \frac{0,9}{\sqrt{2}}$$

BÀI TẬP

Tính đạo hàm cấp 2 của hàm số: $y = \ln\left(\frac{2-3x}{5x+1}\right)$

Trả lời:

Đạo hàm cấp 1 là:

$$y' = \frac{\left(\frac{2-3x}{5x+1}\right)'}{\frac{2-3x}{5x+1}} = \frac{\frac{-3(5x+1)-(2-3x)5}{(5x+1)^2}}{\frac{2-3x}{5x+1}} = \frac{-13}{(5x+1)(2-3x)}$$

Đạo hàm cấp 2 là:

$$y'' = \left(\frac{-13}{(5x+1)(2-3x)}\right)' = -13 \times \frac{-[(5x+1)(2-3x)]'}{[(5x+1)(2-3x)]^2} = \frac{13(7-30x)}{(5x+1)^2(2-3x)^2}$$

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

- Đạo hàm tại 1 điểm: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k \in R$
- Hàm số đạo hàm (đạo hàm trên một miền): $f' : x_0 \mapsto f'(x_0)$
- Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương:

  $(u \pm v)' = u' \pm v'$

  $(u.v)' = u'.v + u.v' \rightarrow (k.v)' = k.v'$

  $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$
- Đạo hàm của hàm hợp: $y'_x = y'_u.u'_x$
- Vi phân tại 1 điểm: $df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$
- Biểu thức vi phân: $df(x) = f'(x).dx$