BÀI 5
CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

ThS. Hoàng Văn Thắng
Trường Đại học Kinh tế Quốc dân

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG: Lựa chọn tối ưu trong kinh tế

Trong doanh nghiệp cạnh tranh thuần túy sản xuất 2 loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp:

$$TC = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 10$$

Với giá thị trường của sản phẩm 1 là $160 và giá của sản phẩm 2 là $120.

Hãy chọn một cơ cấu sản lượng (Q_1, Q_2) để hàm lợi nhuận đạt giá trị tối đa.

MỤC TIÊU

- Hiểu được khái niệm các điểm cực trị, điểm dừng của hàm số.
- Biết cách thực hành tìm các điểm cực trị của bài toán cực trị tự do.
- Biết cách thực hành tìm các điểm cực trị của bài toán cực trị có điều kiện bằng phương pháp nhân tử Lagrange.
- Ứng dụng hai bài toán cực trị để giải một số bài toán tối ưu trong phân tích kinh tế.

NỘI DUNG

1. Bài toán cực trị không có điều kiện (cực trị tự do)
2. Ứng dụng bài toán cực trị không có điều kiện trong phân tích kinh tế
3. Bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc
4. Ứng dụng bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc trong phân tích kinh tế

1. CỰC TRỊ KHÔNG CÓ ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

1.1. Khái niệm cực trị của hàm số

1.2. Điều kiện cần của cực trị

1.3. Điều kiện đủ của cực trị

1.1. KHÁI NIỆM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HAI BIẾN SỐ

Xét hàm số w = f(x, y) xác định và liên tục trên miền

$$D = \{M(x,y) : a < x < b,\ c < y < d\}$$

Định nghĩa:

- Ta nói hàm số w = f(x, y) = f(M) đạt giá trị cực đại tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc D nếu $f(M) \le f(M_0)$ với mọi điểm $M(x, y) \in D$ mà khoảng cách từ M đến M0 nhỏ hơn r (r > 0, nhỏ tùy ý).
- Ta nói hàm số w = f(x, y) = f(M) đạt giá trị cực tiểu tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc D nếu $f(M) \ge f(M_0)$ với mọi điểm $M(x, y) \in D$ mà khoảng cách từ M đến M0 nhỏ hơn r (r > 0, nhỏ tùy ý).
- Cực đại và cực tiểu được gọi chung là cực trị. Nếu hàm số đạt cực trị tại $M_0(x_0, y_0)$ thì điểm $M_0(x_0, y_0)$ được gọi là *điểm cực trị.*

1.1. KHÁI NIỆM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HAI BIẾN SỐ (tiếp theo)

Ví dụ: Hàm số $w = x^2 + y^2$ đạt giá trị cực tiểu tại điểm O(0, 0)

Vì $x^2 + y^2 > 0$ với mọi (x, y) thuộc cận điểm (0, 0)

Câu hỏi đặt ra: Với hàm số bên ngoài điểm cực trị (0, 0) còn điểm cực trị nào khác? Tìm chúng như thế nào?

Rõ ràng không thể chỉ dùng định nghĩa. Vì vậy cần có công cụ tốt hơn: Điều kiện cần sẽ giúp ta tập chung vào cá điểm hoài nghi, còn gọi là các **điểm dừng**.

1.2. ĐIỀU KIỆN CẦN CỦA CỰC TRỊ

- Hàm số w = f(x, y) = f(M) xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng trên miền D

$$D = \{M(x,y) : a < x < b, c < y < d\}$$

- Khi đó, nếu điểm $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị của hàm số thì tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số triệt tiêu.

$$\begin{cases} w'_x(x_0, y_0) = 0 \\ w'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

- Điểm $M_0(x_0, y_0)$ thỏa mãn điều kiện (*) tức là nghiệm của hệ $\begin{cases} w'_x = 0 \\ w'_y = 0 \end{cases}$ được gọi là điểm dừng của hàm w = f(x, y).

.

1.2. ĐIỀU KIỆN CẦN CỦA CỰC TRỊ (tiếp theo)

- **Nhận xét 1:**

  Từ định lý trên ta suy ra: Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm dừng của nó, nên để tìm các điểm cực trị ta chỉ cần tìm trong số các điểm dừng.

- **Nhận xét 2:**

  Một điểm là điểm dừng của hàm số thì chưa chắc là điểm cực trị. Cho nên cần xétđiều kiện đủ để một điểm dừng là điểm cực trị.

1.3. ĐIỀU KIỆN ĐỦ CỦA CỰC TRỊ (Chỉ xét tại các điểm dừng)

Giả sử hàm số w = f(x, y) = f(M) có điểm dừng $M_0(x_0,y_0)$ và các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số xác định, liên tục tại $M_0(x_0,y_0)$.

Xét $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ với $\begin{cases} a_{11} = w''_{xx}(x_0, y_0); & a_{12} = w''_{xy}(x_0, y_0) \\ a_{21} = w''_{yx}(x_0, y_0); & a_{22} = w''_{yy}(x_0, y_0) \end{cases}$

- Nếu D < 0 thì điểm $M_0(x_0,y_0)$ không phải là điểm cực trị của hàm số w = f(x, y)
- Nếu D > 0 thì điểm $M_0(x_0,y_0)$ là điểm cực trị của hàm số w = f(x, y)
  - $a_{11} > 0$ thì điểm $M_0(x_0,y_0)$ là điểm cực tiểu của hàm số.
  - $a_{11} < 0$ thì điểm $M_0(x_0,y_0)$ là điểm cực đại của hàm số.

CÁC BƯỚC GIẢI BÀI TOÁN TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI TOÁN: TÌM CÁC ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ w = f(x,y)

Bước 1: Giải điều kiện cần (Tìm các điểm dừng)

- Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 của hàm số w = f(x,y)

$$w'_x, w'_y; \quad w''_{xx}, w''_{xy} = w''_{yx}, w''_{yy}$$

- Giải hệ: $\begin{cases} w'_x = 0 \\ w'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ nghiệm $M_0(x_0; y_0)$

(Điểm $M_0(x_0; y_0)$ được gọi là điểm dừng của hàm số)

CÁC BƯỚC GIẢI BÀI TOÁN TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ (tại từng điểm dừng rồi kết luận)

- Tính định thức cấp 2: $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{cases} a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0); \ a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0) \\ a_{21} = f''_{yx}(x_0, y_0) \ \ a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0) \end{cases}$

- Tại điểm dừng $M_0(x_0; y_0)$ thay $x = x_0$, $y = y_0$ vào $D(x, y)$ ta được $D(x_0; y_0)$.
  - Nếu $D(x_0; y_0) < 0$ thì $M_0(x_0; y_0)$ không phải là điểm cực trị.
  - Nếu $D(x_0; y_0) > 0$ thì $M_0(x_0; y_0)$ là điểm cực trị (ta xét tiếp a_{11})
    - $a_{11} > 0$ thì $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực tiểu.
    - $a_{11} < 0$ thì $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực đại.

Như vậy, $\begin{cases} D > 0 \\ a_{11} > 0 \end{cases}$ $\rightarrow M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực tiểu.

$\begin{cases} D > 0 \\ a_{11} < 0 \end{cases}$ $\rightarrow M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực đại.

VÍ DỤ 1

Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = -x^3 + 2y^4 + 6x^2 - 9x + 8y$

Giải:

Bước 1: Giải điều kiện cần (Tìm các điểm dừng)

- Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và 2:

$$w'_x = -3x^2 + 12x - 9 \rightarrow w''_{xx} = -6x + 12, \quad w''_{xy} = 0$$

$$w'_y = 8y^3 + 8 \qquad \rightarrow w''_{yx} = 0, \quad w''_{yy} = 24y^2$$

- Giải hệ: $\begin{cases} w'_x = 0 \\ w'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + 12x - 9 = 0 \\ 8y^3 + 8 = 0 \end{cases}$

  Giải hệ ta tìm được 2 nghiệm: (x, y) = (1, –1), (3, –1)

- Hàm số có 2 điểm dừng là $M_1(1, -1)$ và $M_2(3, -1)$.

VÍ DỤ 1

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ (tại từng điểm dừng rồi kết luận)

- Tính định thức cấp 2:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w''_{xx} & w''_{xy} \\ w''_{yx} & w''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6x+12 & 0 \\ 0 & 24y^2 \end{vmatrix} = 24y^2(-6x+12)$$

- Xét tại từng điểm dừng:
  - Tại $M_1(1, -1)$: Ta có $D(1, -1) = 24(-1)^2(-6.1+12) = 144 > 0$ và $a_{11} = -6.1 + 12 = 6 > 0$ nên $M_1(1, -1)$ là điểm cực tiểu.
  - Tại $M_2(3, -1)$: Ta có $D(3, -1) = 24(-1)^2(-6.3+12) = -144 < 0$ nên $M_2(3, -1)$ không phải là điểm cực trị.

VÍ DỤ 2

Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = 11x^2 + 7y^2 - 12xy - 8x - 18y + 36$

Giải:

Bước 1: Giải điều kiện cần (Tìm các điểm dừng)

- Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và 2:

$$w'_x = 22x - 12y - 8 \quad \rightarrow w''_{xx} = 22, \quad w''_{xy} = -12$$

$$w'_y = -12x + 14y - 18 \quad \rightarrow w''_{yx} = -12, \quad w''_{yy} = 14$$

- Giải hệ: $\begin{cases} w'_x = 0 \\ w'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22x - 12y - 8 = 0 \\ -12x + 14y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22x - 12y = 8 \\ -12x + 14y = 18 \end{cases}$

  Giải hệ ta tìm được 1 nghiệm duy nhất: (x, y) = (2, 3)

- Hàm số có 1 điểm dừng duy nhất là M(2, 3).

VÍ DỤ 2 (tiếp theo)

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ (tại từng điểm dừng rồi kết luận)

- Tính định thức cấp 2:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w''_{xx} & w''_{xy} \\ w''_{yx} & w''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 & -12 \\ -12 & 14 \end{vmatrix} = 164 > 0$$

- Nhận xét: $\begin{cases} D > 0 \\ a_{11} > 0 \end{cases} \forall x, y$ nên điểm dừng duy nhất M(2, 3) là điểm cực tiểu.

2. ỨNG DỤNG BÀI TOÁN CỰC TRỊ KHÔNG CÓ ĐIỀU KIỆN TRONG KINH TẾ HỌC

2.1. Lựa chọn mức sản lượng tối ưu

2.2. Trường hợp doanh nghiệp độc quyền

2. ỨNG DỤNG BÀI TOÁN CỰC TRỊ KHÔNG CÓ ĐIỀU KIỆN TRONG KINH TẾ HỌC (tiếp theo)

- Các kết quả trên tạo cơ sở toán học cho việc giải các bài toán tối ưu. Bài toán tối ưu đặt ra mục tiêu tối đa hoá hoặc tối thiểu hoá giá trị của một hàm số, gọi là *hàm mục tiêu*:

$$w = f(x, y)$$

- Các biến độc lập x, y được gọi là các biến chọn: ta phải lựa chọn các giá trị thích hợp của chúng để mục tiêu đề ra đạt được một cách tốt nhất.
- Một trong những tiên đề của kinh tế học thị trường là: các nhà sản xuất theo đuổi mục tiêu tối đa hoá lợi nhuận. Sau đây là một số ví dụ phân tích hành vi tối đa hoá lợi nhuận của của các doanh nghiệp.

2.1. LỰA CHỌN MỨC SẢN LƯỢNG TỐI ƯU

Xét doanh nghiệp cạnh tranh thuần tuý sản xuất 2 loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp:

$$TC = TC(Q_1, Q_2)$$

Trong đó: Q_1 là số lượng sản phẩm thứ nhất, Q_2 là số lượng sản phẩm thứ hai.

Vì là môi trường cạnh tranh nên doanh nghiệp phải chấp nhận giá thị trường của các loại sản phẩm. Với p_1, p_2 là giá thị trường của 2 loại sản phẩm, hàm lợi nhuận có dạng:

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - TC(Q_1, Q_2)$$

Bài toán đặt ra: Chọn một cơ cấu sản lượng (Q_1, Q_2) để hàm lợi nhuận đạt tối đa.

VÍ DỤ 3

Xét doanh nghiệp cạnh tranh thuần tuý sản xuất 2 loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp:

$$TC = 3Q_1^2 + 2Q_1.Q_2 + 2Q_2^2 + 10$$

Với giá thị trường của sản phẩm 1 là $160 và giá của sản phẩm 2 là $120.

Hãy chọn một cơ cấu sản lượng (Q_1, Q_2) để hàm lợi nhuận đạt giá trị tối đa.

Giải:

$$\pi'_{Q_1} = -6Q_1 - 2Q_2 + 160 \rightarrow \pi''_{Q_1Q_1} = -6, \pi''_{Q_1Q_2} = -2$$

$$\pi'_{Q_2} = -4Q_2 - 2Q_1 + 120 \rightarrow \pi''_{Q_2Q_1} = -2, \pi''_{Q_2Q_2} = -4$$

Bước 1: Lập hàm tổng lợi nhuận

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - TC(Q_1, Q_2)$$

$$\pi = 160Q_1 + 120Q_2 - \left(3Q_1^2 + 2Q_1.Q_2 + 2Q_2^2 + 10\right)$$

$$= -3Q_1^2 - 2Q_2^2 - 2Q_1.Q_2 + 160Q_1 + 120Q_2 - 10$$

VÍ DỤ 3

Bước 2: Bài toán trở thành tìm (Q_1, Q_2) để $\pi \to$ max.

Vấn đề trên được quy về bài toán cực trị không có điều kiện ràng buộc.

- Giải điều kiện cần:
  - Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và 2:

$$\pi'_{Q_1} = -6Q_1 - 2Q_2 + 160 \to \pi''_{Q_1Q_1} = -6, \pi''_{Q_1Q_2} = -2$$
$$\pi'_{Q_2} = -4Q_2 - 2Q_1 + 120 \to \pi''_{Q_2Q_1} = -2, \pi''_{Q_2Q_2} = -4$$

  - Giải hệ: $\begin{cases} \pi'_{Q_1} = 0 \\ \pi'_{Q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6Q_1 - 2Q_2 + 160 = 0 \\ -4Q_2 - 2Q_1 + 120 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6Q_1 + 2Q_2 = 160 \\ 2Q_1 + 4Q_2 = 120 \end{cases}$
  - Giải hệ ta tìm được 1 nghiệm duy nhất: (Q_1, Q_2) = (20, 20)
  - Hàm số có 1 điểm dừng duy nhất là M(20, 20)

VÍ DỤ 3

- Kiểm tra điều kiện đủ
  - Tính định thức cấp 2

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi''_{Q_1Q_1} & \pi''_{Q_1Q_2} \\ \pi''_{Q_2Q_1} & \pi''_{Q_2Q_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 20 > 0 \ \ \forall Q_1, Q_2 > 0$$

  - Nhận xét: $\begin{cases} D > 0 \\ a_{11} < 0 \end{cases} \forall Q_1, Q_2 > 0$ nên điểm dừng duy nhất M(20, 20) là điểm cực đại, cũng đồng thời là điểm mà tại đó hàm số đạt max.
- **Kết luận:** Khi $(Q_1, Q_2) = (20, 20)$ thì $\pi \rightarrow$ max.

2.2. TRƯỜNG HỢP DOANH NGHIỆP ĐỘC QUYỀN

Xét trường hợp một doanh nghiệp độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp: $TC = TC(Q_1, Q_2)$

Doanh nghiệp độc quyền định giá sản phẩm của mình căn cứ vào chi phí sản xuất và cầu của thị trường:

- Giả sử cầu đối với các sản phẩm là:

$$Q_1 = D_1(p_1) \leftrightarrow p_1 = D_1^{-1}(Q_1)$$
$$Q_2 = D_2(p_2) \leftrightarrow p_2 = D_2^{-1}(Q_2)$$

- Hàm lợi nhuận có dạng:

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - TC(Q_1, Q_2)$$
$$= D_1^{-1}(Q_1).Q_1 + D_2^{-1}(Q_2).Q_2 - TC(Q_1, Q_2)$$

Câu hỏi đặt ra là chọn cơ cấu sản xuất (Q_1, Q_2) = bao nhiêu để lợi nhuận của doanh nghiệp đạt giá trị cực đại?

2.2. TRƯỜNG HỢP DOANH NGHIỆP ĐỘC QUYỀN (tiếp theo)

Nhận xét: Dưới góc độ toán học, đây là bài toán cực trị tự do của hàm 2 biến. Theo phương pháp giải bài toán cực trị của hàm hai biến ta xác định được mức sản lượng $\overline{Q_1}, \overline{Q_2}$ để π đạt cực đại, từ đó suy ra giá tối ưu:

$$\overline{p_1} = D_1^{-1}\left(\overline{Q_1}\right), \overline{p_2} = D_2^{-1}\left(\overline{Q_2}\right)$$

Ví dụ: Một doanh nghiệp độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp

$$TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 20$$

Cho biết hàm cầu đối với các sản phẩm đó như sau: $Q_1 = 25 - 0{,}5p_1$, $Q_2 = 30 - p_2$. Hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 cho lợi nhuận tối đa.

Giải:

- Lập hàm lợi nhuận: $\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - TC$

  Từ giả thiết ta có: $p_1 = 50 - 2Q_1$; $p_2 = 30 - Q_2$

  Từ đó suy ra:

$$\pi = (50 - 2Q_1)\,Q_1 + (30 - Q_2)Q_2 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 20$$

$$\pi = -3Q_1^2 - 2Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 50Q_1 + 30Q_2 - 20$$

2.2. TRƯỜNG HỢP DOANH NGHIỆP ĐỘC QUYỀN (tiếp theo)

- Giải điều kiện cần:
  - Các đạo hàm riêng cấp 1 và 2:

$$\pi'_{Q_1} = -6Q_1 - 2Q_2 + 50 \rightarrow \pi''_{Q_1Q_1} = -6; \pi''_{Q_1Q_2} = -2$$
$$\pi'_{Q_2} = -2Q_1 - 4Q_2 + 30 \rightarrow \pi''_{Q_2Q_1} = -2; \pi''_{Q_2Q_2} = -4$$

  - Giải hệ:

$$\begin{cases} \pi'_{Q_1} = 0 \\ \pi'_{Q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6Q_1 - 2Q_2 + 50 = 0 \\ -2Q_1 - 4Q_2 + 30 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6Q_1 + 2Q_2 = 50 \\ 2Q_1 + 4Q_2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 7 \\ Q_2 = 4 \end{cases}$$

Hàm số có một điểm dừng duy nhất: $(Q_1,Q_2) = (7,4)$

2.2. TRƯỜNG HỢP DOANH NGHIỆP ĐỘC QUYỀN (tiếp theo)

- Kiểm tra điều kiện đủ:
  - Tính định thức cấp 2:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi''_{Q_1Q_1} & \pi''_{Q_1Q_1} \\ \pi''_{Q_1Q_1} & \pi''_{Q_1Q_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 20 > 0, \forall Q_1, Q_2 > 0$$

  - Như vậy, $\begin{cases} D > 0 \\ a_{11} < 0 \end{cases} \forall Q_1, Q_2 > 0$

    nên điểm dừng duy nhất $(Q_1,Q_2) = (7,4)$ là điểm cực đại.

  - Kết luận: $\pi \to \max \leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 7 \\ Q_2 = 4 \end{cases}$, giá cho lợi nhuận tối đa $\begin{cases} p_1 = 36 \\ p_2 = 26 \end{cases}$

3. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

3.1. Bài toán cực trị có điều kiện

3.2. Phương pháp nhân tử Lagrange

3.1. BÀI TOÁN CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

- Một người tiêu dùng phải ra quyết định mua sắm hai loại hàng hoá và giả sử hàm lợi ích (hay hàm thoả dụng) của người đó là: U = U(x, y), trong đó biến số U chỉ lợi ích (độ thoả mãn) của người đó khi có x đơn vị hàng hoá thứ nhất và y đơn vị hàng hoá thứ hai. *Tâm lý chung của người tiêu dùng là nhiều hơn ít, tức là khi x và y càng lớn thì U càng lớn. Tuy nhiên, do túi tiền có hạn nên muốn mua được nhiều hơn thứ này thì người tiêu dùng phải bớt thứ kia.*
- Giả sử, giá thị trường của các loại hàng hoá mà người tiêu dùng muốn mua là p_1, p_2 và người đó chỉ có số tiền là b. Khi đó, để tối đa hoá độ thoả dụng U, người đó chỉ được phép lựa chọn x và y trong khuôn khổ ràng buộc về ngân sách: $p_1x + p_2y = b$.

3.2. PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

Bài toán cực trị có điều kiện (Hai biến chọn và một phương trình ràng buộc):

Tìm các điểm cực trị của hàm số w = f(x, y) thỏa mãn điều kiện g(x, y) = b.

Trong mô hình bài toán trên:

- x, y: được gọi là các biến chọn;
- w: được gọi là biến mục tiêu;
- f(x, y): được gọi là hàm mục tiêu;
- g(x, y) = b: được gọi là phương trình ràng buộc.

3.2. PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

Các bước giải bằng phương pháp nhân tử Lagrange

Bước 1: Lập hàm Lagrange

$$L = f(x,y) + \lambda[b - g(x,y)]$$

Bước 2: Giải điều kiện cần

- Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và 2:

$$L'_x, L'_y, L'_\lambda; L_{11} = L''_{xx}, L_{12} = L''_{xy}, L_{11} = L''_{yx}, L_{22} = L''_{yy}; g_1 = g'_x, g_2 = g'_y$$

- Giải hệ (Tìm điểm dừng): $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \leftrightarrow g(x,y) = b \end{cases}$ $\rightarrow$ nghiệm $M_0(x_0. y_0)$; λ_0

3.2. PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

Bước 3: Kiểm tra điều kiện đủ tại từng điểm dừng và kết luận

- Tính định thức cấp 3:

$$\bar{D} = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \bar{D}(x, y, \lambda)$$

- Tại điểm dừng $M_0(x_0. y_0)$; λ_0, ta có $\bar{D} = \bar{D}(x_0, y_0, \lambda_0)$
  - Nếu $\bar{D} > 0$ thì điểm $M_0(x_0. y_0)$ là điểm cực đại
  - Nếu $\bar{D} < 0$ thì điểm $M_0(x_0. y_0)$ là điểm cực tiểu

VÍ DỤ

Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị của hàm số

$$w = 3x^2 + 5xy$$

với điều kiện x + y = 16.

Giải:

Trước hết ta chú ý f(x, y) = $3x^2 + 5xy$; g(x, y) = x + y; b = 16

- Lập hàm Lagrange: L = $3x^2 + 5xy + \lambda(16 - x - y)$
- Giải điều kiện cần:
  - Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và 2:

$$L'_x = 6x + 5y - \lambda \rightarrow L_{11} = L''_{xx} = 6, L_{12} = L''_{xy} = 5$$

$$L'_y = 5x - \lambda \qquad \rightarrow L_{21} = L''_{yx} = 5, L_{22} = L''_{yy} = 0$$

$$L'_\lambda = 16 - x - y \qquad g_1 = g'_x = 1, g_2 = g'_y = 1$$

VÍ DỤ

➢ Giải hệ phương trình tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 6x + 5y \\ 5x - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 5x \\ x + y = 16 \end{cases}$$

Từ 2 phương trình đầu ta suy ra: 6x + 5y = 5x → x = –5y thế vào phương trình thứ 3

–5y + y = 16 → y = –4 → x = 20 → λ = 100

Vậy hàm số có một điểm dừng duy nhất M(20, –4); λ = 100

- Kiểm tra điều kiện đủ (tại từng điểm dừng)

Tính định thức cấp 3:

$$\bar{D} = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \forall x, y, \lambda$$

- Vậy điểm dừng duy nhất M(20, –4) là điểm cực đại.

3.3. Ý NGHĨA CỦA NHÂN TỬ LAGRANGE

- Khi thực hiện giải bài toán tìm cực trị của hàm số w = f(x, y) với điều kiện g(x, y) = b bằng phương pháp nhân tử Lagrange:
- Ta có hàm Lagrange: $L = f(x,y) + \lambda[b - g(x,y)]$
- Giả sử hàm số đạt cực trị tại điểm dừng $M(x_0, y_0)$; λ_0 và $w_0 = w_0(b)$
- Ta chứng minh được: $w_0'(b) = \dfrac{dw_0}{db} = \lambda_0$
- Do vậy, giá trị λ_0 chính là giá trị w_0 – cận biên của b, nghĩa là khi b tăng thêm 1 đơn vị thì giá trị cực trị w_0 thay đổi một lượng xấp xỉ bằng λ_0.

3.3. Ý NGHĨA CỦA NHÂN TỬ LAGRANGE (tiếp theo)

Ví dụ: Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị của hàm số

$$w = 3x^2 + 5xy$$

với điều kiện x + y = 16.

- Ta đã biết: Hàm số Lagrange có điểm dừng $M_0(20, -4)$; $\lambda_0 = 100$; $w_0 = w(20, -4) = 800$
- Nếu điều kiện được thay đổi thành x + y = 17 (b tăng thêm 1 đơn vị) thì giá trị cực đại w_0 sẽ tăng thêm xấp xỉ $\lambda_0 = 100$ đơn vị.

4. BÀI TOÁN TỐI ĐA HÓA LỢI ÍCH KHI CÓ RÀNG BUỘC NGÂN SÁCH

- Xét cơ cấu tiêu dùng có hai mặt hàng. Giả sử, giá hàng hoá thứ nhất và hai là p_1, p_2 và người đó chỉ có số tiền là b. Khi đó, để tối đa hoá độ thoả dụng $u = u(x, y)$ người đó chỉ được phép lựa chọn x và y trong khuôn khổ ràng buộc về ngân sách: $p_1x + p_2y = b$.
- **Bài toán:** Chọn (x, y) = ? để hàm lợi ích $u = u(x, y)$ đạt cực đại với điều kiện

$$p_1x + p_2y = b.$$

VÍ DỤ 5

Giả sử người tiêu dùng có hàm lợi ích $u = x^{0,4}.y^{0,9}$

Trong điều kiện giá của hàng hóa thứ nhất là 8USD, giá của hàng hóa thứ hai là 3USD và thu nhập dành cho tiêu dùng là 260USD. Hãy xác định giỏ hàng đem lại lợi ích tối đa cho người tiêu dùng.

Giải:

Bài toán trên thực chất là bài toán cực trị có điều kiện: Tìm (x, y) sao cho hàm số $u = x^{0,4}.y^{0,9}$ đạt cực đại với điều kiện 8x + 3y = 260.

- Lập hàm Lagrange: $L = x^{0,4}.y^{0,9} + \lambda(260 - 8x - 3y)$
- Giải điều kiện cần:

  Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và 2:

$$L'_x = 0,4.x^{-0,6}y^{0,9} - 8\lambda \rightarrow L_{11} = L''_{xx} = -0,24.x^{-1,6}y^{0,9}, L_{12} = L''_{xy} = 0,36.x^{-0,6}y^{-0,1}$$

$$L'_y = 0,9.x^{0,4}y^{-0,1} - 3\lambda \rightarrow L_{21} = L''_{yx} = 0,36.x^{-0,6}y^{-0,1}, L_{22} = L''_{yy} = -0,09.x^{0,4}y^{-1,1}$$

$$L'_\lambda = 260 - 8x - 3y \qquad g_1 = g'_x = 8, g_2 = g'_y = 3$$

VÍ DỤ 5 (tiếp theo)

Giải hệ: $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,4.x^{-0,6}.y^{0,9} - 8\lambda = 0 \\ 0,9.x^{0,4}.y^{-0,1} - 3\lambda = 0 \\ 8x + 3y = 260 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,4.x^{-0,6}.y^{0,9} = 8\lambda \\ 0,9.x^{0,4}.y^{-0,1} = 3\lambda \\ 8x + 3y = 260 \end{cases}$

Chia theo vế hai phương trình đầu trong hệ, ta được $\dfrac{0,4.x^{-0,6}.y^{0,9}}{0,9.x^{0,4}.y^{-0,1}} = \dfrac{8}{3} \rightarrow \dfrac{y}{3x} = 2 \rightarrow y = 6x$

Thay y = 6x vào phương trình thứ ba ta được: 8x + 3.6x = 260

$$\rightarrow x_0 = 10,\ y_0 = 60, \lambda_0 = 0,3.10^{0,4}.60^{-0,1}$$

- Vậy có 1 điểm dừng duy nhất là: M(10, 60); $\lambda_0 = 0,3.10^{0,4}.60^{-0,1}$
- Kiểm tra điều kiện đủ:
- Tính định thức cấp 3

$$\bar{D} = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 3 \\ 8 & L_{11} & L_{12} \\ 3 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = 48L_{12} - 9L_{11} - 64L_{22}$$

VÍ DỤ 5 (tiếp theo)

Vậy $\bar{D} = 48L_{12} - 9L_{11} - 64L_{22} > 0 \ \forall x, y, \lambda$ (Vì $L_{12} > 0$; $L_{11} < 0$; $L_{22} < 0$ x, y, $\lambda > 0$)

- Tức là điểm dừng M(10, 60) là điểm cực đại
- Kết luận: Giỏ hàng cho lợi ích tối đa là (x, y) = (10, 60).

GIẢI QUYẾT TÌNH HUỐNG

Xét doanh nghiệp cạnh tranh thuần tuý sản xuất 2 loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp:

$$TC = 3Q_1^2 + 2Q_1.Q_2 + 2Q_2^2 + 10$$

Với giá thị trường của sản phẩm 1 là $160 và giá của sản phẩm 2 là $120.

Hãy chọn một cơ cấu sản lượng (Q_1, Q_2) để hàm lợi nhuận đạt giá trị tối đa.

Giải:

Bước 1: Lập hàm tổng lợi nhuận

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - TC(Q_1, Q_2)$$

$$\pi = 160Q_1 + 120Q_2 - \left(3Q_1^2 + 2Q_1.Q_2 + 2Q_2^2 + 10\right)$$

$$= -3Q_1^2 - 2Q_2^2 - 2Q_1.Q_2 + 160Q_1 + 120Q_2 - 10$$

GIẢI QUYẾT TÌNH HUỐNG

Bước 2: Bài toán trở thành tìm (Q_1, Q_2) để $\pi \to$ max.

Vấn đề trên được quy về bài toán cực trị không có điều kiện ràng buộc.

- Giải điều kiện cần:
  - Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và 2:

$$\pi'_{Q_1} = -6Q_1 - 2Q_2 + 160 \to \pi''_{Q_1Q_1} = -6, \pi''_{Q_1Q_2} = -2$$
$$\pi'_{Q_2} = -4Q_2 - 2Q_1 + 120 \to \pi''_{Q_2Q_1} = -2, \pi''_{Q_2Q_2} = -4$$

  - Giải hệ: $\begin{cases} \pi'_{Q_1} = 0 \\ \pi'_{Q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6Q_1 - 2Q_2 + 160 = 0 \\ -4Q_2 - 2Q_1 + 120 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6Q_1 + 2Q_2 = 160 \\ 2Q_1 + 4Q_2 = 120 \end{cases}$
  - Giải hệ ta tìm được 1 nghiệm duy nhất: (Q_1, Q_2) = (20, 20)
  - Hàm số có 1 điểm dừng duy nhất là M(20, 20)

GIẢI QUYẾT TÌNH HUỐNG

Xét doanh nghiệp cạnh tranh thuần tuý sản xuất 2 loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp:

$$TC = 3Q_1^2 + 2Q_1.Q_2 + 2Q_2^2 + 10$$

Với giá thị trường của sản phẩm 1 là $160 và giá của sản phẩm 2 là $120.

Hãy chọn một cơ cấu sản lượng (Q_1, Q_2) để hàm lợi nhuận đạt giá trị tối đa.

Giải:

Bước 1: Lập hàm tổng lợi nhuận

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - TC(Q_1,Q_2)$$

$$\pi = 160Q_1 + 120Q_2 - \left(3Q_1^2 + 2Q_1.Q_2 + 2Q_2^2 + 10\right)$$

$$= -3Q_1^2 - 2Q_2^2 - 2Q_1.Q_2 + 160Q_1 + 120Q_2 - 10$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 1

Điểm dừng của hàm số $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 - 5x + y - 7$ là:

A. (17, –23)

B. (1, –1)

C. (1, 1)

D. (–23, 17)

Trả lời:

- Đáp án đúng: D. (–23, 17)
- Giải thích: Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số và cho các đạo hàm riêng đó bằng không. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 3y - 5 = 0 \\ f'_y = 3x + 4y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -23 \\ y = 17 \end{cases}$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 2

Xét bài toán tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = 2x - 3y$ với điều kiện $x^2 + 3y^2 = 5$

Khi thực hiện giảm bài toán bằng phương pháp nhân tử Lagrange, ta tìm được số điểm dừng của hàm Lagrange là:

A. 1

B. 3

C. 2

D. 4

Trả lời:

- Đáp án đúng là: C. 2
- Giải thích: Lập hàm số Lagrange, tìm các đạo hàm riêng cấp 1. Giải hệ phương trình tìm điểm dừng, hệ phương trình có 2 nghiệm nên hàm số Lagrange có 2 điểm dừng.

BÀI TẬP 1

Tìm cực trị của hàm số:

$$w = 3x^2 + 2xy + 4y^2 + x - 3y + 5$$

Gợi ý:

- Thực hiện các bước tìm cực trị của hàm số.
- Hàm số có các đạo hàm riêng:

$$w'_x = 6x + 2y + 1$$
$$w'_y = 2x + 8y - 3$$

- Hàm số chỉ có 1 điểm dừng $M_0(-7/22; 5/11)$.
- Kiểm tra điều kiện đủ: kết luận được hàm số đạt giá trị cực tiểu tại điểm M_0.

BÀI TẬP 2

Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị của hàm số f(x, y) = xy với điều kiện 2x – 3y = 26

Hướng dẫn:

- Lập hàm Lagrange.
- Tìm điểm dừng của hàm số Lagrange: hàm chỉ có 1 điểm dừng $M_0(-6,4,2)$.
- Kiểm tra điều kiện đủ: kết luận được hàm số đạt giá trị cực tiểu tại $M_0(-6; 4)$.

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

- Bài toán cực trị tự do của hàm số là bài toán tìm các giá trị của biến chọn trên miền xác định của hàm số mà tại đó hàm số đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong phạm vi lân cận đủ nhỏ của điểm đó.
- Để tìm cực trị tự do của hàm số, ta tiến hành tìm các điểm dừng của hàm số. Sau đó, sử dụng điều kiện đủ kiểm tra các điểm dừng tìm được có là điểm cực trị hay không.
- Bài toán tối đa hóa lợi ích của nhà sản xuất được giới thiệu với 2 bài toán cơ bản là lựa chọn mức sản lượng tối ưu và lựa chọn mức sử dụng yếu tố đầu vào tối ưu.
- Đối với cực trị có điều kiện ràng buộc ta phải tiến hành tìm cực trị của hàm số khi các biến chọn phải thỏa mãn 1 phương trình ràng buộc.

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

- Phương pháp nhân tử Lagrange được sử dụng để tìm cực trị có điều kiện ràng buộc. Nhân tử Lagrange là một biến số được đưa thêm vào trong khi lập hàm Lagrange.Chúng ta thực hiện tìm cực trị của hàm Lagrange và sử dụng điều kiện đủ kiểm tra hàm số có đạt cực trị tại điểm tìm được hay không.
- Trong phương pháp nhân tử Lagrange, khi giá trị b trong điều kiện ràng buộc tăng thêm 1 đơn vị, ta không cần giải lại bài toán mà dựa vào ý nghĩa của nhân tử Lagrange để biết (xấp xỉ) giá trị cực trị của bài toán mới.
- Bài toán tối đa hóa lợi ích khi có ràng buộc ngân sách đưa ra là một minh họa cho việc sử dụng bài toán cực trị trong phân tích kinh tế.