BÀI 6
NGUYÊN HÀM
VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

ThS. Đoàn Trọng Tuyến
Trường Đại học Kinh tế Quốc dân

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG

Giả sử chi phí cận biên (MC) ở mỗi mức sản lượng Q là:

$$MC = 25 - 30Q + 9Q^2$$

và chi phí cố định FC = 55

Hãy xác định hàm tổng chi phí.

MỤC TIÊU

- Nắm vững được định nghĩa tích phân bất định và các tính chất cơ bản;
- Hiểu, nhớ và áp dụng được tích phân các hàm cơ bản;
- Nắm được 4 phương pháp tính tích phân;
- Nhớ các dạng tích phân cơ bản.

NỘI DUNG

1. Nguyên hàm của hàm số
2. Tích phân bất định
3. Các công thức tích phân cơ bản
4. Các phương pháp tính tích phân

1. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ

1.1. Khái niệm nguyên hàm

1.2. Biểu thức nguyên hàm tổng quát

1.1. KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM

Định nghĩa: Hàm số F(x) được gọi là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên một khoảng X nếu

$$F'(x) = f(x), \forall x \in X.$$

Ví dụ: Hàm số x^2 là một nguyên hàm của của hàm số 2x trên R vì

$$(x^2)' = 2x$$

Hàm số sin x là một nguyên hàm của của hàm số cos x trên R vì

$$(\sin x)' = \cos x$$

1.2. BIỂU THỨC NGUYÊN HÀM TỔNG QUÁT

Định lý: Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên khoảng X thì

- Hàm số F(x) + C, với C là một hằng số bất kỳ, cũng là một nguyên hàm của f(x) trên X.
- Ngược lại, mọi nguyên hàm của f(x) trên khoảng X đều biểu diễn được dưới dạng:

F(x) + C, với C là một hằng số.

Biểu thức F(x) + C được gọi là biểu thức nguyên hàm tổng quát của f(x) trên X.

Ví dụ: Vì một nguyên hàm của hàm số 2x là hàm x^2 nên mọi nguyên hàm của hàm số 2x có dạng $F(x) = x^2 + C$.

2. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

2.1. Định nghĩa tích phân bất định

2.2. Các tính chất cơ bản của tích phân bất định

2.1. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

- Định nghĩa: Tích phân bất định của hàm số f(x) là biểu thức nguyên hàm tổng quát F(x) + C, trong đó F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

- Ký hiệu: $\int f(x)dx$

- Theo ký hiệu trên ta có: $\int f(x)dx = F(x) + C$
- Ví dụ:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

2.2. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ hay $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

2) $\int F'(x)dx = F(x) + C$ hay $\int dF(x) = F(x) + C$

3) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

4) $\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx \quad (k = const)$

3. CÁC CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CƠ BẢN

1) $\int 1dx = x + C$

2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

4. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

4.1. Phương pháp khai triển

4.2. Sử dụng tính bất biến của biểu thức tích phân

4.3. Phương pháp đổi biến số

4.4. Phương pháp tích phân từng phần

4.1. PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN

Áp dụng tính chất: $\int [a.f(x) + b.g(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$

để đưa một tích phân phức tạp thành các tích phân đơn giản hơn

Ví dụ: Tính tích phân

$$I_1 = \int (3x^4 - 5\cos x + 2e^x)dx$$

Sử dụng quy tắc khai triển, ta đưa I_1 về các tích phân cơ bản

$$\begin{aligned} I_1 &= \int (3x^4 - 5\cos x + 2e^x)dx \\ &= 3\int x^4.dx - 5\int \cos x.dx + 2\int e^x.dx \\ &= 3\frac{x^5}{5} - 5\sin x + 2e^x + C \end{aligned}$$

4.1. PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN

Ví dụ: Tính tích phân

$$I_2 = \int (2x - x^3)^2 .dx$$

Sử dụng quy tắc khai triển, ta đưa I_2 về các tích phân cơ bản:

$$I_1 = \int (3x^4 - 5\cos x + 2e^x)dx$$

4.2. SỬ DỤNG TÍNH BẤT BIẾN CỦA BIỂU THỨC TÍCH PHÂN

Tính bất biến của biểu thức tích phân có nội dung như sau:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C,\ \forall u = u(x)$$

với u(x) là một biểu thức hàm số có đạo hàm liên tục

Ví dụ: Sử dụng tính bất biến của biểu thức tích phân kết hợp với tích phân các hàm cơ bản ta suy ra:

1) $I_1 = \int e^{kx}.dx = \dfrac{e^{kx}}{k} + C$

2) $I_2 = \int \sin kx.dx = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$

3) $I_3 = \int \cos kx.dx = \dfrac{\sin kx}{k} + C$

4) $I_4 = \int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{\ln|ax+b|}{a} + C$

5) $I_5 = \int (ax+b)^{\alpha} dx = \dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C \quad (\alpha \neq -1)$

VÍ DỤ 1

Tính tích phân: $I_1 = \int (2x-5)^{2014}.dx$

Ta viết lại tích phân trên dưới dạng:

$$I_1 = \int (2x-5)^{2014}.dx = \frac{1}{2}\int (2x-5)^{2014}.d(2x-5)$$

Nhưng do $\int x^{2014}.dx = \frac{x^{2015}}{2015} + C$

Nên $I_1 = \frac{1}{2}\int (2x-5)^{2014}.d(2x-5) = \frac{(2x-5)^{2015}}{4030} + C$

VÍ DỤ 2

Tính tích phân $I_2 = \int x\left(3x^2 - 1\right)^7 .dx$

Ta viết lại tích phân trên dưới dạng

$$I_2 = \int x\left(3x^2 - 1\right)^7 .dx = \int \left(3x^2 - 1\right)^7 .xdx = \frac{1}{6}\int \left(3x^2 - 1\right)^7 .d\left(3x^2 - 1\right)$$

Nhưng do $\int x^7 .dx = \frac{x^8}{8} + C$

Nên $I_2 = \frac{1}{6}\int \left(3x^2 - 1\right)^7 .d\left(3x^2 - 1\right) = \frac{\left(3x^2 - 1\right)^8}{48} + C$

VÍ DỤ 3

Tính tích phân $I_3 = \int \tan x.dx$

Ta viết lại tích phân trên dưới dạng

$$I_3 = \int \tan x.dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}.dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

Nhưng do $\int \frac{1}{x}.dx = \ln|x| + C$

Nên $I_3 = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

4.3. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

- Đối với tích phân I = ∫f(x)dx, ta có thể đặt x = φ(t) *là hàm đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên (α; β).* Khi đó

$$I = \int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t).dt = \int g(t).dt$$

- Khi phép đổi biến được lựa chọn phù hợp thì tích phân theo biến số t sẽ đơn giản hơn. Nếu ta tính được ∫g(t).dt = G(t) + C thì

$$I = \int f(x)dx = G\left[h(x)\right] + C$$

trong đó t = h(x) là hàm ngược của hàm số x = φ(t)

4.3. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Lưu ý rằng khi tính tích phân các hàm chứa $\sqrt[n]{ax+b}$

thì ta có thể đặt $t = \sqrt[n]{ax+b}$

Từ đó tính x theo t, dx theo dt, sau đó thay vào tích phân có thể khử bớt căn.

$$x = \frac{t^n - b}{a}, \qquad dx = \frac{n.t^{n-1}}{a}.dt$$

4.3. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ (tiếp theo)

Ví dụ: Tính tích phân: $I_1 = \int \frac{1}{1+\sqrt{3x-1}}.dx$

- Đặt $t = \sqrt{3x-1}$
- Suy ra $t^2 = 3x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^2+1}{3} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2t}{3}dt$
- Thay vào tích phân ban đầu ta có $I_1 = \int \frac{1}{1+t}.\frac{2t}{3}.dt = \frac{2}{3}\int \frac{t}{1+t}.dt$
- Tính tích phân theo t ta được

$$I_1 = \frac{2}{3}\int \frac{t}{1+t}.dt = \frac{2}{3}\int\left(1 - \frac{1}{1+t}\right).dt = \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}\ln|1+t| + C$$

- Suy ra $I_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3x-1} - \frac{2}{3}\ln\left|1+\sqrt{3x-1}\right| + C$

4.3. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ (tiếp theo)

Đối với tích phân I = ∫f[φ(x)].φ'(x)dx, ta đặt t = φ(x). Khi đó:

$$\int f\left[\varphi(x)\right].\varphi'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F\left[\varphi(x)\right] + C$$

Ví dụ: Tính tích phân: $I_1 = \int \frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}.dx$

- Đặt $t = \frac{1}{x}$
- Suy ra $dt = -\frac{1}{x^2}dx$
- Khi đó $I_1 = -\int \tan t.dt = -\int \frac{\sin t}{\cos t}.dt = \int \frac{d(\cos t)}{\cos t} = \ln|\cos t| + C$
- Vì vậy $I_1 = \ln\left|\cos\frac{1}{x}\right| + C$

4.4. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Trong đó u = u(x) và v = v(x) là các hàm số có đạo hàm liên tục

Một số dạng có thể tính được bằng phương pháp tích phân từng phần:

- $\int P(x).e^{ax}dx \Rightarrow \begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases}$
- $\int P(x).\cos axdx \Rightarrow \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos axdx \end{cases}$
- $\int x^{\alpha}.\ln^{m} xdx \Rightarrow \begin{cases} u = \ln^{m} x \\ dv = x^{\alpha}dx \end{cases}$
- $\int P(x).\sin axdx \Rightarrow \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin axdx \end{cases}$

VÍ DỤ 1

Tính tích phân $I_1 = \int x.e^{-2x}.dx$

- Ta đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-2x}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int e^{-2x}.dx = \dfrac{e^{-2x}}{-2} \end{cases}$$

- Theo phương pháp tích phân từng phần ta có

$$I_1 = x.\frac{e^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}.dx = -\frac{x.e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$$

VÍ DỤ 2

Tính tích phân $I_2 = \int \sqrt{x}.\ln 2x.dx$

- Ta đặt:

$$\begin{cases} u = \ln 2x \\ dv = \sqrt{x}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \int \sqrt{x}.dx = \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \end{cases}$$

- Theo phương pháp tích phân từng phần ta có

$$I_2 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}.\ln 2x - \frac{2}{3}\int \sqrt{x}.dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}.\ln 2x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C$$

VÍ DỤ 3

Tính tích phân $I_3 = \int x.\cos 2x.dx$

- Ta đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int \cos 2x.dx = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{cases}$$

- Theo phương pháp tích phân từng phần ta có

$$I_3 = x.\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2x.dx = x.\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

GIẢI QUYẾT TÌNH HUỐNG

- Vì TC'(Q) = MC(Q) nên hàm tổng chi phí là nguyên hàm của hàm chi phí cận biên.

  $TC = \int(25-30Q + 9Q^2)dQ = 25Q – 15Q^2 + 3Q^3 + C_0$

- Chi phí cố định là phần chi phí không phụ thuộc sản lượng Q (chi phí mà doanh nghiệp phải bỏ ra kể cả không sản xuất 1 sản phẩm nào), do đó:

  $FC = 55 = TC(0) = C_0$

  $\rightarrow TC = 55 + 25Q – 15Q^2 + 3Q^3$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 1

Giá trị của tích phân $I=\int\left(2x-3x^2\right)^2.dx$ **là:**

A. $\left(x^2-x^3\right)^2+C$

B. $\frac{4x^3}{3}-3x^4+\frac{9x^5}{5}+C$

C. $\frac{4x^3}{3}+3x^4+\frac{9x^5}{5}+C$

D. $\frac{\left(2x-3x^2\right)^3}{3}+C$

Trả lời: Đáp án đúng là B. $\frac{4x^3}{3}-3x^4+\frac{9x^5}{5}+C$

Giải thích: Dùng phương pháp khai triển $\left(2x-3x^2\right)^2=4x^2-12x^3+9x^4$

$$I=\int\left(4x^2-12x^3+9x^4\right).dx=\frac{4x^3}{3}-3x^4+\frac{9x^5}{5}+C$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 2

Giá trị của tích phân $I = \int x.\cos x.dx$ **là:**

A. $\frac{x^2}{2}.\sin x + C$

B. $\frac{x^2}{2}.\cos x + C$

C. $x.\sin x + C$

D. $x.\sin x + \cos x + C$

Trả lời:

- Đáp án đúng: D
- Giải thích: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần để tính, hoặc đạo hàm các kết quả để kiểm tra từng đáp án. Chú ý rằng cách thứ 2 không được khuyến khích khi tự học, các bạn chỉ nên dùng cách này để kiểm tra xem kết quả của mình tính có đúng hay không.

CÂU HỎI TỰ LUẬN

Tính tích phân $I = \int (x - 2\cos 3x)^2 .dx$

Giải:

- Trước hết ta khai triển tích phân thành:

$$I = \int (x^2 - 4x.\cos 3x + 4\cos^2 3x).dx$$
$$= \underbrace{\int x^2.dx}_{I_1} - 4\underbrace{\int x.\cos 3x.dx}_{I_2} + 4\underbrace{\int \cos^2 3x.dx}_{I_3}$$

- Trong đó I_1 là tích phân hàm lũy thừa cơ bản:

$$I_1 = \int x^2.dx = \frac{x^3}{3} + C$$

CÂU HỎI TỰ LUẬN

- I_3 là tích phân hàm lượng giác:

$$I_3 = \int \cos^2 3x.dx = \frac{1}{2}\int \left(2\cos^2 3x\right).dx = \frac{1}{2}\int \left(1+\cos 6x\right).dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 6x}{6}\right) + C$$

- I_2 là tích phân có thể tính được bằng phương pháp tích phân từng phần:

$$I_2 = \int x.\cos 3x.dx = \frac{1}{3}x.\sin 3x + \frac{\cos 3x}{9} + C$$

- Do đó

$$I = \frac{x^3}{3} - \frac{4x.\sin 3x}{3} - \frac{4\cos 3x}{9} + 2x + \frac{\sin 6x}{3} + C$$

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

- Nguyên hàm của hàm số f(x) trên X là hàm F(x) thỏa mãn: F'(x) = f(x) trên X.
- Tích phân bất định: $\int f(x)dx = F(x) + C$ với F(x) là một nguyên hàm.
- Các tính chất cơ bản:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx$$

- Có 4 phương pháp tính tích phân bất định: Phương pháp khai triển, phương pháp sử dụng tính bất biến của biểu thức tích phân, phương pháp đổi biến, phương pháp tích phân từng phần.