GIỚI THIỆU HỌC PHẦN TOÁN CHO CÁC NHÀ KINH TẾ 1

- **Mục tiêu:** Học phần trang bị cho sinh viên các kiến thức về hệ phương trình tuyến tính, không gian véctơ, ma trận và định thức.
- **Nội dung nghiên cứu của học phần:**
  - Bài 1: Đại cương về hệ phương trình tuyến tính và không gian véctơ n chiều
  - Bài 2: Các mối liên hệ tuyến tính trong không gian véctơ n chiều − Cơ sở của không gian R^n
  - Bài 3: Các khái niệm cơ bản và các phép toán tuyến tính đối với ma trận
  - Bài 4: Định thức
  - Bài 5: Phép nhân ma trận và ma trận nghịch đảo
  - Bài 6: Hệ phương trình Cramer − Phương pháp ma trận và phương pháp định thức

BÀI 1
ĐẠI CƯƠNG VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH VÀ KHÔNG GIAN VÉCTƠ N CHIỀU

ThS. Vũ Quỳnh Anh
Trường Đại học Kinh tế quốc dân

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG: Tính công lao động của nhân viên

Bảng chấm công nhân viên tháng 1 năm 2014 của bộ phận lễ tân trong một khách sạn được cho như sau:

Họ và tên	Ngày công đi làm thực	Làm thêm giờ		
		Công ngày thường	Công ngày nghỉ	Công ngày lễ
Mai Hải Anh	21	0,5	0,5	1,5
Hoàng Thu Hương	18	1	2	0,5
Ngô Phương Hoa	20	0,5	1	0
Nguyễn Quỳnh Trang	21	0	1,5	0,5

Tính tổng số lượng ngày công đi làm thực tế, tổng số ngày công làm thêm giờ vào ngày thường, ngày nghỉ và ngày lễ trong tháng 1 của bộ phận lễ tân đó.

MỤC TIÊU

- Sinh viên nắm được các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính, nắm được phương pháp giải và các kết quả định tính đối với hệ phương trình tuyến tính;
- Nắm được khái niệm véctơ n chiều, không gian véctơ n chiều và các khái niệm liên quan;
- Tính toán thành thạo các phép toán tuyến tính đối với véctơ.

NỘI DUNG

1. Hệ phương trình tuyến tính
2. Không gian vectơ n chiều

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.1. Các khái niệm cơ bản

1.2. Hệ tam giác và hệ hình thang

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1.1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

1.1.2. Ma trận hệ số và ma trận mở rộng

1.1.3. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

1.1.4. Hệ tương đương và phép biến đổi tương đương

1.1.5. Các phép biến đổi sơ cấp

1.1.1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT

Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn số x_1, x_2, … , x_n là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

- a_{ik}: hệ số của ẩn x_k ở phương trình thứ i;
- b_i: số hạng tự do ở phương trình thứ i.
- Vế phải: Cột số hạng tự do.

1.1.2. MA TRẬN HỆ SỐ VÀ MA TRẬN MỞ RỘNG

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận hệ số của (1)

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận mở rộng của (1)

1.1.2. MA TRẬN HỆ SỐ VÀ MA TRẬN MỞ RỘNG

Ví dụ

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = -2 \\ -x + 2y \qquad = 5 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

1.1.3. NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

- Định nghĩa: Một bộ n số thực có thứ tự $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình (1) nếu khi ta thay $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ vào tất cả các phương trình của hệ thì được các đẳng thức đúng.
- Ký hiệu: $(x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n)$

  Hoặc:

$$X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_n \end{cases}$$

1.1.4. HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

- Hai hệ phương trình tuyến tính với các ẩn số như nhau được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập hợp nghiệm, tức là mỗi nghiệm của hệ này đồng thời là một nghiệm của hệ kia và ngược lại (hoặc cả hai hệ đều vô nghiệm).
- Một phép biến đổi biến một hệ phương trình tuyến tính thành một hệ tương đương được gọi là phép biến đổi tương đương.

1.1.5. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP

- Đổi chỗ hai phương trình của hệ.
- Nhân hai vế của một phương trình của hệ với một số khác 0.
- Lấy một số k nhân vào một phương trình rồi cộng vào một phương trình khác.

Tính chất: Các phép biến đổi sơ cấp là các phép biến đổi tương đương.

1.2. HỆ TAM GIÁC VÀ HỆ HÌNH THANG

1.2.1. Hệ phương trình tuyến tính dạng tam giác

1.2.2. Hệ phương trình tuyến tính dạng hình thang

1.2.1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH DẠNG TAM GIÁC

- Là hệ có dạng sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

Trong đó a_{11}, a_{22}, … , a_{nn} khác 0

- Tính chất: Hệ tam giác luôn có nghiệm duy nhất.
- Cách giải: Thay từ phương trình dưới lên.

1.2.1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH DẠNG TAM GIÁC

Ví dụ:

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 1 \\ \quad\quad y - 3z = 0 \\ \quad\quad\quad 5z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/3(1 + y - 4z) \\ y = 3z = -6 \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -6 \\ z = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: X = (1,−6,−2)

1.2.2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH DẠNG HÌNH THANG

- Là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2s}x_s + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{ss}x_s + \ldots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \qquad (3)$$

- Trong đó a_{11}, a_{22}, … , a_{ss} khác 0
- s < n (số phương trình ít hơn số ẩn)
- **Tính chất:** Hệ hình thang luôn có vô số nghiệm.

1.2.2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH DẠNG HÌNH THANG

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2s}x_s + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{ss}x_s + \ldots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \quad (3)$$

- **Cách giải:** Chuyển thành hệ tam giác
  - Chọn $x_1, x_2, \ldots, x_s$ làm ẩn chính, các ẩn còn lại là ẩn tự do.
  - Chuyển các ẩn tự do $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$ sang phải (được hệ tam giác).
  - Giải hệ tam giác đó được $x_1, x_2, \ldots, x_s$ thông qua $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$
- Khi đó nghiệm của hệ có dạng:
- $X = (x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n)$ với $x_1, x_2, \ldots, x_s$ phụ thuộc vào $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$ và $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$ là các số thực tùy ý, gọi là nghiệm tổng quát.
- Ứng với mỗi bộ giá trị xác định của ẩn tự do $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$, ta được một nghiệm cụ thể của hệ, gọi là nghiệm riêng.

VÍ DỤ

Giải hệ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

- Chọn x_1, x_2: ẩn chính; x_3, x_4: ẩn tự do; chuyển x_3, x_4 sang phải.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -3x_3 + x_4 \\ x_2 = 1 + 3x_3 - x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(-3x_3 + x_4 + 1 + 3x_3 - x_4) \\ x_2 = 1 + 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = 1 + 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

→ Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

- Nghiệm tổng quát: $X = (1/2, 1+3x_3-x_4, x_3, x_4)$ với x_3, x_4 là các số thực tùy ý.

1.3. PHƯƠNG PHÁP KHỬ ẨN LIÊN TIẾP

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Nội dung: Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp, đưa hệ (1) về dạng tam giác hoặc hình thang.

1.3. PHƯƠNG PHÁP KHỬ ẨN LIÊN TIẾP

- Bước 1: Khử ẩn x_1 từ phương trình thứ 2 đến phương trình thứ m.
- Bước 2: Khử ẩn x_2 từ phương trình thứ 3 đến phương trình thứ m.
- …
- Quá trình tiếp tục và kết thúc sau không quá m – 1 bước.

Chú ý: Khi biến đổi khử ẩn, có thể gặp hai trường hợp

- TH1: Có một phương trình dạng: $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$ thì có thể bỏ phương trình này khỏi hệ.
- TH2: Có một phương trình dạng: $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \neq 0$ thì kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

CÁC TRƯỜNG HỢP NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Hệ phương trình tuyến tính có 3 trường hợp nghiệm:

1. Nghiệm duy nhất (về dạng tam giác).
2. Vô số nghiệm (về dạng hình thang).
3. Vô nghiệm (chứa phương trình dạng: $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \neq 0$)

VÍ DỤ 1

Giải hệ: $\begin{cases} -x+3y-z+2t=0 \\ 2x-y+3z-t=5 \\ 3x+y+z+2t=2 \\ -4x-3y+z-5t=2 \end{cases}$

Giải: Lập ma trận mở rộng:

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times 1 \\ \times 1 \\ \times 1 \end{array} \xrightarrow{\times 2 \times 3 \times (-4)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 10 & -2 & 8 & 2 \\ 0 & -15 & 5 & -13 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \times 1 \\ \times 1 \end{array} \xrightarrow{\times(-2)\ \times 3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 17 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \times 1 \end{array} \xrightarrow{\times 2} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Kết luận: Hệ phương trình vô nghiệm.

VÍ DỤ 2

Giải hệ: $\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ -3x + 2y - 3z = 0 \\ -x - y + 4z = 2 \end{cases}$

Giải: Lập ma trận mở rộng

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ -5y - 3z = -3 \\ 12z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/10 \\ y = 3/10 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất $X = \left(\frac{-3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}\right)$

VÍ DỤ 3

Giải hệ: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ (*)

Giải: Lập ma trận mở rộng

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ \boxed{3} & 1 & -2 & -1 \\ \boxed{4} & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ -4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -11 & 5 \\ 0 & \boxed{7} & -11 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 - 11x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Chọn x_1, x_2: ẩn chính, chuyển x_3, x_4 sang phải.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3x_3 + 2x_4 \\ 7x_2 = 11x_3 - 5x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1/7(x_3 + 4x_4) \\ x_2 = 1/7(11x_3 - 5x_4) \end{cases}$$

Kết luận: Hệ phương trình có vô số nghiệm $X = \left(\frac{1}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4, \frac{11}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_4, x_3, x_4\right)$

Với x_3, x_4 là các số thực tùy ý.

1.4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

- Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là hệ phương trình tuyến tính có tất cả các số hạng tự do bằng 0:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- Chú ý: Khi giải hệ thuần nhất chỉ cần biến đổi trên ma trận hệ số của hệ.
- Tính chất:

  Hệ thuần nhất luôn có nghiệm. Cụ thể, luôn có nghiệm 0.

  Hệ thuần nhất với số phương trình nhỏ hơn số ẩn luôn có vô số nghiệm.
- **Hệ phương trình thuần nhất có 2 trường hợp nghiệm:**
  1. Có nghiệm O là duy nhất (chỉ có nghiệm tầm thường)
  2. Vô số nghiệm (có nghiệm không tầm thường)

2. KHÔNG GIAN VECTƠ N CHIỀU

2.1. Khái niệm véctơ n chiều

2.2. Định nghĩa phép cộng và phép nhân véctơ với số

2.3. Không gian vectơ n chiều

2.1. KHÁI NIỆM VÉCTƠ N CHIỀU

- **Định nghĩa:** Một vectơ n chiều là một bộ n số thực được xếp theo một thứ tự xác định $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- **Ký hiệu:** $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Hoặc $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Số x_i được gọi là thành phần thứ i của vectơ X.
- Vectơ không n chiều: Ký hiệu 0_n (hoặc 0)

$$0 = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{n})$$

2.1. KHÁI NIỆM VÉCTƠ N CHIỀU

- Vectơ đối: ký hiệu: $-X = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ gọi là véc tơ đối của véc tơ X.
- Sự bằng nhau: Cho hai vectơ n chiều

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$X = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \dots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

2.2. ĐỊNH NGHĨA PHÉP CỘNG VÀ PHÉP NHÂN VÉCTƠ VỚI SỐ

Cho hai vectơ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

- **Phép cộng hai vectơ**

  Định nghĩa: Tổng của 2 vectơ n chiều X và Y là một vectơ n chiều, ký hiệu:

  $$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n);$$

  Ví dụ: (1,– 2, 3, 1) + (2, 1,– 5, 0) = (1 + 2, – 2+1, 3+(– 5), 1+0) = (3, – 1, – 2, 1)

- **Nhân một số với một vectơ**

  Định nghĩa: k là một số thực, X là một vectơ n chiều $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, tích của k và X ký hiệu:

  $$kX = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$$

  Ví dụ: 2(1, – 2, 3, 1) = (2, – 4, 6, 2)

  Ta có: $-X = (-1)X$

  $-(\alpha X) = (-\alpha)X$

2.2. ĐỊNH NGHĨA PHÉP CỘNG VÀ PHÉP NHÂN VÉCTƠ VỚI SỐ (tiếp theo)

Các tính chất của phép cộng véc tơ và phép nhân véc tơ với số

Với X, Y, Z là các vectơ n chiều; α, β là các số bất kỳ, ta có:

1. $X + Y = Y + X$
2. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
3. $X + 0n = 0n + X = X$
4. $X + (-X) = 0n$
5. $1.X = X$
6. $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$
7. $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$
8. $(\alpha.\beta)X = \alpha(\beta X)$

2.3. KHÔNG GIAN VÉCTƠ N CHIỀU

- Định nghĩa: Không gian vectơ n chiều là tập hợp tất cả các vectơ n chiều, trong đó trang bị phép toán cộng và nhân vectơ với số thỏa mãn 8 tính chất đặc trưng ở trên.
- Ký hiệu không gian vectơ n chiều: R^n

Phép trừ vectơ

Định nghĩa: Hiệu của hai vectơ n chiều X và Y là một vectơ n chiều, ký hiệu là

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$\rightarrow X - Y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$

VÍ DỤ 4

Cho 3 vectơ:

$X_1 = (1, 3, -1)$

$X_2 = (-2, 0, 2)$

$X_3 = (-2, 3, 2)$

Tìm vectơ X biết: $X = 2X_1 + 3X_2 - 2X_3$

Giải:

Ta có: $X = 2X_1 + 3X_2 + (-2)X_3$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2X_1 & = & 2(1, 3, -1) = (2, 6, -2) \\ 3X_2 & = & 3(-2, 0, 2) = (-6, 0, 6) \\ -2X_3 & = & -2(-2, 3, 2) = (4,-6,-4) \end{array}\right\} +$$

$$X = (0,0,0)$$

VÍ DỤ 5

Cho các vectơ:

$X_1 = (4, -3, 1, 2)$

$X_2 = (-3, 7, 4, 5)$

$X_3 = (2, 7, 9, -4)$

Tìm vectơ X thỏa mãn: $2X - 3X_2 = 4(X - X_1) - 2X_3$

Giải:

Từ hệ thức trên suy ra: $2X = 4X_1 - 3X_2 + 2X_3$

$$\begin{aligned} 4X_1 &= (16,-12,4,8) \\ -3X_2 &= (9,-21,-12,-15) \\ 2X_3 &= (4,14,18,-8) \\ \hline 2X &= (29,-19,10,-15) \\ X &= \left(\frac{29}{2},-\frac{19}{2},5,-\frac{15}{2}\right) \end{aligned}$$

GIẢI QUYẾT TÌNH HUỐNG

- Ký hiệu các véctơ X_1, X_2, X_3, X_4 tương ứng là phần chấm công của bốn nhân viên trên, Y là tổng số của cả bộ phận. Ta có:

  $X_1 = (21,\ 0{,}5,\ 0{,}5,\ 1{,}5)$ $\quad$ $X_2 = (18,\ 1,\ 2,\ 0{,}5)$

  $X_3 = (20,\ 0{,}5,\ 1,\ 0)$ $\quad$ $X_4 = (21,\ 0,\ 1{,}5,\ 0{,}5)$

- Suy ra: $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$

  $= (21, 0{,}5, 0{,}5, 1{,}5) + (18, 1, 2, 0{,}5) + (20, 0{,}5, 1, 0) + (21, 0, 1{,}5, 0{,}5)$

  $= (80, 2{,}5, 2{,}5)$

- Vậy tổng ngày công cả bộ phận lễ tân đó là:
  - Ngày công đi làm thực: 80 ngày công
  - Công làm thêm giờ ngày thường: 2 ngày công
  - Công làm thêm giờ ngày nghỉ: 5 ngày công
  - Công làm thêm giờ ngày lễ: 2,5 ngày công

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 1

Tìm thành phần z trong nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x - y + 3z = 2 \\ 2x - 2y - 5z = 1 \end{cases}$$

A. 3/11

B. −3/11

C. −5/11

D. 5/11

Trả lời:

- Đáp án: A. 3/11
- Vì: Biến đổi trên ma trận mở rộng của hệ phương trình đó được một hệ phương trình tương đương dạng tam giác. Từ phương trình cuối ta tìm được z = 3/11

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 2

Tìm thành phần y trong nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} -x-3y+2z=-2 \\ 2x+3y-4z=1 \\ -3x-y+2z=3 \end{cases}$$

A. 2

B. −2

C. 1

D. −1

Trả lời:

- Đáp án đúng là: C. 1
- Vì: Biến đổi trên ma trận mở rộng của hệ phương trình đó được một hệ phương trình tương đương dạng tam giác. Từ phương trình cuối, tìm được z, thay giá trị của z vừa tìm được vào phương trình bên trên suy ra y = 1.

BÀI TẬP

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x - y \qquad = -1 \\ x - y + 2z = -2 \\ x + 2y \qquad = -2 \end{cases}$$

Giải:

Biến đổi trên ma trận mở rộng của hệ

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1.d_1+d_4]{-1.d_1+d_1\ -1.d_1+d_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-a.d_2+d_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

BÀI TẬP

$$\xrightarrow{3.d_3+2.d_4}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & -3 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -17\end{bmatrix}$$

Suy ra hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} x+2y+3z=5\\ \quad -3y-3z=-6\\ \qquad\quad 2z=-1\\ \qquad\quad 0=-17\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

- Hệ phương trình tuyến tính dạng tam giác luôn có nghiệm duy nhất.
- Hệ phương trình tuyến tính dạng hình thang luôn có vô số nghiệm.
- Hệ phương trình tuyến tính tổng quát có thể ở một trong ba trường hợp nghiệm: vô nghiệm, vô số nghiệm, một nghiệm duy nhất.
- Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất kết thúc ở một trong hai trường hợp: nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường hoặc vô số nghiệm (có nghiệm không tầm thường).
- Véctơ n chiều và phép toán cộng hai véctơ n chiều, nhân véctơ với số là trường hợp mở rộng của véctơ 2 chiều, 3 chiều đã học ở phổ thông, có 8 tính chất tương tự như trong hình học véctơ đã biết.
- Không gian vectơ n chiều R^n là tập hợp tất cả các vectơ n chiều, trong đó đã trang bị phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với số thỏa mãn 8 tính chất đặc trưng.