BÀI 3
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ CÁC PHÉP TOÁN TUYẾN TÍNH ĐỐI VỚI MA TRẬN

ThS. Vũ Quỳnh Anh
Trường Đại học Kinh tế quốc dân

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG: Tổng hợp lương nhân viên

Bảng tổng hợp lương ba tháng đầu năm 2014 của nhân viên bộ phận kỹ thuật trong một công ty được cho như sau:

Tháng 1

Họ tên	Lương	Phụ cấp	Làm thêm		Tổng số
			Ngày thường	Ngày nghỉ	
Trần Quang Ba	4.981.750	300.000	250.000	200.000	5.731.750
Nguyễn Thu Hà	3.662.500	300.000	350.000	350.000	4.662.500
Phạm Quang Trung	3.400.000	100.000	300.000	150.000	3.950.000
Lê Thị Uyên	3.315.000	100.000	450.000	200.000	4.065.000

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG: Tổng hợp lương nhân viên

Bảng tổng hợp lương ba tháng đầu năm 2014 của nhân viên bộ phận kỹ thuật trong một công ty được cho như sau:

Tháng 2

Họ tên	Lương	Phụ cấp	Làm thêm		Tổng số
			Ngày thường	Ngày nghỉ	
Trần Quang Ba	4.525.250	500.000	150.000	200.000	5.375.250
Nguyễn Thu Hà	3.575.500	300.000	350.000	250.000	4.475.500
Phạm Quang Trung	3.315.000	100.000	400.000	250.000	4.065.000
Lê Thị Uyên	3.200.000	100.000	200.000	150.000	3.650.000

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG: Tổng hợp lương nhân viên

Bảng tổng hợp lương ba tháng đầu năm 2014 của nhân viên bộ phận kỹ thuật trong một công ty được cho như sau:

Tháng 3

Họ tên	Lương	Phụ cấp	Làm thêm		Tổng số
			Ngày thường	Ngày nghỉ	
Trần Quang Ba	4.420.500	300.000	350.000	250.000	5.320.500
Nguyễn Thu Hà	3.608.000	300.000	400.000	350.000	4.658.000
Phạm Quang Trung	3.300.000	100.000	350.000	150.000	3.900.000
Lê Thị Uyên	3.115.000	100.000	400.000	150.000	3.765.000

Sử dụng ma trận, hãy tổng hợp lương 3 tháng đầu năm của từng người của bộ phận trên?

MỤC TIÊU

- Sinh viên nắm được các khái niệm về ma trận;
- Biết thực hiện các phép toán tuyến tính đối với các ma trận;
- Nắm được các tính chất của các phép toán tuyến tính đối với ma trận và áp dụng được các tính chất đó vào bài tập;
- Biết xác định một ma trận từ một phương trình ma trận có các phép toán tuyến tính về ma trận.

NỘI DUNG

1. Các khái niệm cơ bản về ma trận
2. Các dạng ma trận
3. Các phép toán tuyến tính đối với ma trận
4. Các phép biến đổi ma trận

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ MA TRẬN

1.1. Khái niệm ma trận

1.2. Đẳng thức ma trận

1.3. Ma trận không và ma trận đối

1.4. Hệ vectơ dòng và hệ vectơ cột của ma trận

1.1. KHÁI NIỆM MA TRẬN

Định nghĩa: Ma trận cấp $m \times n$ là một bảng số gồm $m \times n$ số thực, được xếp thành m dòng và n cột, ký hiệu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$$

Các số a_{ij} được gọi là các phần tử của ma trận.

Ví dụ: Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ là ma trận cấp } 2 \times 3$$

Phần tử $a_{12} = 2$

$a_{23} = 4$

1.2. ĐẲNG THỨC MA TRẬN

- Hai ma trận được coi là bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng cấp và các phần tử ở vị trí tương ứng của chúng đôi một bằng nhau.
- Ma trận A bằng ma trận B ký hiệu là A = B.

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \quad B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n} \quad A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} = b_{ij} \\ i = \overline{1,m}; \\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

1.3. MA TRẬN KHÔNG VÀ MA TRẬN ĐỐI

- Ma trận không cấp $m \times n$: Là ma trận có tất cả các phần tử bằng 0. Kí hiệu là $0_{m \times n}$ hoặc 0.
- Ma trận đối: Cho $A = (a_{ij})_{m \times n}$

  Ký hiệu: $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$

  gọi là ma trận đối của ma trận A.

1.4. HỆ VÉCTƠ DÒNG VÀ HỆ VÉCTƠ CỘT CỦA MA TRẬN

Cho ma trận A = $(a_{ij})_{m\times n}$, nếu coi mỗi dòng của A là một vectơ, ta được hệ vectơ dòng của ma trận, mỗi cột của A là một vectơ, ta được hệ vectơ cột của ma trận.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Hệ vectơ dòng của A là: $\begin{cases} A_1^d = (1, \quad 2, \quad -3) \\ A_2^d = (-3, \quad 0, \quad 4) \end{cases}$

- Hệ vectơ cột của A là: $A_1^c = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad A_2^c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3^c = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.4. HỆ VÉCTƠ DÒNG VÀ HỆ VÉCTƠ CỘT CỦA MA TRẬN

Ma trận chuyển vị: Từ ma trận A, ta đổi cột thành dòng theo thứ tự tương ứng được ma trận gọi là ma trận chuyển vị của A, ký hiệu: A'

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ thì ma trận chuyển vị của A là $A' = (a_{ji})_{n\times m}$

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tính chất: **(A')' = A**

2. CÁC DẠNG MA TRẬN

2.1. Ma trận vuông cấp n

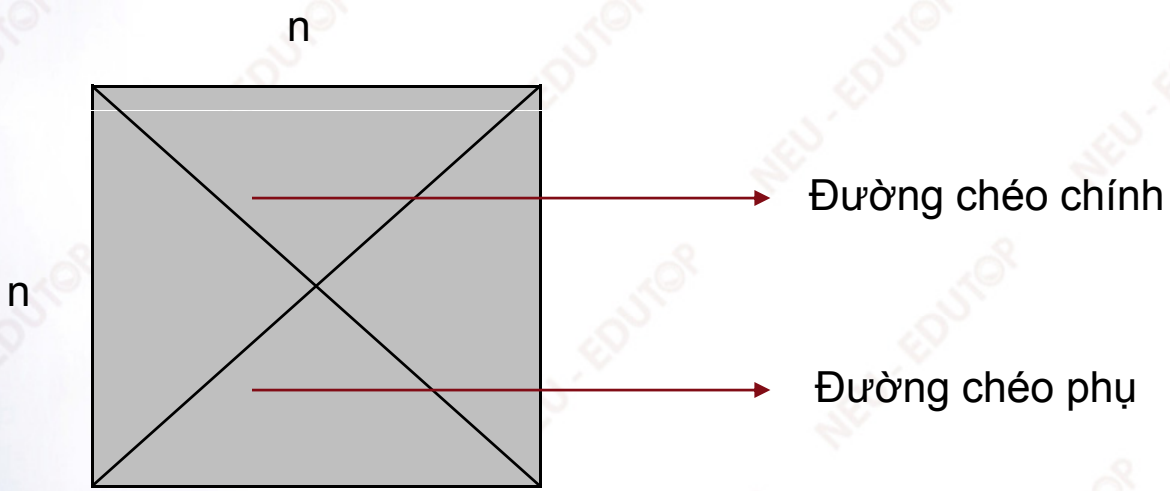
2.2. Ma trận tam giác

2.3. Ma trận đường chéo và ma trận đơn vị

2.4. Ma trận dòng và ma trận cột

2.1. MA TRẬN VUÔNG CẤP N

Là ma trận có số dòng bằng số cột bằng n.



2.2. MA TRẬN TAM GIÁC

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận tam giác trên

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận tam giác dưới

2.3. MA TRẬN ĐƯỜNG CHÉO VÀ MA TRẬN ĐƠN VỊ

- **Ma trận đường chéo** là ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0.
- **Ma trận đơn vị cấp n:** Kí hiệu E_n, hoặc E là ma trận vuông cấp n có dạng

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

2.4. MA TRẬN DÒNG VÀ MA TRẬN CỘT

- Ma trận chỉ có một dòng duy nhất (ma trận cấp $1 \times n$) được gọi là ma trận dòng.
- Tương tự, ma trận chỉ có một cột duy nhất (ma trận cấp $n \times 1$) được gọi là ma trận cột.

3. CÁC PHÉP TOÁN TUYẾN TÍNH ĐỐI VỚI MA TRẬN

3.1. Phép cộng ma trận

3.2. Phép nhân ma trận với số

3.3. Phép trừ ma trận

3.1. PHÉP CỘNG MA TRẬN

Cho A và B là hai ma trận cấp mxn. Tổng của hai ma trận A và ma trận B là một ma trận cấp $m \times n$, ký hiệu là A + B được xác định như sau:

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m \times n}$$

Muốn cộng hai ma trận cùng cấp, ta cộng các phần tử ở vị trí tương ứng với nhau.

3.2. PHÉP NHÂN MA TRẬN VỚI SỐ

Tích của ma trận A với một số α là một ma trận cấp $m \times n$, ký hiệu là αA được xác định như sau:

$$\alpha A = \left(\alpha \cdot a_{ij}\right)_{m \times n}$$

- Muốn nhân một số với một ma trận, ta lấy số đó nhân vào từng phần tử của ma trận.

CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Với A, B, C là các ma trận cùng cấp $m \times n$, O ký hiệu là ma trận không cấp $m \times n$; α, β là các số bất kỳ, ta có:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. $A + O = A$.
4. $A + (-A) = O$
5. $1A = A$.
6. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$.
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
8. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

3.3. PHÉP TRỪ MA TRẬN

Phép trừ hai ma trận: Cho A và B là hai ma trận cùng cấp, hiệu của ma trận A và ma trận B ký hiệu: A – B, xác định như sau:

$$A - B = A + (-B)$$

VÍ DỤ

Thực hiện phép toán:

$$3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & -10 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3-2+5 & 0-4+4 & 3-6+3 \\ 0-8+8 & 3-10+7 & -3-12+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI MA TRẬN

4.1. Các phép biến đổi sơ cấp

4.2. Phép chuyển vị ma trận

4.1. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP

- Đổi chỗ hai dòng (cột) của ma trận.
- Nhân một dòng (cột) với một số khác 0.
- Lấy một số k nhân vào một dòng (cột) rồi cộng vào một dòng (cột) khác.

4.2. PHÉP CHUYỂN VỊ MA TRẬN

- Ma trận chuyển vị: Từ ma trận A, ta đổi cột thành dòng theo thứ tự tương ứng được ma trận gọi là ma trận chuyển vị của A, ký hiệu: A’
- Phép biến đổi ma trận A thành ma trận A’ được gọi là phép chuyển vị ma trận.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

GIẢI QUYẾT TÌNH HUỐNG

Gọi A, B, C theo thứ tự là ma trận lương tháng 1, 2, 3 của bộ phận đó. Ma trận tổng hợp lương D là tổng của ba ma trận trên:

$$A = \begin{pmatrix} 4981750 & 300000 & 250000 & 200000 & 5731750 \\ 3662500 & 300000 & 350000 & 350000 & 4662500 \\ 3400000 & 100000 & 300000 & 150000 & 3950000 \\ 3315000 & 100000 & 450000 & 200000 & 4065000 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4525250 & 500000 & 150000 & 200000 & 5375250 \\ 3575500 & 300000 & 350000 & 250000 & 4475500 \\ 3315000 & 100000 & 400000 & 250000 & 4065000 \\ 3200000 & 100000 & 200000 & 150000 & 3650000 \end{pmatrix}$$

GIẢI QUYẾT TÌNH HUỐNG

Gọi A, B, C theo thứ tự là ma trận lương tháng 1, 2, 3 của bộ phận đó. Ma trận tổng hợp lương D là tổng của ba ma trận trên:

$$C = \begin{pmatrix} 4420500 & 300000 & 350000 & 250000 & 5320500 \\ 3608000 & 300000 & 400000 & 350000 & 4658000 \\ 3300000 & 100000 & 350000 & 150000 & 3900000 \\ 3115000 & 100000 & 400000 & 150000 & 3765000 \end{pmatrix}$$

$$D = A + B + C = \begin{pmatrix} 13927500 & 1100000 & 750000 & 650000 & 16427500 \\ 10846000 & 900000 & 1100000 & 950000 & 13796000 \\ 10015000 & 300000 & 1050000 & 550000 & 11915000 \\ 9630000 & 300000 & 1050000 & 500000 & 11480000 \end{pmatrix}$$

GIẢI QUYẾT TÌNH HUỐNG

Vậy ta có:

TỔNG HỢP LƯƠNG NHÂN VIÊN BỘ PHẬN KỸ THUẬT 3 THÁNG ĐẦU NĂM 2014:

Họ tên	Lương	Phụ cấp	Làm thêm		Tổng số
			Ngày thường	Ngày nghỉ	
Trần Quang Ba	13.927.500	1.100.000	750.000	650.000	16.427.500
Nguyễn Thu Hà	10.846.000	900.000	1.100.000	950.000	13.796.000
Phạm Quốc Trung	10.015.000	300.000	1.050.000	550.000	11.915.000
Lê Thị Uyên	9.630.000	300.000	1.050.000	500.000	11.480.000

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 1

Cho ma trận: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \\ 5 & -5 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

Đặt C = 5A – 4A'. Phần tử C_{23} bằng:

A. 5

B. 6

C. –15

D. –16

Trả lời:

- Đáp án đúng là: A. 5
- Ta có: $c_{23} = 5.a_{23} - 4.a'_{23} = 5.(-3) - 4.(-5) = 5$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 2

Cho hai ma trận: $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Đặt D = –2A + 3B. D^d_2 bằng:

A. (–7, 7, 4)

B. (–7, 6, –4)

C. (7, 6, 4)

D. (7, 6, –4)

Trả lời:

- Đáp án đúng là: B. (–7, 6, –4)
- Giải thích: $D^d_2 = -2A^d_2 + 3B^d_2 = -2\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

BÀI TẬP

Cho các ma trận: $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Tìm ma trận X thỏa mãn: 2X – A = 5B

Giải:

Từ đẳng thức trên suy ra: 2X = A + 5B

$$2X = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -15 & 25 \\ 10 & 15 & -20 \\ -15 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -18 & 27 \\ 12 & 18 & -24 \\ -18 & -6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -18 & 27 \\ 12 & 18 & -24 \\ -18 & -6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 27/2 \\ 6 & 9 & -12 \\ -9 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

- Ma trận cấp $m \times n$ là một bảng số gồm $m \times n$ số thực, được xếp thành m dòng và n cột.
- Hai ma trận được coi là bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng cấp và các phần tử ở vị trí tương ứng của chúng đôi một bằng nhau.
- Ma trận đối của ma trận A được ký hiệu là –A
- Ký hiệu A^d_i để chỉ véctơ dòng thứ i của ma trận A và ký hiệu A^c_j để chỉ véctơ cột thứ j của ma trận A.
- Ma trận vuông là ma trận có số dòng và số cột bằng nhau.
- Ma trận tam giác là ma trận vuông có các phần tử nằm về một phía của đường chéo chính bằng 0.
- Ma trận đơn vị là ma trận đường chéo có tất cả các phần tử thuộc đường chéo chính bằng 1, ký hiệu là E hoặc E_n.
- Ma trận chỉ có một dòng (cột) duy nhất (ma trận cấp $1 \times n$) được gọi là ma trận dòng (cột).

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

- Muốn cộng hai ma trận, ta lấy các phần tử ở vị trí tương ứng cộng với nhau.
- Muốn nhân một ma trận với một số, ta lấy số đó nhân vào tất cả các phần tử của ma trận.
- Muốn trừ hai ma trận, ta lấy các phần tử ở ma trận trước trừ các phần tử ở vị trí tương ứng của ma trận sau.
- Có 4 phép biến đổi ma trận là:
  - Đổi chỗ hai dòng (cột).
  - Nhân một dòng (cột) với một số khác 0.
  - Cộng vào một dòng (cột) tích của một dòng (cột) khác với một số k tùy chọn.
  - Phép chuyển vị ma trận.