BÀI 6
HỆ PHƯƠNG TRÌNH CRAMER – VÀ CÁC ỨNG DỤNG TRONG PHÂN TÍCH KINH TẾ

ThS. Vũ Quỳnh Anh
Trường Đại học Kinh tế quốc dân

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG: Tìm giá cân bằng trên thị trường có hai loại hàng hóa

Xét thị trường hải sản gồm 2 mặt hàng cua và tôm. Ký hiệu p_1 là giá 1kg cua, p_2 là giá 1kg tôm (đơn vị nghìn đồng).

Ký hiệu Q_{s1}, Q_{s2} là lượng cua và lượng tôm mà người bán bằng lòng bán tại mỗi mức giá p_1, p_2.

Ký hiệu Q_{D1}, Q_{D2}, là lượng cua, lượng tôm mà người mua bằng lòng mua tại mỗi mức giá p_1, p_2, Cụ thể Q_{s1}, Q_{s2}, Q_{D1}, Q_{D2} được cho theo quy tắc như sau:

$$Q_{S1} = -80 + p_1,\ Q_{D1} = 280 - 3p_1 + 4p_2$$

$$Q_{S2} = -70 + 3p_2,\ Q_{D2} = 130 + 2p_1 - p_2$$

Tìm mức giá cua, giá tôm mà người bán vừa bán hết hàng và người mua vừa mua hết hàng trên thị trường.

MỤC TIÊU

- Sinh viên nắm được khái niệm và các tính chất của hệ phương trình Cramer.
- Hiểu và áp dụng thành thạo việc giải hệ phương trình Cramer theo hai phương pháp: Phương pháp ma trận nghịch đảo và phương pháp Cramer.
- Nắm được mô hình cân bằng thị trường. Áp dụng được vào bài tập.
- Nắm được mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô và áp dụng được vào các bài tập liên quan.

NỘI DUNG

1. Hệ phương trình Cramer
2. Phương pháp ma trận
3. Quy tắc Cramer
4. Ứng dụng trong phân tích kinh tế

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CRAMER

Định nghĩa: Một hệ phương trình tuyến tính có định thức của ma trận hệ số khác 0 gọi là hệ Cramer.

Ví dụ:

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x \quad\quad + z = 2 \\ 3x + 2y \quad\quad = -1 \end{cases}$

Hệ phương trình trên có phải là hệ Cramer không?

Giải:

Ta có: $d = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 6 - 12) - (0 + 2 + 0) = -6 - 2 = -8 \neq 0$

Suy ra hệ phương trình trên là hệ Cramer.

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CRAMER

Tính chất:

- Hệ Cramer luôn có nghiệm duy nhất.
- Một hệ phương trình với số phương trình bằng số ẩn có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đó là hệ Cramer hay khi và chỉ khi định thức của ma trận hệ số khác 0.

2. PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN (Phương pháp ma trận nghịch đảo)

- Hệ phương trình Cramer có thể viết dưới dạng ma trận AX = B với ma trận hệ số A là một ma trận khả nghịch.
- Nghiệm duy nhất được xác định theo công thức: $X = A^{-1}B$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

VÍ DỤ

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận nghịch đảo:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x \quad\quad + z = 2 \\ 3x + 2y \quad\quad = -1 \end{cases}$$

Giải:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tính A^{-1}

$$d = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 6 - 12) - (0 + 2 + 0) = -6 - 2 = -8 \neq 0$$

VÍ DỤ

Cột 1

$$\begin{cases} A_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \\ A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \end{cases}$$

Cột 2

$$\begin{cases} A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \\ A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 \\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \end{cases}$$

Cột 3

$$\begin{cases} A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \\ A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \end{cases}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 3 & 9 & -7 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{d}A^* = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 3 & 9 & -7 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

VÍ DỤ

Vậy, nghiệm của hệ là:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 3 & 9 & -7 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -2-12-2 \\ 3+18+7 \\ 4+8+4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -16 \\ 28 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7/2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. PHƯƠNG PHÁP CRAMER (Phương pháp định thức)

Cho hệ phương trình Cramer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Định lý Cramer: Nghiệm duy nhất của hệ Cramer (1) được tính theo công thức sau

$$\begin{cases} x_j = \dfrac{d_j}{d} \\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Trong đó: d = |A|, d_j là định thức mà từ d ta thay cột thứ j bằng cột số hạng tự do (vế phải).

VÍ DỤ

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x \quad\quad + z = 2 \\ 3x + 2y \quad\quad = -1 \end{cases}$

Giải:

$$d = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \qquad d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2-12) - 2 = -14 - 2 = -16$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (3+6) - (-18-1) = 9 + 19 = 28$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (12+4) - (4-4) = 16$$

VÍ DỤ

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x \quad\quad + z = 2 \\ 3x + 2y \quad\quad = -1 \end{cases}$

Giải:

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x = \dfrac{d_1}{d} \\ y = \dfrac{d_2}{d} \\ z = \dfrac{d_3}{d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-16}{-8} = 2 \\ y = \dfrac{28}{-8} = -\dfrac{7}{2} \\ z = \dfrac{16}{-8} = -2 \end{cases}$$

4. ỨNG DỤNG TRONG PHÂN TÍCH KINH TẾ

4.1. Mô hình cân bằng thị trường

4.2. Mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô

4.1. MÔ HÌNH CÂN BẰNG THỊ TRƯỜNG

4.1.1. Thị trường một loại hàng hóa

4.1.2. Thị trường nhiều loại hàng hóa

4.1.1. THỊ TRƯỜNG MỘT LOẠI HÀNG HÓA

- Ký hiệu:
  - Q_S là lượng cung hàng hoá, tức là lượng hàng hóa mà người bán bằng lòng bán ở mỗi mức giá.
  - Q_D là lượng cầu hàng hoá, tức là lượng hàng hóa mà người mua bằng lòng mua ở mỗi mức giá.
  - p là giá của hàng hoá.
- Hàm cung tuyến tính: $Q_S = -a + bp$ $(a,b > 0)$.
- Hàm cầu tuyến tính: $Q_D = c - dp$ $(c,d > 0)$.

4.1.1. THỊ TRƯỜNG MỘT LOẠI HÀNG HÓA

- Mô hình cân bằng thị trường có dạng:

$$\begin{cases} Q_s = -a_0 + p \\ Q_d = c - dp \\ Q_s = Q_d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_s = -a_0 + bp \\ Q_d = c - dp \\ -a + bp = c - dp \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình này ta tìm được:

Giá cân bằng: $p_0 = \dfrac{a + c}{b + d}$

Lượng cân bằng: $Q_0 = \dfrac{bc - ad}{b + d}$

VÍ DỤ 1

Cho biết hàm cung và hàm cầu thị trường của một loại hàng hoá:

$Q_S = -20 + 1,5p$

$Q_D = 100 - 0,5p$

Xác định giá và lượng cân bằng của hàng hoá đó.

Giải:

Mô hình cân bằng:

$$\begin{cases} Q_S = -20 + 1,5p \\ Q_D = 100 - 0,5p \\ Q_S = Q_D \end{cases} \Rightarrow -20 + 1,5p = 100 - 0,5p \Leftrightarrow 2p = 120$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 60 \\ Q = 70 \end{cases}$$

Vậy mức giá cân bằng là: 60 và lượng cân bằng là 70.

4.1.2. THỊ TRƯỜNG NHIỀU LOẠI HÀNG HÓA

Xét thị trường có n loại hàng hóa liên quan:

Ký hiệu: Q_{si} là lượng cung của mặt hàng thứ i

Q_{di} là lượng cầu của mặt hàng thứ i

p_i là giá của mặt hàng thứ i

Hàm cung tuyến tính đối với hàng hóa thứ i có dạng:

$$Q_{si} = a_{i0} + a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n$$

Hàm cầu tuyến tính đối với hàng hóa thứ I có dạng:

$$Q_{di} = b_{i0} + b_{i1}p_1 + b_{i2}p_2 + \ldots + b_{in}p_n$$

4.1.2. THỊ TRƯỜNG NHIỀU LOẠI HÀNG HÓA

Mô hình cân bằng thị trường n loại hàng hoá liên quan:

$$\begin{cases} Q_{si} = a_{i0} + a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n \\ Q_{di} = b_{i0} + b_{i1}p_1 + b_{i2}p_2 + \ldots + b_{in}p_n \\ Q_{si} = Q_{di} \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta tìm được mức giá cân bằng và lượng cân bằng của từng mặt hàng:

$$\left(\overline{p_i}, \overline{Q_i}\right), i = \overline{1,n}$$

VÍ DỤ 2

Giả sử thị trường gồm 2 hàng hoá liên quan. Cho biết hàm cung và hàm cầu đối với mỗi loại hàng hoá như sau:

$$Q_{S1} = -8 + p_1,\ Q_{D1} = 28 - 3p_1 + 4p_2;$$

$$Q_{S2} = -7 + 3p_2,\ Q_{D2} = 13 + 2p_1 - p_2;$$

Hãy xác định mức giá cân bằng và lượng cân bằng thị trường của mỗi loại hàng.

Giải:

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -8 + p_1 = 28 - 3p_1 + 4p_2 \\ -7 + 3p_2 = 13 + 2p_1 - p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 - p_2 = 9 \\ -p_1 + 2p_2 = 10 \end{cases}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad d_1 = \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 28, \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 19$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{p_1} = 28 \\ \overline{p_2} = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{Q_1} = 20 \\ \overline{Q_2} = 50 \end{cases}$$

4.2. MÔ HÌNH CÂN BẰNG KINH TẾ VĨ MÔ

Các ký hiệu:

- Tổng cung: Y là tổng thu nhập của nền kinh tế;
- Tổng cầu: E là tổng chi tiêu theo kế hoạch của nền kinh tế.

E →
- Chi tiêu của chính phủ: G_0
- Đầu tư cho sản xuất theo kế hoạch: I_0
- Tiêu dùng của các hộ gia đình: C

$E = I_0 + G_0 + C$

$C = C(Y) = a + bY$ $\quad (a > 0; 0 < b < 1)$

a: Tiêu dùng thiết yếu hay tiêu dùng tự định

b: xu hướng tiêu dùng cận biên

- Mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô:

$$\begin{cases} Y = E \\ E = C + I_0 + G_0 \\ C = a + bY \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{Y} = \dfrac{a + I_0 + G_0}{1 - b} \\ \bar{C} = \dfrac{a + b(I_0 + G_0)}{1 - b} \end{cases}$$

4.2. MÔ HÌNH CÂN BẰNG KINH TẾ VĨ MÔ (tiếp theo)

Trường hợp mở rộng: Có thuế thu nhập

- Ký hiệu:
  - Thuế suất thu nhập: t
  - Thu nhập sau thuế (thu nhập khả dụng): Y_d (Y_T)
- Hàm tiêu dùng: $C = a + bY_d = a + b(1 - t)Y$
- Lập mô hình:

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = a + b(1-t)Y \end{cases}$$

- Suy ra mức thu nhập cân bằng và mức tiêu dùng cân bằng:

$$\bar{Y} = \frac{a + I_0 + G_0}{1 - b(1-t)}; \qquad \bar{C} = \frac{a + b(1-t)(I_0 + G_0)}{1 - b(1-t)}$$

GIẢI QUYẾT TÌNH HUỐNG

Yêu cầu của tình huống chính là bài toán tìm giá cân bằng của thị trường có hai loại hàng hóa. Ta xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} Q_{S1} = Q_{D1} \\ Q_{S2} = Q_{D2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -80 + p_1 = 280 - 3p_1 + 4p_2 \\ -70 + 3p_2 = 130 + 2p_1 - p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 - p_2 = 90 \\ -p_1 + 2p_2 = 100 \end{cases}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ d_1 = \begin{vmatrix} 90 & -1 \\ 100 & 2 \end{vmatrix} = 280,\ d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 90 \\ -1 & 100 \end{vmatrix} = 190$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{p_1} = \dfrac{d_1}{d} = 280 \\ \overline{p_2} = \dfrac{d_2}{d} = 190 \end{cases}$$

Vậy: Giá cua cần tìm p_1 = 280 nghìn đồng/1kg

Giá tôm cần tìm: p_2 = 190 nghìn đồng/1kg

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 1

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} -x-3y+kz=-3 \\ 2x+3y-4z=2 \\ -3x-y+2z=1 \end{cases}$

Để hệ trên có nghiệm duy nhất thì giá trị của k phải khác số:

A. 26/7

B. −26/7

C. −36/7

D. 36/7

Trả lời:

- Đáp án đúng là: A. 26/7
- Giải thích: d = −26 + 7k. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi d ≠ 0 suy ra k ≠ 26/7

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 2

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y + 3z = k \\ 2x + 3y + 2z = 4 \\ -3x - y + z = -2 \end{cases}$

Giải hệ bằng phương pháp Cramer, ta tính được d_2 bằng:

A. −32 − 8k

B. 32 − 8k

C. −32 + 8k

D. 32 + 8k

Trả lời:

- Đáp án đúng là: B. 32 − 8k
- Giải thích: Tính d_2 bằng cách bỏ cột thứ 2 của d, thay vào đó là vế phải của hệ phương trình.

BÀI TẬP

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp định thức: $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x-y \qquad\quad =-1 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$

Giải:

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(-2-3)-(-3+4)$$

$$=-5-1=-6$$

$$d_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(-10+3)-(6-4)$$

$$=-7-2=-9$$

$$d_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=(-2-6)-(-3+10)$$

$$=-8-7=-15$$

$$d_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=(2-2-5)-(-5-4+1)$$

$$=-5+8=3$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=\dfrac{d_1}{d}=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{d_2}{d}=\dfrac{5}{2} \\ z=\dfrac{d_3}{d}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

- Một hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn và định thức của ma trận hệ số khác 0 gọi là hệ phương trình Cramer.
- Tính chất: Hệ Cramer luôn có nghiệm duy nhất.
- Phương pháp ma trận để giải hệ Cramer: Nghiệm được tìm theo công thức $X = A^{-1}B$.
- Phương pháp định thức: Tìm nghiệm duy nhất của hệ phương trình Cramer n ẩn số x_1, x_2, … , x_n theo công thức

$$\begin{cases} x_j = \dfrac{d_j}{d} \\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

- Mô hình cân bằng thị trường một loại hàng hóa $\begin{cases} Q_s = -a + bp \\ Q_d = c - dp \\ -a + bp = c - dp \end{cases}$

Giá cân bằng: $p_0 = \dfrac{a+c}{b+d}$. Lượng cân bằng: $Q_0 = \dfrac{bc - ad}{b+d}$

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Mô hình cân bằng thị trường n loại hàng hóa:

$$\begin{cases} Q_{si} = a_{i0} + a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n \\ Q_{di} = b_{i0} + b_{i1}p_1 + b_{i2}p_2 + \ldots + b_{in}p_n \\ Q_{si} = Q_{di} \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Chuyển hệ phương trình đó thành hệ phương trình tuyến tính n phương trình, n ẩn p_1, p_2, p_n suy ra giá cân bằng. Thay giá cân bằng vào hàm cung hoặc hàm cầu của từng mặt hàng, tính được lượng cân bằng.