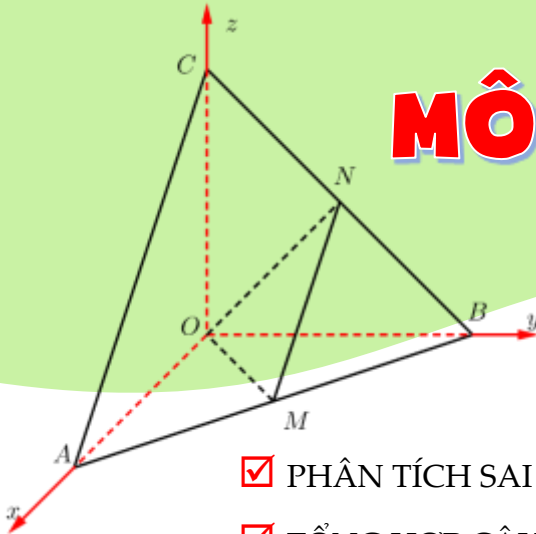


# NHỮNG CÂU HỎI NÂNG CAO

RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

## MÔN TOÁN



PHÂN TÍCH SAI LẦM

TỔNG HỢP CÂU HỎI NÂNG CAO  
Hướng dẫn giải chi tiết

TÀI LIỆU ÔN THI THPT QUỐC GIA

ĐOÀN VĂN BỘ (CHỦ BIÊN) – HUỖNH ANH KIỆT

**NHỮNG CÂU HỎI**

**NÂNG CAO**

**RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN**

**MÔN TOÁN**

- PHÂN TÍCH SAI LẦM
- TỔNG HỢP CÂU HỎI NÂNG CAO  
Hướng dẫn giải chi tiế

HCM, 5-2017, LƯU HÀNH NỘI BỘ





## LỜI NÓI ĐẦU

Ở bất kì hình thức thi nào trong một cuộc thi nào thì cũng có những sai lầm mà học sinh vấp phải và cũng có những bài toán khó ở trong đề thi. Năm 2016 trở về trước, với hình thức thi tự luận thì các câu hỏi khó thường rơi vào hình học giải tích trong mặt phẳng, phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và các bài toán liên quan đến bất đẳng thức, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức. Và bắt đầu năm 2017, Bộ Giáo dục và Đào tạo đổi từ hình thức thi tự luận sang hình thức thi trắc nghiệm khách quan thì cũng không tránh khỏi là không ra những câu hỏi khó. Đặc biệt là những lỗi sai cơ bản của học sinh, nhằm đánh giá đúng năng lực của học sinh. Dựa trên vấn đề đó, chúng tôi biên soạn ra cuốn sách *“Những câu hỏi nâng cao rèn luyện kỹ năng giải toán môn toán”* với mong muốn giúp cho các bạn học sinh có thêm nguồn tư liệu tham khảo, trau dồi kiến thức để có thể thi tốt kì thi Trung học Phổ thông Quốc gia và đạt được ước mơ vào ngôi trường Đại học mà mình mong muốn.

Cuốn sách này gồm có các phần sau:

PHẦN I: PHÂN TÍCH SAI LẦM QUA NHỮNG BÀI TOÁN CỤ THỂ

PHẦN II: TỔNG HỢP CÂU HỎI NÂNG CAO

Chuyên đề 1: Khảo sát hàm số và các bài toán liên quan

Chuyên đề 2: Mũ – logarit



Chuyên đề 3: Tích phân

Chuyên đề 4: Số phức

Chuyên đề 5: Hình học không gian

Chuyên đề 6: Phương pháp tọa độ trong không gian

### PHẦN III: MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Cuốn sách này được chúng tôi biên soạn dựa trên các bài toán trong các đề thi thử trên cả nước, từ các nhóm học tập trên facebook. Trong mỗi bài toán, chúng tôi luôn đưa ra những hướng dẫn giải chi tiết. Thêm vào đó, những bài tập nào có kiến thức mới thì chúng tôi cũng có đưa vào, tuy nhiên do thời gian hạn hẹp nên chúng tôi cũng không có viết thêm lý thuyết được nhiều. Chúng tôi đưa những kiến thức mới, nằm ngoài sách giáo khoa nhằm giúp các bạn học sinh có những kiến thức mới, vận dụng nhanh chóng vào các câu hỏi nâng cao. Qua đó cũng giúp các bạn học sinh có cái nhìn mới về Toán học. Các kiến thức mới này nằm ngoài chương trình học của các bạn học sinh nên có thể rất ngỡ ngàng. Các bạn học sinh có thể đọc và tự chứng minh để kiểm chứng những kiến thức mới đó. Ngoài ra, chúng tôi còn thêm những bài tập tương tự sau những bài tập hướng dẫn giải. Tuy nhiên, cũng chỉ là một chút ít trong số những bài tập mà chúng tôi có phân tích và hướng dẫn.

Vì chúng tôi còn là sinh viên nên còn phải học trên ghế nhà trường. Do đó thời gian biên soạn của chúng tôi có hạn. Vì vậy, nội dung của cuốn sách này có thể còn có những khuyết điểm và chưa được phong phú cho lắm. Với tinh thần ham học hỏi, chúng tôi luôn mong nhận được sự đóng góp

từ quý bạn đọc để một ngày nào đó cuốn sách này có thể hoàn thiện hơn.

Cuối cùng, chúc các bạn học sinh có thể thi tốt kì thi Trung học Phổ thông Quốc gia.

Các tác giả

Đoàn Văn Bộ - Huỳnh Anh Kiệt  
(*Sinh viên Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*)

-----  
Mọi sự đóng góp vui lòng gửi về<sup>1</sup>:

Facebook: <https://www.facebook.com/dvboo>

Gmail: [K40.101.183@hcmup.edu.vn](mailto:K40.101.183@hcmup.edu.vn)

---

<sup>1</sup> Học sinh muốn tệp pdf đầy đủ vui lòng nhắn tin qua facebook hoặc gmail. Vì một số lí do nên không đăng bản đầy đủ.



## MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU .....	4
PHẦN I: PHÂN TÍCH SAI LẦM QUA NHỮNG BÀI TOÁN CỤ THỂ .....	8
PHẦN 2: TỔNG HỢP CÂU HỎI NÂNG CAO.....	39
Chuyên đề 1: KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN .....	39
Chuyên đề 2: MŨ – LOGARIT .....	54
Chuyên đề 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN .....	64
Chuyên đề 4: SỐ PHỨC .....	87
Chuyên đề 5: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN .....	107
Chuyên đề 6: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN .....	130
PHẦN III: MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN .....	167
TÀI LIỆU THAM KHẢO .....	175

## PHẦN I: PHÂN TÍCH SAI LẦM QUA NHỮNG BÀI TOÁN CỤ THỂ

### Câu 1.

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x)$  đồng biến trên  $(a; b)$ .
- B.  $f'(x) > 0, \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow f(x)$  đồng biến trên đoạn  $[a; b]$
- C.  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(a; b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$ .
- D.  $f(x)$  nghịch biến trên  $(a; b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$ .

### Giải:

Với câu này, chắc hẳn nhiều học sinh hoang mang, không biết chọn đáp án A hay C. Với câu hỏi như thế này, nếu không nắm vững lý thuyết thì sẽ không trả lời đúng câu này.

Học sinh quen làm với hàm bậc ba, trùng phương hay bậc hai trên bậc nhất thì học sinh sẽ chọn ngay đáp án C. Bởi vì với lý luận mà học sinh hay làm bài tập là: “Hàm số đồng biến trên  $(a; b)$  khi và chỉ khi  $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$ ”.

Sai lầm của học sinh khi chọn đáp án C là ngộ nhận những kiến thức của bài tập mà học sinh hay làm.

Đáp án D sai vì nếu  $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$  thì  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(a; b)$ .

Đáp án B sai vì nếu hàm số  $f'(x)$  có thể không xác định tại  $a, b$  nhưng vẫn đồng biến trên  $[a; b]$ . Ví dụ xét hàm



$$f(x) = \sqrt{x}, x \in [0;1] \text{ có } f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Rõ ràng  $f'(x)$  không xác định tại  $x=0$  nhưng hàm số vẫn đồng biến trên  $[0;1]$ .

Đáp án C sai vì thiếu  $f'(x) = 0$  tồn tại hữu hạn điểm. Mặt khác nếu xét  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có  $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = 0 \Leftrightarrow ad-bc = 0$  và suy ra hàm phân thức đó là hàm hằng. Dẫn đến không thỏa mãn với yêu cầu.

Đáp án A đúng vì theo định lý SGK cơ bản 12 trang 6.

### Câu 2.

Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{x-3}$ . Xét các mệnh đề sau:

- (1) Hàm số luôn nghịch biến trên  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .
- (2) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là  $x = 1$ ; một tiệm cận ngang là  $y = 3$ .
- (3) Hàm số đã cho không có cực trị.
- (4) Đồ thị hàm số nhận giao điểm  $I(3;1)$  của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng.

Chọn các mệnh đề đúng.

- A. (1),(3), (4)    B. (3), (4)    C. (2), (3),(4)    D. (1), (4)

Giải:

**Sai lầm thường gặp:**

Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

$$\text{Ta có } y' = \frac{-2}{(x-3)^2} > 0, \forall x \in D.$$

$\Rightarrow$  Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$  hoặc  $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

Suy ra (1) đúng.

Tiệm cận đứng  $x = 3$ , tiệm cận ngang  $y = 1$ . Suy ra (2) sai.

Mệnh đề (3) đúng.

Đến đây học sinh chọn ngay đáp án A. Mà đáp án A sai.

**Phân tích sai lầm:** Học sinh nhớ định nghĩa đồng biến (nghịch biến) trên khoảng nhưng lại không biết đến rằng mình không có học định nghĩa trên hai khoảng hợp nhau. Học sinh ngộ nhận rằng nghịch biến trên  $(-\infty; 3)$  và  $(3; +\infty)$  thì gộp thành  $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$  hoặc  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$  và dẫn đến nói câu này đúng. Như vậy, học sinh cần phải nhớ rõ rằng, chỉ học định nghĩa đồng biến (nghịch biến) trên khoảng, đoạn, nửa đoạn; không có trên những khoảng hợp nhau.

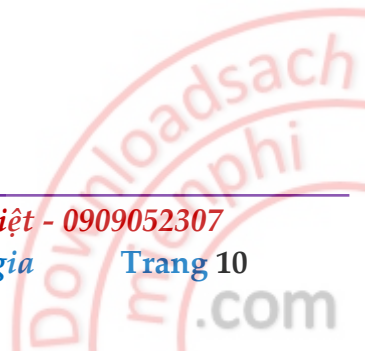
Mệnh đề (1) sai (giải thích ở trên). Sửa lại: Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 3)$  và  $(3; +\infty)$ .

Mệnh đề (2) sai.

Mệnh đề (3) đúng. Hàm bậc nhất trên bậc nhất không có điểm cực trị.

Mệnh đề (4) đúng vì giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số bậc nhất trên bậc nhất chính là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

Vậy đáp án B.



**Câu 3.**

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x + y + z - 6 = 0$  và mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 12$ . Có bao nhiêu mặt phẳng  $(Q)$  song song với  $(P)$  và tiếp xúc với  $(S)$ .

A. 0

B. 1

C. 2

D. vô số

**Giải:**

Gọi  $O(0;0;0)$  và  $R = 2\sqrt{3}$  lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu  $(S)$ .

Vì  $(Q) // (P)$  nên  $(Q): x + y + z + D = 0$  (\*).

Vì  $(Q)$  tiếp xúc với  $(S)$  nên  $d(O; (Q)) = R$ .

$$\Leftrightarrow \frac{|D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{3} \quad (1)$$

Đến đây học sinh kết luận ngay là có 2 mặt phẳng.

Ngoài ra nếu làm tiếp thì  $|D| = 6 \Leftrightarrow D = \pm 6$  (2).

Học sinh cũng kết luận có hai mặt phẳng cần tìm.

Như vậy, nếu học sinh nào chọn C thì sai.

**Phân tích sai lầm:** Học sinh thấy  $|A| = B$  với  $B > 0$  thì sẽ tồn tại hai giá trị của  $A$  thỏa mãn điều đó nên kết luận liền. Tuy nhiên với (2), học sinh cũng sai. Lỗi sai ở (1) và (2) là học sinh quên đặt điều kiện của  $D$  ở (\*) nên dẫn đến không loại đáp án. Ở (1) học sinh ngộ ngay sẽ có hai giá trị  $D$  thỏa mãn.

Do  $(Q) // (P)$  nên  $D \neq -6$ . Vậy đáp án B.

**Câu 4.**

Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ . Cực đại của hàm số bằng

A. 0

B. 1

C. 2

D. -1

Giải:

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

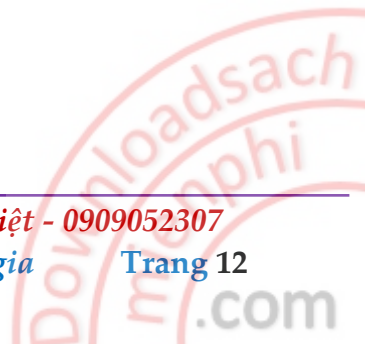
Bảng biến thiên

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$y'$		-	+	-	+
$y$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		1	2	1	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên, thấy ngay được cực đại của hàm số. Tuy nhiên nếu không hiểu rõ các khái niệm về vấn đề này thì sẽ mắc sai lầm câu này và phân vân giữa đáp án A, C.

Ở đáp án A, đó là điểm cực đại chứ không phải cực đại của hàm số.

Nhắc lại khái niệm: “Nếu hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm  $x_0$  thì  $x_0$  được gọi là **điểm cực đại (cực tiểu)** của hàm số,  $f(x_0)$  được gọi là **giá trị cực đại (cực tiểu)** của hàm số còn gọi tắt là **cực đại (cực tiểu)**”. Nắm vững khái niệm này thì có thể chọn đáp án câu này đúng.



**Câu 5.**

Tim tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{2 \cos x + 3}{2 \cos x - m}$  nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ ?

A.  $\begin{cases} -3 < m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 2 \end{cases}$

C.  $m < -3$

D.  $m > -3$

**Giải:**

Nhận thấy, cả tử và mẫu đều có  $\cos x$  nên dùng phương pháp đổi biến để làm bài toán dễ dàng hơn.

Đặt  $t = \cos x$ , với  $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$  thì  $t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .

Khi đó bài toán trở thành tìm  $m$  để hàm số  $y = \frac{2t + 3}{2t - m}$  nghịch biến trên  $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .

Điều kiện xác định  $t \neq \frac{m}{2}$ .

Ta có  $y' = \frac{-2(m+3)}{(2t-m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên  $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$  khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ \frac{m}{2} \notin \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$$

Với cách giải trên thì chọn đáp án A. Đáp án A là đáp án sai. Nguyên nhân sai lầm là do đâu?

**Phân tích sai lầm:** Nếu đặt  $t = \cos x$  thì hàm số ban đầu là hàm hợp của các hàm  $y = f(t) = \frac{2t+3}{2t-m}$  và  $t = \cos x$ . Khi

đó  $y' = f'_t \cdot t'_x$ . Yêu cầu bài toán tìm  $m$  để hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên  $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$  nên  $y' < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow f'_t \cdot t'_x < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ . Mà sau khi đổi biến như vậy thì ta có

$t'_x < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ . Như vậy thì ta phải có  $f'_t > 0, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .

Chứ không phải như  $y' < 0$  như cách giải ở trên. Sai lầm dẫn đến sai là không để ý đến biến mới nó biến thiên như thế nào để ta có bài toán mới. Ngoài ra, nhiều học sinh là quen nhiều dạng toán mà yêu cầu bài toán vẫn giữ nguyên nên dẫn đến ngộ nhận bài toán này như vậy. Đáp án chính xác được nêu ở phần hai.

### **Câu 6.**

Cho hàm số  $y = |x|$ . Chọn mệnh đề đúng.

- A. Hàm số không có đạo hàm tại  $x = 0$  và cũng không đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .
- B. Hàm số không có đạo hàm tại  $x = 0$  nhưng đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .
- C. Hàm số có đạo hàm tại  $x = 0$  nên đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .
- D. Hàm số có đạo hàm tại  $x = 0$  nhưng không đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .

**Giải:**

Chắc hẳn có nhiều học sinh chọn đáp án B vì

$$y = |x| = \sqrt{x^2}, \quad y' = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \begin{cases} 1, & \text{neu } x > 0 \\ -1, & \text{neu } x < 0 \end{cases}$$

Học sinh kết luận ngay hàm số không có đạo hàm tại  $x = 0$  và cũng kết luận ngay không đạt cực tiểu tại  $x = 0$ . Tại sao lại như vậy?

**Phân tích sai lầm:** Học sinh đã ngộ nhận ngay định lý “Nếu hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị tại  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$ ” là điều kiện cần và đủ để hàm số có cực trị. Nghĩa là đạo hàm tại điểm đó mà không bằng 0 thì không có cực trị. Nguyên nhân là không nắm vững lý thuyết về cực trị. Đặc biệt là định lý trên chỉ có một chiều, không phải hai chiều. Tức là chiều ngược lại có thể không đúng.

Nhắc lại một chút về điều kiện đủ để điểm  $x_0$  là điểm cực trị của hàm số: “ $f'(x)$  đổi dấu qua  $x_0$  thì  $x_0$  gọi là điểm cực trị của hàm số” hoặc nếu nhìn vào đồ thị hàm số thì “đồ thị hàm số đổi chiều qua điểm  $x_0$  thì  $x_0$  gọi là điểm cực trị”. Do đó, hàm số  $y = f(x)$  có thể không có đạo hàm tại  $x_0$  nhưng vẫn có thể đạt cực trị tại điểm  $x_0$ . Trong quá trình học lý thuyết, chúng ta nên học thật kỹ, hiểu tường tận bản chất của định nghĩa khái niệm đó để tránh khỏi mắc phải những sai lầm không đáng kể.

Như vậy đối với hàm số trên thì rõ ràng  $y'$  đổi dấu qua  $x = 0$  nên  $x = 0$  là điểm cực trị. Ở câu hỏi này thì  $x = 0$  chính là điểm cực tiểu của hàm số.

**Câu 7.**

Cho số phức  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Đối với số phức  $z$ ,  $a$  là phần thực.
- B. Điểm  $M(a; b)$  trong hệ trục tọa độ  $Oxy$  được gọi là điểm biểu diễn số phức  $z$ .
- C. Đối với số phức  $z$ ,  $bi$  là phần ảo.
- D. Đối với số phức  $z$ ,  $b$  là phần ảo.

**Giải:**

Đối với câu này thì rất nhiều học sinh bối rối trong việc chọn đáp án giữa C, D. Có nhiều học sinh sẽ chọn đáp án D.

**Phân tích sai lầm:** Bởi vì học sinh không nhớ hoặc nhớ nhầm giữa các phần thực, phần ảo của số phức  $z$ . Học sinh hay cho rằng phần ảo chính là  $bi$ . Nhắc lại một chút lý thuyết: “Cho số phức  $z = a + bi$  với  $a, b \in \mathbb{R}$  thì  $a$  được gọi là phần thực,  $b$  được gọi là phần ảo còn  $i$  được gọi là đơn vị ảo”.

Như vậy thì phần ảo của số phức  $z$  không có chứa  $i$ . Vậy mệnh đề C sai.

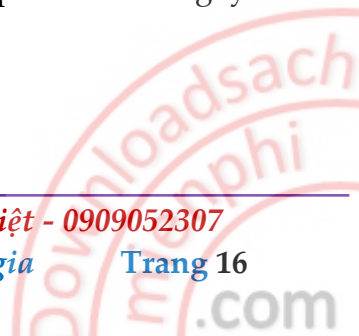
Phân tích từng mệnh đề:

Mệnh đề A, D đúng (theo phân tích lý thuyết ở trên).

Mệnh đề B đúng. Với mỗi số phức có dạng  $z = a + bi$  thì  $M(z) = (a; b)$  được gọi là điểm biểu diễn số phức  $z$ .

Mệnh đề C sai (theo phân tích lý thuyết trên).

**Lưu ý:** Với những câu lý thuyết thì cần phải nắm vững lý thuyết.







Như vậy học sinh chọn ngay đáp án A.

**Phân tích sai lầm:** Học sinh đã xét thiếu trường hợp. Nếu mẫu có hai nghiệm phân biệt và có một nghiệm là của tử thì đồ thị hàm số vẫn có đúng một tiệm cận đứng.

Xét thêm trường hợp  $x^2 + 2mx + 3m + 4 = 0$  có nghiệm  $x = -1$  thì ta có  $m = -5$ .

Thử lại thì thấy  $m = -5$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 10.**

Đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$  không có tiệm cận ngang khi

và chỉ khi

A.  $m \leq 0$

B.  $m = 0$

C.  $m < 0$

D.  $m > 0$

**Giải:**

Có lẽ nhiều học sinh chọn đáp án C.

**Phân tích sai lầm:**

- Nguyên nhân thứ nhất: Học sinh quên xét trường hợp  $m = 0$ . Nếu  $m = 0$  thì đồ thị hàm số  $y = x + 1$  cũng không có tiệm cận ngang.
- Nguyên nhân thứ hai: Không hiểu rõ mệnh đề và phủ định sai. Vì ban đầu học sinh có thể tìm  $m$  để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang trước. Và giải tìm được điều kiện như sau:  $m > 0$ . Phủ định lại, đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang khi và chỉ khi  $m < 0$ . Như vậy, đã phủ định sai mệnh đề.

Những sai lầm của học sinh đa số rơi vào xét thiếu trường hợp. Mặt khác, cũng có nhiều học sinh cũng hay làm theo kiểu phủ định mệnh đề và làm thông qua một bài toán mới. Nhưng khi phủ định lại mệnh đề thì lại bị sai.



**Câu 11.**

Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 2mx + m - 4}{x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 4}$  có đúng một đường tiệm cận và đó là tiệm cận ngang.

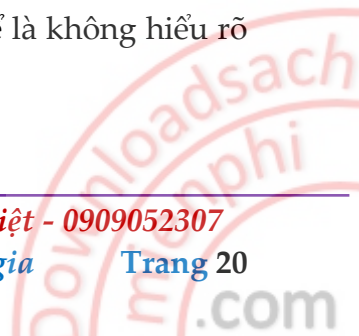
- A.  $m > 2$       B.  $m \leq 2$       C.  $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} m = 1 \\ m > 2 \end{cases}$

**Giải:**

Với dạng toán này, học sinh nhận thấy đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm cận ngang. Và nói rằng để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang thì  $x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 4 = 0$  vô nghiệm hay  $\Delta' = (m-2)^2 - (m^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow m > 2$ . Học sinh sẽ chọn đáp án A.

**Phân tích sai lầm:** Học sinh đã xét thiếu trường hợp. Nếu  $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  và  $x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 4 = 0$  cũng có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thì giá trị của  $m$  tìm được trong trường hợp này vẫn xảy ra. Hay nói cách khác  $\frac{1}{1} = \frac{-2m}{2(m-2)} = \frac{m-4}{m^2-4}$ . Với hệ này ta giải được

$m = 1$ . Khi đó với  $m = 1$  ta có đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x - 3}$  có tiệm cận ngang là  $y = 1$ . Do đó thỏa mãn yêu cầu bài toán. Nguyên nhân dẫn đến sai lầm cũng có thể là không hiểu rõ bản chất của vấn đề.



**Câu 12.**

Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để hàm số

$$y = \frac{1}{3}(m^2 - 2m)x^3 + mx^2 + 3x \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

- A.  $m < 0$       B.  $1 < m \leq 3$       C.  $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$

**Giải:**

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = (m^2 - 2m)x^2 + 2mx + 3$ .

Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3(m^2 - 2m) \leq 0 \\ m^2 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - 6m \leq 0 \\ m^2 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

Đến đây, học sinh sẽ chọn đáp án C.

**Phân tích sai lầm:** Học sinh quên xét trường hợp  $m^2 - 2m = 0$ . Đối với bài toán tìm  $m$  để hàm số đơn điệu của hàm bậc ba, hay trùng phương. Nếu hệ số bậc cao nhất có chứa tham số thì phải xét trường hợp hệ số đó bằng 0 trước xem có thỏa mãn yêu cầu bài toán hay không? Lỗi sai này rất hay gặp, học sinh hay quên. Như vậy, để làm đúng dạng toán này. Trường hợp đầu tiên, ta thấy hệ số bậc cao nhất chứa tham số thì xét trường hợp đó đầu tiên.

Lời giải đúng:

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = (m^2 - 2m)x^2 + 2mx + 3$ .

TH1: Nếu  $m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$ .



Xét  $m = 0$  thì  $y' = 3 > 0$  (nhận, hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  )

Xét  $m = 2$  thì  $y' = 4x + 3$  (loại, vì  $y' > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4}$ , không

phải đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$  ).

Xét  $m^2 - 2m \neq 0$ .

Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3(m^2 - 2m) \leq 0 \\ m^2 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - 6m \leq 0 \\ m^2 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

Kết hợp 2 trường hợp được đáp án D.

### Câu 13.

Cho hàm số  $y = \frac{x-2}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi giao điểm của đồ thị hàm số  $(C)$  với đường thẳng  $d: y = -x + m$  là  $A, B$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $OAB$  là một tam giác thỏa mãn  $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = 1$ .

A.  $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$

B.  $m = 2$

C.  $\begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$

D.  $m = 3$

**Phân tích lời giải:** Đối với dạng toán này, chắc hẳn nhiều học sinh nghĩ đến tương giao của hai đồ thị hàm số. Như vậy, công việc đầu tiên là phương trình hoành độ giao điểm, sau đó thu gọn sẽ được một phương trình ẩn  $x$  tham số  $m$ . Với bài trên thì đó chính là phương trình bậc hai ẩn  $x$  tham số  $m$ . Chắc hẳn, nhiều bạn nghĩ đến dùng vi-et, nếu không dùng được thì sẽ không làm được bài này và bỏ cuộc. Bài toán này có mẹo giải là phải kết hợp với phương trình bậc hai để thu



**Phân tích sai lầm:** Học sinh đọc đề bài không kĩ và khi làm ra giá trị của tham số  $m$  thì kết luận liền. Với câu này, đánh vào khả năng đọc đề và nhận thức của học sinh. Đề bài yêu cầu "**OAB là tam giác**". Như vậy điểm  $O$  không thuộc và đường thẳng  $d$  hay  $m \neq 0$ . Suy ra loại đáp án  $m = 0$ . Và chọn B. Sai lầm của học sinh là đọc đề học kĩ, đọc lướt và giải ra kết quả rồi quên thử lại.

Lời giải đúng:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và  $d$

$$\frac{x-2}{x-1} = -x+m, (x \neq 1) \Leftrightarrow x^2 - mx + m - 2 = 0, (x \neq 1). (1)$$

Để (C) cắt  $d$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m-2) > 0 \\ 1 - m + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4m + 8 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác OAB là tam giác nên  $O \notin d$  hay  $m \neq 0$ .

Gọi  $A(x_1; -x_1 + m), B(x_2, -x_2 + m)$ .

$$OA = \sqrt{x_1^2 + (-x_1 + m)^2} = \sqrt{2x_1^2 - 2mx_1 + m^2}$$

Do  $x_1$  là nghiệm của (1) nên

$$x_1^2 - mx_1 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x_1^2 - 2mx_1 = 4 - 2m$$

Khi đó  $OA = \sqrt{m^2 - 2m + 4}$ .

$$OB = \sqrt{x_2^2 + (-x_2 + m)^2} = \sqrt{2x_2^2 - 2mx_2 + m^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 4}$$

Theo giả thiết có

$$\frac{2}{\sqrt{m^2 - 2m + 4}} = 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$



Kết hợp điều kiện được  $m = 2$ .  
Vậy chọn đáp án B.

**Câu 14.**

Số nghiệm của phương trình của phương trình sau

$$\log_2(x^2 - 1) = \log_2(x+1)^2 + \frac{1}{2}\log_2(x-2)^2.$$

A. 2                      B. 0                      C. 1                      D. 3

**Giải:**

**Sai lầm thường gặp:**

Điều kiện

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ (x-2)^2 > 0 \\ (x+1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x \neq 2 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2(x^2 - 1) = \log_2(x+1)^2 + \log_2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) = \log_2(x+1)^2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = (x+1)^2(x-2) \Leftrightarrow x-1 = (x+1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Kết hợp điều kiện ta được  $x = 1 + \sqrt{2}$ . Chọn đáp án C.

**Phân tích sai lầm:** Học sinh đã áp dụng công thức  $\log_a b^k = k \log_a b$  một cách tự nhiên mà không để ý đến điều kiện của  $b, k$ . Nguyên nhân sai lầm: Học sinh ngộ nhận công thức. Trong sách giáo khoa phát biểu: "Cho  $0 < a \neq 1, b > 0$ . Khi đó  $\log_a b^k = k \log_a b, k \in \mathbb{R}$ ". Chính vì nguyên nhân này mà học sinh áp dụng công thức mà không để ý đến điều kiện.

Lời giải đúng:

Điều kiện

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ (x-2)^2 > 0 \\ (x+1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x \neq 2 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2(x^2 - 1) = \log_2(x+1)^2 + \log_2|x-2|$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) = \log_2(x+1)^2 |x-2|$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = (x+1)^2 |x-2| \Leftrightarrow x-1 = (x+1)|x-2| \quad (1)$$

- Xét  $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ .

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow x-1 = (x+1)(x-2) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2} \quad (x > 2).$$

- Xét  $\begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$ .

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow x-1 = (x+1)(2-x) \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm.

### **Câu 15.**

Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-2+3i|=7$ .

A. Đường thẳng

B. Elip

C. Đường tròn

D. Hình tròn

**Giải:**

Đây là một câu dễ, tuy nhiên lại làm cho học sinh lúng túng trong việc chọn đáp án. Nguyên nhân chính là không

nằm vững kiến thức, định nghĩa về đường tròn, hình tròn. Để phân biệt hai định nghĩa này, sau đây nhắc lại một chút về định nghĩa đường tròn, hình tròn. Nhắc lại các khái niệm này:

“Đường tròn: Đường tròn tâm  $I$  bán kính là  $R > 0$  là hình gồm những điểm cách đều điểm  $I$  một khoảng bằng  $R$ . Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường tròn tâm  $I(a; b)$  bán kính  $R$  có phương trình là  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ .

Hình tròn: Hình tròn là tập hợp những điểm nằm trong và nằm trên đường tròn hay là tập hợp những điểm cách tâm một khoảng nhỏ hơn hoặc bằng bán kính. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hình tròn tâm  $I(a; b)$  bán kính  $R$  có phương trình là  $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ .”

Giả sử  $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$ . Khi đó,

$$|x - 2 + (y + 3)i| = 7 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49.$$

Như vậy, với lý thuyết này ta sẽ chọn đáp án C.

**Lưu ý:** Cần phân biệt rõ đường tròn và hình tròn để tránh sai sót và mất điểm không đáng những câu như thế này.

### Câu 16.

Để tìm cực trị của hàm số  $y = 4x^5 - 5x^3$ , một học sinh lập luận ba bước sau:

Bước 1: Hàm số có tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có

$$f'(x) = 20x^3(x-1), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bước 2: Đạo hàm cấp 2  $f''(x) = 20x^2(4x-3)$ .

Suy ra  $f''(0) = 0, f''(1) = 20 > 0$ .

Bước 3: Từ các kết quả trên ta kết luận:

- Hàm số không có cực trị tại điểm  $x = 0$ .
- Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 1$

Vậy hàm số có một điểm cực tiểu và đạt tại  $x = 1$ .

Hỏi lập luận trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Lờ giải đúng

B. Sai ở bước 1

C. Sai ở bước 2

D. Sai ở bước 3

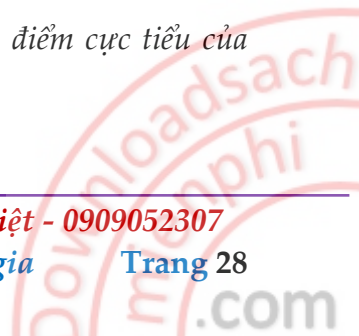
### Giải:

Bài này cũng có nhiều học sinh làm sai. Đặc biệt đó cũng là cách làm của một số học sinh và cho rằng bài toán này hoàn toàn đúng và chọn đáp án A.

**Phân tích sai lầm:** Sai lầm về mặt luận cứ: Do áp dụng sai định lý. Tức là học sinh đã ngộ nhận định lý sau có hai chiều:

“Giả sử tồn tại khoảng  $(a; b)$  chứa điểm  $x_0$  sao cho  $(a; b)$  chứa trong tập xác định của hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp một trên  $(a; b)$  và có đạo hàm cấp hai tại  $x_0$ . Khi đó

- Nếu  $f'(x_0) = 0$  và  $f''(x_0) > 0$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu của hàm số  $f(x)$ .



- Nếu  $f'(x_0) = 0$  và  $f''(x_0) < 0$  thì  $x_0$  là điểm cực đại của hàm số  $f(x)$ .

Như vậy, với định lý này chỉ đúng khi  $f''(x_0) \neq 0$ . Còn  $f''(x_0) = 0$  thì không thể kết luận được  $x_0$  có phải là điểm cực trị hay không mà phải lập bảng biến thiên.

**Câu 17. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Đề minh họa THPT Quốc gia – lần 1**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$y'$	+		-	+
$y$	$-\infty$	$0$	$-1$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số có đúng một điểm cực trị.
- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và nhỏ nhất bằng  $-1$ .
- D. Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$  và đạt cực tiểu tại  $x = 1$ .

**Giải:**

Với câu này, chắc không hẳn nhiều học sinh sẽ chọn đáp án A. Học sinh sẽ loại dần đáp án B, C, D và cuối cùng chọn đáp án A.

**Phân tích sai lầm:** Học sinh nhìn vào bảng biến thiên, thấy tại  $x = 0$ ,  $y'$  không xác định. Mặc định cho rằng hàm số sẽ không đạt cực trị tại điểm đó. Tại điểm  $x = 1$ ,  $y'(1) = 0$  nên hàm số đạt cực trị tại  $x = 1$ . Từ đó loại đi đáp án D. Chọn ngay đáp án A. Đề không nhầm lẫn, cần nhớ nhanh như sau:

“ $y = f(x)$  đạt cực trị tại  $x_0 \Leftrightarrow f'(x)$  đổi dấu tại  $x_0$ ”

Phân tích từng câu:

A sai vì hàm số có hai điểm cực trị.

B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu bằng  $-1$  khi  $x = 1$ .

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên  $\mathbb{R}$ .

**Câu 18.**

Tìm tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{\cot x - 1}{m \cot x - 1}$  đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

- A.  $m > 1$       B.  $\begin{cases} m < 0 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$       C.  $m < 1$       D.  $m < 0$

**Giải:**

Sai lầm đầu tiên ở câu 5. Bây giờ, giả sử học sinh biết đổi biến đúng.

**Sai lầm thường gặp**

Đặt  $t = \cot x, t \in (0; 1)$ .



Khi đó bài toán trở thành tìm  $m$  để hàm số  $y = \frac{t-1}{mt-1}$  nghịch biến trên  $(0;1)$ .

$$\text{Ta có } y' = \frac{m-1}{(mt-1)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên  $(0;1)$  khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ \frac{1}{m} \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m < 0 \\ 0 < m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 1 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Chọn đáp án B.

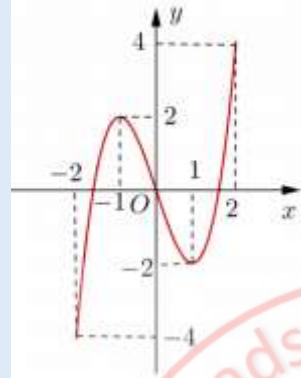
**Phân tích sai lầm:** Xét thiếu trường hợp  $m=0$ . Khi đặt điều kiện cho mẫu, nghĩa là  $mt-1 \neq 0$  mà học sinh tương đương với  $t \neq \frac{1}{m}$  mà chưa biết  $m$  đã khác 0 hay chưa?

Cách giải đúng (Ở phía sau).

### Câu 19. Đề minh họa THPT Quốc gia – Lần 2

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên đoạn  $[-2;2]$  và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Hàm số đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- A.  $x = -2$
- B.  $x = -1$
- C.  $x = 1$
- D.  $x = 2$



**Phân tích sai lầm:** Học sinh nhìn vào đồ thị thấy hàm số đạt cực đại tại đỉnh của đồ thị hàm số. Nhưng lại chiếu qua trục tung và nói hàm số đạt cực đại tại  $x = 2$ , trong khi đó, ta phải chiếu xuống trục hoành được  $x = -1$ . Những câu cho điểm trong đề thi THPT Quốc gia, học sinh cần phải thận trọng, đừng hấp tấp như câu này dẫn đến mất điểm.

**Câu 20. Đề minh họa THPT Quốc gia – Lần 2**

Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$$

A.  $x = -3$  và  $x = -2$

B.  $x = -3$

C.  $x = 3$  và  $x = 2$

D.  $x = 3$

**Giải:**

**Sai lầm thường gặp:**

Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$ .

Học sinh kết luận ngay, đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là  $x = 2$  và  $x = 3$ . Chọn đáp án C.

**Phân tích sai lầm:** Học sinh ngộ nhận các nghiệm của mẫu bằng 0 đều là các tiệm cận đứng mà không hiểu đến định nghĩa của tiệm cận đứng. Hay học sinh ám ảnh cái câu: “Muốn tìm tiệm cận đứng, ta giải phương trình mẫu bằng 0 và ngộ nhận luôn như vậy mà không kiểm tra lại”. Nhắc lại định nghĩa tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ :

“Đường thẳng  $x = a$  được gọi là đường tiệm cận đứng (tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau:



(1)  $\lim_{x \rightarrow a^+} y = +\infty$

(2)  $\lim_{x \rightarrow a^+} y = -\infty$

(3)  $\lim_{x \rightarrow a^-} y = +\infty$

(4)  $\lim_{x \rightarrow a^-} y = -\infty$  "

Như vậy, khi giải phương trình mẫu bằng 0, ta cần kiểm tra lại xem nó có đúng là tiệm cận đứng hay không bằng định nghĩa đã nói trên.

**Câu 21.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

X	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	+	0 -
Y	$-\infty$	↗ 2 ↘	↘ -1 ↗	↗ 3 ↘	↘ 2 ↗

Hàm số có bao điểm cực trị?

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

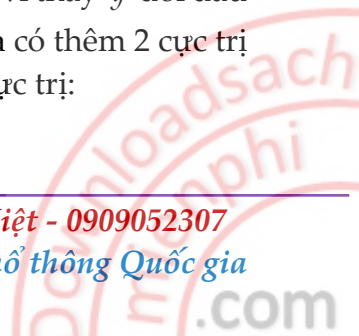
**Giải:**

Với câu này, nhiều học sinh chọn các đáp án A, B, C.

**Phân tích sai lầm:**

Sai lầm thứ nhất, học sinh chọn đáp án A vì nghĩ hàm số đạt cực đại tại hai điểm  $x = \pm 1$  nên xem nó là một cực trị và chọn đáp án A.

Sai lầm thứ hai, học sinh chọn đáp án C vì thấy  $y'$  đổi dấu qua  $x = 0$  thì hàm số đạt cực trị tại  $x = 0$  và có thêm 2 cực trị khác là  $x = \pm 1$ . Nhắc lại định nghĩa điểm cực trị:



“Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên khoảng  $\mathbb{K}$  và điểm  $x_0 \in \mathbb{K}$ .

Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) < f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$  và  $x \neq x_0$  thì hàm số đạt cực đại tại điểm  $x_0$ .

Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) > f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$  và  $x \neq x_0$  thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x_0$ .”

Như vậy, với định nghĩa trên thì hàm số  $y = f(x)$  phải xác định và liên tục tại điểm  $x_0$ . Khi nhìn vào bảng biến thiên thì thấy  $x = 0$  là điểm làm cho hàm số không xác định và cũng không liên tục. Vậy  $x = 0$  không phải là điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$ .

Hàm số chỉ có hai điểm cực trị là  $x = \pm 1$ . Chọn B.

**Câu 22.**

Cho hàm số  $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$ . Đồ thị hàm số có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

**Giải:**

**Học sinh 1.**

Ta có  $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

$$\text{Với } x \neq \pm 1 \text{ thì } y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1} \cdot (x+1)}.$$

Kết luận đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng  $x = \pm 1$ .

Do bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là  $y = 0$ . Vậy đồ thị có tổng cộng ba tiệm cận đứng và tiệm cận ngang. Chọn C.

### **Học sinh 2**

Điều kiện xác định  $x > 1$ . Khi đó,

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}(x+1)}.$$

Hàm số suy biến tại  $x = 1$  nên không có tiệm cận đứng  $x = 1$ . Do  $x = -1$  không thuộc tập xác định nên  $x = -1$  không phải là tiệm cận đứng.

Bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu nên có tiệm cận ngang là  $y = 0$ .  
Chọn A.

### **Phân tích sai lầm:**

Với cách giải của học sinh 1, sai lầm ở chỗ, học sinh 1 quên đặt điều kiện xác định để hàm số có nghĩa. Chính vì vậy, học sinh đã không trả lời được đường thẳng  $x = -1$  có phải là tiệm cận đứng hay không? Như vậy, nếu đặt điều kiện xác định cho hàm số thì sẽ kiểm tra được rằng giới hạn (từ định nghĩa tiệm cận đứng) có tồn tại hay không?

Với cách giải của học sinh thứ 2, học sinh dùng máy tính để tính giới hạn của hàm số khi  $x$  tiến về 1. Khi bấm máy tính, chẳng hạn nhập  $x = 1,0000001$  (ở đây không nhập  $x = 0,99999$  điều kiện xác định của hàm số là  $x > 1$  nên chỉ tồn tại  $x \rightarrow 1^+$ ) thì thấy giá trị của  $y$  chỉ là một con số không đủ lớn để học sinh có thể kết luận rằng  $y \rightarrow \infty$ . Do đó học sinh loại đi đường thẳng  $x = 1$  không phải là tiệm cận đứng.

Dẫn đến chọn đáp án A. Chắc hẳn cũng có học sinh bấm  $x = 0,99999$  để kiểm tra.

Lời giải đúng

Tập xác định  $D = (1; +\infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}(x+1)} = +\infty.$$

Suy ra  $x = 1$  là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} = 0. \text{ Suy ra } y = 0 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

**Câu 23. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Toán Học và Tuổi trẻ - Lần 8**

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + x + m^2}{x+1} \text{ đạt cực đại tại điểm } x=1 \text{ là:}$$

- A.  $\emptyset$       B.  $\{\emptyset\}$       C.  $\{2\}$       D.  $\{\pm 2\}$

**Giải:**

Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

$$\text{Ta có } y = x + \frac{m^2}{x+1}, y' = 1 - \frac{m^2}{(x+1)^2}.$$

Hàm số đạt cực đại tại  $x = 1$

$$\Leftrightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{m^2}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Đến đây, nhiều học sinh chọn ngay đáp án D.

**Phân tích sai lầm:** Sai về mặt lập luận: “Hàm số đạt cực trị tại  $x = x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$ ”. Ở đây, chỉ có chiều suy ra không có chiều ngược lại. Do đó ở bước lí luận phải dùng dấu suy ra. Sau khi giải xong thì thử lại xem có thỏa mãn hay không?

**Sửa lại:** Hàm số đạt cực đại tại  $x = 1$

$$\Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{m^2}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2. \text{ Bây giờ, thử lại}$$

Với  $m = -2$ , ta có  $y' = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$ . Dùng máy tính casio

kiểm tra xem  $x = 1$  có phải là điểm cực đại.

Nhập  $\frac{d}{dx} \left( 1 - \frac{4}{(x+1)^2} \right)_{x=1}$ . Nếu lớn hơn 0 thì loại, nhỏ hơn

không thì nhận.

Với  $m = -2$  thì loại. Học sinh lại chọn đáp án C.

**Phân tích sai lầm:** Học sinh thường hay nghĩ rằng, bài toán tìm tham số  $m$  luôn luôn tồn tại giá trị  $m$ , khi có hai giá trị như trên. Nếu cái này không tồn tại thì giá trị còn lại tồn tại. Cứ như thế, không chịu kiểm tra hết lại các giá trị.

Với  $m = 2$ ,  $y' = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$ , giống với trường hợp  $m = -2$

Như vậy, với  $m = 2$  cũng không thỏa mãn.

Đến đây thì học sinh lại phân vân không biết chọn đáp án nào? A hay B? Học sinh thấy các đáp án C, D đều có ngoặc nhọn nên nghĩ đáp án đúng là  $\{\emptyset\}$ . Vậy chọn B.

**Phân tích sai lầm:** Học sinh không phân biệt được rõ tập hợp. Ở đây, tập hợp các giá trị của  $m$  là tập rỗng và kí hiệu là  $\emptyset$  nên không chọn đáp án A. Còn đáp án B, kí hiệu  $\{\emptyset\}$  là tập hợp chứa phân tử rỗng.



## PHẦN 2: TỔNG HỢP CÂU HỎI NÂNG CAO

### Chuyên đề 1: KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

#### Câu 1.

Tìm tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{2 \cos x + 3}{2 \cos x - m}$  nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ ?

A.  $m > -3$

B.  $\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 2 \end{cases}$

C.  $m < -3$

D.  $\begin{cases} -3 < m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$

**Giải:**

**Cách 1:** Hàm số xác định khi  $\cos x \neq \frac{m}{2}$ .

$$y' = \frac{-2 \sin x (2 \cos x - m) - (2 \cos x + 3)(-2 \sin x)}{(2 \cos x - m)^2}$$
$$= \frac{2(m+3) \sin x}{(2 \cos x - m)^2}$$

Để hàm số nghịch biến trên  $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$  khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow m < -3$$

(do  $m < -3$  nên  $2 \cos x - m = 0$  vô nghiệm)

**Cách 2:** Đặt  $t = \cos x, t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ . Khi đó bài toán trở thành

tim  $m$  để hàm số  $y = \frac{2t+3}{2t-m}$  đồng biến trên  $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .

$$\text{Ta có } y' = \frac{-2(m+3)}{(2t-m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên  $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$  khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ \frac{m}{2} \notin \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$$

**Câu 2. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định – Lần 2**

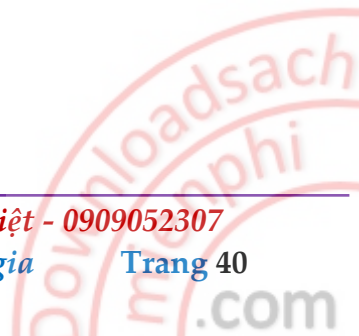
Tìm tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{\cot x - 1}{m \cot x - 1}$  đồng biến trên

khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

- A.  $m > 1$       B.  $\begin{cases} m < 0 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$       C.  $m < 1$       D.  $m < 0$

**Giải:**

**Cách 1:** Ta có:  $y' = \frac{(1 + \cot^2 x)(1 - m)}{(m \cot x - 1)^2}$





Hàm số đồng biến trên  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$  khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m \cot x - 1 \neq 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 - m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \tan x, \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \\ m < 1 \end{cases} (1)$$

Giải điều kiện (1). Xét hàm số  $f(x) = \tan x, \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Dễ thấy hàm  $f$  đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$  nên điều kiện (1) tương đương với  $m \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ . Vậy  $m < 1$ .

**Cách 2:** Đặt  $t = \cot x, t \in (0; 1)$ . Khi đó bài toán trở thành tìm  $m$  để hàm số  $y = \frac{t-1}{mt-1}$  nghịch biến trên  $(0; 1)$ .

**TH1:** Nếu  $m = 0$  thì  $y = 1 - t$ , hiển nhiên nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .

**TH2:** Nếu  $m \neq 0$

$$\text{Ta có } y' = \frac{m-1}{(mt-1)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên  $(0; 1)$  khi và chỉ khi



$$y' < 0, \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ \frac{1}{m} \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m < 0 \\ 0 < m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 1 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Vậy  $m < 1$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 3.**

Biết các hàm số  $y = f(x)$  và  $y = \frac{f(x)+5}{f^2(x)+1}$  đồng biến trên

$\mathbb{R}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\begin{cases} f(x) > -1+3\sqrt{2} \\ f(x) < -1-3\sqrt{2} \end{cases}$

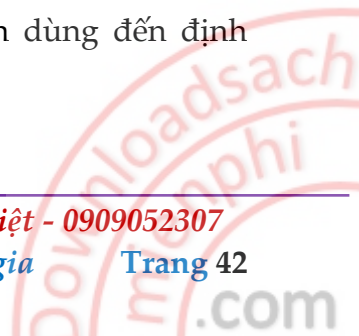
B.  $\begin{cases} f(x) > -5+\sqrt{26} \\ f(x) < -5+\sqrt{26} \end{cases}$

C.  $-5-\sqrt{26} \leq f(x) \leq -5+\sqrt{26}$

D.  $-1-3\sqrt{2} \leq f(x) \leq -1+3\sqrt{2}$

**Phân tích lời giải:** Đây là dạng toán tìm mệnh đề đúng. Thông thường các câu hỏi khác, chúng ta đi phân tích từng mệnh đề xem mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai. Đối với bài này thì khác, chúng ta không thể loại đáp án trực tiếp từ các đáp án được mà phải biến đổi trực tiếp từ các hàm đã cho. Sau đó áp dụng giả thiết để có điều cần mong muốn. Chúng ta đã có công cụ đạo hàm để để giải các bài toán hàm số đồng biến, nghịch biến mà không cần dùng đến định nghĩa nữa. Như vậy,

**Bước 1:** Tính  $f'(x)$  và



$$y' = \left( \frac{f(x)+5}{f^2(x)+1} \right)' = \dots = \frac{f'(x)[-f^2(x)-10f(x)+1]}{[f^2(x)+1]^2}$$

**Bước 2:** Do hàm số  $y = f(x)$  và  $y = \frac{f(x)+5}{f^2(x)+1}$  đồng biến nên có được điều gì?

**Bước 3:** Giải điều đó sẽ biết được mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai.

**Giải:**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= \frac{f'(x)[f^2(x)+1] - 2f'(x)f(x)[f(x)+5]}{[f^2(x)+1]^2} \\ \Rightarrow y' &= \frac{f'(x)[-f^2(x)-10f(x)+1]}{[f^2(x)+1]^2} \end{aligned}$$

Để hai hàm số cùng đồng biến trên  $\mathbb{R}$  thì

$$-f^2(x)-10f(x)+1 \geq 0 \Leftrightarrow -5-\sqrt{26} \leq f(x) \leq -5+\sqrt{26}$$

**Lưu ý:** Thuật toán dạng này, còn được áp dụng cho những bài sau nữa, mời bạn đọc.

**Câu 4. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định – Lần 1**

Dynano là một nhà ảo thuật gia đại tài người Anh nhưng người ta thường nói Dynano làm ma thuật chứ không phải làm ảo thuật. Bất kì màn trình diễn nào của anh chàng trẻ tuổi tài cao này đều khiến người xem há hốc miệng kinh ngạc vì nó vượt qua giới hạn của khoa học. Một lần đến NewYork anh ngẫu hứng trình diễn khả năng bay lơ lửng

**Đoàn Văn Bộ - 0963196568 – Huỳnh Anh Kiệt - 0909052307**

trong không trung của mình bằng cách di chuyển từ tòa nhà này đến tòa nhà khác và trong quá trình di chuyển đấy có một lần anh đáp đất tại một điểm trong khoảng cách giữa hai tòa nhà (biết mọi di chuyển của anh đều là đường thẳng). Biết tòa nhà ban đầu Dynano đứng có chiều cao là  $a$  (m), tòa nhà sau đó Dynano đến có chiều cao là  $b$  (m) ( $a < b$ ) và khoảng cách giữa hai tòa nhà là  $c$  (m). Vị trí đáp đất cách tòa nhà thứ nhất một đoạn là  $x$  (m). Hỏi  $x$  bằng bao nhiêu để quãng đường di chuyển của Dynano là bé nhất.

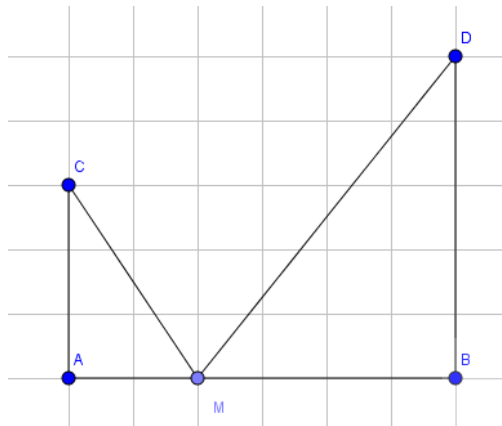
A.  $x = \frac{3ac}{a+b}$

B.  $x = \frac{ac}{3(a+b)}$

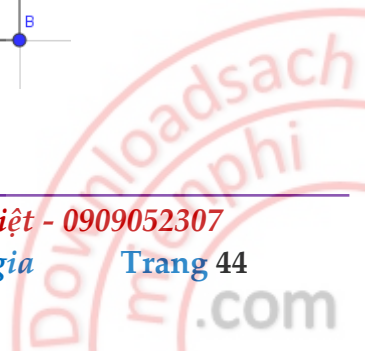
C.  $x = \frac{ac}{a+b}$

D.  $x = \frac{ac}{2(a+b)}$

**Giải:**



Giả sử có mô hình bài toán như trên,



**Cách 1:** Dùng kiến thức “Ứng dụng giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số”. Như vậy, ứng với cách này ta cần phải xác định được một hàm số và tập xác định của nó.

$$AB = c; AC = a; BD = b; AM = x$$

Khi đó

$$CM = \sqrt{a^2 + x^2}; MD = \sqrt{b^2 + (c-x)^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + b^2 + c^2}$$

$$\text{Khi đó ta có } T = MC + MD = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{x^2 - 2cx + b^2 + c^2}$$

Với  $0 < x < c$ , xét hàm số

$$T(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{x^2 - 2cx + b^2 + c^2}.$$

$$T'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{x^2 - 2cx + b^2 + c^2}}.$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{x^2 - 2cx + b^2 + c^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 - 2cx + b^2 + c^2} = (c-x)\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left( (x-c)^2 + b^2 \right) = (c-x)^2 (x^2 + a^2)$$

$$\Leftrightarrow b^2 x^2 = a^2 (x-c)^2 \Leftrightarrow bx = a(c-x) \Leftrightarrow x = \frac{ac}{a+b}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta có ngay } T(x)_{\min} \Leftrightarrow x = \frac{ac}{a+b}.$$

**Cách 2:** Dùng kiến thức hình học để giải.

Gọi  $D'$  là điểm đối xứng của  $D$  qua  $AB$ .

Khi đó  $MC + MD = MC + MD' \geq CD'$ .

Do đó  $(MC + MD)_{\min} = CD'$ .

Dấu “=” xảy ra khi  $M \in CD'$ .

Khi đó, áp dụng định lý Thales, ta có  $\frac{x}{c-x} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow x = \frac{ac}{a+b}$

**Câu 5. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định – Lần 1**

Cho các hàm số  $y = f(x), y = g(x), y = \frac{f(x)+3}{g(x)+1}$ . Hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ  $x=1$  bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng.

A.  $f(1) \leq -\frac{11}{4}$

B.  $f(1) < -\frac{11}{4}$

C.  $f(1) > -\frac{11}{4}$

D.  $f(1) \geq -\frac{11}{4}$

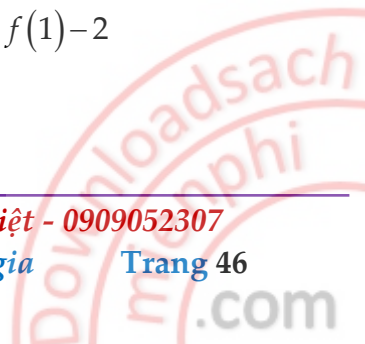
**Giải:**

**Phân tích lời giải:** Xuất phát từ giả thiết: “Cho các hàm số và hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ  $x=1$ . Như vậy, chúng ta cần phải nhớ hệ số góc tiếp tuyến của một đường cong tại điểm  $M(x_0, y_0)$  chính là đạo hàm của hàm số tại điểm  $x_0$ . Không còn các nào khác là phải làm bước này đầu tiên và theo giả thiết thì ba hệ số góc này bằng nhau nên ta có:

$$f'(1) = g'(1) = \frac{f'(1)[g(1)+1] - g'(1)[f(1)+3]}{[g(1)+1]^2}$$

Do  $f'(1) = g'(1) \neq 0$  nên điều trên tương đương với:

$$1 = \frac{g(1) + f(1) - 2}{[g(1)+1]^2} \Leftrightarrow [g(1)+1]^2 = g(1) - f(1) - 2$$



Ở các đáp án, thấy bất đẳng thức đều chứa  $f(1)$  không hề có  $g(1)$ . Chúng tỏ rằng, ta phải đánh giá  $f(1)$  thông  $g(1)$

$$f(1) = -g^2(1) - g(1) - 3 = -\left[g(1) + \frac{1}{2}\right]^2 - \frac{11}{4} \leq -\frac{11}{4}$$

Như vậy, chọn ngay được đáp án **A**.

**Lưu ý:** Học sinh cần phải nhớ làm sao để đưa tam thức bậc hai về dạng  $a(x - x_0)^2 + b$  để dễ dàng đánh giá bất đẳng thức. Ngoài ra, nếu nhớ đến hàm số parabol  $y = ax^2 + bx + c$  thì ta có thể làm nhanh như sau:

✚ Nếu  $a > 0$  thì hàm số đạt GTNN là  $-\frac{\Delta}{4a}$  khi  $x = -\frac{b}{2a}$

✚ Nếu  $a < 0$  thì hàm số đạt GTLN là  $-\frac{\Delta}{4a}$  khi  $x = -\frac{b}{2a}$

**Câu 6. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Toán học và Tuổi trẻ - Lần 8**

Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho và có hệ số góc là  $m$ . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho tổng khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến  $\Delta$  nhỏ nhất là:

- A. 0                      B.  $\pm \frac{1}{2}$                       C.  $\emptyset$                       D.  $\pm 1$

**Phân tích đề bài:** Khi đọc đề xuất hiện các điểm cực tiểu và cực đại thì giải liền phương trình  $y' = 0$  (do đây là hàm trùng phương). Kết hợp với hình dáng đồ thị để xác định nhanh điểm cực tiểu và cực đại. Sau đó nhớ tới khoảng cách

từ một điểm tới một đường trong mặt phẳng hệ trục tọa độ Oxy. Kết hợp với một số bất đẳng thức đã học trong phổ thông kết hợp để giải.

**Giải:**

Ta có  $y' = 4x^3 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0;0) \\ x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(1;-1) \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow C(-1;-1) \end{cases}$$

Do  $a = 1 > 0$  nên ta nhận thấy  $A$  là điểm cực đại và điểm  $B, C$  là điểm cực tiểu.

Gọi  $\Delta$  là đường thẳng qua điểm cực đại và có hệ số góc  $m$  là  $\Delta: y - mx = 0$

Gọi  $d_1, d_2$  lần lượt là khoảng cách từ điểm  $B$  và  $C$  tới  $\Delta$

Ta có:

$$d_1 + d_2 = \frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{\frac{(m-1)^2}{m^2+1}} + \sqrt{\frac{(m+1)^2}{m^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow d_1 + d_2 = \sqrt{1 + \frac{-2m}{m^2+1}} + \sqrt{1 + \frac{2m}{m^2+1}} \geq \sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:

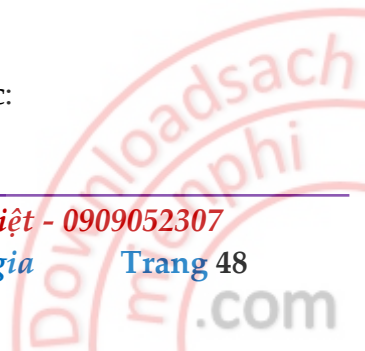
$$\left(1 + \frac{-2m}{m^2+1}\right) \left(1 + \frac{2m}{m^2+1}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4m^2}{(m^2+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 = (m^2+1)^2 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy chọn đáp án D.

**Một cách khác:**

Từ  $d = d_1 + d_2$ , bình phương hai vế được:





$$d^2 = \frac{(m-1)^2}{m^2+1} + \frac{(m+1)^2}{m^2+1} + \frac{2|m^2-1|}{m^2+1} = 2 + \frac{2|m^2-1|}{m^2+1} \geq 2$$

Do  $|m^2-1| \geq 0$  nên  $d^2 \geq 2$  hay  $d \geq \sqrt{2}$ .

Và cũng có được dấu “=” xảy ra khi  $m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$ .

**Lưu ý:** Ngoài ra còn một cách khác nữa: dùng khảo sát hàm số để giải. Như vậy, một bài có nhiều cách giải. Vì vậy, độc giả đọc sách cần lưu ý điều này, để có thể có lựa chọn cách phù hợp cho việc giải toán của mình. Tuy nhiên với bài trên, tác giả không có nhiều thời gian để tìm hiểu nhiều cách giải khác nhau.

**Câu 7. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng**

Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x+y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$ .  
Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$ .

Tính giá trị biểu thức  $M+m$

A. 44

B. 41

C. 43

D. 42

**Giải:**

Ta có

$$\begin{aligned} P &= x^2 + y^2 + 2xy + 2(x+y) + 2 + 8\sqrt{4-(x+y)} \\ &= (x+y)^2 + 2(x+y) + 8\sqrt{4-(x+y)} + 2 \end{aligned}$$

Đặt  $t = x+y$ . Khi đó  $P = t^2 + 2t + 8\sqrt{4-t}$ .

Mặt khác ta có

$$t = x+y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2}\sqrt{y+1} \leq \sqrt{3}\sqrt{x+y} = \sqrt{3t}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 \leq 3t \\ t \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq 4 \\ 0 \leq t \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 3$$

Xét hàm số  $f(t) = t^2 + 2t + 8\sqrt{4-t} + 2, t \in [0; 3]$ .

$$f'(t) = 2t + 2 - \frac{4}{\sqrt{4-t}};$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t + 1 - \frac{2}{\sqrt{4-t}} = 0 \Leftrightarrow (t+1)\sqrt{4-t} = 2$$

$$(t+1)^2(4-t) = 4 \Leftrightarrow -t^3 + 2t^2 - 7t = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Ta có  $f(0) = 18, f(25)$ . Vậy  $M = 25, m = 28$  và  $M + m = 43$

### Câu 8.

Cho hàm số  $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3x + 3$  có đồ thị  $(C)$  và  $g(x) = x^3 + 3bx^2 + 9x + 5$  có đồ thị  $(H)$ , với  $a, b$  là các tham số thực. Đồ thị  $(C), (H)$  có chung ít nhất 1 điểm cực trị.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |a| + 2|b|$

A.  $\sqrt{21}$

B.  $2\sqrt{6} + 6$

C.  $3 + 5\sqrt{3}$

D.  $2\sqrt{6}$

Phân tích đề toán: Phương trình  $f'(x) = 0, g'(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm chung. Do phương trình  $f'(x) = 0, g'(x) = 0$  bậc hai nên nếu có hai nghiệm trùng nhau thì  $f'(x) = kg'(x)$  với  $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$  điều này là vô lý vì hệ số tự do trong phương trình  $f'(x) = 0, g'(x) = 0$  không tỉ lệ với nhau. Vậy cho hai phương trình  $f'(x) = 0, g'(x) = 0$  trừ nhau



**Câu 9.**

Gọi  $S$  là tập hợp tất các các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$  có hai điểm cực trị  $A, B$  sao cho nằm khác phía và các đều đường thẳng  $y = 5x - 9$ . Tính tổng các phần tử của  $S$ .

- A. 6                      B. 3                      C. -6                      D. 0**

**Phân tích lời giải:** Đây là hàm số bậc ba nên nếu hàm số có hai điểm cực trị thì hai điểm cực trị đó sẽ đối xứng qua tâm của đồ thị hàm số, hay nói cách khác, hai điểm cực trị đó sẽ đối xứng qua điểm uốn của đồ thị hàm số. Như vậy, để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về khác phía so với đường thẳng thì trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị. Hay nói cách khác, yêu cầu bài toán chính là tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để điểm uốn thuộc và đường thẳng  $d: y = 5x - 9$ .

**Giải:**

Ta có  $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 1$ .

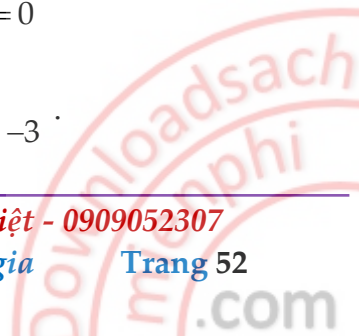
Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi  $m \in \mathbb{R}$ .

$y'' = 2x - 2m; y'' = 0 \Leftrightarrow x = m$ .

Suy ra điểm uốn  $I\left(m; \frac{m^3}{3} - m\right)$ .

$I \in d \Leftrightarrow \frac{m^3}{3} - m = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (m - 3)(m^2 + 3m - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 + m_3 = -3 \end{cases}$



Vậy  $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ . Chọn D.



**Chuyên đề 2: MŨ – LOGARIT**

**Câu 1. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội**

Cho  $f(1) = 1; f(m+n) = f(m) + f(n) + mn, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$ .

Giá trị của biểu thức  $T = \log \frac{f(96) - f(69) - 241}{2}$  là:

- A. 4                      B. 3                      C. 6                      D. 9

**Giải:**

Cho  $m = 1$ , ta có  $f(n+1) = f(n) + f(1) + n = f(n) + n + 1$ .

Với  $n = 1$ , ta có  $f(2) = f(1) + 2$

Với  $n = 2$ , ta có  $f(3) = f(2) + 3$

...

Với  $n = k$  thì  $f(k) = f(k-1) + k + 1$

Cộng vế theo vế ta được

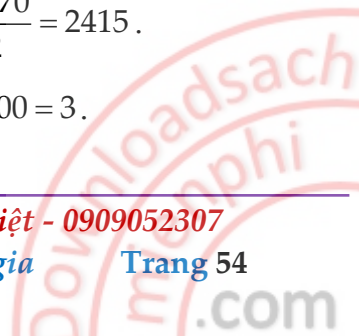
$$f(2) + \dots + f(k) = f(1) + f(2) + \dots + f(k-1) + 2 + \dots + (k+1)$$

$$\text{Suy ra } f(k) = f(1) + 2 + \dots + k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

$$\text{Vậy hàm cần tìm là } f(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{Ta có } f(96) = \frac{96 \cdot 97}{2} = 4656; f(69) = \frac{69 \cdot 70}{2} = 2415.$$

$$\text{Suy ra } T = \log \frac{4656 - 2415 - 241}{2} = \log 1000 = 3.$$





$$= f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) = \frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}} + 2} + \frac{4}{4 + 2} = \frac{7}{6}$$

$$\text{Vậy } P = 503 + \frac{7}{6} = \frac{3025}{6}$$

### Câu 2.

Cho hàm số  $f(x) = \frac{\log_2 x}{\log_2 x + 1}$ . Tính tổng

$$S = f(2^{-100}) + f(2^{-99}) + \dots + f(2^{-2}) + f(2^0) + f(2^1) + \dots + f(2^{98})$$

A.  $S = 99$

B.  $S = 100$

C.  $S = 200$

D.  $S = 198$

### Giải:

Với dạng toán này, ta cần ghép các hai giá trị với nhau và tìm ra quy luật của bài toán.

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= \frac{\log_2 a}{\log_2 a + 1} + \frac{\log_2 b}{\log_2 b + 1} \\ &= \frac{\log_2 a (\log_2 b + 1) + \log_2 b (\log_2 a + 1)}{(\log_2 a + 1)(\log_2 b + 1)} \\ &= \frac{2 \log_2 a \log_2 b + \log_2 a + \log_2 b}{\log_2 a \log_2 b + \log_2 a + \log_2 b + 1} \end{aligned}$$

Như vậy, ta cần chọn  $a, b$  sao cho tử rút gọn được mẫu. Đối với câu 2, ta đã chọn tổng  $a + b = k$ . Tại sao lại như vậy? Vì  $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ . Còn đối với bài này thì chọn  $ab = k$  vì  $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$  (biểu thức đã cho có nghĩa).

$$\text{Nếu } ab = \frac{1}{4} \text{ thì } \log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab = \log_2 \frac{1}{4} = -2.$$



$$\text{Suy ra } f(a) + f(b) = \frac{2\log_2 a \log_2 b - 2}{\log_2 a \log_2 b - 1} = 2.$$

Với bài trên thì sẽ ghép  $f(2^{-100}) + f(2^{98})$  vì  $2^{-100} \cdot 2^{98} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ .

Khi đó

$$S = [f(2^{-100}) + f(2^{98})] + [f(2^{-99}) + f(2^{97})] + \dots + \dots + [f(2^{-2}) + f(2^0)] = \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{99 \text{ số } 2} = 198$$

#### Câu 4.

Xét các số thực  $a, b$  thỏa mãn  $a \geq b > 1$ . Biết rằng biểu thức

$$P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$$
 đạt giá trị lớn nhất khi  $b = a^k$ . Khẳng

định nào sau đây đúng?

- A.  $k \in (2; 3)$  B.  $k \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$   
C.  $k \in (-1; 0)$  D.  $k \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$

**Phân tích lời giải:** Đây là bài toán tìm giá trị lớn nhất của biểu thức logarit. Như vậy, ta cố gắng biến đổi sao cho về  $\log_x y$  và sau đó đổi biến, đưa về biểu thức không chứa logarit. Thông thường thì sẽ là một biểu thức một ẩn và sẽ dẫn đến xét hàm hoặc dùng những bất đẳng thức cơ bản như bất đẳng thức Cauchy hai số, ba số; bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, bất đẳng thức Bunhiacopxki...

**Giải:**

**Đoàn Văn Bộ - 0963196568 – Huỳnh Anh Kiệt - 0909052307**

Ta có

$$P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = \log_a ab + \sqrt{1 - \log_a b}$$
$$= 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}$$

Đặt  $t = \log_a b$ . Khi đó  $P = 1 + t + \sqrt{1 - t}$ .

Do  $a \geq b > 1$  nên  $\log_a b \geq 1$  hay  $t \geq 1$ .

Xét hàm số

$$f(t) = 1 + t + \sqrt{1 - t}, t \geq 1; f'(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1 - t}} = \frac{2\sqrt{1 - t} - 1}{2\sqrt{1 - t}}.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1 - t} - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}.$$

Lập bảng biến thiên ta được

$$\max P = \frac{9}{4} \Leftrightarrow t = \frac{3}{4} \Rightarrow \log_a b = \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = a^{\frac{3}{4}}. \text{ Chọn D.}$$

**Câu 5. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Nguyễn Đăng Đạo – Lần 2**

Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình

$$\log_2 \frac{x^2 + 2x + 2}{3x^2 + x + 2} = x^2 - 3x - 3.$$

Tính giá trị biểu thức  $T = x_1^2 + x_2^2$ .

- A.  $T = 15$       B.  $T = 13$       C.  $T = \frac{25}{4}$       D.  $T = \frac{33}{4}$

**Phân tích lời giải:** Đây là phương trình vừa có biểu thức logarit vừa có đa thức. Phương pháp giải có thể là đánh giá, hàm số để giải. Gần đây, phương pháp sử dụng đơn điệu của hàm số rất ưa chuộng.

Nhắc lí thuyết “phương pháp hàm số để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình”:

**Định lý 1:** Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục và đơn điệu trên  $D$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có nhiều nhất một nghiệm thuộc  $D$ .

**Định lý 2:** Nếu  $f(x)$  liên tục, đồng biến trên  $D$ ;  $g(x)$  liên tục, nghịch biến (hoặc hàm hằng) trên  $D$  và ngược lại thì phương trình  $f(x) = g(x)$  có nhiều nhất một nghiệm thuộc  $D$ .

**Định lý 3:** Nếu  $f'(x) = 0$  có một nghiệm trên  $(a; b)$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có nhiều nhất hai nghiệm trên  $(a; b)$ . Tổng quát nếu  $f^{(n)}(x) = 0$  có  $n$  nghiệm phân biệt trên  $(a; b)$  thì  $f^{(n-1)}(x)$  có nhiều nhất  $n + 1$  nghiệm trên  $(a; b)$ .

**Định lý 4:** Nếu  $f(x)$  đồng biến trên  $(a; b)$  thì  $f(u) < f(v) \Leftrightarrow u < v$ . Ngược lại, nếu  $f(x)$  nghịch biến trên  $(a; b)$  thì  $f(u) < f(v) \Leftrightarrow u > v$  với mọi  $u, v \in (a; b)$ .

**Định lý 5:** Nếu  $f(x)$  liên tục và đơn điệu trên  $D$  thì  $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v, \forall u, v \in D$ .

Khi giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình, điều kiện rất quan trọng. Như vậy, ưu tiên đầu tiên là đặt điều kiện xác định. Nếu không sau khi giải ra sẽ không biết nghiệm nào nhận, nghiệm nào loại.

**Giải:**

Điều kiện  $x \in \mathbb{R}$ .

Phương trình tương đương với



$$\log_2(x^2 + 2x + 2) - \log_2(3x^2 + x + 2) = x^2 - 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2(x^2 + 2x + 2) + 2(x^2 + 2x + 2)$$

$$= \log_2(3x^2 + x + 2) + 3x^2 + x + 2$$

$$\Leftrightarrow f(2(x^2 + 2x + 2)) = f(3x^2 + x + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_2 t + t$ ,  $t > 0$ . Nhận thấy hàm số này đồng biến trên  $(0; +\infty)$ . Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 2) = 3x^2 + x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Vậy } T = x_1^2 + x_2^2 = 13.$$

**Câu 6. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Sở Giáo Dục và Đào tạo Hà Nội**

Cho hàm số  $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$ . Biết rằng

$f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$  với  $m, n$  là các số tự nhiên và  $\frac{m}{n}$  tối giản. Tính  $m - n^2$ .

A.  $m - n^2 = 2018$

B.  $m - n^2 = -2018$

C.  $m - n^2 = 1$

D.  $m - n^2 = -1$

**Phân tích lời giải:** Trong đề toán dữ kiện quan trọng cần xoáy vào là hàm số ban đầu. Tập trung rút gọn số mũ để xuất hiện được điều gì đó mới mẻ hơn.

Phân tích mũ của hàm số:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} &= \frac{x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2}{(x^2 + x)^2} \\ &= \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x)^2} = \frac{(x^2 + x + 1)^2}{(x^2 + x)^2} = \left(1 + \frac{1}{x(x+1)}\right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2 \end{aligned}$$

Suy ra  $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}} = e^{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}$

Do đó

$$f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}} \cdot e^{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \cdot e^{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \dots e^{1 + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}} = e^{\frac{m}{n}}$$

$$\Rightarrow 2018 - \frac{1}{2018} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{2018^2 - 1}{2018} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow m - n^2 = -1$$

Chọn đáp án D

**Câu 7. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- THPT Kim Liên- Hà Nội lần 2**

Cho ba số thực  $a, b, c \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } P = \log_a\left(b - \frac{1}{4}\right) + \log_b\left(c - \frac{1}{4}\right) + \log_c\left(a - \frac{1}{4}\right).$$

- A. 3                      B. 6                      C.  $3\sqrt{3}$                       D. 1

**Phân tích lời giải:** Cần chú ý vào khoảng mà ba số thực nằm trong đó và có bất đẳng thức phụ  $a - \frac{1}{4} \leq a^2$ .

**Giải:**

Ta có: Vì  $a, b, c \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$  nên

$$b - \frac{1}{4} \leq b^2 \Leftrightarrow \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) \geq \log_a (b^2) = 2\log_a b$$

Tương tự sẽ được

$$\log_b \left(c - \frac{1}{4}\right) \geq 2\log_b (c); \log_c \left(a - \frac{1}{4}\right) \geq 2\log_c (a)$$

Từ đó

$$P \geq 2(\log_a b + \log_b c + \log_c a) \geq 2.3\sqrt{\log_a b \log_b c \log_c a} = 6$$

Dấu bằng xảy ra khi  $a = b = c = \frac{1}{2}$ . Vậy chọn đáp án B.

**Câu 8. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Sở Giáo dục & Đào tạo Vũng Tàu**

Cho hai số thực  $a, b$  thỏa mãn  $a > 0, 0 < b < 2$ . Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{(2b)^a}{(2^a - b^a)^2} + \frac{2^a + 2b^a}{2b^a}$ .

A.  $\frac{9}{4}$

B.  $\frac{7}{4}$

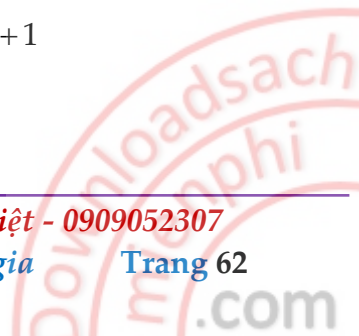
C.  $\frac{13}{4}$

D. 4

**Giải:**

Ta có:

$$P = \frac{\left(\frac{2}{b}\right)^a}{\left(\left(\frac{2}{a}\right)^a - 1\right)^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{b}\right)^a + 1$$



Đặt  $t = \left(\frac{2}{b}\right)^a$ . Khi đó  $P = \frac{t}{(t-1)^2} + \frac{t}{2} + 1$ .

Do  $0 < b < 2$  nên  $\frac{2}{b} > 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{b}\right)^a > 1$ .

Xét hàm số  $f(t) = \frac{t}{(t-1)^2} + \frac{t}{2} + 1, t > 1$ .

$$f'(t) = -\frac{t+1}{(t-1)^2} + \frac{1}{2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

Vậy  $P_{\min} = f(3) = \frac{13}{4}$ .



**Chuyên đề 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN**

**Câu 1.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^1 f(x) dx = 9$  và

$\int_1^9 f(x) dx = 2$ . Tính giá trị biểu thức  $\int_0^3 \left[ f\left(\frac{x}{3}\right) + f(3x) \right] dx$ .

A.  $\frac{92}{3}$

B.  $-4$

C.  $9$

D.  $-9$

**Giải:**

Dễ thấy  $\int_0^9 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^9 f(x) dx = 9 + 2 = 11$ .

Nhận xét như sau:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$

Ta có

$$I = \int_0^3 \left[ f\left(\frac{x}{3}\right) + f(3x) \right] dx = \int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx + \int_0^3 f(3x) dx = I_1 + I_2$$

Tính  $I_1$ :

Đặt  $t = \frac{x}{3} \Rightarrow dx = 3dt$ . Đổi cận  $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 3 \Rightarrow t = 1$ .

Khi đó  $I_1 = 3 \int_0^1 f(t) dt = 27$ .

Tính  $I_2$ :

Đặt  $t = 3x \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$ , đổi cận  $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 3 \Rightarrow t = 9$ .



Khi đó  $I_2 = \frac{1}{3} \int_0^9 f(t) dt = \frac{11}{3}$ . Vậy  $I = \frac{92}{3}$

**Câu 2.**

Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^4 f(x) dx = 4$ ,  $\int_2^3 f(x) dx = 2$ .

Khi đó giá trị của tổng  $\int_0^2 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$  bằng

- A. 2                      B. 4                      C. -2                      D. 6

**Giải:**

**Phân tích lời giải:** Nhìn thấy ở đề bài và yêu cầu của bài toán thì thấy có các cận , 0, 2, 3, 4. Như vậy, nghĩ đến công thức chèn cận  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$ . Ở đây, ta chèn bao nhiêu cận cũng được, tùy vào bài toán.

Ta có  $\int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$

Suy ra

$$\int_0^2 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx = 4 - 2 = 2$$

**Câu 3.**

Cho biết đồ thị hàm số  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt. Gọi  $S_1$  là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và phần đồ thị hàm số  $f(x)$  nằm dưới trục hoành. Gọi  $S_2$  là diện tích của hình phẳng giới

hạn bởi trục hoành và phần đồ thị hàm số  $f(x)$  nằm phía trên trục hoành. Cho biết  $5b^2 = 36ac$ . Tính tỉ số  $\frac{S_1}{S_2}$ .

- A. 2                      B.  $\frac{1}{4}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D. 1

**Giải:**

Phương trình hoành độ giao điểm  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ .

$$\text{Để phương trình có bốn nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \Delta = b^2 - 4ac = b^2 - \frac{5b^2}{9} = \frac{4b^2}{9} > 0, \forall b \neq 0$$

Khi đó, gọi  $x_1, x_2, x_3, x_4$  lần lượt là bốn nghiệm của phương trình  $y = 0$  và  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $a > 0$ .

$$\text{Khi đó, } x^2 = \frac{-b + \frac{2}{3}b}{2a} = -\frac{b}{6a}; \quad x^2 = \frac{-b - \frac{2}{3}b}{2a} = -\frac{5b}{6a} \quad (b < 0)$$

$$\text{Suy ra } x_1 = -\sqrt{-\frac{5b}{6a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{b}{6a}}; x_3 = \sqrt{-\frac{b}{6a}}; x_4 = \sqrt{-\frac{5b}{6a}}$$

Do đồ thị hàm số  $f(x)$  đối xứng qua trục tung nên ta có

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \int_{x_3}^{x_4} |f(x)| dx = -2 \int_{x_3}^{x_4} f(x) dx = -2 \int_{x_3}^{x_4} (ax^4 + bx^2 + c) dx$$

$$= \frac{2ax_3^5}{5} + \frac{2b^3x_3^3}{3} + 2cx_3 - \frac{2ax_4^5}{5} - \frac{2b^3x_4^3}{3} - 2cx_4$$

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_3} |f(x)| dx = 2 \int_0^{x_3} f(x) dx = 2 \int_0^{x_3} (ax^4 + bx^2 + c) dx$$

$$= \frac{2ax_3^5}{5} + \frac{2b^3x_3^3}{3} + 2cx_3$$

Suy ra  $S_2 - S_1 = \frac{2ax_4^5}{5} + \frac{2b^3x_4^3}{3} + 2cx_4$

$$= \frac{2a}{5} \cdot \frac{25b^2}{36a^2} \cdot \sqrt{-\frac{5b}{6a}} + \frac{2b}{3} \cdot \left(-\frac{5b}{6a}\right) \sqrt{-\frac{5b}{6a}} + 2c \cdot \sqrt{-\frac{5b}{6a}}$$

$$= 2\sqrt{-\frac{5b}{6a}} \left( \frac{5b^2}{36a} - \frac{5b^2}{18a} + c \right) = 2\sqrt{-\frac{5b}{6a}} \cdot \frac{-5b^2 + 36ac}{36a} = 0$$

Vậy  $S_1 = S_2$  hay  $\frac{S_1}{S_2} = 1$ .

**Hướng giải khác:** Do đề bài đúng với mọi  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện như đề bài nên chỉ cần chọn  $a, b, c$  đơn giản. Sau đó giải bài toán trên trường hợp đơn giản đó. Ví dụ:

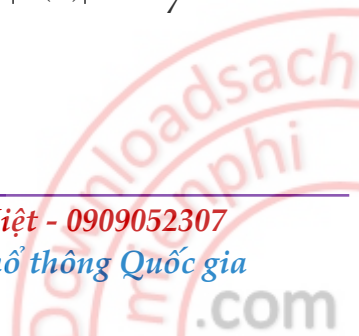
Chọn  $a = 1; b = -6; c = 5$ . Ta có  $5b^2 = 36ac$ .

$$y = x^4 - 6x + 5; y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

Khi đó

$$S_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx = \frac{44}{7}; S_2 = \int_{-\sqrt{5}}^{-1} |f(x)| dx + \int_1^{\sqrt{5}} |f(x)| dx = \frac{44}{7}$$

Vậy  $\frac{S_1}{S_2} = 1$ .



**Câu 4. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Hàm Rồng**

Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng  $x = 0$  và  $x = 1$ , biết thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) là một hình chữ nhật có độ dài lần lượt là  $x$  và  $\ln(x^2 + 1)$ .

A.  $V = \frac{\ln 2 - 1}{2}$

B.  $V = \ln 2 - \frac{1}{2}$

C.  $V = \frac{1}{2} \ln 2 - 1$

D.  $V = \ln 2 - 1$

**Giải:**

**Lưu ý:** Thể tích vật thể đối với những dạng toán như thế này là:  $V = \int_a^b S(x) dx$ .

Ta có diện tích hình chữ nhật  $S(x) = x \ln(x^2 + 1)$ .

$$\text{Vậy } V = \int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Rất nhiều học sinh không biết đến công thức này hoặc là nhớ nhầm sang công thức khác.

**Câu 5. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Hàm Rồng**

Trong trung tâm công viên có một khuôn viên hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m, độ dài trục nhỏ bằng 10m. Giữa khuôn viên là một cái đài phun nước hình tròn có đường kính bằng 8m, phần còn lại của khuôn viên người ta thả

cá. Số cá thả vào khuôn viên đó gần nhất với số nào dưới đây, biết rằng mật độ thả cá là 5 con trên  $1\text{m}^2$  mặt nước.

- A. 378      B. 375      C. 377      D. 376

**Phân tích lời giải:** Bài toán yêu cầu thả bao nhiêu con cá vào khuôn viên thỏa mãn mật độ 5 con trên  $1\text{m}^2$  mà khuôn viên nước là hình elip. Từ trước tới giờ chưa hề học công thức tính diện tích của hình elip nên ta nghĩ đến ứng dụng tích phân trong tính diện tích hình phẳng. Như vậy phải lập phương trình elip. Nhắc lại kiến thức viết phương trình elip.

Phương trình chính tắc của elip là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Trong đó  $2a, 2b$  lần lượt là độ dài trục lớn, trục bé. Nhận dạng elip nếu đề cho  $MF_1 + MF_2 = 2a$  với  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$  thì tập hợp điểm  $M$  là elip thỏa mãn  $F_1F_2 = 2c$  và  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ .

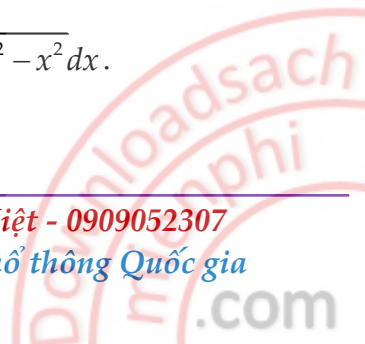
Với bài toán này thì diện tích phần còn lại để thả cá là  $S_c = S_e - S_t$ , trong đó  $S_e$  là diện tích hình elip,  $S_t$  là diện tích hình tròn ở giữa. Như vậy, tính số cá bằng  $5S_c$  là xong.

**Giải:**

Phương trình chính tắc của elip là  $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ . Do trục tung và trục hoành chia elip thành bốn phần bằng nhau nên ta chỉ cần tính cái phần ở góc phần tư thứ nhất rồi nhân bốn lên là xong.

$$S_e = 4 \int_0^8 \sqrt{5^2 \left( 1 - \frac{x^2}{8^2} \right)} dx = \frac{5}{2} \int_0^8 \sqrt{8^2 - x^2} dx.$$

Đặt  $x = 8 \sin t \Rightarrow dx = 8 \cos t dt$ .



Đổi cận  $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 8 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} S_e &= \frac{5}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8^2 - 8^2 \sin^2 t} \cdot 8 \cos t dt = 160 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= 80 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 40\pi \end{aligned}$$

Diện tích hình tròn có đường kính bằng 8m là:  $S_t = 16\pi$ .

Suy ra  $S_c = S_e - S_t = 24\pi$  và số cá bằng  $24\pi \cdot 5 \approx 377$  (con).

**Lưu ý:** Công thức tính diện tích của hình elip khi biết độ dài trục lớn  $2a$  và độ dài trục bé  $2b$  là  $S = \pi ab$  (Dùng ứng dụng tích phân để chứng minh).

**Câu 6. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Toán học và Tuổi trẻ - Lần 8**

Cho  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 10]$  thỏa mãn  $\int_0^{10} f(x) dx = 7$ ,

$\int_2^6 f(x) dx = 3$ . Khi đó giá trị của biểu thức

$$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx \text{ là:}$$

A. 10

B. 4

C. 3

D. -4

**Phân tích lời giải :** Bài toán dạng này chủ yếu cần thấy được sự tách cận ra hợp lý và kết hợp với phép cộng trừ nhân chia để tìm ra được giá trị biểu thức mà đề yêu cầu.

**Giải**

Ta có :

$$P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_2^6 f(x)dx = 7 - 3 = 4$$

Vậy chọn đáp án B

**Câu 7. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 - Toán học và Tuổi trẻ - Lần 8**

Xét hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên miền  $D = [a; b]$  có đồ thị là một đường cong (C). Gọi S là phần giới hạn bởi (C) và các đường thẳng  $x = a; x = b$ . Người ta chứng minh được rằng diện tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay S

quanh Ox bằng  $S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ . Theo kết quả

trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay tạo thành khi xoay phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4}$  và các đường thẳng  $x = 1; x = e$  quanh Ox

A.  $\frac{2e^2 - 1}{8} \pi$

B.  $\frac{4e^4 - 9}{64} \pi$

C.  $\frac{4e^4 + 16e^2 + 7}{16} \pi$

D.  $\frac{4e^4 - 9}{16} \pi$

**Phân tích lời giải:** Đây là một câu người hỏi muốn kiểm tra khả năng đọc hiểu.

**Giải:**

$$\text{Ta có } S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Trong đó  $f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4}$  và  $a$  và  $b$  lần lượt là  $1, e$  và

$$f'(x) = x - \frac{1}{4x}.$$

Thay vào và sử dụng máy tính bỏ túi để tính bấm máy được kết quả sau đó lưu vào  $A$  sau đó lấy  $A$  trừ cho các đáp án. (Đã hướng dẫn ở sách “*Máy tính bỏ túi – Kỹ thuật và sai lầm*”)

### Câu 8.

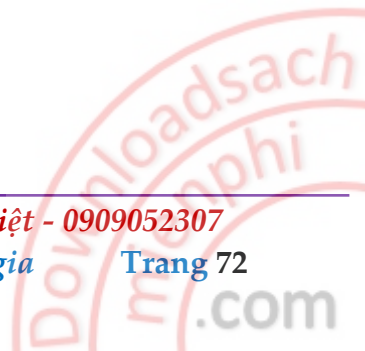
Cho hàm số  $y = \frac{x^4}{4} - 2m^2x^2 + 2$ . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng  $\frac{64}{15}$  là

- A.  $\emptyset$       B.  $\{1\}$       C.  $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$       D.  $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

**Phân tích lời giải:** Do hệ số  $a = 1 > 0$  nên đồ thị của hàm số sẽ có 2 cực tiểu và 1 cực đại. Bài toán nếu đọc nhanh lướt qua sẽ dễ nghĩ bài thuộc phần hàm số nhưng thật ra nó là thuộc phần tích phân. Nhận thấy rằng phần cần tính diện tích đối xứng nhau qua trục  $Oy$  nên cần tích một bên và nhân đôi lên sẽ có được phần đề yêu cầu

### Giải

Ta có  $y' = x^3 - 4m^2x$





$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow C(0; 2) \\ x = 2m \Rightarrow y = 2 - 4m^4 \Rightarrow A(2m; 2 - 4m^4) \\ x = -2m \Rightarrow y = 2 - 4m^4 \Rightarrow B(-2m; 2 - 4m^4) \end{cases}$$

Để phương trình có 3 điểm cực trị thì  $m \neq 0$

Đường thẳng qua C và song song với Ox có dạng là:  $y = 2$

Giao điểm của (C) và d là  $E(2\sqrt{2}m; 2); F(-2\sqrt{2}m; 2)$

Diện tích phần cần tính là

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{2\sqrt{2}m} \left| 2 - \left( \frac{x^4}{4} - 2m^2x^2 + 2 \right) \right| dx = 2 \int_0^{2\sqrt{2}m} \left| -\frac{x^4}{4} + 2m^2x^2 \right| dx \\ &= 2 \int_0^{2\sqrt{2}m} \left( \frac{-x^4}{4} + 2m^2x^2 \right) dx = 2 \left( -\frac{x^5}{20} + 2m^2 \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^{2\sqrt{2}m} = \frac{128\sqrt{2}}{15} m^5 \end{aligned}$$

Theo giả thiết  $S = \frac{64}{15}$  nên  $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Chọn câu C.

### Câu 9.

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 1]$  và thỏa

$$\text{mãn } \int_0^1 x(f'(x) - 2) dx = f(1).$$

Tính giá trị biểu thức  $I = \int_0^1 f(x)$

- A. 0                      B. 1                      C. -1                      D. Không tính được

**Phân tích lời giải:** Nhận thấy rằng, không thể biến đổi ngay từ yêu cầu bài toán được. Do đó, ta xuất phát từ giả thiết. Và biến đổi sao cho có tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**Giải:**

Theo giả thiết

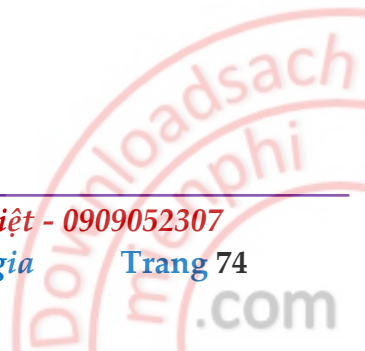
$$\int_0^1 x(f'(x) - 2) dx = f(1) \Leftrightarrow \int_0^1 xf'(x) dx - \int_0^1 2x dx = f(1)$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 xf'(x) dx = f(1) + 1 \quad (1)$$

Nhìn vào phương trình sau khi biến đổi, tích phân  $\int_0^1 xf'(x) dx$  thấy hàm dưới dấu tích phân là tích của hai hàm  $x$  và  $f'(x)$ . Do đó nghĩ đến phương pháp tích phân từng phần để có  $\int_0^1 f(x) dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) + 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = -1.$$

Chọn đáp án C.



**Câu 10. Group Nhóm Toán**

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn

$$f(-x) + 2f(x) = \cos x \quad (1). \text{ Tính tích phân } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

A.  $I = \frac{4}{3}$

B.  $I = \frac{1}{3}$

C.  $I = \frac{2}{3}$

D.  $I = 1$

**Giải:**

**Cách 1:** Thay  $x$  bởi  $-x$  ta được,

$$f(x) + 2f(-x) = \cos x \quad (2). \text{ Lấy (2) } - (1) \text{ được } f(-x) = f(x)$$

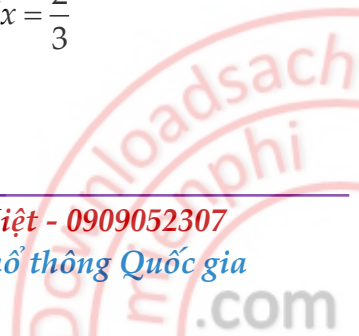
$$\text{Do đó } f(x) = \frac{1}{3} \cos x. \text{ Vậy } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cos x dx = \frac{2}{3}$$

**Cách 2:** Lấy tích phân hai vế từ (1) được

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(-x) + 2f(x)) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 2$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 2 \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{3}$$



**Bài tập tương tự:**

**Bài 1. Đề minh họa THPT Quốc gia 2017 – Lần 3**

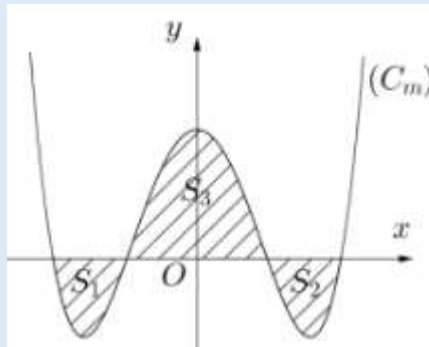
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  và thỏa mãn  $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$ ,  $\forall x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ . Giá

trị của tích phân  $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$  bằng?

- A. -6                      B. 0                      C. 2                      D. 6

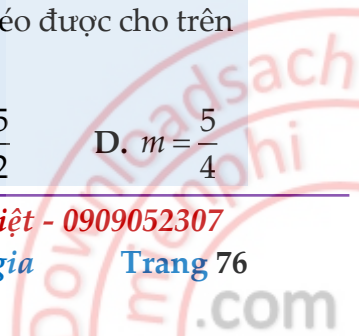
**Câu 11. Group Nhóm Toán**

Cho hàm số có đồ thị  $(C_m)$  với  $m$  là tham số thực. Giả sử  $(C_m)$  cắt trục  $Ox$  tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ:



Gọi  $S_1, S_2, S_3$  là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Tìm tham số  $m$  để  $S_1 + S_2 = S_3$ .

- A.  $m = -\frac{5}{2}$                       B.  $m = -\frac{5}{4}$                       C.  $m = \frac{5}{2}$                       D.  $m = \frac{5}{4}$



**Phân tích lời giải:** Đây là bài toán tìm tham số  $m$  và các đáp án A, B, C, D có giá trị  $m$  cụ thể. Như vậy, để đơn giản, ta thử từng đáp án.

**Giải:**

✚ Với  $m = -\frac{5}{2}$ , ta có  $y = x^4 - 3x^2 - \frac{5}{2}$ .

$$y = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{2} \text{ (loại vì } x^2 = \frac{3 - \sqrt{19}}{2} < 0 \text{)}. \text{ Loại A.}$$

✚ Với  $m = -\frac{5}{4}$ , ta có  $y = x^4 - 3x^2 - \frac{5}{4}$ .

$$y = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{14}}{2} \text{ (loại vì } x^2 = \frac{3 - \sqrt{14}}{2} < 0 \text{)}. \text{ Loại B}$$

✚ Với  $m = \frac{5}{2}$ , ta có  $y = x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$ .  $y = 0(VN)$ .

Loại C.

Như vậy, chọn đáp án D.

Nếu bài toán đổi đề. Với giá trị  $m$  đó và yêu cầu tìm giá trị biểu thức nào đó và những bài toán liên quan khác thì với cách giải trên thì sẽ không giải quyết được vấn đề khác. Vậy có cách giải tổng quát nào cho dạng toán này.

Giả sử  $(C_m)$  cắt  $Ox$  tại bốn điểm  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  và do đồ thị hàm số đối xứng nhau qua  $Oy$  nên  $S_1 = S_2$  và

$$\int_0^{x_3} |y| dx = \int_{x_3}^{x_4} |y| dx \text{ và áp dụng điều này.}$$

Điều kiện để  $(C_m)$  cắt  $Ox$  tại 4 điểm.

$$\begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ 3 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}$$

Với điều kiện này thì loại ngay đáp án A, B, C và chọn D.  
Tiếp tục giải bài toán này để người đọc hiểu rõ hơn bài này.

Theo như nhận định trên thì

$$\int_0^{x_3} |x^3 - 3x^2 + m| dx = \int_{x_3}^{x_4} |x^4 - 3x^2 + m| dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_3} (x^4 - 3x^2 + m) dx = - \int_{x_3}^{x_4} (x^4 - 3x^2 + m) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_4} (x^4 - 3x^2 + m) dx = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{x^5}{5} - x^3 + mx \right) \Big|_0^{x_4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_4^5}{5} - x_4^3 + mx_4 = 0 \Leftrightarrow x_4^4 - 5x_4^2 + 5m = 0 \quad (1)$$

Mặt khác  $x_4$  là nghiệm của  $x_4^4 - 3x_4^2 + m = 0 \quad (2)$

Lấy (2)-(1) được  $x_4^2 = 2m$ .

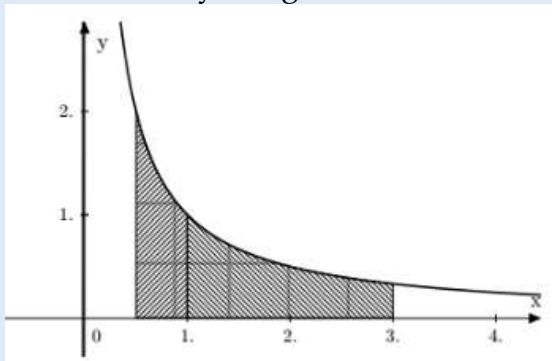
Thay vào (2) và được  $4m^2 - 6m + m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}$ .

**Bình luận:** Đây là một câu cho đáp án không hay. Vì nếu học sinh chỉ cần làm đến những bước kia thì có thể chọn ngay đáp án mà không cần làm tiếp.



**Câu 12. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Đề thi off thầy Đoàn Trí Dũng**

Cho hàm số  $y = \frac{1}{x}$  có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây. Gọi  $S$  là diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = a$ ,  $x = 1$  và trục hoành. Gọi  $S'$  là diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = b$  và trục hoành. Trong đó  $0 < a < 1 < b$ . Để  $S = S'$  thì khẳng định nào sau đây đúng?



- A.  $ab = 1$       B.  $a^2 + b^2 = 1$       C.  $a + b = ab$       D.  $a + b = e$

**Giải:**

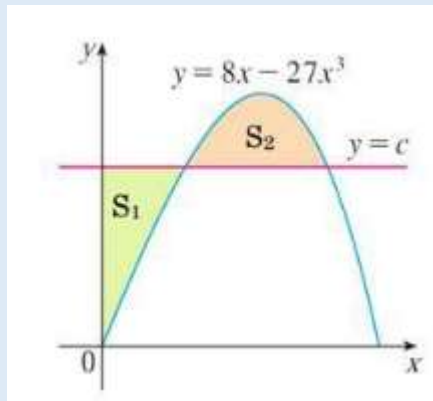
$$\text{Ta có } S = \int_a^1 \frac{1}{x} dx = -\ln a, \quad S' = \int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b.$$

$$S = S' \Leftrightarrow -\ln a = \ln b \Leftrightarrow ab = 1.$$



**Câu 13. Group Nhóm Toán 12**

Cho hàm số  $y = 8x - 27x^3$  có đồ thị (C) và đường thẳng  $\Delta: y = c$  với  $c > 0$ . Trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ, gọi  $S_1$  và  $S_2$  là diện tích của hai hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục tung như hình vẽ dưới đây. Biết rằng  $c$  thỏa mãn  $S_1 = S_2$ . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



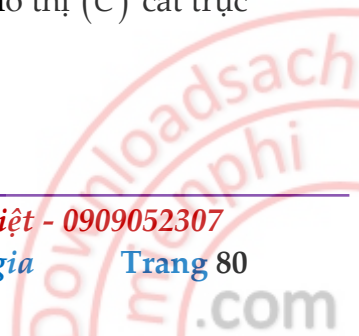
- A.  $0 < c < \frac{1}{2}$     B.  $\frac{3}{2} < c < 2$     C.  $\frac{1}{2} < c < 1$     D.  $1 < c < \frac{3}{2}$

**Giải:**

Đồ thị (C) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ

$$x = 0; x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

Như vậy, trong góc phần tư thứ nhất, đồ thị (C) cắt trục hoành tại  $x = 0$  và  $x = \frac{2\sqrt{6}}{9}$ .





Điểm cực đại của hàm số là  $x = \frac{2\sqrt{2}}{9}$ . Suy ra  $y_{CD} \approx 1,7$ .

Do đó  $0 < c < 1,7$ . Như vậy có thể loại ngay đáp án B.

Phương trình hoành độ giao điểm  $8x - 27x^3 = c$  (\*).

Giả sử (\*) có hai nghiệm  $x_1 < x_2$ . Khi đó:

$$S_1 = \int_0^{x_1} (c - 8x + 27x^3) dx \text{ và}$$

$$S_2 = \int_{x_1}^{x_2} (8x - 27x^3 - c) dx = - \int_{x_1}^{x_2} (27x^3 - 8x + c) dx$$

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^{x_2} (27x^3 - 8x + c) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{27}{4}x^4 - 4x^2 + cx \right) \Big|_0^{x_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{27}{4}x_2^4 - 4x_2^2 + cx_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 27x_2^3 - 16x_2 + 4c = 0 \quad (1)$$

Mặt khác  $x_2$  là nghiệm của phương trình (\*) nên

$$27x_2^3 - 8x_2 + c = 0 \Leftrightarrow 27x_2^3 = 8x_2 - c \quad (2). \text{ Thế vào (1)}$$

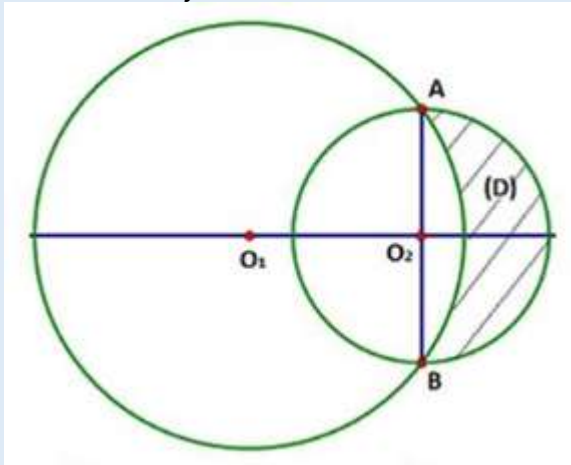
$$-8x_2 + 3c = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3c}{8}.$$

$$\text{Thế vào (2) được } 27 \cdot \left( \frac{3c}{8} \right)^3 = 2c \Leftrightarrow 729c^2 = 1024 \Leftrightarrow c = \frac{32}{27}.$$

Vậy  $c \in \left( 1; \frac{3}{2} \right)$ . Chọn D.

**Câu 14. Group Nhóm Toán 12**

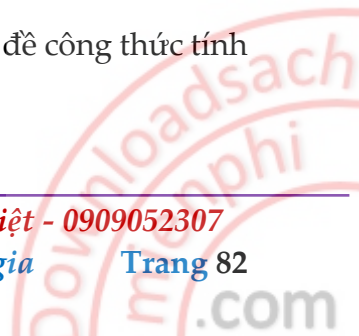
Cho hai đường tròn  $(O_1; 5)$  và  $(O_2; 3)$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$  sao cho  $AB$  là đường kính của đường tròn  $(O_2)$ . Gọi  $D$  là hình phẳng giới hạn bởi hai đường (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay quanh trục  $O_1O_2$  được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành.



- A.  $\frac{14\pi}{3}$       B.  $\frac{68\pi}{3}$       C.  $\frac{40\pi}{3}$       D.  $36\pi$

**Phân tích lời giải:** Bài toán có nhiều cách giải. Tùy vào độc giả thích giải theo cách nào. Sau đây, xin giới thiệu đến hai cách:

Cách thứ nhất: Áp dụng công thức tính thể tích chỏm cầu. khi đó thể tích cần tìm là  $\frac{1}{2} V_{(O_2;3)} - V_{cc}$ . Vấn đề công thức tính chỏm cầu là gì?



“Cho một khối chòm cầu có bán kính  $R$  và chiều cao  $h$ . Khi đó thể tích khối chòm cầu:  $V = \pi h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right)$ .

Cho khối cầu có bán kính  $R$ . Thể tích khối cầu:  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ ”.

Cách 2: Ứng dụng tích phân vào tính thể tích khối tròn xoay. Vấn đề là cần xây dựng hệ trục tọa độ. Chọn hệ trục sao cho dễ tính nhất có thể. Tùy vào mỗi người có một cách chọn hệ trục tọa độ riêng.

**Giải:**

**Cách 1:** Khi quay quanh trục  $O_1O_2$  đường tròn tâm  $O_2$  bán kính bằng 3. Ta được một khối cầu có bán kính bằng 3.

Khi đó thể tích khối cầu là  $V_{(O_1,3)} = \frac{4}{3} \pi 3^3 = 36\pi$ .

Khi quay quanh trục  $O_1O_2$  thì cung nhỏ  $AB$  tạo thành một khối chòm cầu có bán kính bằng 5. Và bây giờ ta cần xác định được chiều cao của nó. Dễ thấy  $h = 5 - O_1O_2$ .

Xét tam giác  $O_1O_2A$  vuông tại  $O_2$  có

$$O_1O_2 = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4. \text{ Suy ra } h = 1.$$

$$\text{Vậy } V_{cc} = \pi \left( 5 - \frac{1}{3} \right) = \frac{14}{3} \pi.$$

Do đó  $V_{ct} = 18\pi - \frac{14}{3} \pi = \frac{40}{3} \pi$ . Chọn C.

**Cách 2:** Xét hệ trục tọa độ  $Oxy$  với

$O \equiv O_1, O_1O_2 \equiv Ox, AB \equiv Oy$ . Khi đó  $(O_1), (O_2)$  lần lượt có phương trình là:

$$(O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25, (O_2): x^2 + y^2 = 9.$$

Thể tích cần tìm là:

$$V = \pi \int_0^3 |9 - x^2| dx - \pi \int_0^1 |25 - (x+4)^2| dx = \frac{40\pi}{3}$$

**Câu 15. Trích đề thầy Lê Phúc Lữ**

Trong giải tích, với hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên miền  $D = [a; b]$  có đồ thị là một đường cong  $C$ . Người ta có thể

tính độ dài của  $C$  bằng công thức  $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ . Với

thông tin đó, hãy tính độ dài đường cong  $C$  cho bởi  $y = \frac{x^2}{8} - \ln x$  trên  $[1; 2]$ .

A.  $\frac{3}{8} - \ln 2$

B.  $\frac{31}{24} - \ln 4$

C.  $\frac{3}{8} + \ln 2$

D.  $\frac{31}{24} + \ln 4$

**Phân tích lời giải:** Dạng toán đọc hiểu bổ đề của một bài toán. Và chỉ việc áp dụng công thức sau đó giải.

**Giải:**

Ta có  $y' = \frac{x}{4} - \frac{1}{x}$ . Khi đó,

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{16} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2}.$$

Suy ra

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^2}{8} + \ln|x|\right) \Big|_1^2 = \frac{3}{8} + \ln 2$$

Chọn C.

**Câu 16.**

Tính tích phân  $\int_0^2 \max\{x, x^3\} dx$ .

A. 2

B. 4

C.  $\frac{15}{4}$

D.  $\frac{17}{4}$

**Phân tích lời giải:** Đây là một câu khá lạ. Rõ ràng đây là một câu tính tích phân. Tuy nhiên hàm dưới dấu tích phân là max của của hai hàm. Vậy có cách nào để giải dạng này?

Nhắc một chút kiến thức về phần này?

“Cho hai hàm  $f, g$  liên tục trên  $\mathbb{K}$ . Khi đó

$$(1) \max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2}$$

$$(2) \min\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2} \text{ „}$$

Như vậy, với bài toán tính giá trị tích phân mà hàm dưới dấu giá trị tích phân sẽ chuyển về tính tích phân với hàm dưới dấu tích phân là hàm trị tuyệt đối mà đã biết cách giải. Nghĩa là:

$$\int_a^b \max\{f(x), g(x)\} dx = \int_a^b \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} dx$$

$$\int_a^b \min \{f(x), g(x)\} dx = \int_a^b \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} dx$$

Ngoài ra, ta có thể áp dụng cách này.

**Bước 1:** Giải phương trình  $f(x) - g(x) = 0$ . Từ đó tìm các nghiệm thỏa  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$

**Bước 2:** Xét dấu  $f(x) - g(x)$  trên các khoảng nghiệm.

**Bước 3:** Tách thành cách tích phân và giải.

**Giải:**

**Cách 1:**

$$\int_0^2 \max \{x, x^3\} dx = \int_0^1 \frac{x^3 + x + |x^3 - x|}{2} dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 x^3 dx = \frac{17}{4}$$

**Cách 2:**

$$\text{Ta có } x^3 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Do  $x \in [0; 2]$  nên  $x = 0, x = 1$ .

Lại có  $x^3 - x$  âm trên khoảng  $(0; 1)$  dương trên khoảng  $(1; 2)$  nên  $\max_{[0; 1]} \{x, x^3\} = x, \max_{[1; 2]} \{x, x^3\} = x^3$ .

$$\text{Vậy } \int_0^2 \max \{x, x^3\} dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 x^3 dx = \frac{17}{4}.$$





$$f(-1) = 4; f\left(-\frac{3}{5}\right) = 2\sqrt{5}; f(1) = 2. \text{ Vậy } \max T = 2\sqrt{5}$$

**Cách 2:**

$$T = |z+1| + 2|z-1| \leq \sqrt{(1+2^2)} \left( |z+1|^2 + |z-1|^2 \right)$$

$$\text{Ta có đẳng thức } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

$$\text{Khi đó ta có } T \leq \sqrt{5 \cdot 2(|z|^2 + 1)} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } \max T = 2\sqrt{5}.$$

**Lưu ý:** Học sinh phải nhớ đẳng thức bình hành:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

**Câu 2. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Thanh Chương 1 – Nghệ An**

Cho  $z_1, z_2$  là hai số phức thỏa mãn  $|2z - i| = |2 + iz|$ , biết  $|z_1 - z_2| = 1$ . Tính giá trị biểu thức  $P = |z_1 + z_2|$ .

A.  $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $P = \sqrt{2}$       C.  $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$       D.  $P = \sqrt{3}$

**Giải:**

Gọi  $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$ . Biến đổi  $|2z - i| = |2 + iz|$  ta được  $x^2 + y^2 = 1$ . Gọi  $A, B$  là điểm biểu diễn hai số phức  $z_1, z_2$ .

$$\text{Khi đó ta có } |z_1 - z_2| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BA}| = AB = 1.$$

Suy ra tam giác  $OAB$  đều cạnh bằng 1.

Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$ .



$$\text{Ta có } P = |z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |2\overrightarrow{OM}| = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

**Câu 3. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định**

Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 1| = 2$ . Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$  là một đường tròn. Tính bán kính  $r$  của đường tròn đó

- A.  $r = 16$       B.  $r = 4$       C.  $r = 25$       D.  $r = 9$

**Phân tích lời giải:** Đây là dạng toán, cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện nào đó và tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w$  với biểu thức  $w$  thông qua  $z$ . Để giải dạng toán này, ta cần rút ngược lại  $z$  theo  $w$  và thế vào điều kiện của  $z$  để tìm điều kiện của  $w$ . Một số kiến thức áp dụng trong bài toán này:

$$\text{“Cho } z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \text{ Khi đó } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{”}$$

**Giải:**

Ta có  $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2 \Leftrightarrow z = \frac{w - 2}{1 + i\sqrt{3}}$ . Thế vào điều kiện:

$$\left| \frac{w - 2}{1 + i\sqrt{3}} - 1 \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{w - 3 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} \right| = 2 \Leftrightarrow \frac{|w - 3 - i\sqrt{3}|}{|1 + i\sqrt{3}|} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|w - 3 - i\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}} = 2 \Leftrightarrow |w - 3 - i\sqrt{3}| = 4. \text{ Vậy } r = 4.$$

**Lưu ý:** Cho  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Khi đó  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

**Câu 4.**

Trong các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$ .

Tìm giá trị lớn nhất của  $P = |z|$ .

A.  $\max P = 3\sqrt{5}$

B.  $\max P = 5$

C.  $\max P = \sqrt{5}$

D.  $\max P = \sqrt{13}$

**Giải:**

**Cách 1:** Gọi  $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $P = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Ta có  $|x + yi - 2 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$ .

Đặt  $x = 2 + \sqrt{5} \sin t, y = 4 + \sqrt{5} \cos t, t \in [0; 2\pi]$ .

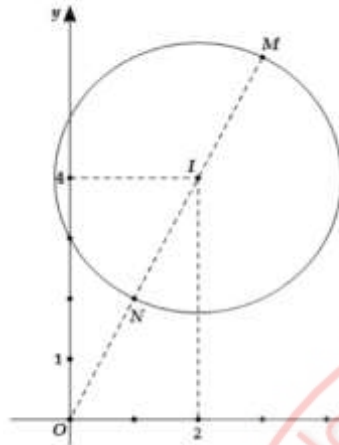
Suy ra

$$P = \sqrt{(2 + \sqrt{5} \sin t)^2 + (4 + \sqrt{5} \cos t)^2}$$
$$= \sqrt{25 + 4\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t}$$

Do  $-20 \leq 4\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t \leq 20$  nên  $\sqrt{5} \leq P \leq 3\sqrt{5}$ .

Vậy  $\max P = 3\sqrt{5}$ .

**Cách 2:** Từ cách 1, ta có tập hợp điểm  $M(z)$  là đường tròn tâm  $I(2; 4)$  và bán kính  $R = \sqrt{5}$ .



Vậy

$$\begin{aligned} \max P &= OM = OI + R \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

**Cách 3:** Áp dụng công thức giải nhanh (đã nói ở tài liệu công thức giải nhanh):

$$\text{Ta có } A = -2 - 4i, B = 0; k = \sqrt{5}.$$

$$T = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 - \overline{AB} + A\overline{B}} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Vậy } |2\sqrt{5} - \sqrt{5}| \leq P \leq 2\sqrt{5} + \sqrt{5} \text{ hay } \sqrt{5} \leq P \leq 3\sqrt{5}.$$

**Nếu đề bài hỏi:**

a. Tìm  $\min |z|$  thì  $\min |z| = ON = OI - R = \sqrt{5}$  (cách 2).

(cách 1, 3 hiển nhiên ta có  $\min |z|$ ).

b. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất lớn nhất.

Ứng với cách 1 thì không giải được.

Ứng với cách 2: Phương trình đường thẳng  $OI$  là:  $y = 2x$ .

Khi đó toạ độ  $M, N$  là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$$

Số phức có môđun lớn nhất là  $z = 3 + 6i$ . Số phức có môđun nhỏ nhất là:  $z = 1 + 2i$ .

Ứng với cách 3:

Ta giải hệ  $\begin{cases} |z-2-4i| = \sqrt{5} \\ \min|z| = \dots \end{cases}$  để tìm số phức có môđun nhỏ nhất và  $\begin{cases} |z-2-4i| = \sqrt{5} \\ \max|z| = \dots \end{cases}$  để tìm số phức có môđun lớn nhất.

**Câu 5. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Trường THPT Chuyên Khoa học Tự nhiên – Lần 1**

Trong các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|(1+i)z+1-7i| = \sqrt{2}$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $|z|$ .

- A. 4                      B. 3                      C. 7                      D. 6

**Giải:**

**Cách 1:** Ta có  $|(1+i)z+1-7i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| z + \frac{1-7i}{1+i} \right| = \frac{\sqrt{2}}{|1+i|}$   
 $\Leftrightarrow |z-3-4i| = 1$ . Lúc này chuyển về bài toán đã giải ở trên.

$$A = -3 - 4i; B = 0; k = 1.$$

$$T = \sqrt{|A^2| + |B^2| - \overline{AB} + A\overline{B}} = 5$$

Suy ra  $4 \leq P \leq 6$ . Vậy  $\max|z| = 6$ .

**Cách 2:** Xét bài toán tổng quát: “Trong các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-z_1| = r_1$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $P = |z-z_2|$ ”

$$\text{Đặt } r_2 = |z_1 - z_2|. \text{ Khi đó } \max P = r_1 + r_2; \min P = |r_1 - r_2|.$$

Thực chất đây chính là công thức giải nhanh ở cách 1, chỉ là biểu diễn ở dạng khác dễ nhớ hơn.

Từ cách biến đổi  $z_1 = 3 + 4i$ ;  $z_2 = 0$ . Suy ra  $r_2 = 5$ .

**Câu 6.**

Trong các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ .  
Biết số phức  $z = x + yi$  với  $x, y \in \mathbb{R}$  có môđun nhỏ nhất.  
Tính giá trị biểu thức  $P = x^2 + y^2$ .  
A. 10                      B. 8                      C. 16                      D. 26

**Giải:**

$$\begin{aligned} |z - 2 - 4i| = |z - 2i| &\Leftrightarrow |x - 2 + (y - 4)i| = |x + (y - 2)i| \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} &= \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \Leftrightarrow y = 4 - x \\ |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4 - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} \\ &= \sqrt{2(x - 2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Vậy  $P = 8$ .

**Lưu ý:** Gặp dạng bài mà có tập các điểm biểu diễn số phức  $z$  là một đường thẳng  $ax + by + c = 0$  thì rút  $y$  theo  $x$  rồi thế vào yêu cầu bài toán. Chẳng hạn như bài trên.

**Câu 7. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Toán Học Tuổi Trẻ - lần 5.**

Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 4| + |z + 4| = 10$ . Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z|$  lần lượt là:  
A. 10 và 4                      B. 5 và 4                      C. 4 và 3                      D. 5 và 3

**Giải:**

Gọi  $z = x + yi$ ;  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Theo giả thiết ta có:



$$|z - 4| + |z + 4| = 10 \Leftrightarrow |z - 4 + yi| + |x + 4 + yi| = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 \quad (1)$$

Gọi  $M(x; y), F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$  thì (1)  $\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10$ .

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  là elip với

$$F_1F_2 = 2c; MF_1 + MF_2 = 2a$$

$$\Rightarrow a = 5; c = 4 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3.$$

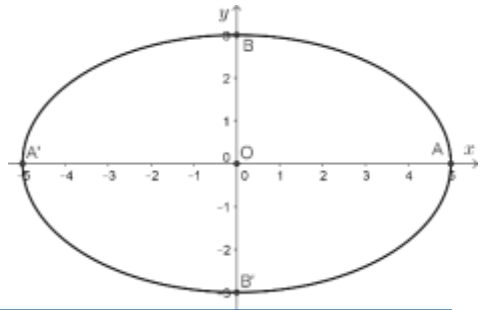
Phương trình chính tắc

của elip là:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

Vẽ hình, ta thấy

$$\max|z| = OA = OA' = 5;$$

$$\min|z| = OB = OB' = 3.$$



### Câu 8.

Biết số phức  $x + yi; x, y \in \mathbb{R}$  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện  $|z - (3 + 4i)| = \sqrt{5}$  và  $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$  đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun số phức  $z$ .

A.  $\sqrt{33}$

B. 50

C.  $\sqrt{10}$

D.  $5\sqrt{2}$

**Giải:**

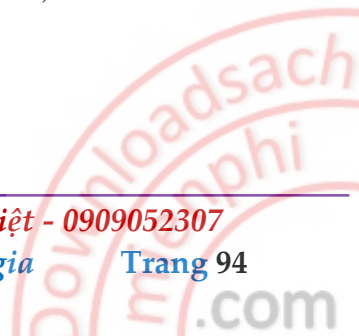
Ta có  $|z - (3 + 4i)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5 \quad (1)$ .

$$P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - x^2 - (y - 1)^2$$

Suy ra  $4x + 2y + 3 - P = 0 \quad (2)$ .

**Cách 1:** Từ (2) suy ra  $y = -2x + \frac{P - 3}{2}$

Thế vào (1) ta được:



$$(x-3)^2 + \left(-2x + \frac{P-11}{2}\right)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 2(8-P)x + 4 + \frac{(P-11)^2}{4} = 0$$

Để phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$(8-P)^2 - 5\left(4 + \frac{(P-11)^2}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33$$

Vậy  $\max P = 33$ .

Dấu bằng xảy ra khi  $x = \frac{33-8}{5} = 5 \Rightarrow y = 5$

Suy ra  $z = 5 + 5i \Rightarrow |z| = 5\sqrt{2}$ .

**Cách 2:** Dễ thấy (1) là phương trình đường thẳng. Khi đó ta tìm  $P$  sao cho  $\Delta$  và đường tròn (C) có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I; \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{|12+8+3-P|}{\sqrt{20}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |23-P| \leq 10$$

$$\Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33.$$

Vậy  $\max P = 33$ . Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} 4x + 2y - 30 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$$

### Câu 9.

Biết số phức  $x + yi; x, y \in \mathbb{R}$  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện  $|z| = |\bar{z} + 4 - 3i|$  và  $P = |z + 1 - i| + |z - 2 + 3i|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị  $P = x + 2y$ .

$$\text{A. } P = -\frac{61}{10} \quad \text{B. } P = -\frac{253}{50} \quad \text{C. } P = -\frac{41}{5} \quad \text{D. } P = -\frac{18}{5}$$

Giải:

$$\text{Ta có } |z| = |\bar{z} + 4 - 3i| \Leftrightarrow |x + yi| = |x + 4 - (y + 3)i|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x + 4)^2 + (y + 3)^2 \Leftrightarrow 8x + 6y + 25 = 0 (\Delta)$$

$$\begin{aligned} P &= |x + 1 + (y - 1)i| + |x - 2 + (y + 3)i| \\ &= \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2} = ME + MF \end{aligned}$$

Trong đó  $E = (-1; 1); F(2; -3), M(x; y)$ .

Khi đó bài toán trở thành tìm  $\Delta$  sao cho  $ME + MF$  đạt giá trị nhỏ nhất. Kiểm tra được  $E, F$  nằm cùng một phía so với  $\Delta$

Gọi  $E'$  là điểm đối xứng của  $E$  qua  $\Delta$ .

Suy ra  $EE'$  đi qua  $E$  và vuông góc với  $\Delta$  có phương trình là:  $3x - 4y + 7 = 0$ .

Gọi  $H$  là giao điểm của  $EE'$  với  $\Delta$  suy ra  $H\left(-\frac{71}{25}; -\frac{19}{25}\right)$

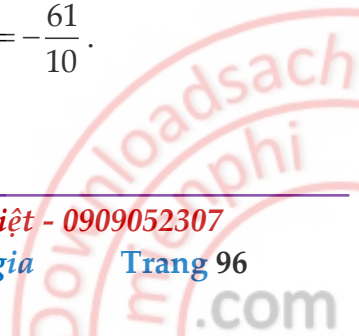
Suy ra  $E'\left(-\frac{117}{25}; -\frac{44}{25}\right)$  ( $H$  là trung điểm  $EE'$ ).

Ta có  $ME + MF = ME' + MF \geq E'F$ . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $M = E'F \cap \Delta$ .

Phương trình  $E'F$  đi qua hai điểm  $E', F$  là:

$$31x + 167y + 439 = 0$$

Vậy  $M\left(-\frac{67}{50}; -\frac{119}{50}\right)$ . Suy ra  $P = x + 2y = -\frac{61}{10}$ .





**Câu 10.**

Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z|=1$ . Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z+1| + |z^2 - z + 1|$ . Tính giá trị của  $M.m$

- A.  $\frac{13\sqrt{3}}{4}$       B.  $\frac{39}{4}$       C.  $3\sqrt{3}$       D.  $\frac{13}{4}$

**Giải:**

Giả sử  $z = x + yi$ ;  $x, y \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $x^2 + y^2 = 1$ .

$$\begin{aligned} P &= |z+1| + |z^2 - z + 1| = |x+1+yi| + |x^2 - y^2 - x + 1 + y(2x-1)i| \\ &= \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x^2 - y^2 - x + 1)^2 + y^2(2x-1)^2} \\ &= \sqrt{2+2x} + \sqrt{(2x^2 - x)^2 + (1-x^2)(2x-1)^2} \\ &= \sqrt{2x+2} + \sqrt{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

Nếu  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  thì  $P = \sqrt{2x+2} + 2x - 1$ .

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{2x+2} + 2x - 1$  với  $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}} + 2 > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

Suy ra  $\max f(x) = f(1) = 3$ ,  $\min f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$ .

Nếu  $-1 \leq x < \frac{1}{2}$  thì  $P = \sqrt{2x+2} + 1 - 2x$ .

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{2x+2} + 1 - 2x$  với  $x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right)$ .

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}} - 2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{8}.$$

Lập bảng biến thiên ta được  $\max f(x) = f\left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}$ .

Kết hợp cả 2 trường hợp ta được:

$$\max P = \frac{13}{4}; \min P = \sqrt{3}. \text{ Suy ra } M.m = \frac{13\sqrt{3}}{4}.$$

**Câu 11. Đề minh họa THPT Quốc gia 2017 – Lần 2**

Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $\frac{3}{2} < |z| < 2$     B.  $|z| > 2$     C.  $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$     D.  $|z| < \frac{1}{2}$

**Giải:**

$$\text{Ta có } \frac{\sqrt{10}}{z} = (1+2i)|z| + 2 - i \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{z} = |z| + 2 + (2|z| - 1)i$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{10}}{z} \right| = \left| |z| + 2 + (2|z| - 1)i \right| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{|z|} = \sqrt{(|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{|z|} = \sqrt{|z|^2 + 1} \Leftrightarrow |z|^4 + |z|^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

**Câu 12.**

Cho các số phức  $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$  thỏa mãn điều kiện

$$\frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2} \quad (1). \text{ Tính giá trị biểu thức } P = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1} \right|.$$

**A.**  $P = \frac{1}{\sqrt{2}}$       **B.**  $\sqrt{2}$       **C.** 2      **D.**  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

**Giải:**

$$(1) \Leftrightarrow 2z_2(z_1 + z_2) + z_1(z_1 + z_2) = z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2 + 2z_1z_2 + 2z_2^2 = 0$$

Nhận thấy đây là phương trình đẳng cấp và  $z_2 \neq 0$  nên chia cả hai vế cho  $z_2^2$ .

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2\frac{z_1}{z_2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = (-1+i)z_2 \\ z_1 = (-1-i)z_2 \end{cases} \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2}|z_2|$$

Do đó  $P = \frac{|z_1|}{|z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{|z_1|}{|z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1|} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ . Chọn D.

**Câu 13.**

Cho hai số phức  $u, v$  thỏa mãn điều kiện  $|u| = |v| = 10$  và  $|3u - 4v| = \sqrt{2017}$ . Tính  $M = |4u + 3v|$ .

**A.**  $\sqrt{2983}$       **B.**  $\sqrt{2883}$       **C.**  $\sqrt{2893}$       **D.**  $\sqrt{24}$

**Phân tích lời giải:** Cần chú ý ở hệ số của  $u$  và  $v$ . Vì giả thiết cho là  $3u - 4v$  và hỏi là  $4u + 3v$ . Khi nhắc tới môđun sẽ nhớ tới căn bình phương và đặc biệt là thấy ở cả  $u$  và  $v$  là  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

**Giải:**

Ta có  $|z|^2 = z\bar{z}$ . Đặt  $N = |3u - 4v|$ . Khi đó

$$N^2 = (3u - 4v)(3\bar{u} - 4\bar{v}) = 9|u|^2 + 16|v|^2 - 12(u\bar{v} + \bar{u}v)$$

$$M^2 = (4u + 3v)(4\bar{u} + 3\bar{v}) = 16|u|^2 + 9|v|^2 + 12(u\bar{v} + \bar{u}v)$$

$$\text{Do đó } M^2 + N^2 = 25(|u|^2 + |v|^2) = 5000$$

$$\Rightarrow M = \sqrt{5000 - N^2} = \sqrt{5000 - 2017} = \sqrt{2983}. \text{ Chọn câu A}$$

**Lưu ý:** Kỹ thuật liên hợp của số phức rất qua trọng. Bài trên áp dụng rất thành công và nhanh chóng ra kết quả. Nếu bạn đọc giải theo cách truyền thống đặt  $z = x + yi$  thì sẽ rất lâu.

**Câu 14.**

Nếu hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $z_1 z_2 \neq -1$  và  $|z_1| = |z_2| = 1$

thì số phức  $w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$  có phần ảo bằng

A. 0

B. 1

C. -1

D. 2

**Phân tích lời giải:** Với bài này, có thể chọn  $z_1, z_2$  thỏa mãn yêu cầu bài toán và tính số phức  $w$  theo  $z_1, z_2$ . Từ đó có được kết quả. Tuy nhiên để hiểu rõ vấn đề, ta cần có một lời giải hoàn chỉnh cho bài này. Bài này sử dụng một số phần lý thuyết như sau:

“Cho số phức  $z_1, z_2$ .

$$(1) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$(2) \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$(3) \frac{\overline{z_1}}{z_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$(4) \overline{\overline{z_1}} = z_1 \Leftrightarrow z_1 \text{ là số thực}$$

$$(5) |z_1| = 1 \Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{\overline{z_1}}$$

**Giải:**

**Cách 1:** Chọn  $z_1 = 1, z_2 = i$ , ta có  $w = \frac{1+i}{1+i} = 1$ .

Vậy phần ảo của  $w$  bằng 0.

**Cách 2:** Do  $|z_1| = |z_2| = 1$  nên  $z_1 = \frac{1}{z_1}, z_2 = \frac{1}{z_2}$ . Khi đó,

$$w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}} = \frac{\frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2}}{\frac{z_1 z_2 + 1}{z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \bar{w}$$

Vậy  $w$  là số thực hay phần ảo bằng 0.

**Câu 15. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An**

Cho số phức  $z = a + bi$  thỏa mãn điều kiện  $|z^2 + 4| = 2|z|$ .

Đặt  $P = 8(b^2 - a^2) - 12$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $P = (|z| - 2)^2$

B.  $P = (|z|^2 - 4)^2$

C.  $P = (|z| - 4)^2$

D.  $P = (|z|^2 - 2)^2$

**Giải:**

Giả thiết tương đương với

$$|z^2 + 4|^2 = 4|z|^2 \Leftrightarrow (z^2 + 4)(\bar{z}^2 + 4) = 4z\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow z^2 \cdot \bar{z}^2 + 4z^2 + 4\bar{z}^2 + 16 = 4z\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow (z\bar{z} - 2)^2 + 4(z^2 + \bar{z}^2) + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4(z^2 + \bar{z}^2) - 12 = (|z|^2 - 2)^2$$

Đặt  $z = a + bi$  thì  $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ ,  $\bar{z}^2 = a^2 - b^2 - 2abi$ .

$$\text{Suy ra } z^2 + \bar{z}^2 = 2(a^2 - b^2).$$

$$\text{Suy ra } P = 8(b^2 - a^2) = (|z| - 2)^2.$$

**Câu 16. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Toán học & Tuổi trẻ - Lần 8**

Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 3$ . Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z|$ .

A. 0

B. 3

C. 2

D. 4

**Giải:**

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 3 \Leftrightarrow \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = 9 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{(z^2 + 1)\left(\bar{z}^2 + 1\right)}{z \cdot \bar{z}} = 9 \Leftrightarrow z^2 \bar{z}^{-2} + z^2 + \bar{z}^{-2} + 1 = 9|z|^2$$

$$\Leftrightarrow |z|^4 + (z + \bar{z})^2 - 2|z|^2 + 1 = 9|z|^2.$$

Ta có  $(z + \bar{z})^2 \geq 0$  nên

$$9|z|^2 \geq |z|^4 - 2|z|^2 + 1 \Leftrightarrow |z|^4 - 11|z|^2 + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{11 - 3\sqrt{13}}{2} \leq |z|^2 \leq \frac{11 + 3\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \leq |z| \leq \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

Vậy  $\max|z| + \min|z| = \sqrt{13}$ .

**Tổng quát hóa:** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương và số phức  $z$  khác 0 thỏa mãn  $\left|az + \frac{b}{z}\right| = c$ . Khi đó

$$\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4ac}}{2a} \leq |z| \leq \frac{c + \sqrt{c^2 + 4ab}}{2a}$$

**Câu 17. Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Toán học và tuổi trẻ - Lần 8**

Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $2|z-1| + 3|z-i| \leq 2\sqrt{2}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$     B.  $|z| < \frac{1}{2}$     C.  $|z| > 2$     D.  $\frac{3}{2} < |z| < 2$

**Phân tích lời giải:** Sử dụng bất đẳng thức  $|u+v| \leq |u| + |v|$ .

**Giải:**

**Cách 1:** Ta có

$$2\sqrt{2} \geq 2|z-1| + 2|z-i| + |z-i| \geq 2|1+i| + |z-i|$$

Suy ra  $|z-i| \leq 0 \Leftrightarrow z=i \Rightarrow |z|=1$ . Chọn D.

**Cách 2:** Sử dụng hình học để giải:

Giả sử  $z = x + yi$  có điểm biểu diễn là  $M(x; y)$ .

Số phức  $z-1$  có điểm biểu diễn là  $A(x-1; y)$ ,  $z-i$  có điểm biểu diễn là  $B(x; y-1)$ . Khi đó

$$2|z-1| + 3|z-i| \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2OA + 3OB \leq 2\sqrt{2} = 2AB$$

Mặt khác  $2OA + 3OB = 2OA + 2OB + OB \geq 2AB + OB$ .

$$\text{Do đó } 2AB + OB \leq 2AB \Leftrightarrow OB = 0 \Leftrightarrow B \equiv O \Leftrightarrow z = i$$

**Câu 18. Đề minh họa THPT Quốc gia 2017 – lần 3**

Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$ . Gọi  $m$ ,  $M$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của  $|z-1+i|$

Tính  $P = m + M$

A.  $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$

B.  $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$

C.  $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$

D.  $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$

**Giải:**

Gọi  $M(x; y)$  là điểm biểu diễn số phức  $z = x + yi$ .

$$|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Và } T = |z - 1 + i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

**Cách 1:**

Đặt  $F_1(-2; 1), F_2(4; 7), A(1; -1)$ . Khi đó

$$MF_1 + MF_2 = 6\sqrt{2} \text{ và } T = MA.$$

Mặt khác ta có  $F_1F_2 = 6\sqrt{2}$ . Do đó điểm  $M$  thuộc vào đoạn thẳng  $F_1F_2$ .

Phương trình đường thẳng  $F_1F_2 : x - y + 3 = 0$ .

Kiểm tra được, hình chiếu của  $C$  lên đường thẳng  $F_1F_2$  thuộc ngay vào đoạn thẳng  $F_1F_1$ .

$$\text{Ta có } CF_1 = \sqrt{13}, CF_2 = \sqrt{73}, d(C; F_1F_2) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } T_{\max} = \sqrt{73}, T_{\min} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ và } P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}. \text{ Chọn B.}$$

**Bình luận:** Nếu hình chiếu của điểm  $C$  lên đường thẳng  $F_1F_2$  nằm ngoài đoạn thẳng  $F_1F_2$  thì cách giải trên có còn áp dụng được



không? Học sinh cần lưu ý, nếu hình chiếu không nằm trên đoạn  $F_1F_2$  thì khi đó giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đạt được chính tại hai điểm đầu mút của đoạn thẳng.

**Cách 2:**

Áp dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ .

Ta có

$$\begin{aligned} 6\sqrt{2} &= \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2} \\ &\geq \sqrt{(x+2+4-x)^2 + (y-1+7-y)^2} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

Do đó “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x+2}{4-x} = \frac{y-1}{7-y} \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$$

Từ đó rút ra được  $y = x + 3$ . Thay vào  $T$  được:

$$T = \sqrt{(x-1)^2 + (x+4)^2} = \sqrt{2x^2 + 6x + 19}$$

Do điểm  $x, y$  thỏa mãn biểu thức

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2} = 6\sqrt{2}$$

Nên có  $|x+2| + |x-4| = 6$  đúng với mọi  $x \in [-2; 4]$ .

Như vậy,

Xét hàm số  $y = 2x^2 + 6x + 19$  với  $x \in [-2; 4]$ .

Do đó  $\max y = 73, \min y = \frac{25}{2}$  trên đoạn  $[-2; 4]$

Suy ra  $\max T = \sqrt{73}, \min T = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

**Cách 3:** Áp dụng bất đẳng thức môđun  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $z_1 = 0$  hoặc  $z_2 = 0$  hoặc tồn tại  $k > 0, k \in \mathbb{R}$  sao cho  $z_1 = kz_2$ .

$$\text{Ta có } |z+2-i| + |z-4-7i| \geq |z+2-i+4-7i-z| = 6\sqrt{2}.$$

Vậy áp dụng dấu bằng xảy ra:

$$\text{TH1: } z = 2 - i. \text{ Suy ra } T = \sqrt{13}.$$

$$\text{TH2: } z = 4 + 7i. \text{ Suy ra } T = \sqrt{73}.$$

$$\text{TH3: Tồn tại số } k > 0 \text{ thỏa } |z+2-i| = k|z-4-7i|.$$

Ở đây, chọn  $k=1$  và thỏa mãn. Tập hợp các điểm biểu diễn của  $z$  thỏa mãn  $|z+2-i| = |z-4-7i|$  chính là đường thẳng  $x-y+3=0$  và quay về **cách 2**.

