TOÁN CAO CẤP B1

(ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH)

PHÂN PHỐI CHƯƠNG TRÌNH

Số tiết: 45

§1. Ma trận

§2. Định thức

§1. MA TRẬN
(*Matrix*)

1.1. Các định nghĩa

a) Định nghĩa ma trận

- Ma trận A cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ là 1 hệ thống gồm $m \times n$ số $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ và được sắp thành bảng gồm m dòng và n cột:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Các số a_{ij} được gọi là các phần tử của A ở dòng thứ i và cột thứ j.
- Cặp số (m, n) được gọi là kích thước của A.
- Khi $m = 1$, ta gọi:

$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$ là ma trận dòng.

- Khi $n = 1$, ta gọi $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ là ma trận cột.

- Khi $m = n = 1$, ta gọi:

  $A = (a_{11})$ là ma trận gồm 1 phần tử.

- Ma trận $O = (0_{ij})_{m \times n}$ có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là ma trận *không*.

- Tập hợp các ma trận A trên □ được ký hiệu là $M_{m,n}(□)$, để cho gọn ta viết là $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

• Ma trận vuông

- Khi $m = n$, ta gọi A là ma trận vuông cấp n. Ký hiệu là $A = (a_{ij})_n$.

- Đường chéo chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ được gọi là ***đường chéo chính*** của
$$A = (a_{ij})_n,$$
đường chéo còn lại được gọi là ***đường chéo phụ***.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Các ma trận vuông đặc biệt

- Ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ***ma trận chéo*** (*diagonal matrix*).
  Ký hiệu: $diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ma trận chéo cấp n gồm tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là ***ma trận đơn vị*** cấp n (*Identity matrix*). Ký hiệu là: I_n.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ma trận ma trận vuông cấp n có tất cả các phần tử ***nằm phía dưới*** (***trên***) đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ma trận ***tam giác trên*** (***dưới***).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- Ma trận vuông cấp n có tất cả các cặp phần tử đối xứng nhau qua đường chéo chính bằng nhau ($a_{ij} = a_{ji}$) được gọi là ***ma trận đối xứng***.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Ma trận bằng nhau

Hai ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ được gọi là ***bằng nhau***, ký hiệu $A = B$, khi và chỉ khi chúng cùng kích thước và $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

<u>VD 1.</u> Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ z & 2 & t \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & u & 3 \end{pmatrix}$.

Ta có:

$$A = B \Leftrightarrow x = 0;\ y = -1;\ z = 2;\ u = 2;\ t = 3.$$

1.2. Các phép toán trên ma trận

a) Phép cộng và trừ hai ma trận

Cho hai ma trận $A=(a_{ij})_{m\times n}$ và $B=(b_{ij})_{m\times n}$, ta có:

$$\boxed{A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}.}$$

VD 2. $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 7 & 0 & -3\end{pmatrix};$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ -3 & 6 & -5\end{pmatrix}.$$

Nhận xét

Phép cộng ma trận có tính giao hoán và kết hợp.

b) Phép nhân vô hướng

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\boxed{\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}.}$$

VD 3. $-3\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix};$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Chú ý

- Phép nhân vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng ma trận.
- Ma trận $-1.A = -A$ được gọi là ma trận đối của A.

c) Phép nhân hai ma trận

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{jk})_{n\times p}$, ta có:

$$\boxed{AB = (c_{ik})_{m\times p}.}$$

Trong đó, $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \quad i = \overline{1, m};\ \ k = \overline{1, p}$.

VD 4. Thực hiện phép nhân $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Giải. $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = (-1 + 4 - 15) = (-12).$

VD 5. Thực hiện phép nhân $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Giải. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$

VD 6. Tính $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Giải. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$.

Tính chất

Cho các ma trận $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ và số $\lambda \in \mathbb{R}$.

Giả thiết các phép nhân đều thực hiện được, ta có:

1) $(AB)C = A(BC)$;

2) $A(B + C) = AB + AC$; 3) $(A + B)C = AC + BC$;

4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$; 5) $AI_n = A = I_m A$.

VD 7. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Thực hiện phép tính: a) AB; b) BA.

Giải

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -9 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$

b) $BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$

VD 8. Thực hiện phép nhân:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-3&0\\-1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&3\\-1&-2&1\\2&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&2\\1&0&-2\\3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Giải.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-3&0\\-1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&3\\-1&-2&1\\2&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\3\\-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-3&0\\-1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24\\-3\\-42\end{pmatrix}.$$

Nhận xét

Phép nhân ma trận không có tính giao hoán.

▪ Lũy thừa ma trận

Cho ma trận vuông $A \in M_n(\mathbb{R})$.

• Lũy thừa ma trận A được định nghĩa theo quy nạp:

$$A^0 = I_n;\ A^1 = A;\ A^{k+1} = A^k.A,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

• Nếu $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ thì A được gọi là ***ma trận lũy linh***.

Số $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ bé nhất sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ được gọi là ***cấp*** của ma trận lũy linh A.

<u>VD 9.</u> Ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là lũy linh cấp 3.

Tính chất

1) $(0_n)^k = 0_n$; $(I_n)^k = I_n, \forall k \in \mathbb{N}$

2) $A^{k+m} = A^k.A^m, \forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall k, m \in \mathbb{N}$

3) $A^{km} = (A^k)^m, \forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall k, m \in \mathbb{N}.$

Chú ý

1) Nếu $A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) \in M_n(\mathbb{R})$ thì:

$$A^k = diag(a_{11}^k, a_{22}^k, \ldots, a_{nn}^k).$$

2) Nếu A, $B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $AB = BA$ (giao hoán) thì các hằng đẳng thức quen thuộc cũng đúng với A, B. Khi $AB \neq BA$ thì các hằng đẳng thức đó không còn đúng nữa.

VD 10. Cho $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ và $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tính $f(A) + I_2$.

Giải. Ta có:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra:

$$f(A)+I_2 = 2\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & -6\\ 0 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4 & -8\\ 0 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

VD 11. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, giá trị của $(I_2 - A)^{2011}$ là:

A. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; C. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có: $I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (I_2 - A)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\Rightarrow (I_2 - A)^{2010} = \left[(I_2 - A)^2\right]^{1005} = (I_2)^{1005} = I_2.$$

Vậy $(I_2 - A)^{2011} = I_2.\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D.$

<u>VD 12.</u> Tìm ma trận $D = (ABC)^5$, trong đó:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Giải.</u> Ta có: $ABC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Vậy $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 243 \end{pmatrix}.$

VD 13. Cho ma trận $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Hãy tìm ma trận $\left[A(\alpha)\right]^n, \forall n \in \mathbb{N}$?

Giải

• Ta có: $\left[A(\alpha)\right]^1 = A(\alpha)$,

$$\left[A(\alpha)\right]^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0\alpha & -\sin 0\alpha \\ \sin 0\alpha & \cos 0\alpha \end{pmatrix}.$$

$$\left[A(\alpha)\right]^2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

• Giả sử $\left[A(\alpha)\right]^k = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}$ (*).

• Với $n = k + 1$, từ (*) ta có:

$$\left[A(\alpha)\right]^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\alpha & -\sin(k+1)\alpha \\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha \end{pmatrix}.$$

Vậy $\left[A(\alpha)\right]^{n} = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$

VD 14. Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp 40 có các phần tử $a_{ij} = (-1)^{i+j}$. Phần tử a_{25} của A^2 là:

A. $a_{25} = 0$; B. $a_{25} = -40$; C. $a_{25} = 40$; D. $a_{25} = -1$.

Giải. Phần tử a_{25} của A^2 là tích dòng thứ 2 và cột thứ 5 của ma trận A.

• Các phần tử trên dòng thứ 2 của A là:

$$(-1 \quad 1 \quad -1 \ \ldots \ -1 \quad 1).$$

• Các phần tử trên cột thứ 5 của A là:

$$(1 \quad -1 \quad 1 \ \ldots 1 \quad -1).$$

Vậy $a_{25} = -40 \Rightarrow B$.

VD 15. Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp 100 có các phần tử $a_{ij} = (-1)^i.3^j$. Phần tử a_{34} của A^2 là:

A. $a_{34} = \dfrac{3^5}{4}(1 - 3^{100})$; B. $a_{34} = \dfrac{3^5}{4}(3^{100} - 1)$;

C. $a_{34} = \dfrac{3^5}{2}(3^{100} - 1)$; D. $a_{34} = \dfrac{3^5}{2}(1 - 3^{100})$.

Giải

Phần tử a_{34} của A^2 là tích dòng thứ 3 và cột thứ 4 của ma trận A.

• Các phần tử trên dòng thứ 3 của A là:

$$(-3 \quad -3^2 \quad -3^3 \quad \ldots \quad -3^{99} \quad -3^{100}).$$

• Các phần tử trên cột thứ 4 của A là:

$$(-3^4 \quad 3^4 \quad -3^4 \quad \ldots \quad -3^4 \quad 3^4).$$

Vậy $a_{34} = 3^4(3 - 3^2 + 3^3 - \ldots + 3^{99} - 3^{100})$

$$= 3^4.3.\frac{1-(-3)^{100}}{1-(-3)} = \frac{3^5}{4}(1-3^{100}) \Rightarrow A.$$

d) Phép chuyển vị (*Transposed matrix*)

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Khi đó, $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$ được gọi là ma trận chuyển vị của A (nghĩa là chuyển tất cả các dòng thành cột).

<u>VD 16.</u> Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Tính chất

1) $(A+B)^T = A^T + B^T;$

2) $(\lambda A)^T = \lambda.A^T;$

3) $(A^T)^T = A;$

4) $(AB)^T = B^T A^T;$

5) $A^T = A \Leftrightarrow A$ là ma trận đối xứng.

VD 17. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Tính $(AB)^T$.

b) Tính $B^T A^T$ và so sánh kết quả với $(AB)^T$.

Giải. a) $(AB)^T = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \right]^T$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \\ 2 & -3 & 12 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

b) Sinh viên tự làm.

1.3. Phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận (*Gauss – Jordan*)

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ $(m \geq 2)$. Các phép biến đổi sơ cấp (PBĐSC) dòng e trên A là:

1) (e_1) : Hoán vị hai dòng cho nhau $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_k} A'$.

2) (e_2) : Nhân 1 dòng với số $\lambda \neq 0$, $A \xrightarrow{d_i \to \lambda d_i} A''$.

3) (e_3) : Thay 1 dòng bởi tổng của dòng đó với λ lần dòng khác, $A \xrightarrow{d_i \to d_i + \lambda d_k} A'''$.

Chú ý

1) Trong thực hành ta thường làm $A \xrightarrow{d_i \to \mu d_i + \lambda d_k} B$.

2) Tương tự, ta cũng có các phép biến đổi sơ cấp trên cột của ma trận.

VD 18. Dùng PBĐSC trên dòng để đưa ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ về } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Giải. $A \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_2 \to \frac{1}{5}d_2]{d_3 \to d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

1.4. Ma trận bậc thang

- Một dòng của ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là dòng bằng 0 (hay ***dòng không***).

- Phần tử khác 0 đầu tiên tính từ trái sang của 1 dòng trong ma trận được gọi là phần tử ***cơ sở*** của dòng đó.

- Ma trận bậc thang là ma trận ***khác không*** cấp $m \times n$ $(m,\ n \geq 2)$ thỏa hai điều kiện:

  1) Các dòng bằng 0 (nếu có) ở phía dưới các dòng khác 0;

  2) Phần tử cơ sở của 1 dòng bất kỳ nằm ***bên phải*** phần tử cơ sở của dòng ở ***phía trên dòng đó***.

VD 19. Các ma trận bậc thang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Các ma trận không phải là bậc thang:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

▪ Ma trận bậc thang rút gọn

Ma trận bậc thang rút gọn là ma trận ***bậc thang*** có phần tử cơ sở của một dòng bất kỳ đều bằng 1 và là phần tử khác 0 ***duy nhất của cột*** chứa phần tử đó.

VD 20. $I_n,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

là các ma trận bậc thang rút gọn.

Ma trận $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ không là bậc thang rút gọn.

1.5. Ma trận khả nghịch

a) Định nghĩa

• Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là ***khả nghịch*** nếu tồn tại ma trận $B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho:

$$\boxed{AB = BA = I_n.}$$

• Ma trận B được gọi là ma trận ***nghịch đảo*** của A. Ký hiệu $B = A^{-1}$. Khi đó:

$$\boxed{A^{-1}A = AA^{-1} = I_n;\ (A^{-1})^{-1} = A.}$$

Chú ý

Nếu B là ma trận nghịch đảo của A thì B là duy nhất và A cũng là ma trận nghịch đảo của B.

VD 21. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ là hai ma trận nghịch đảo của nhau vì $AB = BA = I_2$.

VD 22. Cho biết ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ thỏa:

$A^3 - A^2 - A + I_3 = O_3$. Tìm A^{-1} ?

<u>Giải.</u> Ta có:

$$A^3 - A^2 - A + I_3 = O_3 \Leftrightarrow A(-A^2 + A + I_3) = I_3.$$

Vậy $A^{-1} = -A^2 + A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Chú ý

1) Nếu ma trận A có 1 dòng (hay cột) bằng 0 thì không khả nghịch.

2) $I^{-1} = I;\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

3) Nếu $ac - bd \neq 0$ thì:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac - bd} \cdot \begin{pmatrix} c & -b \\ -d & a \end{pmatrix}.}$$

VD 23. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Thực hiện phép tính: a) $(AB)^{-1}$; b) $B^{-1}A^{-1}$.

Giải. a) Ta có: $AB = \begin{pmatrix} 19 & 12 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$ và $19.7 - 11.12 = 1$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & 12 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -11 & 19 \end{pmatrix}.$$

b) Ta có:

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -11 & 19 \end{pmatrix}.$$

VD 24. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Tìm ma trận X thỏa $AX = B$.

Giải. Ta có:

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Vậy $X = -\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$.

b) Tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi sơ cấp trên dòng (tham khảo)

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ khả nghịch, ta tìm A^{-1} như sau:

***Bước* 1.** Lập ma trận $\left(A\middle|I_n\right)$ (ma trận chia khối) bằng cách ghép ma trận I_n vào bên phải của A.

***Bước* 2.** Dùng phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa $\left(A\middle|I_n\right)$ về dạng $\left(I_n\middle|B\right)$.

Khi đó: $A^{-1} = B$.

<u>**VD 25.**</u> Tìm nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Giải.</u> Ta có: $A\big|I_4 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[\substack{d_2 \to d_3 - d_2 \\ d_1 \to d_1 + d_2 - d_4}]{d_3 \to d_3 - d_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

I_4 A^{-1}

§2. ĐỊNH THỨC

2.1. Định nghĩa

a) Ma trận con cấp *k*

Cho $A = \left(a_{ij}\right)_n \in M_n(\mathbb{R})$.

- Ma trận vuông cấp k được lập từ các phần tử nằm trên giao của k dòng và k cột của A được gọi là *ma trận con cấp* k của A.

- Ma trận M_{ij} có cấp $n-1$ thu được từ A bằng cách bỏ đi dòng thứ i và cột thứ j được gọi là ma trận con của A ứng với phần tử a_{ij}.

VD 1. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ có các ma trận con ứng với các phần tử a_{ij} là:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad M_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad M_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Định thức (*Determinant*)

Định thức của ma trận vuông $A \in M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu $\det A$ hay $|A|$, là 1 số thực được định nghĩa:

- Nếu $A = (a_{11})$ thì $\det A = a_{11}$.
- Nếu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ thì $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Nếu $A = (a_{ij})_n$ (cấp $n \geq 3$) thì:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}$$

trong đó, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ và số thực A_{ij} được gọi là ***phần bù đại số*** của phần tử a_{ij}.

Chú ý

1) $\det I_n = 1, \ \det O_n = 0.$

2) Tính $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \qquad \text{hoặc} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(Tổng của tích các phần tử trên đường chéo nét liền trừ đi tổng của tích các phần tử trên đường chéo nét đứt).

VD 2. Tính định thức của các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải. $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3.4 - 1.(-2) = 14.$

$$\det B = \left[1.(-2).1 + 2.1.2 + 3.1.(-1)\right]$$

$$-\left[2.(-2)(-1) + 3.2.1 + 1.1.1\right] = -12.$$

VD 3. Tính định thức của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có:

$$\det A = 0.A_{11} + 0.A_{12} + 3.A_{13} + (-1).A_{14}$$

$$= 3(-1)^{1+3} \det M_{13} - (-1)^{1+4} \det M_{14}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -49.$$

2.2. Các tính chất cơ bản của định thức

Cho ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_n \in M_n(\mathbb{R})$, ta có các tính chất cơ bản sau:

a) Tính chất 1

$$\boxed{\det\left(A^T\right) = \det A.}$$

VD 4. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12.$

b) Tính chất 2

Nếu hoán vị hai dòng (hoặc hai cột) cho nhau thì định thức đổi dấu.

VD 5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

Hệ quả. Nếu định thức có ít nhất 2 dòng (hoặc 2 cột) giống nhau thì bằng 0.

VD 6. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^5 \\ 1 & y^2 & y^5 \end{vmatrix} = 0.$

c) Tính chất 3

Nếu nhân 1 dòng (hoặc 1 cột) với số thực λ thì định thức tăng lên λ lần.

VD 7.

$$\begin{vmatrix} 3.1 & 0 & 3.(-1) \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x^3 \\ x+1 & y & y^3 \\ x+1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}.$$

Hệ quả

1) Nếu định thức có ít nhất 1 dòng (hoặc 1 cột) bằng 0 thì bằng 0.

2) Nếu định thức có 2 dòng (hoặc 2 cột) tỉ lệ với nhau thì bằng 0.

VD 8. $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & y \\ x^3 & 0 & y^2 \end{vmatrix} = 0;\qquad \begin{vmatrix} 6 & -6 & -9 \\ 2 & 2 & -3 \\ -8 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 0.$

d) Tính chất 4

Nếu định thức có 1 dòng (hoặc 1 cột) mà mỗi phần tử là tổng của 2 số hạng thì ta có thể tách thành tổng 2 định thức.

VD 9. $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 & x \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix};$

$$\begin{vmatrix} \cos^2 x & 2 & 3 \\ \sin^2 x & 5 & 6 \\ \sin^2 x & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin^2 x & 2 & 3 \\ \cos^2 x & 5 & 6 \\ \cos^2 x & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

e) Tính chất 5

Định thức sẽ không đổi nếu ta cộng vào 1 dòng (hoặc 1 cột) với λ lần dòng (hoặc cột) khác.

VD 10. Sử dụng tính chất 5 để đưa định thức sau về dạng bậc thang: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Giải. $\Delta \xlongequal{d_2 \to d_2 + d_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{d_3 \to d_3 - 2d_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{d_3 \to d_3 + \frac{1}{4} d_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{vmatrix}.$$

Chú ý

Phép biến đổi $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{d_3 \to 4d_3 + d_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$ là sai

vì dòng 3 (trước khi thay đổi) đã nhân với số 4.

<u>VD 11.</u> Sử dụng tính chất 5 để tính $\Delta = \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}$.

<u>Giải.</u> Ta có:

$$\Delta \overset{d_1 \to d_1 + d_2 + d_3}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} x+4 & x+4 & x+4 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = (x+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}$$

$$\underset{d_3 \to d_3 - 2d_1}{\overset{d_2 \to d_2 - 2d_1}{=\!=\!=\!=}} (x+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x+4)(x-2)^2.$$

2.3. Định lý (*khai triển Laplace*)

Cho ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_n \in M_n(\mathbb{R})$, ta có các khai triển Laplace của định thức A:

a) Khai triển theo dòng thứ *i*

$$\boxed{\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.}$$

Trong đó, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$.

b) Khai triển theo cột thứ *j*

$$\boxed{\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.}$$

VD 12. Tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ bằng hai cách

khai triển theo dòng 1 và khai triển theo cột 2.

Giải. Khai triển theo dòng 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \overset{(-1)^{1+1}}{1}.1.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \overset{(-1)^{1+4}}{(-1)}.2.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

• Khai triển theo cột 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1).3.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$(-1)^{3+2}$$

VD 13. Áp dụng tính chất và định lý Laplace, hãy tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Giải. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{d_2 \to d_2 - 2d_1}{\underset{\substack{d_3 \to d_3 - d_1 \\ d_4 \to d_4 - 3d_1}}{=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{vmatrix}$

$$\overset{\textit{khai triển cột 1}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -34.$$

Các kết quả đặc biệt cần nhớ

1) Dạng tam giác

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

2) Dạng tích: $\boxed{\det(AB) = \det A.\det B.}$

3) Dạng chia khối

$$\begin{vmatrix} A & \vdots & B \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ O_n & \vdots & C \end{vmatrix} = \det A.\det C\text{, với } A,\ B,\ C \in M_n(\mathbb{R}).$$

VD 14. Tính $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Giải. Ta có: $\det A = 1.(-2).3.(-1) = 6$.

VD 15. Tính $\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 7 & 19 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$

Giải. Ta có:

$$\det B \overset{d_3 \leftrightarrow d_1}{=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -280.$$

VD 16. Tính $\det C = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right|$.

Giải. Ta có: $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$

VD 17. Tính $\det D = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T \right|.$

Giải. Ta có:

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -21.$$

VD 18. Phương trình $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 2 & x & x & -2 \\ 3 & 8 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$ có nghiệm

là: A. $x = \pm 1$;   B. $x = 1$;   C. $x = -1$;   D. $\left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

Giải. Chuyển vị định thức, ta được:

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & 2 \\ -2 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow A.$$

2.4. Ứng dụng định thức tìm ma trận nghịch đảo

a) Định lý

Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi:

$$\boxed{\det A \neq 0.}$$

VD 19. Giá trị của tham số m để ma trận

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m^2 \end{pmatrix}$$

khả nghịch là:

A. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$; B. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$; C. $m \neq 0$; D. $m \neq 1$.

<u>Giải.</u> Ta có:

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & 0 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m^2 \end{vmatrix} = m^5(m-1)^2.$$

$$\text{Vậy } A \text{ khả nghịch} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow B.$$

b) Thuật toán tìm A^{-1}

- ***Bước* 1.** Tính $\det A$. Nếu $\det A = 0$ thì kết luận A không khả nghịch. Ngược lại, ta làm tiếp bước 2.

- ***Bước* 2.** Lập ma trận $\left(A_{ij}\right)_n$, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det M_{ij}$.

  Suy ra ma trận ***phụ hợp* (*adjunct matrix*)** của A là:

$$\boxed{adjA = \left[\,A_{ij}\,\right]_n^T.}$$

- ***Bước* 3.** Ma trận nghịch đảo của A là:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}.adjA.}$$

VD 20. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có: $\det A = 0 \Rightarrow A$ không khả nghịch.

VD 21. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm A^{-1}.

Giải. Ta có: $\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow A$ khả nghịch.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\Rightarrow adjA = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.5. Hạng của ma trận

a) Định thức con cấp *k*

Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. Định thức của ma trận con cấp k của A được gọi là *định thức con cấp* k của A.

Định lý

Nếu ma trận A có tất cả các định thức con cấp k đều bằng 0 thì các định thức con cấp $k+1$ cũng bằng 0.

b) Hạng của ma trận (*rank of matrix*)

Cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận A được gọi là ***hạng*** của ma trận A.

Ký hiệu là $r(A)$.

Chú ý

• Nếu $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ khác 0 thì $1 \le r(A) \le \min\{m, n\}$.

• Nếu A là *ma trận không* thì ta quy ước $r(A) = 0$.

c) Thuật toán tìm hạng của ma trận

• **Bước 1.** Đưa ma trận cần tìm hạng về bậc thang.

• **Bước 2.** Số dòng khác 0 của ma trận bậc thang chính là hạng của ma trận đã cho.

• **Đặc biệt**

Nếu A là ma vuông cấp n thì:

$$\boxed{r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0.}$$

VD 22. Điều kiện của tham số m để ma trận

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ có hạng bằng 3 là:

A. $m \neq 1$; B. $m \neq -1$; C. $m \neq \pm 1$; D. $m \neq 0$.

Giải. Ta có:

$$r(A) = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow m \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow D.$$

VD 23. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & -8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Tìm $r(A)$.

Giải. Biến đổi $A \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

VD 24. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Tìm $r(A)$.

Giải. Biến đổi:

$$A \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Vậy $r(A) = 4$.

Chú ý

Ta có thể hoán vị cột của ma trận rồi đưa về bậc thang.

VD 25. Giá trị của tham số m để ma trận

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & 3 \\ 2 & m+2 & 0 \\ 2m & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ có } r(A) = 2 \text{ là:}$$

A. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=1 \end{array}\right.$; B. $m=1$; C. $m=-2$; D. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right.$.

Giải. $A \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m+1 \\ 0 & m+2 & 2 \\ 3 & 1 & 2m \end{pmatrix}$

$$A \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m+1 \\ 0 & m+2 & 2 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}.$$

- $m = 1: \ A \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$
- $m = -2:$

$$A \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

Vậy, ta chọn A.

VD 26. Tùy theo giá trị m, tìm hạng của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải. Biến đổi:

$$A \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_4]{c_1 \leftrightarrow c_5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & 0 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 \to d_3 - d_1 \\ d_4 \to d_4 - d_1}]{d_2 \to d_2 + d_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & m-1 \\ 0 & 2 & -1 & m-2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4 \to d_4 - d_3]{d_3 \to d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & m-1 \\ 0 & 0 & 1 & m-1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & -m+1 & -m+1 \end{pmatrix}.$$

- $m = 1: \; r(A) = 3.$
- $m \neq 1: r(A) = 4.$