§1. Hệ phương trình tổng quát
§2. Hệ phương trình thuần nhất

§1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa

Hệ gồm n ẩn x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và m phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (I)$$

trong đó, hệ số $a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$,

được gọi là ***hệ phương trình tuyến tính tổng quát***.

Đặt: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \;\; a_{ij} \;\;_{m\times n},$

$$B = \;\; b_1 \quad \dots \quad b_m \;\;^T \text{ và } X = \;\; x_1 \quad \dots \quad x_n \;\;^T$$

lần lượt là ma trận hệ số, ma trận cột hệ số tự do và ma trận cột ẩn.

Khi đó, hệ (I) trở thành $\boxed{AX = B}$.

• Bộ số $\alpha = \;\; \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n \;\;^T$ hoặc $\alpha = \;\; \alpha_1; \dots; \alpha_n$ được gọi là nghiệm của (I) nếu $A\alpha = B$.

VD 1. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_2 - 7x_3 = 5. \end{cases}$$

Hệ phương trình được viết lại dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

và $\alpha = (1; -1; -1; 1)$ là 1 nghiệm của hệ.

1.2. Định lý Crocneker – Capelli

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$. Gọi ma trận

mở rộng là $\overline{A} = \left(A|B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Định lý

Hệ $AX = B$ có nghiệm ***khi và chỉ khi*** $\boxed{r(A) = r(\bar{A}).}$

Trong trường hợp hệ $AX = B$ có nghiệm thì:

- Nếu $r(A) = n$: kết luận ***hệ có nghiệm duy nhất***;
- Nếu $r(A) < n$: kết luận ***hệ có vô số nghiệm*** phụ thuộc vào $n - r$ tham số.

VD 2. Tùy theo điều kiện tham số m, hãy biện luận số nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + my - 3z = 0 \\ (1 - m^2)z = m - 1. \end{cases}$$

Giải. Hệ đã cho có 3 ẩn, ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -3 \\ 0 & 0 & 1 - m^2 \end{pmatrix}, \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - m^2 & m - 1 \end{array}\right).$$

• Nếu $m = 1$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 1 < 3$.

Ta suy ra hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số.

- Nếu $m = -1$ thì $r(A) = 1 < 2 = r(\bar{A})$.

  Ta suy ra hệ vô nghiệm.

- Nếu $m \neq \pm 1$ thì $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$.

  Ta suy ra hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số.

VD 3. Điều kiện của tham số m để hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx \qquad\qquad + 8z - 7t = m - 1 \\ 3x + my + 2z + 4t = m \\ \qquad\qquad\qquad mz + 5t = m^2 - 1 \\ \qquad\qquad\qquad 5z - mt = 2m + 2 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất là:

A. $m \neq 0$; B. $m \neq 1$; C. $m \neq \pm 1$; D. $m \neq \pm 5$.

<u>Giải.</u> Hệ có 4 ẩn và ma trận hệ số là:

$$A=\begin{pmatrix} m & 0 & 8 & -7\\ 3 & m & 2 & 4\\ 0 & 0 & m & 5\\ 0 & 0 & 5 & -m\end{pmatrix}.$$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow r(A)=4$

$$\Leftrightarrow \det A\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 0\\ 3 & m\end{vmatrix}\begin{vmatrix} m & 5\\ 5 & -m\end{vmatrix}\neq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2(m^2+25)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0 \Rightarrow A.$$

1.3. Phương pháp giải hệ phương trình tổng quát

a) Phương pháp ma trận (tham khảo)

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$, với A là ma trận vuông cấp n khả nghịch.

Ta có:

$$\boxed{AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.}$$

VD 4. Giải hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp ma trận:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ \quad\quad y + 3z = 3 \\ 2x + y + z = -1. \end{cases}$$

Giải. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = -3, \\ y = 6, \\ z = -1. \end{cases}$

b) Phương pháp định thức (*hệ Cramer*)

Cho hệ $AX = B$, với A là ma trận vuông cấp n.

• ***Bước* 1.** Tính các định thức:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ j = \overline{1, n}$$

(thay cột thứ j trong Δ bởi cột tự do).

• ***Bước* 2.** Kết luận:

- Nếu $\Delta \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất:

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \forall j = \overline{1,\ n}.}$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì chưa có kết luận. Khi đó, ta giải tìm tham số và thay vào hệ để giải trực tiếp.

Chú ý

Khi $m = 1$ thì hệ $\begin{cases} (m-7)x + 12y - 6z = m \\ -10x + (m+19)y - 10z = 2m \\ -12x + 24y + (m-13)z = 0 \end{cases}$

có $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ nhưng hệ vô nghiệm.

VD 5. Giải hệ phương trình sau bằng định thức:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ \quad\quad y + 3z = 3 \\ 2x + y + z = -1. \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 24, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Vậy $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -3,\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 6,\ z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$

VD 6. Hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x+y=m+2\\ x+(m+1)y=0\end{cases}$

có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m=-2;$ B. $m\neq -2 \wedge m\neq 0;$

C. $m\neq 0;$ D. $m\neq -2.$

Giải. Ta có: $\Delta = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+2)$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m=-2 \vee m=0.$$

- $m = -2$: Hệ $\Leftrightarrow x - y = 0 \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm.

- $m = 0$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Vậy với $m \neq 0$ thì hệ có nghiệm $\Rightarrow C$.

c) Phương pháp ma trận bậc thang
(*phương pháp Gauss*)

Xét hệ phương trình tuyến tính $AX = B$.

• ***Bước* 1.** Đưa ma trận mở rộng $\left(A \middle| B\right)$ về dạng bậc thang bởi PBĐSC trên dòng.

• ***Bước* 2.** Giải ngược từ dòng cuối cùng lên trên.

Chú ý. Trong quá trình thực hiện bước 1, nếu:

- có 2 dòng tỉ lệ thì xóa đi 1 dòng;
- có dòng nào bằng 0 thì xóa dòng đó;
- có 1 dòng dạng $\left(0 \ldots 0 \middle| b\right)$, $b \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

VD 7. Giải hệ sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 3z = 3 \\ 2x + y + z = -1. \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$A\big|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 3z = 3 \\ 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \\ z = -1 \end{cases}.$$

VD 8. Giải hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Giải. Ta có: $\left(A\middle|B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 5 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3 \to 5d_3 - 2d_1]{d_2 \to 5d_2 - 4d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 39 & -15 & 6 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - 3d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right).$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

<u>VD 9.</u> Tìm nghiệm của hệ $\begin{cases} \text{x} + 4y + 5z = -1 \\ 2x + 7y - 11z = 2 \\ 3x + 11y - 6z = 1 \end{cases}$.

A. $x = 15, y = -4, z = 0$; B. Hệ có vô số nghiệm;

C. $\begin{cases} x = 15 - 79\alpha \\ y = -4 - 21\alpha; \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 15 + 79\alpha \\ y = -4 - 21\alpha. \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

<u>Giải.</u> Ta có: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -11 & 2 \\ 3 & 11 & -6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -21 & 4 \\ 0 & -1 & -21 & 4 \end{array}\right)$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + 5z = -1 \\ -y - 21z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 + 79\alpha \\ y = -4 - 21\alpha \Rightarrow D. \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

VD 10. Tìm nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - 2z = 7 \end{cases}.$

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 7 - 2\alpha; \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

C. Hệ có vô số nghiệm; D. Hệ vô nghiệm.

Giải. Ta có: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 & 15 \end{array}\right).$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ y - 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 2\alpha \Rightarrow B. \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

VD 11. Giá trị của tham số m để hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x + 2y + (7-m)z = 2 \\ 2x + 4y - 5z = 1 \\ 3x + 6y + mz = 3 \end{cases}$

có vô số nghiệm là:

A. $m = \pm 1$; B. $m = 1$; C. $m = -7$; D. $m = 7$.

Giải. Ta có: $\left(A\middle|B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7-m & 2 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 3 & 6 & m & 3 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7-m & 2 \\ 0 & 0 & 2m-19 & -3 \\ 0 & 0 & 4m-21 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7-m & 2 \\ 0 & 0 & 2m-19 & -3 \\ 0 & 0 & 2m-2 & 0 \end{array}\right).$$

Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < 3 \Leftrightarrow m = 1.$

Chú ý

- Khi hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm, ta gọi nghiệm phụ thuộc tham số là ***nghiệm tổng quát***.

  Nếu cho các tham số bởi các giá trị cụ thể ta được ***nghiệm riêng*** hay còn gọi là ***nghiệm cơ bản***.

- Muốn tìm điều kiện tham số để 2 hệ phương trình có nghiệm chung, ta ghép chúng thành 1 hệ rồi tìm điều kiện tham số để hệ chung đó có nghiệm.

<u>VD 12.</u> Tìm điều kiện của tham số m để 2 hệ phương trình sau có nghiệm chung:

$$\begin{cases} x+y-z+t=2m+1 \\ x+7y-5z-t=-m \end{cases}, \begin{cases} 2x+5y-2z+2t=2m+1 \\ 3x+7y-3z+3t=1 \end{cases}.$$

<u>Giải.</u> Hai hệ có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ:

$$\begin{cases} x+y-z+t=2m+1 \\ x+7y-5z-t=-m \\ 2x+5y-2z+2t=2m+1 \\ 3x+7y-3z+3t=1 \end{cases}$$ có ngiệm.

Ta có:

$$A\big|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2m+1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & -m \\ 2 & 5 & -2 & 2 & 2m+1 \\ 3 & 7 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2m+1 \\ 0 & 6 & -4 & -2 & -3m-1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2m-1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -6m-2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2m+1 \\ 0 & 6 & -4 & -2 & -3m-1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10m-2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow r\left(A\middle|B\right) = r(A) \Leftrightarrow -10m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{5}.$$

Vậy 2 hệ đã cho có nghiệm chung $\Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{5}.$

………………………………………………………………

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT

2.1. Định nghĩa

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là trường hợp đặc biệt của hệ phương trình tổng quát, có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (II).$$

Hệ (II) tương đương với $AX = (0_{ij})_{m\times 1}$.

Chú ý

- Do $r(\overline{A}) = r(A)$ nên hệ thuần nhất luôn có nghiệm.
- Nghiệm (0; 0;…; 0) được gọi là ***nghiệm tầm thường***.

2.2. Định lý 1

Hệ (II) chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi:

$$\boxed{\det A \neq 0.}$$

VD 1. Tìm điều kiện tham số m để hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau chỉ có nghiệm tầm thường:

$$\begin{cases} 3x + m^2 y + (m-5)z = 0 \\ (m+2)y + z = 0 \\ 4y + (m+2)z = 0. \end{cases}$$

Giải. Hệ chỉ có nghiệm tầm thường $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & m^2 & m-5 \\ 0 & m+2 & 1 \\ 0 & 4 & m+2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(m^2 + 4m) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -4 \end{cases}.$$

2.3. Định lý 2

Xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát $AX = B$ (I) và hệ phương trình thuần nhất $AX = O$ (II).

Khi đó:

- Hiệu 2 nghiệm bất kỳ của (I) là 1 nghiệm của (II);
- Tổng 1 nghiệm bất kỳ của (I) và 1 nghiệm bất kỳ của (II) là 1 nghiệm của (I).

VD 2. Cho 2 hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x + 4y + 5z = -1 \\ 2x + 7y - 11z = 2 \\ 3x + 11y - 6z = 1 \end{cases} \text{(I) và } \begin{cases} x + 4y + 5z = 0 \\ 2x + 7y - 11z = 0 \\ 3x + 11y - 6z = 0 \end{cases} \text{(II).}$$

Xét 2 nghiệm của (I) và 1 nghiệm của (II) lần lượt là:

$$\alpha_1 = (15; -4; 0),\ \alpha_2 = (-64; 17; -1)$$

và $\beta = (-158;\ 42; -2)$, ta có:

- $\alpha_1 - \alpha_2 = (79; -21;\ 1)$ là 1 nghiệm của (II);
- $\alpha_1 + \beta = (-143;\ 38; -2)$ là 1 nghiệm của (I).