Chương 3 . KHÔNG GIAN VECTƠ

Đặt $V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_i \in \mathbb{R}\}$.

Cho $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là các phần tử của $\mathbb{R}^n$, r là số thực tùy ý.

Ta định nghĩa các phép toán:

$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$

$rx = (rx_1, rx_2, \ldots, rx_n)$.

Các phép toán này có các tính chất sau đây

1) $(x+y)+z=x+(y+z),\ \forall x,y,z\in V;$

2) $\exists\theta\in V: x+\theta=\theta+x=x,\ \forall x\in V;$

3) $\forall x\in V,\ \exists(-x)\in V: (-x)+x=x+(-x)=\theta;$

4) $x+y=y+x,\ \forall x,y\in V;$

5) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y,\ \forall x,y\in V,\ \forall\lambda\in\mathbb{R};$

6) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x,\ \forall x\in V,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R};$

7) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x),\ \forall x\in V,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R};$

8) $1.x=x,\ \forall x\in V.$

Trong đó, $\theta\in V$ được gọi là ***vector không***.

1.2. Không gian vector con (*Vectorial subspace*)

▪ Định nghĩa

Cho kgvt V, tập $W \subset V$ được gọi là ***không gian vector con*** của V nếu W cũng là một kgvt.

▪ Định lý

Cho kgvt V, tập $W \subset V$ là kgvt con của V nếu:

$$\forall x, y \in W,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ thì } (x + \lambda y) \in W.$$

VD 2.

- Tập $W = \{\theta\}$ là kgvt con của mọi kgvt V.
- Tập $W = (\alpha, 0, \dots, 0) \big| \alpha \in \mathbb{R}$ là kgvt con của $\mathbb{R}^n$.

§2. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

2.1. Định nghĩa

Trong kgvt V, xét n vector u_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Khi đó:

- Tổng $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$,

  được gọi là một ***tổ hợp tuyến tính*** của n vector u_i.

- Hệ gồm n vector $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ được gọi là ***độc lập tuyến tính*** (viết tắt là *đltt*) nếu:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \theta \text{ thì } \lambda_i = 0, \forall i = 1, \ldots, n.$$

• Hệ $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ không là độc lập tuyến tính thì được gọi là ***phụ thuộc tuyến tính*** (viết tắt là *pttt*).

VD 1. Trong $\mathbb{R}^2$, xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ 2 vector:

$$A = \{u_1 = (1; -1),\ u_2 = (2;\ 3)\}.$$

Giải. Ta có:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \theta \Leftrightarrow \lambda_1(1; -1) + \lambda_2(2;\ 3) = (0;\ 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

Vậy hệ A là độc lập tuyến tính.

VD 2. Trong $\mathbb{R}^3$, xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ 3 vector:

$$B = \{u_1 = (-1;\ 3;\ 2), u_2 = (2;\ 0;\ 1), u_3 = (0;\ 6;\ 5)\}.$$

Giải. Ta có:

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \text{(I)}.$$

Hệ (I) có ma trận hệ số $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Do $A \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) < 3,$

nên hệ phương trình (I) có nghiệm không tầm thường.

Vậy hệ B là phụ thuộc tuyến tính.

2.2. Định lý

Hệ gồm n vector là ***pttt*** khi và chỉ khi tồn tại một vector là tổ hợp tuyến tính của $n-1$ vector còn lại.

Nghĩa là:

$$\boxed{u_j = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{j-1} u_{j-1} + \lambda_{j+1} u_{j+1} + \ldots + \lambda_n u_n.}$$

- **Hệ quả**

• Hệ có ***vector không*** thì phụ thuộc tuyến tính.

• Nếu có một bộ phận của hệ ***pttt*** thì hệ ***pttt***.

2.3. Hệ vector trong $\mathbb{R}^n$

Xét m vector $u_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $i = \overline{1, m}$ trong $\mathbb{R}^n$.

Ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ được gọi là ***ma trận dòng*** của hệ m vector $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_m\}$.

<u>VD 6.</u> Hệ $\{u_1 = (1; -1; -2),\ u_2 = (4;\ 2; -3)\}$

có ma trận dòng là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

▪ Định lý

Trong $\mathbb{R}^n$, cho hệ gồm m vector $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ có ma trận dòng là A.

Khi đó:

- Hệ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\boxed{r(A) = m.}$
- Hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $\boxed{r(A) < m.}$

▪ Hệ quả

- Trong $\mathbb{R}^n$, hệ có nhiều hơn n vector thì ***pttt***.
- Trong $\mathbb{R}^n$, hệ n vector ***đltt*** $\Leftrightarrow$ $\boxed{\det A \neq 0.}$

VD 7. Xét sự *đltt* hay *pttt* của các hệ vector:

a) $B_1 = \{(-1;\ 2;\ 0),\ (2;\ 1;\ 1)\}$;

b) $B_2 = \{(-1;\ 2;\ 0),\ (1;\ 5;\ 3),\ (2;\ 3;\ 3)\}$.

Giải

a) Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

Vậy hệ B_1 độc lập tuyến tính.

b) Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 7 & 3\\ 0 & 7 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=2<3.$$

Vậy hệ B_2 phụ thuộc tuyến tính.

VD 8. Trong $\mathbb{R}^3$, tìm điều kiện m để hệ sau là *pttt*:

$$\{(-m;\, 1;\, 1),\, (1-4m;\, 3;\, m+2)\}.$$

Giải. Ta có: $A = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1-4m & 3 & m+2 \end{pmatrix}$.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 3 & 1-4m & m+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 \end{pmatrix}.$$

Vậy hệ *pttt* $\Leftrightarrow r(A) < 2 \Leftrightarrow m = 1.$

<u>VD 9.</u> Trong $\mathbb{R}^3$, tìm điều kiện m để hệ sau là *đltt*:

$$\{(m;\,1;\,1),\,(1;\,m;\,1),\,(1;\,1;\,m)\}.$$

<u>Giải.</u> Ta có: $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

Hệ *đltt* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

VD 10. Trong $\mathbb{R}^4$, cho 4 vector:

$$u_1 = (1; -1;\ 0;\ 1),\ u_2 = (m;\ m; -1;\ 2),$$

$$u_3 = (0;\ 2;\ 0;\ m),\ u_4 = (2;\ 2; -m;\ 4).$$

Điều kiện m để u_1 là tổ hợp tuyến tính của $u_2,\ u_3,\ u_4$?

Giải. Do u_1 là tổ hợp tuyến tính của $u_2,\ u_3,\ u_4$ nên

$\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 thỏa:

$$u_1 = au_2 + bu_3 + cu_4.$$

Suy ra hệ:

$$\begin{cases} ma + 2c = 1 \\ ma + 2b + 2c = -1 \\ -a - mc = 0 \\ 2a + mb + 4c = 1 \end{cases}$$ có nghiệm không tầm thường.

Ta có: $A\big|B = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 2 & 1 \\ m & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -m & 0 \\ 2 & m & 4 & 1 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -m & 0 \\ 0 & m & 4-2m & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ m & 0 & 2 & 1 \\ 0 & m & 4-2m & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-m^2 & 1 \\ 0 & 0 & 4-2m & 1+m \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-m^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m^3+m^2-4m+2 \end{array}\right).$$

Vậy để u_1 là tổ hợp tuyến tính của u_2, u_3, u_4 thì:

$$r(A) = r\left(A\middle|B\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 + 2m^2 - 8m + 4 = 0 \\ 2 - m^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \vee m = -1 \pm \sqrt{3}.$$

………………………………………………………………

§3. CƠ SỞ, SỐ CHIỀU CỦA KGVT TỌA ĐỘ CỦA VECTOR

3.1. Cơ sở của không gian vector

- **Định nghĩa**

Trong kgvt V, hệ n vector $F = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ được gọi là một ***cơ sở*** (*basic*) của V nếu hệ F là *đltt* và mọi vector của V đều được biểu diễn tuyến tính qua F.

VD 1. Trong $\mathbb{R}^2$, xét hệ $F = \{u_1 = (1; -1),\ u_2 = (0;\ 1)\}$.

Ta có: hệ F là độc lập tuyến tính.

Mặt khác, xét vector tùy ý $x = (a;\ b) \in \mathbb{R}^2$ ta có:

$$x = a u_1 + (a + b) u_2.$$

Vậy hệ F là 1 cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

VD 2. Trong $\mathbb{R}^3$, xét hệ 2 vector:

$$B = \{u_1 = (1;\ 0;\ 0),\ u_2 = (0;\ 1;\ 0)\}.$$

Ta có: $\alpha u_1 + \beta u_2 \neq (1;\ 1;\ 1),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Vậy hệ B không phải là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

VD 3.

• Trong $\mathbb{R}^n$, hệ n vector:

$$E = \{e_i = (a_{i1};\, a_{i2}; \ldots;\, a_{in}),\; i = 1, 2, \ldots, n\}$$

trong đó: $a_{ij} = 1$ nếu $i = j$, $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$

được gọi là ***cơ sở chính tắc***.

▪ ***Chú ý***

Một không gian vector có thể có nhiều cơ sở và số vector (hữu hạn) trong các cơ sở là không đổi.

3.2. Số chiều của không gian vector

- **Định nghĩa**

Số vector có trong 1 cơ sở bất kỳ của không gian vector V được gọi là ***số chiều*** (*dimension*) của V.

Ký hiệu là: $\dim V$.

- ***Chú ý***

• Trong $\mathbb{R}^n$, mọi hệ gồm n vector *đltt* đều là cơ sở.

• Số chiều của kgvt có thể vô hạn. Trong chương trình, ta chỉ xét những kgvt hữu hạn chiều.

3.3. Tọa độ của vector

a) Định nghĩa

Trong kgvt V, cho cơ sở $F = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Vector $x \in V$ tùy ý có biểu diễn tuyến tính một cách duy nhất qua cơ sở F là $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i,\ \alpha_i \in \mathbb{R}$.

Ta nói x có ***tọa độ đối với cơ sở*** F là $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$.

Ký hiệu là: $[x]_F = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_n)^T$.

- ***Quy ước***

Ta viết tọa độ của vector x đối với cơ sở chính tắc E trong $\mathbb{R}^n$ là $[x]$ hoặc viết dưới dạng $x = (\alpha_1;...;\alpha_n)$.

VD 5. Trong $\mathbb{R}^2$, cho $x = (3;-5)$ và 1 cơ sở:

$$B = \{u_1 = (2;-1),\ u_2 = (1;\ 1)\}.$$ Tìm $[x]_B$?

Giải. Gọi $[x]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, ta có:

$$x = au_1 + bu_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ -a + b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{8}{3} \\ b = -\dfrac{7}{3} \end{cases}.$$

Vậy $[x]_B$ là $\left(\dfrac{8}{3}; -\dfrac{7}{3}\right)$.

VD 7. Trong $\mathbb{R}^2$, cho 2 cơ sở:

$$B_1 = \{u_1 = (1;\ 0),\ u_2 = (0; -1)\},$$

$$B_2 = \{v_1 = (2; -1),\ v_2 = (1;\ 1)\}.$$

Cho biết $[x]_{B_2}$ là $(1;\ 2)$. Hãy tìm $[x]_{B_1}$?

Giải. Gọi $x = (a;\ b)$, $[x]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ta có:

• $[x]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = v_1 + 2v_2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = (4;\ 1).$$

- $[x]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \alpha u_1 + \beta u_2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -1 \end{cases}.$$

Vậy $[x]_{B_1}$ là $(4; -1)$.

b) Tọa độ của vector trong các cơ sở khác nhau

- **Ma trận chuyển cơ sở**

Trong kgvt V, cho 2 cơ sở:

$$B_1 = \{u_i\},\ B_2 = \{v_i\},\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Ma trận $\left[[v_1]_{B_1}\ [v_2]_{B_1} \dots [v_n]_{B_1} \right]$ được gọi là ***ma trận chuyển cơ sở*** từ B_1 sang B_2.

Ký hiệu là: $P_{B_1 \to B_2}$.

Đặc biệt

Trong $\mathbb{R}^n$, ta có:

$$\boxed{P_{E\to B_1} = [u_1]\,[u_2]\ldots[u_n]}$$

(ma trận cột của các vector trong B_1).

- **Công thức đổi tọa độ**

$$\boxed{[x]_{B_1} = P_{B_1\to B_2}.[x]_{B_2}.}$$

VD 8. Trong $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở B_1 và B_2.

Cho biết $P_{B_2 \to B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ và $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Tìm tọa độ của vector v trong cơ sở B_2 ?

Giải. Ta có:

$$[v]_{B_2} = P_{B_2 \to B_1} [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Vậy $[v]_{B_2}$ là $(5;\, 11; -6)$.

VD 9. Tìm ma trận chuyển cơ sở $P_{B_1 \to B_2}$ trong VD 7.

Giải. Gọi $[v_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, [v_2]_{B_1} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ta có:

• $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow [v_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

• $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow [v_2]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Vậy $P_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

- **Định lý**

  Trong kgvt V, cho 3 cơ sở B_1, B_2 và B_3. Khi đó:

- $P_{B_i \to B_i} = I_n \ (i = 1, 2, 3);$

- $P_{B_1 \to B_3} = P_{B_1 \to B_2} . P_{B_2 \to B_3};$

- $P_{B_1 \to B_2} = \left(P_{B_2 \to B_1}\right)^{-1}.$

- **Hệ quả**

  Trong $\mathbb{R}^n$, ta có:

$$\boxed{P_{B_1 \to B_2} = P_{B_1 \to E} P_{E \to B_2} = \left(P_{E \to B_1}\right)^{-1} P_{E \to B_2}.}$$

VD 10. Dựa vào hệ quả, giải lại VD 7.

Giải. Ta có:

- $$P_{B_1 \to B_2} = P_{E \to B_1}^{\;-1} P_{E \to B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $$[x]_{B_1} = P_{B_1 \to B_2} . [x]_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

§4. KHÔNG GIAN SINH BỞI HỆ VECTOR

4.1. Định nghĩa

Trong kgvt V cho hệ gồm m vector $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của S được gọi là ***không gian con sinh bởi*** S.

Ký hiệu là: $< S >$ hoặc $spanS$.

4.2. Hệ vector trong $\mathbb{R}^n$

Trong kgvt $\mathbb{R}^n$, xét hệ $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ ta có:

$$< S > = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Gọi A là ma trận dòng m vector của S.
Khi đó:

- $\dim < S > = r(A)$ và $\dim < S > \le n.$
- Nếu $\dim < S > = k$ thì mọi hệ con gồm k vector ***đltt*** của S đều là cơ sở của $< S >$.

VD 1. Trong $\mathbb{R}^3$, cho hệ vector:

$$S = \{u_1 = (1;\ 0; -1),\ u_2 = (0;\ 1; -1)\}.$$

Hãy tìm dạng tọa độ của vector $v \in \ < S >$?

Giải. Ta có $v \in \ < S >$, nên:

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha;\ \beta; -\alpha - \beta)\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

VD 2. Trong $\mathbb{R}^4$, cho hệ vector:

$$S = \{(1;2;3;4),\ (2;4;9;6),\ (1;2;5;3),\ (1;2;6;3)\}.$$

Tìm số chiều của không gian sinh $< S >$?

Giải. Ta có:

$$\dim < S > = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$