§1. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1.1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính tổng quát

a) Định nghĩa

Cho X, Y là 2 kgvt trên $\mathbb{R}$. Ánh xạ $T : X \to Y$ được gọi là ***ánh xạ tuyến tính*** (hay toán tử tuyến tính) nếu thỏa mãn 2 điều kiện sau:

1) $T(\alpha x) = \alpha T(x), \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

2) $T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in X$.

▪ ***Chú ý***

• Đối với ánh xạ tuyến tính (viết tắt là AXTT), ký hiệu $T(x)$ còn được viết là Tx.

• Hai điều kiện của định nghĩa tương đương với:

$$T(x + \alpha y) = Tx + \alpha Ty, \ \forall x, y \in X, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

• $T(\theta_X) = \theta_Y$. Trong đó θ_X, θ_Y lần lượt là *vector không* của X và Y.

<u>VD 1.</u> Cho ánh xạ $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa:

$$T(x_1;\ x_2;\ x_3) = (x_1 - x_2 + x_3;\ 2x_1 + 3x_2).$$

Trong $\mathbb{R}^3$, xét $x = (x_1;\ x_2;\ x_3),\ y = (y_1;\ y_2;\ y_3)$.

Với $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$T(x + \alpha y) = T(x_1 + \alpha y_1;\ x_2 + \alpha y_2;\ x_3 + \alpha y_3)$$

$$= (x_1 + \alpha y_1 - x_2 - \alpha y_2 + x_3 + \alpha y_3;$$

$$2x_1 + 2\alpha y_1 + 3x_2 + 3\alpha y_2)$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3;\ 2x_1 + 3x_2)$$

$$+ \alpha(y_1 - y_2 + y_3;\ 2y_1 + 3y_2) = Tx + \alpha Ty.$$

Vậy ánh xạ T là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^3$ vào $\mathbb{R}^2$.

VD 2. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định như sau:

$$f(x;\,y) = (x - y;\,2 + 3y).$$

Xét $u = (1;\,2)$, $v = (0;-1)$ ta có:

$$\begin{cases} f(u+v) = f(1;\,1) = (1-1;\,2+3.1) = (0;\,5) \\ f(u) + f(v) = (-1;\,8) + (1;-1) = (0;\,7) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(u+v) \neq f(u) + f(v).$$

Vậy ánh xạ f không phải là AXTT từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

VD 3. Các AXTT thường gặp trong mặt phẳng:

• Phép chiếu vuông góc xuống trục Ox, Oy:

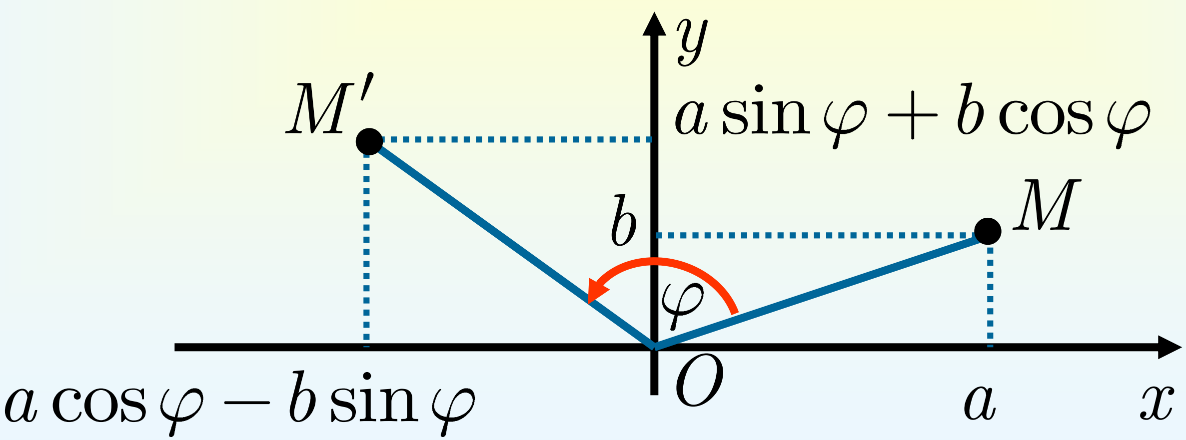
$$T(x;\, y) = (x;\, 0),\; T(x;\, y) = (0;\, y).$$

• Phép đối xứng qua trục Ox, Oy:

$$T(x;\, y) = (x; -y),\; T(x;\, y) = (-x;\, y).$$

• Phép quay 1 góc φ quanh gốc tọa độ O:

$$T(x;\, y) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi;\; x\sin\varphi + y\cos\varphi).$$



b) Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

▪ Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $T : X \to Y$.

• Tập $\{x \in X : Tx = \theta_Y\}$ được gọi là ***nhân*** của T.
Ký hiệu là $KerT$.
Vậy $KerT = \{x \in X : Tx = \theta_Y\}$.

• Tập $T(X) = \{Tx : x \in X\}$ được gọi là ***ảnh*** của T.
Ký hiệu là $RangeT$ hoặc $\operatorname{Im} T$.
Vậy $\operatorname{Im} T = \{Tx : x \in X\}$.

▪ Tính chất

Cho ánh xạ tuyến tính $T : X \to Y$, khi đó:

- $KerT$ là không gian con của X;
- $\operatorname{Im} T$ là không gian con của Y;
- Nếu S là tập sinh của X thì $T(S)$ là tập sinh của $\operatorname{Im} T$;
- T là đơn ánh khi và chỉ khi $KerT = \{\theta_X\}$.

▪ Định lý

Cho ánh xạ tuyến tính $T : X \to Y$, khi đó:

$$\boxed{\dim(KerT) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim X.}$$

➢ ***Chú ý***

- Khi $n = m$, ta gọi $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ là ***phép biến đổi tuyến tính*** (viết tắt là PBĐTT).

1.2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

a) Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ và hai cơ sở của $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ lần lượt là:

$$B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \text{ và } B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}.$$

Ma trận $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$: $\left[f(u_1)\right]_{B_2} \left[f(u_2)\right]_{B_2} \ldots \left[f(u_n)\right]_{B_2}$

được gọi là ***ma trận của AXTT*** f trong cặp cơ sở B_1, B_2.

Ký hiệu là: $[f]_{B_1}^{B_2}$ hoặc viết đơn giản là A.

Cụ thể là, nếu:

$$\begin{cases} f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + \ldots + a_{m1}v_m \\ f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + \ldots + a_{m2}v_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + \ldots + a_{mn}v_m \end{cases}$$

thì $[f]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$

▪ Trường hợp đặc biệt

Cho PBĐTT $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ và cơ sở $B=\{u_1,\ldots,u_n\}$.

Ma trận vuông A cấp n: $\left[f(u_1)\right]_B \left[f(u_2)\right]_B \ldots \left[f(u_n)\right]_B$

được gọi là ***ma trận của PBĐTT*** f trong cơ sở B.

Ký hiệu là: $[f]_B$ hoặc $[f]$ hoặc viết đơn giản là A.

Chú ý

Nếu A là ma trận của AXTT $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ trong cặp cơ sở chính tắc E_n, E_m thì $f(x)=Ax$, $x\in\mathbb{R}^n$.

VD 6. Cho AXTT $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$f(x;y;z;t) = (3x + y - z;\ x - 2y + t;\ y + 3z - 2t).$$

Tìm ma trận $A = [f]_{E_4}^{E_3}$? Kiểm tra $f(v) = Av,\ v \in \mathbb{R}^4$?

Giải. Ta có:

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1;\ 0;\ 0;\ 0) = (3;\ 1;\ 0) \\ f(e_2) = f(0;\ 1;\ 0;\ 0) = (1; -2;\ 1) \\ f(e_3) = f(0;\ 0;\ 1;\ 0) = (-1;\ 0;\ 3) \\ f(e_4) = f(0;\ 0;\ 0;\ 1) = (0;\ 1; -2) \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } A = [f]_{E_4}^{E_3} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x & \quad y & \quad z & \quad t \end{matrix} \end{array}.$$

- Sinh viên tự kiểm tra $f(v) = Av,\ v \in \mathbb{R}^4$.

VD 7. Cho AXTT $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$f(x;\, y) = (3x;\, x - 2y; -5y).$$

Tìm ma trận $[f]_{E_2}^{E_3}$?

A. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$;

C. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

VD 8. Cho PBĐTT $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$f(x;\ y;\ z) = (3x + y - z;\ x - 2y;\ y + 3z).$$

Tìm ma trận $[f]_{E_3}$?

A. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

C. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

VD 9. Cho PBĐTT $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có biểu thức:

$$f(x;\, y) = (2x - y;\, 3y).$$

Hãy tìm ma trận của f trong cặp cơ sở chính tắc E và cơ sở $B = \{u_1 = (1;\, 2),\, u_2 = (-1;\, 3)\}$?

Giải. Ta có:

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1;\, 0) = (2;\, 0) \\ f(e_2) = f(0;\, 1) = (-1;\, 3) \end{cases}.$$

Gọi $[f(e_1)]_B = (a;\, b),\, [f(e_2)]_B = (c;\, d)$ ta được:

$$\begin{cases} (2;\, 0) = a(1;\, 2) + b(-1;\, 3) \\ (-1;\, 3) = c(1;\, 2) + d(-1;\, 3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{6}{5},\, b = -\frac{4}{5},\, c = 0,\, d = 1.$$

$$\text{Vậy } \left[f\right]_E^B = \begin{pmatrix} \dfrac{6}{5} & 0 \\ -\dfrac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

VD 10. Cho PBĐTT $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận của f đối với cơ sở $F = \{u_1 = (1;\, 0),\ u_2 = (1;\, 1)\}$ là

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Hãy tìm biểu thức của f ?

Giải. Gọi biểu thức của f là:

$$f(x;\, y) = (ax + by;\, cx + dy).$$

Ta có: $\begin{cases} f(u_1) = f(1;\, 0) = (a;\, c), \\ f(u_2) = f(1;\, 1) = (a + b;\, c + d). \end{cases}$

Do $\left[f(u_1)\right]_F \; \left[f(u_2)\right]_F = A$ nên:

$$\begin{cases}(a;\, c) = 1(1;\, 0) + 3(1;\, 1)\\ (a+b;\, c+d) = 2(1;\, 0) + 4(1;\, 1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 4,\, b = 2,\, c = 3,\, d = 1.$$

Vậy $f(x;\, y) = (4x + 2y;\, 3x + y).$

VD 11. Cho PBĐTT $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Biết rằng:
$f(1;\,2) = (-4;\,3)$ và $f(3;\,4) = (-6;\,7)$. Hãy tìm $[f]_E$?

Giải. Gọi biểu thức của f là:

$$f(x;\,y) = (ax + by;\,cx + dy).$$

Ta có: $\begin{cases} f(1;\,2) = (a + 2b;\,c + 2d) \\ f(3;\,4) = (3a + 4b;\,3c + 4d) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a + 2b;\,c + 2d) = (-4;\,3) \\ (3a + 4b;\,3c + 4d) = (-6;\,7) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = -4 \\ 3a + 4b = -6 \\ c + 2d = 3 \\ 3c + 4d = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Vậy $[f]_E = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

VD 12. Cho AXTT $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ có $\left[f\right]_{E_2}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Tìm ma trận $\left[f\right]_{B_1}^{B_2}$, biết hai cơ sở:

$B_1 = \{u_1 = (1;\, 1),\ u_2 = (1;\, 2)\}$ và

$B_2 = \{v_1 = (1;\, 0;\, 1), v_2 = (1;\, 1;\, 1), v_3 = (1;\, 0;\, 0)\}$.

Giải. Đặt $A = \left[f\right]_{E_2}^{E_3}$, ta có:

$$f \quad u_1 \quad = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$f\ \ u_2\ \ = A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\4\\10\end{pmatrix}.$$

Suy ra: $\left[f(u_1)\right]_{B_2} = \begin{pmatrix}5\\2\\-9\end{pmatrix}, \left[f(u_2)\right]_{B_2} = \begin{pmatrix}6\\4\\-15\end{pmatrix}.$

Vậy $\left[f\right]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix}5 & 6\\2 & 4\\-9 & -15\end{pmatrix}.$

b) Định lý

Nếu AXTT $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ có $[f]_{B_1}^{B_1'} = A_1$, $[f]_{B_2}^{B_2'} = A_2$

và $P = P_{B_1 \to B_2}$, $P' = P_{B_1' \to B_2'}$ thì:

$$\boxed{A_2 = (P')^{-1}.A_1.P.}$$

- **Đặc biệt**

Nếu PBĐTT $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có $[f]_{B_1} = A$, $[f]_{B_2} = B$

và $P = P_{B_1 \to B_2}$ thì:

$$\boxed{B = P^{-1}.A.P}.$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] {[f]_{B_1}^{B_1'} = A_1} \arrow[r, bend left, "P'"] \arrow[r, bend right, "P"'] & {A_2 = [f]_{B_2}^{B_2'}} \end{tikzcd}$$

$$A_2 = (P')^{-1} A_1 P$$

VD 13. Cho PBĐTT $f(x;\, y) = (x + y;\, x - 2y)$.

Tìm $[f]_B$, với cơ sở $B = \{(2;\, 1),\, (1; -1)\}$?

Giải. Ta có:

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ và } P_{E \to B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra:

$$[f]_B = P_{E \to B}{}^{-1} [f]_E P_{E \to B}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

VD 14. Cho PBĐTT $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có biểu thức:

$$f(x;\,y;\,z) = (x+y+z;\, x-y+z;\, x+y-z).$$

Tìm $[f]_F$, với $F = \{(2;\,1;\,0),\,(1;\,0;\,1),\,(-1;\,0;\,1)\}$?

Giải. Ta có: $[f]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ và

$$P = P_{E\to F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra:

$$\left[f\right]_F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vậy } \left[f\right]_F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

VD 15. Cho AXTT $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có biểu thức:

$$f(x;\, y;\, z) = (x + y - z;\, x - y + z).$$

Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở:

$$B = \{(1;\,1;\,0),\,(0;\,1;\,1),\,(1;\,0;\,1)\}$$

và $B' = \{(2;\,1),\,(1;\,1)\}$?

Giải. Ta có: $[f]_{E_3}^{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ và

$$P = P_{E_3 \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ P' = P_{E_2 \to B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy $[f]_B^{B'} = \left(P'\right)^{-1} [f]_{E_3}^{E_2} P$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) Thuật toán tìm ma trận của AXTT

Cho AXTT $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ và hai cơ sở lần lượt là:

$B_1 = \{u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n\}$ và $B_2 = \{v_1,\ v_2,\ldots,\ v_m\}$.

• **Bước 1.** Tìm các ma trận:

$$S = \ [v_1]_{E_m}\ [v_2]_{E_m} \ldots [v_m]_{E_m}$$

(ma trận cột các vector của B_2),

$$Q = \ [f(u_1)]_{E_n}\ [f(u_2)]_{E_n} \ldots [f(u_n)]_{E_n}\ .$$

• **Bước 2.** Dùng PBĐSC dòng đưa ma trận $S\,|\,Q$

về dạng $I\,|\,[f]_{B_1}^{B_2}$.

VD 16. Cho PBĐTT $f(x;\, y) = (x + y;\, x - 2y)$.

Dùng thuật toán tìm $[f]_B$, với $B = \{(2;\, 1),\, (1; -1)\}$?

Giải. Ta có: $B_1 = B_2 = B$ và $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

$$[f(2;\, 1)] = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},\, [f(1; -1)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suy ra: $\left(S\,\middle|\,Q\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

$$\text{Vậy } [f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

VD 17. Cho AXTT $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có biểu thức:

$$f(x;\, y;\, z) = (x + y - z;\, x - y + z).$$

Dùng thuật toán tìm ma trận của f trong cặp cơ sở:

$$B = \{(1;\, 1;\, 0),\, (0;\, 1;\, 1),\, (1;\, 0;\, 1)\}$$

và $B' = \{(2;\, 1),\, (1;\, 1)\}$?

Giải. Ta có:

$$\begin{cases} f(1;\, 1;\, 0) = (2;\, 0) \\ f(0;\, 1;\, 1) = (0;\, 0) \\ f(1;\, 0;\, 1) = (0;\, 2) \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra: $S\big|Q = \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Vậy $[f]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

VD 18. Cho AXTT $f(x;\, y) = (x + y;\, y - x;\, x)$ và

cặp cơ sở: $A = \{(1;\, 0;\, 0),\, (1;\, 1;\, 0),\, (1;\, 1;\, 1)\}$,

$B = \{(1; -2),\, (3;\, 4)\}$. Dùng thuật toán, tìm $[f]_B^A$?

Giải. Ta có: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\begin{cases} f(1; -2) = (-1; -3;\, 1) \\ f(3;\, 4) = (7;\, 1;\, 3) \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suy ra: $S\big|Q = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Vậy $[f]_B^A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

d) Hạng của ánh xạ tuyến tính

- **Định nghĩa**

Hạng của AXTT $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là ***số chiều*** của không gian ảnh của nó.

Nghĩa là:

$$\boxed{r(f) = \dim(\operatorname{Im} f).}$$

- **Định lý**

Hạng của AXTT bằng hạng ma trận của nó.

VD 19. Cho PBĐTT $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận trong cơ sở F là $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Vậy $r(f) = r(A) = 1.$

VD 20. Cho AXTT $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận trong cặp cơ sở B, B' là $[f]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vậy $r(f) = r\left([f]_B^{B'}\right) = 2.$

…………………………………………………………………