THỐNG KÊ MÁY TÍNH & ỨNG DỤNG
Bài 2
XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Vũ Quốc Hoàng

(vqhoang@fit.hcmus.edu.vn)

FIT-HCMUS, 2018

Nội dung

- Xác suất có điều kiện
- Công thức nhân xác suất
- Công thức xác suất toàn phần
- Định lý Bayes
- Biến cố độc lập
- Mô hình xác suất “lặp lại thí nghiệm độc lập”
- Độc lập có điều kiện

Xác suất có điều kiện

- Ở vòng chung kết World Cup 2018, xét các biến cố:

  A: Đội đương kim vô địch Đức vô địch

  B: Đội mạnh Pháp vô địch

  C: Đội chủ nhà Nga vô địch

  - Trước vòng bảng: $P(A)$ lớn; $P(B)$ khá lớn; $P(C)$ nhỏ
  - Sau vòng bảng: $P(A) = 0$; $P(B)$ tăng không nhiều; $P(C)$ tăng nhiều
  - Sau vòng tứ kết: $P(B)$ tăng nhiều; $P(C) = 0$
  - Sau vòng bán kết: $P(B)$ lớn
  - Sau trận chung kết: $P(B) = 1$

Xác suất có điều kiện

- Cần điều chỉnh, cập nhật xác suất (khả năng xảy ra) của các biến cố liên quan đến thí nghiệm T khi có thêm thông tin về T:
  - Thông tin về T được thể hiện bằng việc biết (các) biến cố nào đó đã xảy ra
- Xác suất của biến cố A khi biết biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện (conditional probability) của A khi biết B xảy ra, kí hiệu là $\mathrm{P}(A|B)$ và được tính bằng định nghĩa:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{với } P(B) > 0)$$

  - $A \cap B$ chính là "A khi biết B xảy ra"
  - Chia cho $P(B)$ giúp chuẩn hóa xác suất

Xác suất có điều kiện
Tính chất

- Với B cho trước và $P(B) > 0$ thì $P(.|B)$ là một độ đo xác suất hợp lệ:
  - $0 \leq P(A|B) \leq 1$
  - $P(\Omega|B) = 1$
  - $P(\emptyset|B) = 0$
  - $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
  - Nếu $A \subset C$ thì $P(A|B) \leq P(C|B)$
  - $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$
  - $P(A|C, B) = P(A|C \cap B) = \frac{P(A \cap C|B)}{P(C|B)}$ (với $P(C|B) > 0$)
  - …
  - "Các công thức, tính chất xác suất vẫn đúng khi lấy điều kiện"

Xác suất có điều kiện
Ví dụ

- Tung một đồng xu đồng chất 3 lần: $\Omega = \{HHH, HHT, \dots, TTT\}$
  - Biến cố "lần 1 được ngửa": $B_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$; Biến cố "lần 2 được ngửa": $B_2 = \{HHH, HHT, THH, THT\}$; Biến cố "được đúng 2 lần ngửa": $A = \{HHT, HTH, THH\}$; Biến cố "được ít nhất 2 lần ngửa": $C = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}; P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{4}{8}$$

$$P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{|A \cap B_1|}{|B_1|} = \frac{|\{HHT, HTH\}|}{|B_1|} = \frac{2}{4} = P(A|B_2)$$

$$P(A|B_1, B_2) = P(A|B_1 \cap B_2) = \frac{P(A \cap B_1 \cap B_2)}{P(B_1 \cap B_2)} = \frac{|\{HHT\}|}{|\{HHH, HHT\}|} = \frac{1}{2}$$

$$P(C|B_1, B_2) = P(C|B_1 \cap B_2) = \frac{P(C \cap B_1 \cap B_2)}{P(B_1 \cap B_2)} = \frac{|\{HHT, HHH\}|}{|\{HHH, HHT\}|} = 1$$

Xác suất có điều kiện
Ví dụ

		Kiểu dáng: Đạt	Kiểu dáng: Không đạt	
Độ sáng	Đạt	117	3	120
Độ sáng	Không đạt	8	2	10
		125	5	130

- Chọn ngẫu nhiên 1 bóng đèn
    - A: “bóng đèn được chọn thỏa tiêu chí kiểu dáng”
    - B: “bóng đèn được chọn thỏa tiêu chí độ sáng”

$$P(A) = \frac{125}{130}; P(B) = \frac{120}{130}; P(A \cap B) = \frac{117}{130}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{117/130}{120/130} = \frac{117}{120} \text{ hoặc } \textcolor{red}{\text{từ bảng}} \text{ ta có } P(A|B) = \frac{117}{120}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{117/130}{125/130} = \frac{117}{125} \text{ hoặc } \textcolor{red}{\text{từ bảng}} \text{ ta có } P(B|A) = \frac{117}{125}$$

Xác suất có điều kiện
Ví dụ

- Một hộp gồm 8 bi trắng và 2 bi đỏ. Lần lượt bốc 2 viên không hoàn lại. Tính xác suất "lần hai bốc được bi đỏ" biết "lần một bốc được bi trắng"?
- Cách giải thông thường: Không gian mẫu là các chỉnh hợp chọn 2 từ 10 bi. Gọi A, B lần lượt là các biến cố "lần hai bốc được bi đỏ", "lần một bốc được bi trắng". Ta có:

$$P(B) = \frac{P_8^1 \times P_9^1}{P_{10}^2} = \frac{8 \times 9}{10 \times 9}; P(A \cap B) = \frac{P_8^1 \times P_2^1}{P_{10}^2} = \frac{8 \times 2}{10 \times 9}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{8 \times 2}{8 \times 9} = \frac{2}{9}$$

- Cách giải vi diệu ☺: Khi lần một bốc được bi trắng thì trong hộp còn 7 bi trắng và 2 bi đỏ. Do đó xác suất để lần hai bốc được bi đỏ là:

$$P(A|B) = \frac{2}{9}$$

Công thức nhân xác suất

- Công thức nhân xác suất (multiplication rule):
  - $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$ (khi $P(B) > 0$)
  - $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ (khi $P(A) > 0$)
- Trong nhiều trường hợp, xác suất có điều kiện $P(A|B)$ dễ tính hơn $P(A \cap B)$
- Công thức nhân tổng quát: giả sử có n biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ với $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, ta có:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Công thức nhân xác suất
Ví dụ

- Một hộp gồm 8 bi trắng và 2 bi đỏ. Lần lượt bốc 3 viên không hoàn lại. Tính xác suất "lần một và lần hai bốc được bi trắng còn lần ba bốc được bi đỏ"?
- Gọi A_i là biến cố "lần thứ i bốc được bi trắng". (Khi đó A_i^c là biến cố "lần thứ i bốc được bi đỏ".) Ta có:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3^c|A_1 \cap A_2)$$
$$= \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{7}{45}$$

Công thức xác suất toàn phần

- $B_1, B_2, \dots, B_n$ được gọi là một họ đầy đủ các biến cố (hay một phân hoạch) của Ω nếu:
  - $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$
  - $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$
- Công thức xác suất toàn phần (law of total probability): giả sử có phân hoạch $B_1, B_2, \dots, B_n$ với $P(B_i) > 0$, ta có:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \times P(A|B_i)$$

  - Đặc biệt:

$$P(A) = P(B) \times P(A|B) + P(B^c) \times P(A|B^c)$$

Công thức xác suất toàn phần
Ví dụ

- Một hộp gồm 8 bi trắng và 2 bi đỏ. Lần lượt bốc 2 viên không hoàn lại. Tính xác suất "lần hai bốc được bi đỏ"?
- Gọi A_i là biến cố "lần thứ i bốc được bi trắng". (Khi đó A_i^c là biến cố "lần thứ i bốc được bi đỏ".) Ta có:

$$P(A_2^c) = P(A_1) \times P(A_2^c | A_1) + P(A_1^c) \times P(A_2^c | A_1^c)$$

$$= \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$$

Định lý Bayes

- Giả sử bạn đi xét nghiệm một bệnh nan y và được kết quả là dương tính (positive)
- Biết rằng:
  - Độ nhạy (sensitive) của xét nghiệm là 90%: nghĩa là, trong 100 người bị bệnh thì khoảng 90 người cho kết quả xét nghiệm dương tính
  - Độ đặc hiệu (specificity) của xét nghiệm là 95%: nghĩa là, trong 100 người không bệnh thì khoảng 95 người cho kết quả xét nghiệm âm tính
  - Độ phổ biến (prevalence) của bệnh là 1/10000: nghĩa là, trong 10000 người thì có khoảng 1 người bị bệnh
- Vậy bạn có nên lo chuẩn bị hậu sự không? ☺
  - Trước khi xét nghiệm: xác suất bạn bị bệnh là 1/10000
  - Sau khi xét nghiệm: do kết quả dương tính, xác suất bạn bị bệnh sẽ tăng

Định lý Bayes

- Định lý Bayes (Bayes' theorem): giả sử có phân hoạch $B_1, B_2, \ldots, B_n$ với $P(B_i) > 0$, có biến cố A với $P(A) > 0$. Khi đó, với mọi $i = 1, \ldots, n$ ta có:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \times P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \times P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) \times P(A|B_j)}$$

  - $P(B_i)$: xác suất tiên nghiệm (prior probability) của B_i
  - $P(B_i|A)$: xác suất hậu nghiệm (posterior probability) của B_i khi biết A
  - $P(A|B_i)$: xác suất hợp lý (likelihood) của A theo B_i
  - Lưu ý, $P(A)$ không phụ thuộc vào B_i nên ta có:

$$P(B_i|A) \propto P(B_i) \times P(A|B_i) \quad \text{(kí hiệu } \propto \text{ là "tỉ lệ với")}$$

Định lý Bayes
Ví dụ

- Trong thí nghiệm xét nghiệm trên. Đặt các biến cố:
  - B: bạn bị bệnh
  - A: bạn xét nghiệm ra dương tính
- Ta có:
  - $P(A|B) = 0.9$
  - $P(A^c|B^c) = 0.95 \Longrightarrow P(A|B^c) = 1 - P(A^c|B^c) = 0.05$
  - $P(B) = 1/10000 = 0.0001 \Longrightarrow P(B^c) = 1 - P(B) = 0.9999$
- Áp dụng định lý Bayses ta có:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(B) \times P(A|B) + P(B^c) \times P(A|B^c)} = \frac{0.0001 \times 0.9}{0.0001 \times 0.9 + 0.9999 \times 0.05}$$
$$\approx 0.0018 = 18/10000$$

Định lý Bayes
Tính xác suất hậu nghiệm qua nhiều giai đoạn

- Nếu thí nghiệm được tiến hành qua nhiều giai đoạn thì xác suất hậu nghiệm ở giai đoạn trước là xác suất tiên nghiệm của giai đoạn tiếp theo
- Ví dụ: giả sử, để chắc ăn, bạn xét nghiệm một lần nữa và vẫn ra dương tính
  - Trước khi xét nghiệm: xác suất bạn bị bệnh là 1/10000
  - Sau khi xét nghiệm lần 1: do kết quả dương tính, xác suất bạn bị bệnh là 18/10000
  - Sau khi xét nghiệm lần 2: do kết quả vẫn dương tính, xác suất bạn bị bệnh sẽ tăng
- Ta có: $P(B) = 18/10000 = 0.0018 \Longrightarrow P(B^c) = 1 - P(B) = 0.9982$
- Áp dụng định lý Bayses ta có:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(B) \times P(A|B) + P(B^c) \times P(A|B^c)} = \frac{0.0018 \times 0.9}{0.0018 \times 0.9 + 0.9982 \times 0.05}$$
$$\approx 0.0314 = 314/10000$$

Biến cố độc lập

- Tung ngẫu nhiên một đồng xu đồng chất 2 lần, $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$:
  - Làm sao hình thức hóa trực quan "lần hai ngẫu nhiên so với lần một" hay "lần hai không phụ thuộc (về xác suất) lần một" hay "lần hai độc lập (về xác suất) lần một"?
  - Đặt A_i là biến cố "tung được mặt ngửa ở lần $i = 1, 2$"
  - $A_1 = \{HH, HT\}; A_2 = \{HH, TH\};\ A_1 \cap A_2 = \{HH\}$. Ta có:
$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}; P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}; P(A_1 \cap A_2) = \frac{|A_1 \cap A_2|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$
  - Do đó ta có:
$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A_2)$$
  - Tương tự ta có: $P(A_2|A_1^c) = P(A_2)$ (hoặc suy ra từ $P(A_2|A_1) = P(A_2)$)
  - Cũng suy ra được: $P(A_2^c|A_1) = P(A_2^c)$ và $P(A_2^c|A_1^c) = P(A_2^c)$
  - Vậy xác suất ra mặt nào ở lần hai cũng không thay đổi dù ra mặt nào ở lần một

Biến cố độc lập

- Hai biến cố $\{A, B\}$ được gọi là độc lập (independent) với nhau nếu:
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
Một cách tương đương:
$$P(A|B) = P(A) \ \ (\text{nếu } P(B) > 0)$$
hay:
$$P(B|A) = P(B) \ \ (\text{nếu } P(A) > 0)$$
- Định lý: nếu $\{A, B\}$ độc lập thì các cặp biến cố $\{A^c, B\}, \{A, B^c\}, \{A^c, B^c\}$ cũng độc lập
- Ví dụ tung xúc xắc trên ta có:
$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1) \times P(A_2)$$
do đó $\{A_1, A_2\}$ độc lập. Từ đó ta cũng có $\{A_1^c, A_2\}$ và $\{A_1, A_2^c\}$ và $\{A_1^c, A_2^c\}$ độc lập

Biến cố độc lập
Ví dụ

- Gieo một xúc xắc đồng chất, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:
  - Đặt biến cố "gieo được mặt chẵn": $A = \{2, 4, 6\}$
  - Đặt biến cố "gieo được mặt không quá 4": $B = \{1, 2, 3, 4\}$
  - Đặt biến cố "gieo được mặt không quá 3": $C = \{1, 2, 3\}$
  - Ta có:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = P(A) \times P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6} \neq P(A) \times P(C) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}$$

  - Vậy $\{A, B\}$ độc lập nhưng $\{A, C\}$ không độc lập. Giải thích trực quan?

Biến cố độc lập

- Ba biến cố $\{A, B, C\}$ được gọi là độc lập (với nhau) nếu từng đôi $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$ độc lập và:
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$
- Ví dụ, tung ngẫu nhiên một đồng xu đồng chất 2 lần, $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$:
  - Đặt biến cố "tung được mặt ngửa ở lần một": $A = \{HH, HT\}$
  - Đặt biến cố "tung được mặt ngửa ở lần hai": $B = \{HH, TH\}$
  - Đặt biến cố "tung được mặt giống nhau ở hai lần": $C = \{HH, TT\}$
  - Hãy cho thấy 3 biến cố A, B, C độc lập từng đôi nhưng cả 3 không độc lập với nhau. Giải thích trực quan?

Mô hình xác suất "lặp lại thí nghiệm độc lập"

- Họ các biến cố $\{A_1, A_2, \dots\}$ được gọi là độc lập nếu với mọi tập con khác rỗng, hữu hạn $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ của họ, ta có:
$$P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_k) = P(B_1) \times P(B_2) \times \cdots \times P(B_k)$$
- Lưu ý: định nghĩa tính độc lập trên có thể được dùng theo hai chiều
  - Chiều ngược: dùng để cho thấy (hay kiểm tra, chứng minh) tính độc lập
  - Chiều xuôi: dùng giả thuyết về tính độc lập để tính toán xác suất đơn giản
- Chẳng hạn, chiều xuôi, được dùng trong mô hình xác suất "lặp lại thí nghiệm độc lập": thực hiện lặp lại thí nghiệm T nhiều lần một cách độc lập, gọi A_i là biến cố "liên quan đến lần thực hiện thứ i" thì:
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \cdots \times P(A_n)$$

Mô hình xác suất "lặp lại thí nghiệm độc lập" Ví dụ

- Một đồng xu không đồng chất với xác suất ra ngửa là 0.7. Tung đồng xu (một cách độc lập) đến khi ra mặt sấp thì dừng. Tính xác suất phải tung đồng xu 10 lần?
  - Đặt A_i là biến cố tung được mặt ngửa ở lần thứ i $(i = 1, 2, \dots)$
  - Ta có: $P(A_i) = 0.7$ và $P(A_i^c) = 1 - 0.7 = 0.3$ với mọi $i = 1, 2, \dots$
  - Theo giả thuyết độc lập ta có: họ $\{A_1, A_2, \dots\}$ độc lập
  - Từ đó ta có xác suất phải tung đồng xu 10 lần là:

  $$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_9 \cap A_{10}^c) = P(A_1) \times P(A_2) \times \cdots \times P(A_9) \times P(A_{10}^c)$$
  $$= 0.7^9 \times 0.3 = 0.0121$$

  - Lưu ý: không gian mẫu là vô hạn $\Omega = \{T, HT, HHT, HHHT, \dots\}$

Độc lập có điều kiện

- Cho biến cố C với $P(C) > 0$, họ các biến cố $\{A_1, A_2, \dots\}$ được gọi là độc lập có điều kiện (conditionally independent) khi biết C, nếu với mọi tập con khác rỗng, hữu hạn $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ của họ, ta có:
$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k | C) = P(B_1|C) \times P(B_2|C) \times \dots \times P(B_k|C)$$
- Hai biến cố $\{A, B\}$ được gọi độc lập có điều kiện khi biết C nếu:
$$P(A \cap B|C) = P(A|C) \times P(B|C)$$

  Một cách tương đương:
$$P(A|B \cap C) = P(A|C) \ \ (\text{nếu } P(B|C) > 0)$$

  hay:
$$P(B|A \cap C) = P(B|C) \ \ (\text{nếu } P(A|C) > 0)$$

Độc lập có điều kiện
Ví dụ

- Gieo một xúc xắc đồng chất, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:
  - Đặt biến cố “gieo được mặt chẵn”: $A = \{2, 4, 6\}$
  - Đặt biến cố “gieo được mặt không quá 4”: $B = \{1, 2, 3, 4\}$
  - Đặt biến cố “gieo được mặt không quá 3”: $C = \{1, 2, 3\}$
  - Đặt biến cố “gieo được mặt không quá 2”: $D = \{1, 2\}$
  - Ta đã biết $\{A, B\}$ độc lập nhưng $\{A, C\}$ không độc lập.
  - Ta có

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|C \cap D) = \frac{P(A \cap C \cap D)}{P(C \cap D)} = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{2}$$

  - Vậy $\{A, C\}$ độc lập có điều kiện khi biết D. Giải thích trực quan?