

# CHƯƠNG 2

## TÍNH HỌC LƯU CHẤT

### I. HAI TÍNH CHẤT CỦA ÁP SUẤT THỦY TĨNH

1.  $p \perp A$  và hướng vào A. (suy ra từ định nghĩa).

2. Giá trị  $p$  tại một điểm không phụ thuộc vào hướng đặt của bề mặt tác dụng.

Xem phần tử lưu chất như một tứ diện vuông góc đặt tại gốc tọa độ như hình vẽ:

Các lực lên phần tử lưu chất:

Lực mặt :  $p_x \delta y \delta z$ ;  $p_y \delta x \delta z$ ;  $p_z \delta y \delta x$ ;  $p_n \delta y \delta s$ .

Lực khối:  $\frac{1}{2} F \delta x \delta y \delta z \rho$ .

Tổng các lực trên phương x phải bằng không:

$$p_x \delta y \delta z - p_n \delta y \delta s (\delta z / \delta s) + \frac{1}{2} F_x \delta x \delta y \delta z \rho = 0$$

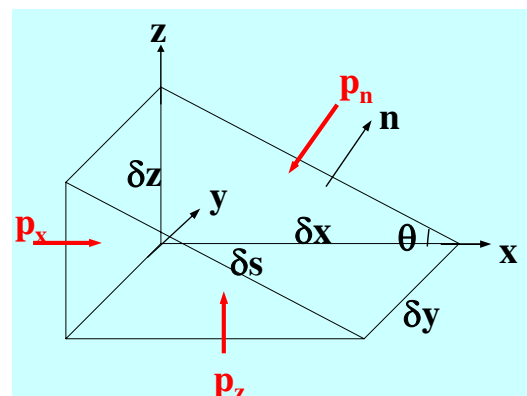
Chia tất cả cho  $\delta y \delta z$  :

$$p_x - p_n + \frac{1}{2} F_x \rho \delta x = 0 \Rightarrow p_x = p_n \text{ khi } \delta x \rightarrow 0.$$

Chứng minh tương tự cho các phương khác

Suy ra:

$$p_x = p_y = p_z = p_n$$



## II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CƠ BẢN

Xét lưu chất ở trạng thái cân bằng có thể tích  $W$  giới hạn bởi diện tích  $A$ .  
 Ta có tổng các lực tác dụng lên lưu chất  $= 0$ :  
 Lực khối + lực mặt  $= 0$ :

$$\iiint_W \vec{F}\rho dw - \iint_A \vec{p}dA = 0$$

Ta xét trên trục  $x$ :

$$\iiint_W F_x \rho dw - \iint_A p_x dA = 0 \stackrel{\text{b.d.Gauss}}{\Leftrightarrow} \iiint_W F_x \rho dw - \iiint_W \text{div}(\vec{p} \cdot \vec{n}_x) dw = 0$$

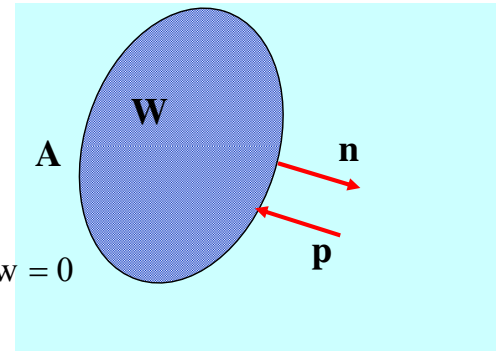
$$\Leftrightarrow \rho F_x - \left( \frac{\partial(p_x n_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(p_y n_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(p_z n_{xz})}{\partial z} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho F_x - \frac{\partial(p_x n_{xx})}{\partial x} = 0 \xrightarrow{p=p_x=p_y=p_z} \rho F_x - \frac{\partial(p)}{\partial x} = 0$$

Xét tương tự cho các trục khác

Kết luận:  $\iiint_W \vec{F}\rho dw - \iint_A \vec{p}dA = 0 \Leftrightarrow \iiint_W \vec{F}\rho dw - \iiint_W \overrightarrow{\text{grad}}(p)dw = 0$

$$\Leftrightarrow \vec{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}(p) = 0$$



## III. TÍCH PHÂN PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CƠ BẢN

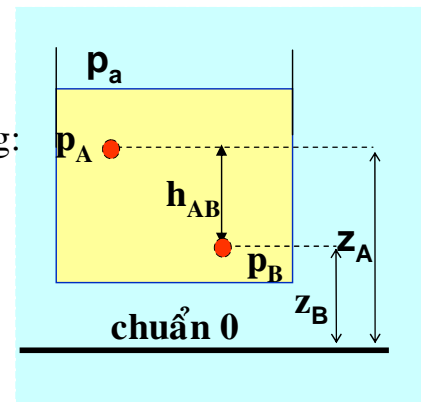
$$\left\{ \begin{array}{l} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \times dx \\ F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \times dy \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \times dz \end{array} \right\} \Rightarrow (F_x dx + F_y dy + F_z dz) - \frac{1}{\rho} dp = 0$$

➤ Chất lỏng nằm trong trường trọng lực:  $F_x, F_y=0, F_z=-g$ :

$$-gdz = \frac{1}{\rho} dp \xrightarrow{\rho=\text{const}} gz + \frac{p}{\rho} = \text{const}$$

$$\text{hay: } z + \frac{p}{\gamma} = \text{const} \Leftrightarrow z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} \quad (1)$$

$$\text{hay: } p_B = p_A + \gamma h_{AB} \quad \text{hay} \quad p = p_a + \gamma h \quad (2)$$



(1), (2) là phương trình thủy tĩnh

➤ Chất khí nằm trong trường trọng lực, nén được:

Xem như chất khí là khí lý tưởng:  $\frac{pV}{T} = R$  hay  $\frac{p}{\rho} = RT$   
 $-gdz = \frac{1}{\rho} dp \Leftrightarrow -gdz = \frac{RT}{p} dp$

Nếu biết được hàm phân bố nhiệt độ theo độ cao, ví dụ:  $T=T_0 - az$ ;  $a>0$ ,  
 $T_0$  là nhiệt độ ứng với độ cao  $z=0$  (thông thường là mực nước biển yên lặng):

$$-gdz = \frac{R(T_0 - az)}{p} dp \Rightarrow \frac{dp}{p} = -g \frac{dz}{R(T_0 - az)} \Rightarrow \ln p = -\frac{g}{aR} \ln(T_0 - az) + \ln(C)$$

$$\Rightarrow p = C(T_0 - az)^{\frac{g}{aR}}$$

Gọi  $p_0$  là áp suất ứng với  $z=0$ :  $p_0 = CT_0^{\frac{g}{aR}} \Rightarrow C = \frac{p_0}{T_0^{\frac{g}{aR}}}$

Phương trình khí tĩnh:

$$p = p_0 \left( \frac{T_0 - az}{T_0} \right)^{\frac{g}{aR}}$$

**Ví dụ 1:**

Áp suất tuyệt đối tại mặt biển yên lặng là 760mmHg, tương ứng với nhiệt độ  $T=288$  °K. Nhiệt độ tầng khí quyển giảm 6,5 độ K khi lên cao 1000m cho đến lúc nhiệt độ đạt 216,5 độ K thì giữ không đổi. Xác định áp suất và khối lượng riêng của không khí ở độ cao 145000m. Cho  $R=287$  J/kg.°K

**Giải:**

$T_0$  là nhiệt độ ứng với độ cao  $z=0$  (mặt biển yên lặng):

Ta tìm hàm phân bố nhiệt độ theo độ cao:  $T=T_0 - az$ ; với  $a=0,0065$

Cao độ ứng với nhiệt độ  $T_1=216,5$  độ K là  $z_1=11000$ m

Suy ra:  $216,5=288 - 0,0065z_1$

Như vậy từ  $z_0=0$  đến  $z_1=11000$ m, áp suất biến thiên theo **phương trình khí tĩnh**:

$$p = p_0 \left( \frac{T_0 - az}{T_0} \right)^{\frac{g}{aR}} \Rightarrow p_1 = p_0 \left( \frac{T_0 - az_1}{T_0} \right)^{\frac{g}{aR}} = 0,76 \left( \frac{216,5 - 0,0065 * 11000}{216,5} \right)^{\frac{9,81}{0,0065 * 287}}$$

$$p_1 = 0,1695 \text{ mHg}$$

Từ:  $\frac{p}{\rho} = RT \Rightarrow \rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{0,1695 * 13,6 * 9,81 * 10^3}{287 * 216,5} = 0,364 \text{ kg/m}^3$

Từ  $z_1=11000$  m đến  $z_2=14500$ m, nhiệt độ không đổi nên:

$$-gdz = \frac{RT_1}{p} dp \Rightarrow dz = -\frac{RT_1}{g} \frac{dp}{p} \Rightarrow z = -\frac{RT_1}{g} \ln p + \ln(C) = \ln\left(Cp^{-\frac{RT_1}{g}}\right) \Rightarrow Cp^{-\frac{RT_1}{g}} = e^z$$

Tại độ cao  $z_1$  ta có áp suất bằng  $p_1$ ; suy ra:

$$C = \frac{e^{z_1}}{\left(p_1\right)^{\frac{RT_1}{g}}} \Rightarrow p = p_1 e^{-\frac{g}{RT_1}(z_1-z)}$$

Như vậy tại độ cao  $z_2=14500$ m ta tính được:

$$p_2 = p_1 e^{-\frac{g}{RT_1}(z_1-z_2)} = 0.17 * e^{-\frac{(11000-14500) * 9.81}{278 * 216.5}}$$

$$= 0.09752 \text{ mHg} = 97.52 \text{ mmHg}$$

và:

$$\rho_2 = \frac{p_2 \rho_1}{p_1} = 0.209 \text{ kg/m}^3$$

#### IV. MẶT ĐẲNG ÁP, $P$ TUYỆT ĐỐI, $P$ DƯ, $P$ CHÂN KHÔNG

➤ Mặt đẳng áp của chất lỏng nằm trong trường trọng lực là mặt phẳng nằm ngang

➤ Phương trình mặt đẳng áp:  $F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$

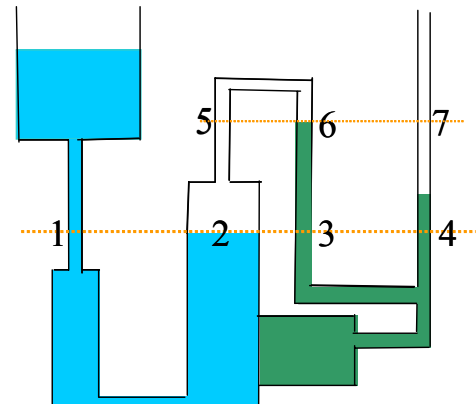
➤ Áp suất dư:  $p_{dư} = p_{td} - p_a$

➤ Nếu tại một điểm có  $p_{dư} < 0$  thì tại đó có áp suất chân không  $p_{ck}$

$$p_{ck} = -p_{dư} = p_a - p_{td}$$

➤  $p$  trong phương trình thủy tĩnh là áp suất tuyệt đối  $p_{td}$  hoặc áp suất dư

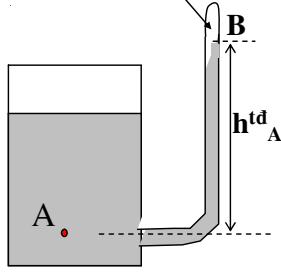
➤ Các điểm nào (?) có áp suất bằng nhau: →



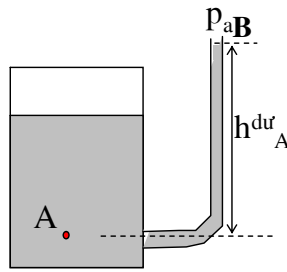
## V. ỨNG DỤNG

### 1. Các áp kế:

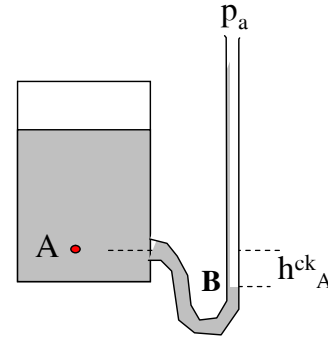
$p=0$ , chân không tuyệt đối



$$p_A = p_B + \gamma h^{td}$$



$$p_A^{du} = p_B^{du} + \gamma h^{du} = \gamma h^{du}$$



$$p_A^{du} = p_B^{du} - \gamma h^{ck} \Rightarrow p_A^{ck} = \gamma h^{ck}$$

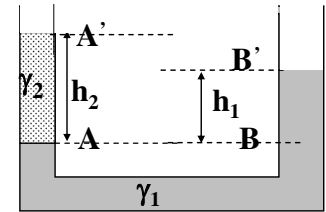
### 2. Định luật bình thông nhau:

Từ p.tr thủy tĩnh:

$$p_A = p_{A'} + \gamma_2 h_2; \quad p_B = p_{B'} + \gamma_1 h_1$$

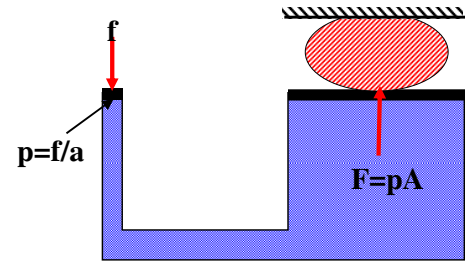
Suy ra

$$\gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2$$



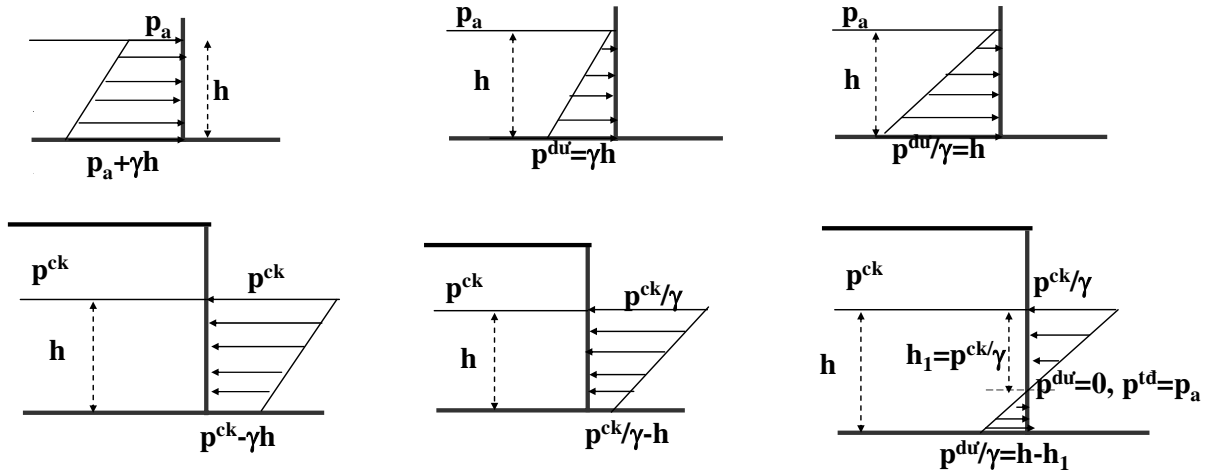
### 3. Định luật Pascal:

Tại một vị trí nào đó trong lưu chất nén áp suất tăng lên một đại lượng  $\Delta p$  thì đại lượng này sẽ được truyền đi trong toàn miền lưu chất  $\rightarrow$  ứng dụng trong máy nén thủy lực.

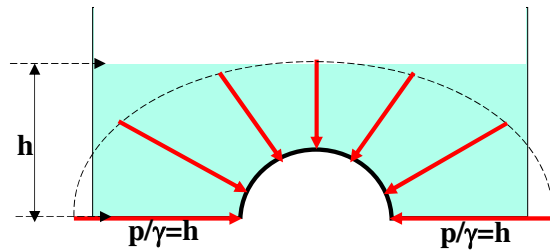


Pascal 1623-1662 , Pháp

#### 4. Biểu đồ phân bố áp suất chiều sâu:



#### 5. Phân bố áp suất trên một mặt cong:



#### 6. Áp kế vi sai:

Ban đầu thì  $p_1 = p_2 = p_a$ :

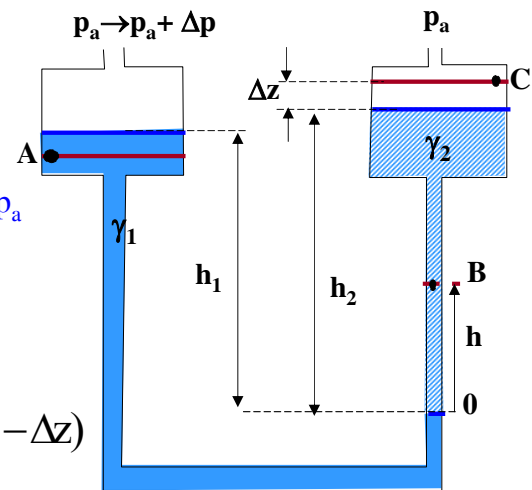
$$\gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2$$

Khi áp suất ống bên trái tăng lên  $\Delta p$ :  $p_1 = p_a + \Delta p$ ;  $p_2 = p_a$

$$\begin{aligned} p_a + \Delta p = p_A = p_B - \gamma_1 h_{AB} = p_C + \gamma_2 h_{BC} - \gamma_1 h_{AB} \\ = p_a + \gamma_2 h_{BC} - \gamma_1 h_{AB} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta p = \gamma_2 h_{BC} - \gamma_1 h_{AB} = \gamma_2 (h_2 - h + \Delta z) - \gamma_1 (h_1 - h - \Delta z)$$

$$\Rightarrow \Delta p = h(\gamma_1 - \gamma_2) + \Delta z(\gamma_1 + \gamma_2)$$



Gọi A, a lần lượt là diện tích ngang ống lớn và ống nhỏ:

$$\Rightarrow a \cdot h = A \cdot \Delta z \Rightarrow \Delta z = \frac{ah}{A}$$

$$\Rightarrow \Delta p = h(\gamma_1 - \gamma_2) + \frac{ah}{A}(\gamma_1 + \gamma_2)$$

## VI. LỰC TÁC DỤNG LÊN THÀNH PHẦN

### ➤ Giá trị lực

$$F^{du} = \int_A p^{du} dA = \int_A \gamma h dA = \int_A \gamma y \sin \alpha dA$$

$$= \gamma \sin \alpha \int_A y dA = \gamma \sin \alpha y_C A = \gamma h_C A = p_C^{du} A$$

$$F^{du} = p_C^{du} A$$

### ➤ Điểm đặt lực

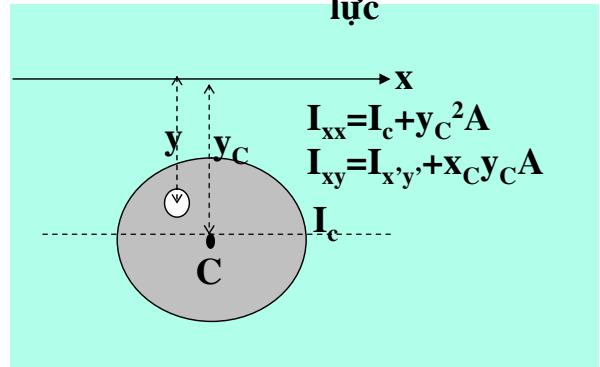
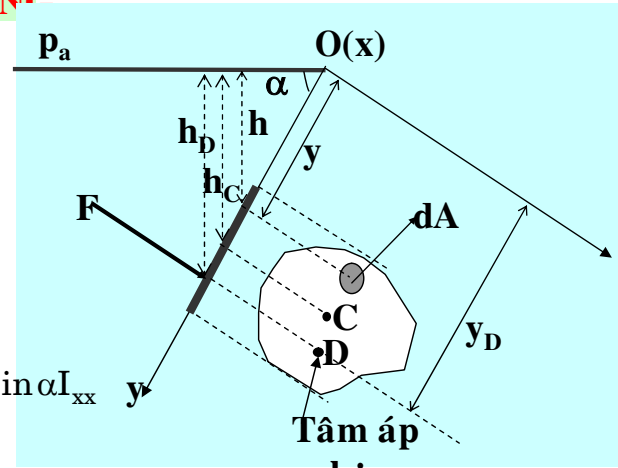
$$y_D F = \int_A y dF = \int_A y \gamma \sin \alpha y dA = \gamma \sin \alpha \int_A y^2 dA = \gamma \sin \alpha I_{xx}$$

Suy ra: 
$$y_D = \frac{\gamma \sin \alpha I_{xx}}{F} = \frac{I_{xx}}{y_C A} = \frac{I_C + y_C^2 A}{y_C A}$$

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C A}$$

Tương tự: 
$$x_D = \frac{\gamma \sin \alpha I_{xy}}{F} = \frac{I_{xy}}{y_C A} = \frac{I_{x'y'} + x_C y_C A}{y_C A}$$

$$x_D = x_C + \frac{I_{x'y'}}{y_C A}$$



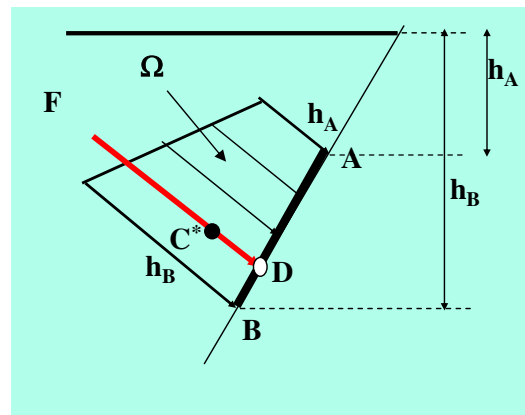
$I_C$ : M. q tính của A so với trục //Ox và qua C

$I_{x'y'}$ : M. q tính của A so với trọng tâm C

### ➤ Lực tác dụng lên thành phần chữ nhật đáy nằm ngang:

$$p_C = \gamma \frac{h_A + h_B}{2}$$

$$\Rightarrow F = A p_C = \gamma \frac{h_A + h_B}{2} (AB) b$$



Đặt:  $\Omega = (h_A + h_B) \cdot (AB) / 2$

Suy ra:  $F = \gamma \Omega b$

$$BD = [(h_B + 2h_A) / (h_B + h_A)] \cdot (AB) / 3$$

## VII. LỰC TÁC DỤNG LÊN THÀNH CONG ĐƠN GIẢN

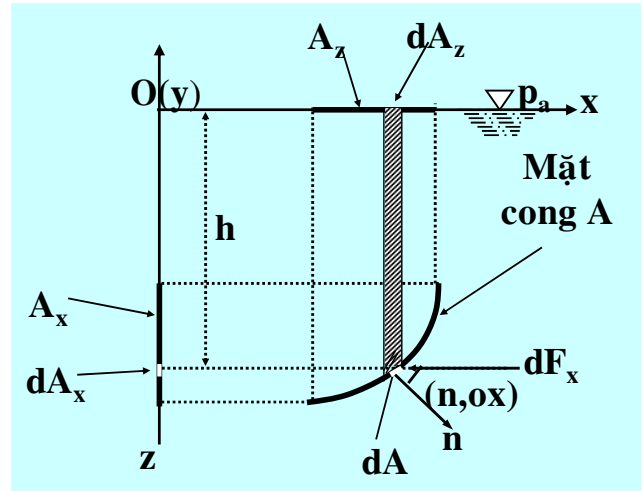
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

➤ Thành phần lực theo phương x

$$\begin{aligned} F_x &= \int_A dF_x = \int_A p dA \cos(\vec{n}, ox) \\ &= \int_A \gamma h dA_x = \int_{A_x} \gamma h dA_x = p_{cx} A_x \end{aligned}$$

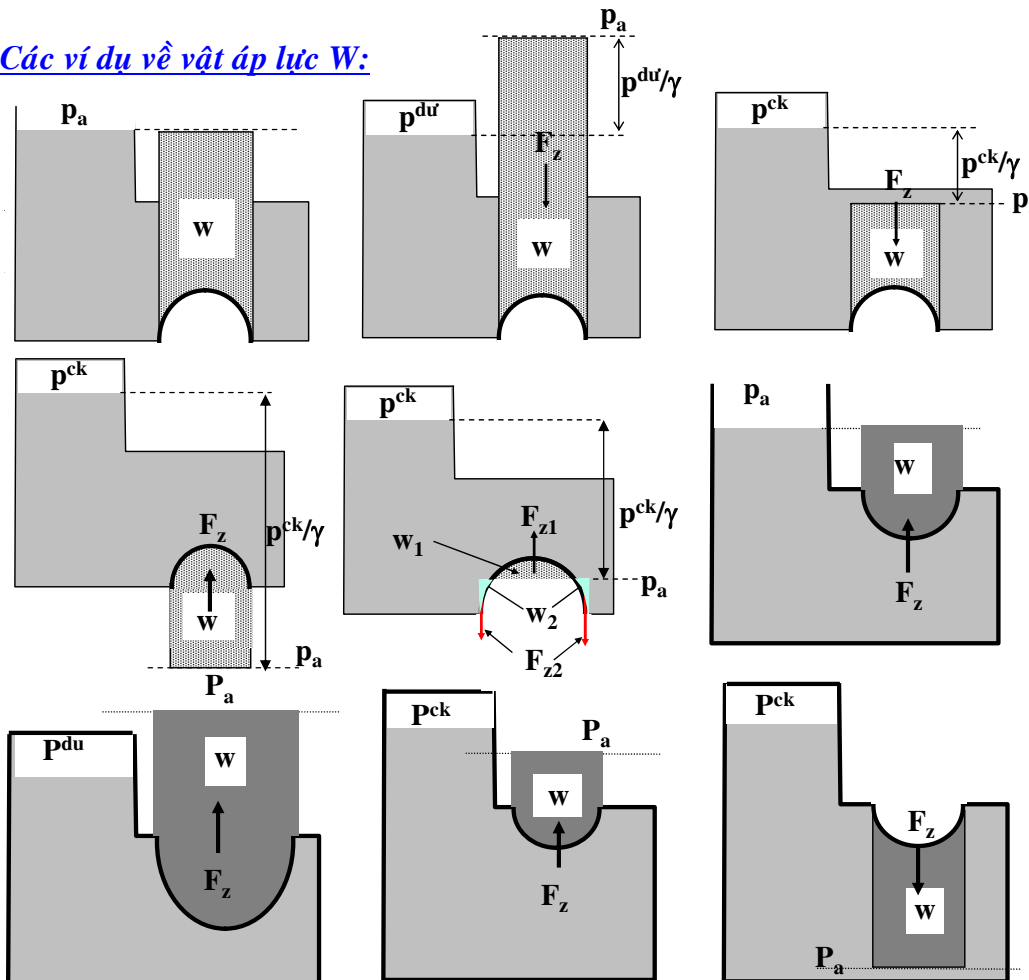
➤ Thành phần lực theo phương z

$$\begin{aligned} F_z &= \int_A dF_z = \int_A \gamma h dA \cos(\vec{n}, oz) \\ &= \int_A \gamma h dA_z = \gamma W \end{aligned}$$

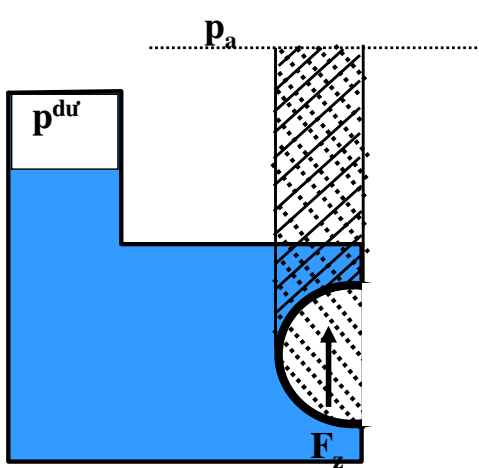


*W: thể tích vật áp lực: là thể tích của vật thẳng đứng giới hạn bởi mặt cong A và hình chiếu thẳng đứng của A lên mặt thoáng tự do ( $A_z$ )*

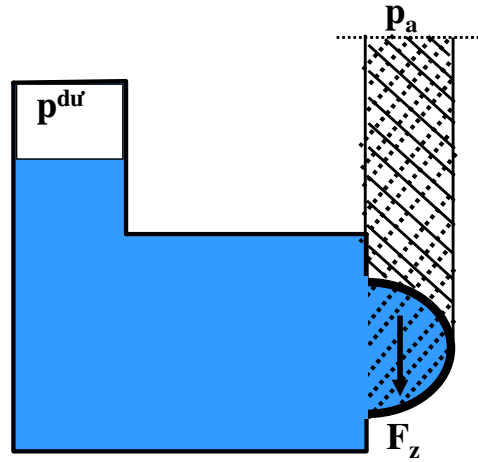
➤ Các ví dụ về vật áp lực W:







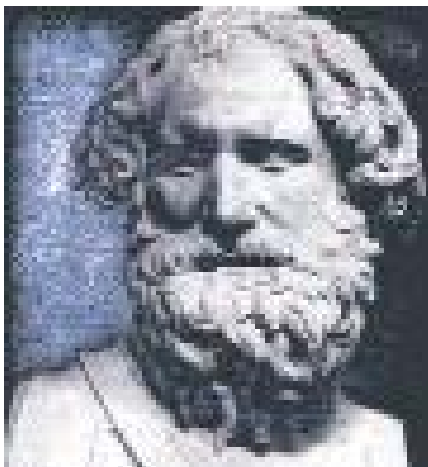
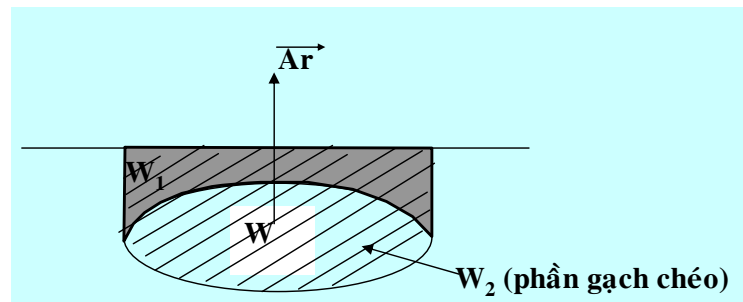
$W_1$ : phần chéo liền nét  
 $\rightarrow F_{z1}$  hướng xuống.  
 $W_2$ : phần chéo chấm chấm  
 $\rightarrow F_{z2}$  hướng lên.  
 $W = W_1 - W_2$   
 $\rightarrow F_z$  hướng lên



$W_1$ : phần chéo liền nét  
 $\rightarrow F_{z1}$  hướng lên.  
 $W_2$ : phần chéo chấm chấm  
 $\rightarrow F_{z2}$  hướng xuống.  
 $W = W_1 - W_2$   
 $\rightarrow F_z$  hướng xuống

➤ Lực đẩy Archimède:

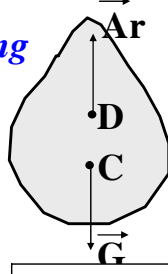
$$Ar = \gamma W_2 - \gamma W_1 = \gamma W$$



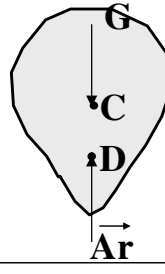
**Archimede 287-212 BC**

## VIII. SỰ CÂN BẰNG CỦA MỘT VẬT TRONG LƯU CHẤT

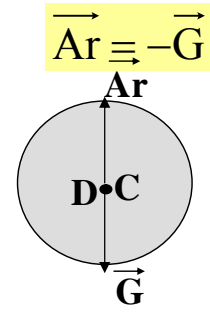
### ➤ Vật chìm lơ lửng



**ổn định**

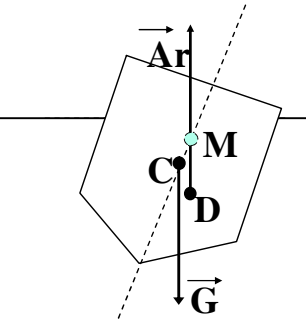
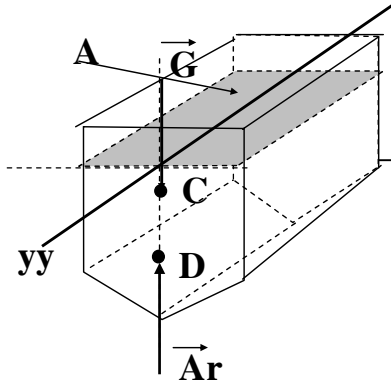


**không ổn định**

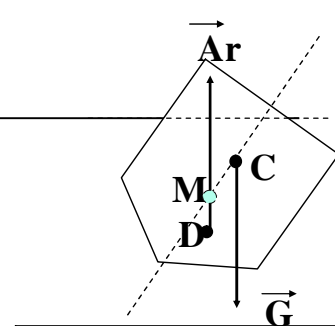


**Phiếm định**

### ➤ Vật nổi



**ổn định: MD > CD**  
→ M cao hơn C



**không ổn định: MD < CD**  
→ M thấp hơn C

$$MD = \frac{I_{yy}}{W}$$

M: Tâm định khuynh.

$I_{yy}$ : Moment quán tính của diện tích mặt nổi A so với trục quay yy.

W: thể tích nước bị vật chiếm chỗ

## VIII. ỨNG DỤNG

### Ví dụ 2:

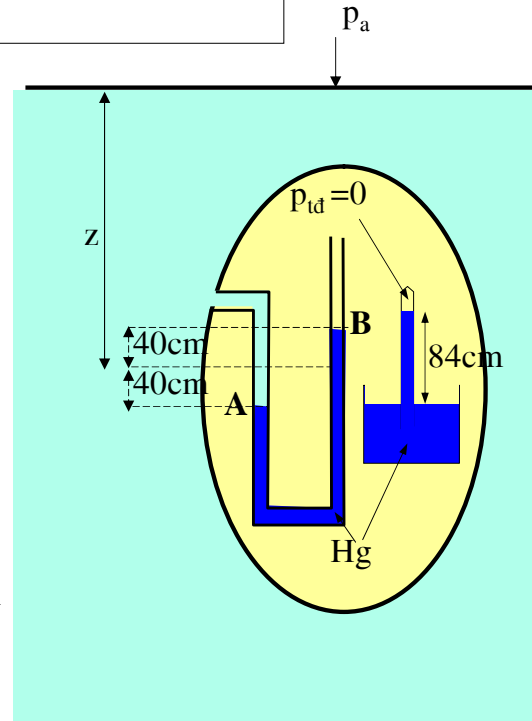
Tính z,  $p_a = 76 \text{ cmHg}$ ,  $\gamma_{nb} = 11200 \text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_{Hg} = 133000 \text{ N/m}^3$

Ta có:  $p_A = p_B + \gamma_{Hg} h_{AB} = 0.84 \gamma_{Hg} + \gamma_{Hg} h_{AB}$   
 $= \gamma_{Hg} (0.84 + 0.8) = 1.64 \gamma_{Hg}$

Mặt khác:  $p_A - p_a = \gamma_{nb} \cdot (z + 0.4)$

Suy ra:  $(z + 0.4) = (p_A - p_a) / \gamma_{nb}$   
 $= (1.64 \gamma_{Hg} - 0.76 \gamma_{Hg}) / \gamma_{nb}$   
 $= 0.88 (\gamma_{Hg} / \gamma_{nb})$   
 $= 0.88 \cdot 133000 / 11200 = 10.45 \text{ m}$

Suy ra **z = 10.05 m**



**Ví dụ 3:**

Bình đáy vuông cạnh  $a=2m$ . Đổ vào bình hai chất lỏng khác nhau,  $\delta_1=0,8$ ;  $\delta_2=1,1$ .  $V_1=6m^3$ ;  $V_2=5m^3$ .  
 Tìm  $p_B$

**Giải:**

$$\gamma_1 = \delta_1 \gamma_n = 0.8 * 9.81 * 10^3 \text{ N/m}^3$$

$$\gamma_2 = \delta_2 \gamma_n = 1.1 * 9.81 * 10^3 \text{ N/m}^3$$

Gọi  $h_2$  là bề dày của lớp chất lỏng 2:  $h_2=(5/4)m$ .

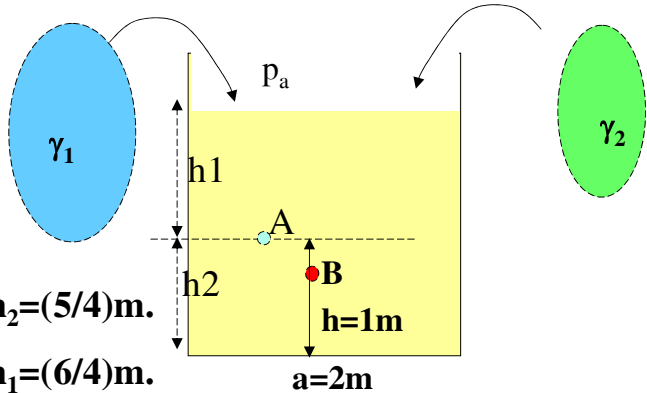
Gọi  $h_1$  là bề dày của lớp chất lỏng 1:  $h_1=(6/4)m$ .

Ta có  $h_{AB} = h_2 - h = 0.25m$

Suy ra:  $p_B = p_A + \gamma_2 * h_{AB} = p_A + \gamma_2 * (0.25)$

Suy ra:  $p_B = p_a + \gamma_1 * h_1 + \gamma_2 * (0.25)$

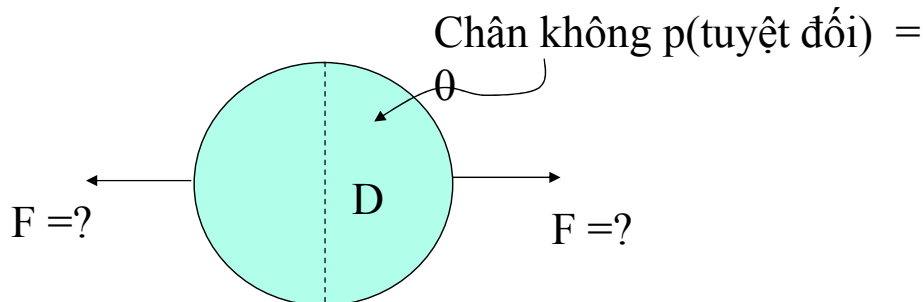
Suy ra:  $p_B^{du} = 0 + \gamma_1 * (1.5) + \gamma_2 * (0.25) = 9.81 * 10^3 (0.8 * 1.5 + 1.1 * 0.25) = 14.5 \text{ m nước}$



**Thí nghiệm:** Ottovon Guericke (8.5.1654) tại Maydeburg, Đức

Dùng 2 bán cầu  $D = 37 \text{ cm}$ , bịt kín và hút khí để áp suất tuyệt đối trong quả cầu bằng không .

Cho 2 đàn ngựa kéo vẫn không tách bán cầu ra được. Vậy phải cần 1 lực bằng bao nhiêu để tách hai bán cầu ra (xem lực dính giữa 2 bán cầu không đáng kể)



**Ví dụ 4:**

Van phẳng AB hình chữ nhật cao 1,5m, rộng 2m, quay quanh trục A nằm ngang như hình vẽ. Tính áp lực nước tác dụng lên van. Tính lực F (xem hình vẽ) để giữ van đứng yên

**Giải:**

**Giá trị lực:**  $F_n^{du} = p_c^{du} A = \gamma h_c A = 9.81 \cdot 10^3 \cdot (5 - 1,5/2) \cdot 1,5 \cdot 2 = 125.0775 \text{ KN}$

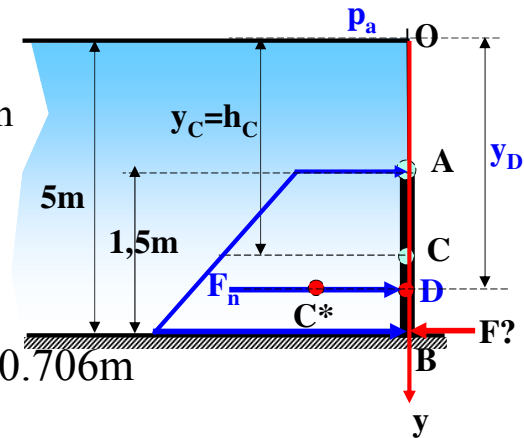
**Vị trí điểm đặt lực D:**

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C A} = 4.25 + \frac{2 \cdot 1.5^3}{4.25 \cdot 1.5 \cdot 2} = 4.294 \text{ m}$$

$\Rightarrow DB = 5 - 4.294 \text{ m} = 0.706 \text{ m}$

**Tính cách khác:**

$$DB = \frac{h_B + 2h_A}{h_B + h_A} \cdot \frac{AB}{3} = \frac{5 + 2 \cdot 3.5}{5 + 3.5} \cdot \frac{1.5}{3} = 0.706 \text{ m}$$



**Để tính lực F giữ van yên, ta cân bằng moment:**  $F_n(AD) = F(AB)$

**Suy ra:**  $F = F_n(AD)/(AB) = 125.07 \cdot (1.5 - 0.706)/(1.5) = 66.22 \text{ KN}$

**Ví dụ 5:**

Van phẳng ABE hình tam giác đều có thể quay quanh trục A nằm ngang như hình vẽ. Tính áp lực nước tác dụng lên van và vị trí điểm đặt lực D. Tính lực F ngang (xem hình vẽ) để giữ van đứng yên

**Giải:**

$h_c = 3 + 2/3 = 3.666 \text{ m}$

AB chính là chiều cao của tam giác đều,

$$AB = \frac{2}{\sin(60^\circ)} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2.31 \text{ m}$$

Cạnh đáy AE của tam giác:  $AE = 2 \cdot AB / \tan(60^\circ) = 2.667$

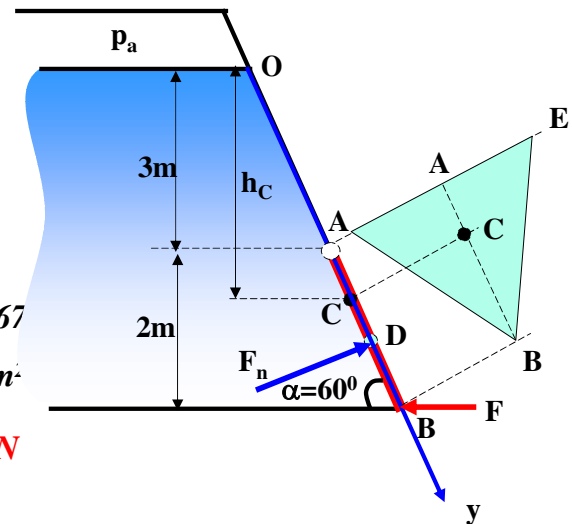
Diện tích A của tam giác:  $A = (AE) \cdot (AB) / 2 = 3.079 \text{ m}^2$

**Áp lực:**  $F_n^{du} = \gamma h_c A = 9.81 \cdot 3.666 \cdot 3.079 = 110.76 \text{ KN}$

Toạ độ  $y_c = OC = h_c / \sin(60^\circ) = 4.234 \text{ m}$

$$OD = y_D = y_c + \frac{I_C}{y_c A} = y_c + \frac{b \cdot h^3}{y_c A} = 4.234 + \frac{2.667 \cdot 2.31^3}{4.234 \cdot 3.079} = 4.304 \text{ m}$$

$F_n(AD) = F(2)$



**Suy ra:**  $F = F_n(AD)/(2) = 110.76 \cdot (OD - OA) / 2 = 110.76 \cdot (4.304 - 3.464) / 2 = 46.507 \text{ KN}$

**Ví dụ 6:** Van phẳng ABE hình tam giác đều có thể quay quanh trục A nằm ngang như hình vẽ. Tính áp lực nước tác dụng lên van và vị trí điểm đặc lực D . Tính lực F ngang (xem hình vẽ) để giữ van đứng yên

**Giải:**

$$h_c = 1 + 3 + 2/3 = 4.666m$$

AB chính là chiều cao của tam giác đều,

$$AB = \frac{2}{\sin(60^\circ)} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2.31m$$

Cạnh đáy AE của tam giác:  $AE = 2 * AB / \tan(60^\circ) = 2.667m$

Diện tích A của tam giác:  $A = (AE) * (AB) / 2 = 3.079 m^2$

$$\text{Áp lực: } F_n^{du} = \gamma h_c A = 9.81 * 4.666 * 3.079 = 140.97 KN$$

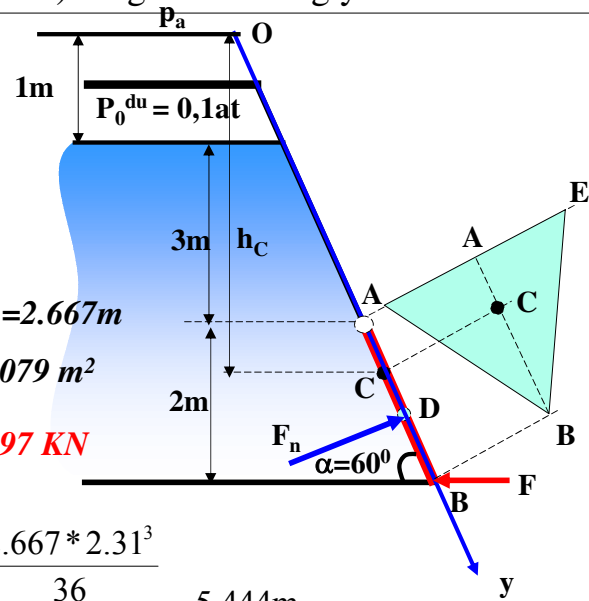
$$\text{Toạ độ } y_c = OC = h_c / \sin(60^\circ) = 5.389m$$

$$OD = y_D = y_c + \frac{I_c}{y_c A} = y_c + \frac{\frac{b * h^3}{36}}{y_c A} = 5.389 + \frac{\frac{2.667 * 2.31^3}{36}}{5.389 * 3.079} = 5.444m$$

$$F_n(AD) = F(2)$$

**Ghi chú:**  $OA = 4 / \sin(60^\circ)$

$$\text{Suy ra: } F = F_n(AD) / (2) = 140.97 * (OD - OA) / 2 = 140.97 * (5.444 - 4.619) / 2 = 58.133 KN$$



**Ví dụ 7:**

Van phẳng ABE hình tam giác đều có thể quay quanh trục A nằm ngang như hình vẽ. Tính áp lực nước tác dụng lên van và vị trí điểm đặc lực D . Tính lực F ngang (xem hình vẽ) để giữ van đứng yên

**Giải:**

$$p_c = -\gamma h_c = -9.81 * 10^3 * (1 + 2 - 2/3) = -9.81 * 10^3 * 2.333 N/m^2$$

$$AB = 2.31 m$$

$$AE = 2.667m$$

$$A = 3.079 m^2$$

$$\text{Áp lực: } F_n^{du} = -\gamma h_c A = -9.81 * 2.333 * 3.079$$

$$= -70.483 KN$$

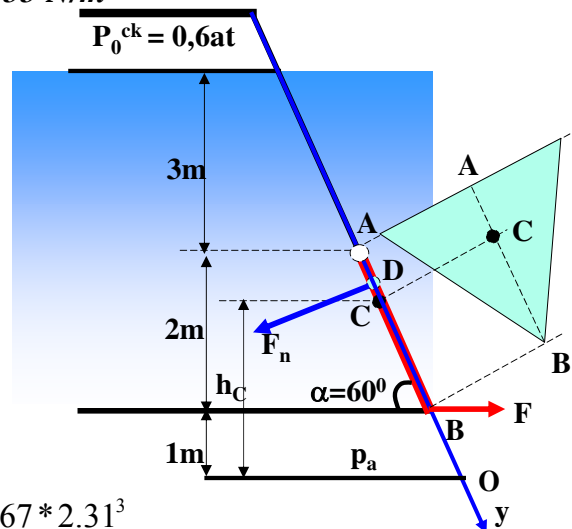
$$\text{Toạ độ } y_c = -OC = h_c / \sin(60^\circ) = -2.694 m$$

$$OD = y_D = y_c + \frac{I_c}{y_c A} = y_c + \frac{\frac{b * h^3}{36}}{y_c A} = -2.694 + \frac{\frac{2.667 * 2.31^3}{36}}{-2.694 * 3.079} = -2.804m$$

$$F_n(AD) = F(2)$$

**Ghi chú:**  $OA = 3 / \sin(60^\circ)$

$$\text{Suy ra: } F = F_n(AD) / (2) = 70.483 * (OA - OD) / 2 = 70.483 * (3.464 - 2.804) / 2 = 23.25 KN$$



**Ví dụ 8:** Một cửa van cung có dạng  $\frac{1}{4}$  hình trụ bán kính  $R=1,5\text{m}$ ; dài  $L=3\text{m}$  quay quanh trục nằm ngang qua O. Van có khối lượng 6000 kg và trọng tâm đặt tại G như hình vẽ. Tính áp lực nước tác dụng lên van và vị trí điểm đặc lực D. Xác định moment cần mở van

**Giải:**

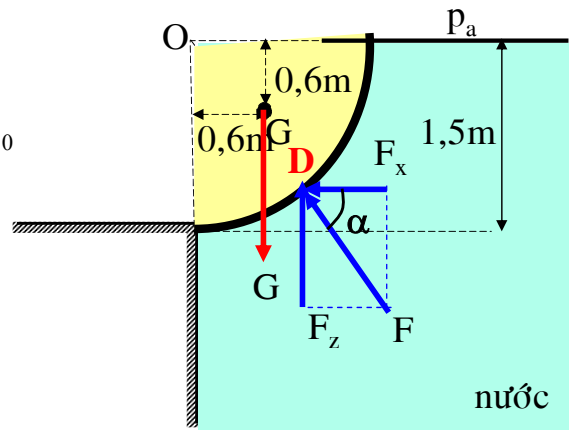
$$F_x = p_{cx} A_x = \gamma h_{cx} A = 9.81 \cdot 10^3 \cdot \frac{1.5}{2} \cdot 1.5 \cdot 3 = 33.10 \text{KN}$$

$$F_z = \gamma W = \gamma \frac{\pi R^2}{4} L = 9.81 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 1.5^2}{4} \cdot 3 = 52 \text{KN}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{33.10^2 + 52^2} = 61.65 \text{KN}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{F_z}{F_x} = \frac{52}{33.1} = 1.570796 \Rightarrow \alpha = 57,52^\circ$$

$$M = G \cdot 0.6 = 9.81 \cdot 6000 \cdot 0.6 = 35316 \text{ Nm}$$



**Ví dụ 9:** Một hình trụ bán kính  $R=2\text{m}$ ; dài  $L=2\text{m}$  ở vị trí cân bằng như hình vẽ. Xác định trọng lượng của phao và phản lực tại A

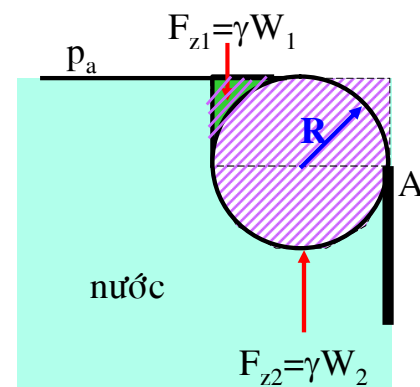
**Giải:**

$$\begin{aligned} R_A &= F_x = p_{cx} A_x = \gamma h_{cx} A_x \\ &= 9.81 \cdot 10^3 \cdot \frac{2}{2} \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 39.24 \text{KN} \end{aligned}$$

$$\vec{G} + \vec{F}_{z1} + \vec{F}_{z2} = 0$$

$$\Rightarrow G = \gamma W_2 - \gamma W_1 = 9.81 \cdot L \cdot \left( \frac{3}{4} \pi R^2 + R^2 \right)$$

$$G = 263.3941 \text{KN}$$



**Ví dụ 10:** Một cửa van cung có dạng  $\frac{1}{4}$  hình trụ bán kính  $R=1,5m$ ; dài  $L=2m$  quay quanh trục nằm ngang qua O như hình vẽ. Tính áp lực nước tác dụng lên van và vị trí điểm đặc lực D .

**Giải:**  $AB = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2 * 1.5^2} = 2.12m$

$$F_x = p_{cx} A_x = \gamma h_{cx} A$$

$$= 9.81 * 10^3 * \frac{2.12}{2} * 2.12 * 2$$

$$= 44.145 \text{ KN}$$

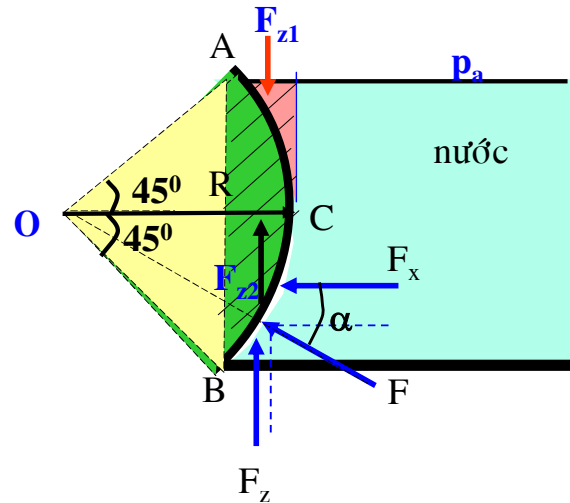
$$F_z = \gamma W = \gamma \left( \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} \right) L$$

$$= 9.81 * 10^3 * \left( \frac{\pi * 1.5^2}{4} - \frac{1.5^2}{2} \right) * 2$$

$$= 12.5989 \text{ KN}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{44.145^2 + 12.60^2} = 45.91 \text{ KN}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{F_z}{F_x} = \frac{12.6}{44.15} = 0.285 \Rightarrow \alpha = 15.92^\circ$$



**Ví dụ 11:**

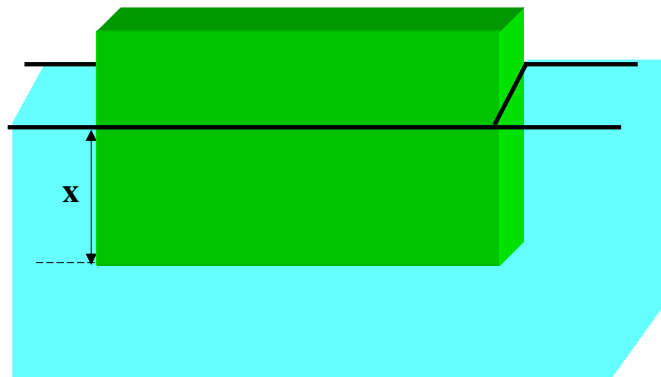
Một khối hình hộp cạnh  $a=0,3m$  đồng chất tỷ trọng 0,6 nổi trên nước như hình vẽ. Tính chiều sâu ngập nước  $x$  của hình hộp .

**Giải:**

$$G = Ar \Leftrightarrow 0.6 * \gamma_n * a^3 = \gamma_n * a^2 * x$$

$$\Rightarrow x = 0.6 * a = 0.6 * 0.3$$

$$x = 0.18 \text{ m}$$



**Ví dụ 12:** Một bình bằng sắt hình nón cụt không đáy ( $\delta=7.8$ ) được úp như hình vẽ. Đáy lớn  $R=1m$ , đáy nhỏ  $r=0,5m$ , cao  $H=4m$ , dày  $b=3mm$ . Tính giới hạn mực nước  $x$  trong bình để bình khỏi bị nhấc lên.

**Giải:**

$$V_{\text{noncuttrong}} = \pi H(R^2 + r^2 + Rr)/3$$

$$V_{\text{noncutgoai}} = \pi H((R + b)^2 + (r + b)^2 + (R + b)(r + b))/3$$

Trọng lượng bình:

$$G = \gamma_n \delta V = \gamma_n \delta (V_{\text{noncutgoai}} - V_{\text{noncuttrong}}) = 1000 * 7.8 * 0.057 = 441.96 \text{kgf}$$

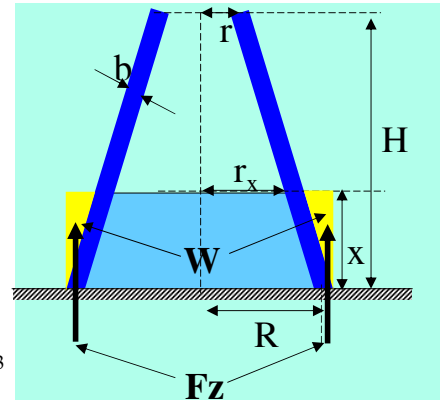
Ta tính lực  $F_z$  hướng lên do nước tác dụng lên bình:

Từ quan hệ:  $\frac{x}{H} = \frac{R - r_x}{R - r} \Rightarrow r_x = R - \frac{x}{H}(R - r)$

$$F_z = \gamma_n W = \gamma_n \left[ R^2 \pi x - \frac{\pi x}{3} (R^2 - r_x^2 + R r_x) \right]$$

$$= \gamma_n \frac{\pi x}{3} \left[ 2R^2 - (R - \frac{x}{H}(R - r))^2 - R(R - \frac{x}{H}(R - r)) \right]$$

$$= \gamma_n \frac{\pi x}{3} \left[ \frac{3R(R - r)}{H} x - \left( \frac{(R - r)}{H} x \right)^2 \right] = 392.7x^2 - 16.36x^3$$



**Điều kiện:  $G \geq F_z$**

Suy ra:  $441.96 \geq F_z \Leftrightarrow 16.36x^3 - 392.7x^2 + 441.96 \geq 0$

**Giải ra được  $x \leq 1.09 \text{ m}$**

## VIII. TÍNH HỌC TƯƠNG ĐỐI

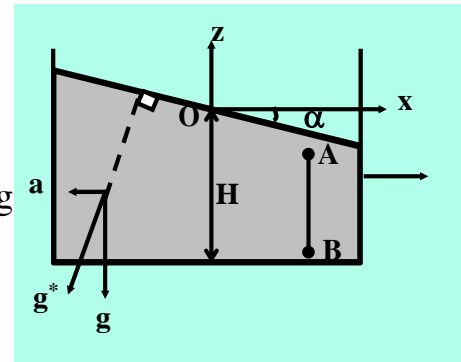
1. Nước trong xe chạy tới trước nhanh dần đều:

**Phân bố áp suất:**

$$(F_x dx + F_y dy + F_z dz) - \frac{1}{\rho} dp = 0 \quad \text{với } F_x = -a; F_y = 0; F_z = -g$$

Suy ra:

$$(-a dx - g dz) - \frac{1}{\rho} dp = 0 \Rightarrow ax + gz + \frac{p}{\rho} = C$$



Đối với hai điểm A, B thẳng đứng:

$$\frac{p_A}{\rho} + g z_A = \frac{p_B}{\rho} + g z_B \Rightarrow p_B = p_A + \gamma h_{AB} \text{ hay } p = p_a + \gamma h^*$$

**P.tr Mặt đẳng áp:**

$$(-a dx - g dz) = 0 \Rightarrow ax + gz = C \Rightarrow z = -\frac{a}{g} x + C$$



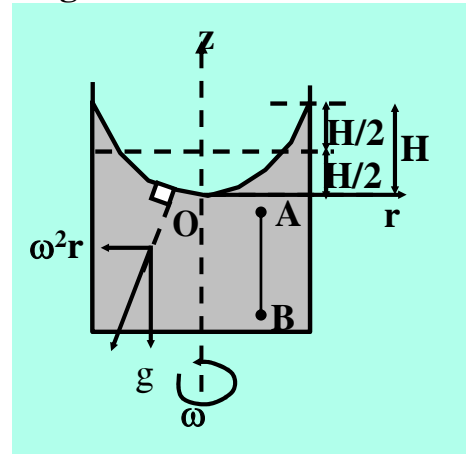
## 2. Nước trong bình trụ quay đều quanh trục thẳng đứng:

### Phân bố áp suất:

Ở đây:  $F_x = \omega^2 x$ ;  $F_y = \omega^2 y$ ;  $F_z = -g$ .

Suy ra:

$$(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz) - \frac{1}{\rho} dp = 0 \Rightarrow z + \frac{p}{\gamma} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} = C$$



Đối với hai điểm A, B thẳng đứng:

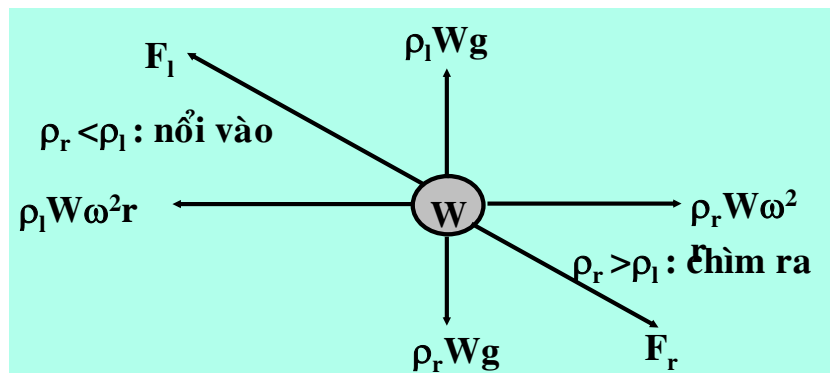
$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} - \frac{\omega^2 r_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} - \frac{\omega^2 r_B^2}{2g} \Rightarrow p_B = p_A + \gamma h_{AB} \text{ hay } p = p_a + \gamma h^*$$

### P.tr Mặt đẳng áp:

$$(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz) = 0 \Rightarrow z - \frac{\omega^2 r^2}{2g} = C \Rightarrow z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C$$

## IX. ỨNG DỤNG TÍNH TƯƠNG ĐỐI

Nguyên lý lắng ly tâm :



➤ Hạt dầu quay cùng trong nước sẽ nổi lên mặt thoáng và ở tâm bình trụ.

➤ Hạt cát quay cùng trong nước sẽ chìm xuống và ở mép đáy bình trụ.

**Ví dụ 13:**

Một thùng hình trụ hở cao  $H = 1,2$  m chứa nước ở độ sâu  $h_0 = 1$  m và di chuyển ngang theo phương  $x$  với gia tốc  $a = 4\text{m/s}^2$ . Biết bình có đường kính  $D = 2$  m. Tính áp lực của nước tác dụng lên đáy bình trong lúc di chuyển với gia tốc trên

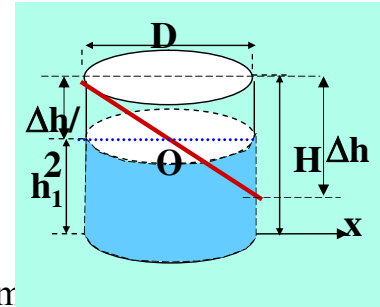
**Giải** Chọn gốc tọa độ là giao điểm của trục bình và mặt thoáng, p.tr mặt thoáng:

$$z = -\frac{a}{g}x$$

$$\text{Tại } x = -D/2: \quad z_{-D/2} = \frac{4}{9.81} \cdot 1 = 0.407\text{m} > H - h_0 = 1.2 - 1 = 0.2\text{m}$$

Vậy khi bình chuyển động nước tràn ra ngoài. Sau khi tràn ra xong, mặt thoáng nước phải vừa chạm mép sau bình. Giả sử lúc ấy bình dừng lại, thì mực nước trong bình còn lại là  $h_1$ . Ta có:

$$\frac{\Delta h}{2} = z_{-D/2} = \frac{4}{9.81} \cdot 1 = 0.407\text{m} \Rightarrow h_1 = H - \frac{\Delta h}{2} = 1.2 - 0.407 = 0.793\text{m}$$



Suy ra lực tác dụng lên đáy bình lúc ấy là:  $F = \gamma h_1 \pi \frac{D^2}{4} = 24.42 \text{ KN}$

**Ví dụ 14:** Một bình trụ  $D=100\text{mm}$  chứa nước quay tròn quanh trục thẳng đứng qua tâm.

Khi mực chất lỏng giữa bình hạ thấp xuống  $200\text{mm}$  (so với lúc tĩnh) thì bình quay với vận tốc bao nhiêu? Nếu quay bình với  $n=800\text{v.ph}$  mà không muốn đáy bị cạn thì chiều cao tối thiểu của bình phải bằng bao nhiêu?

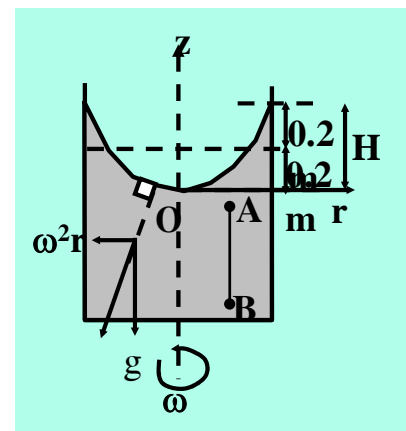
**Giải**

$$\text{Phương trình mặt thoáng: } z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \Rightarrow H = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

Khi mực nước giữa bình hạ xuống  $0,2\text{m}$  thì  $H=0,4\text{m}$ .

Suy ra:

$$0.4 = \frac{\omega^2 (0.05)^2}{2 \cdot 9.81} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{0.4 \cdot 2 \cdot 9.81}{(0.05)^2}} = 56.03\text{s}^{-1} = 535\text{vong/ph}$$



Nếu quay bình với  $n=800\text{v/ph} = 83,76 \text{ s}^{-1}$  mà không muốn đáy bị cạn thì :

$$H = \frac{(83.76)^2 (0.05)^2}{2 \cdot 9.81} = 0.896\text{m}$$

Vậy chiều cao tối thiểu của bình phải là  $0.896 \text{ m}$

**Ví dụ 15:**

Một bình hình hộp kín (cao b, đáy vuông cạnh a) chứa nước đầy nước quay tròn quanh trục thẳng đứng qua tâm. Biết tại A- tâm đáy trên của bình là áp suất khí trời. Tính lực tác dụng lên mặt bên của bình

**Giải:**

Ta có: 
$$h^* = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Lực tác dụng lên vi phân  $dA_x$  bằng:

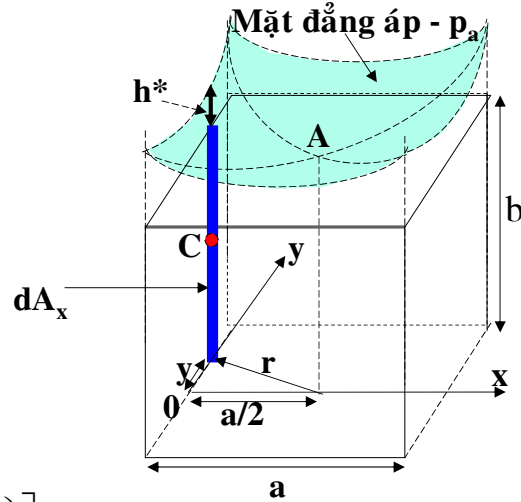
$$dF = p_C dA_x = \gamma \left[ \frac{b}{2} + \frac{\omega^2 (y^2 + \frac{a^2}{4})}{2g} \right] b dy$$

Suy ra: 
$$F = 2\gamma b \int_0^{a/2} \left[ \frac{b}{2} + \frac{\omega^2}{2g} (y^2 + \frac{a^2}{4}) \right] dy$$

$$= 2\gamma b \left[ \frac{b a}{2 \cdot 2} + \frac{\omega^2}{2g} \left( \frac{(a/2)^3}{3} + \frac{a^2 a}{4 \cdot 2} \right) \right]$$

$$= 2\gamma b \left[ \frac{ab}{4} + \frac{\omega^2}{2g} \left( \frac{a^3}{24} + \frac{a^3}{8} \right) \right]$$

$$\Rightarrow F = \gamma ab \left[ \frac{b}{2} + \frac{\omega^2 a^2}{6g} \right]$$



**Ví dụ 16:**

Một hệ thống gồm 3 ống nghiệm thẳng đứng bằng và thông nhau quay quanh Oz qua ống giữa như hình vẽ. Vận tốc quay  $n=116$  vòng/ph. Bỏ qua độ nghiêng mặt nước trong ống. Tìm  $p_C, p_O, p_B$  trong hai trường hợp nút kín và không nút C, C',

**Giải:**

Nếu nút kín C, C' thì khi quay, nước không di chuyển, nhưng áp suất tại C và C' sẽ tăng lên. Phương trình mặt đẳng áp – áp suất  $p_C$  (chọn gốc tọa độ tại đáy parabol):

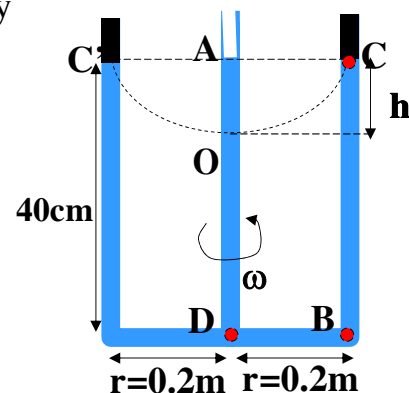
$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{12.15^2 * 0.2^2}{2 * 9.81} = 0.30 \text{ m}$$

Như vậy áp suất dư tại C và C' bằng nhau và bằng:

$$p_C^{du} = p_{C'}^{du} = \gamma h = 9810 * 0.30 = 2951 \text{ N/m}^2$$

$$\Rightarrow p_D^{du} = \gamma * 0.4 = 9810 * 0.40 = 3924 \text{ N/m}^2$$

$$\Rightarrow p_B^{du} = \gamma * (0.4 + 0.3) = 6875 \text{ N/m}^2$$



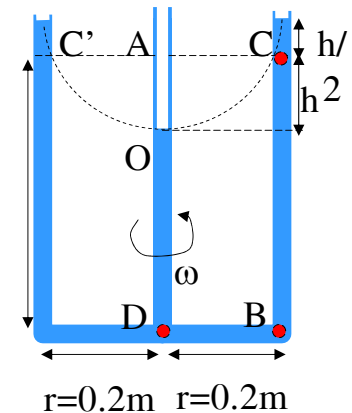
Nếu không nút C,C' thì khi quay, nước tại A sẽ hạ thấp xuống h, và nước tại C và C' sẽ dâng lên h/2. Phương trình mặt đẳng áp – áp suất khí trời (chọn gốc tọa độ tại đáy parabol):

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \Rightarrow \frac{3}{2}h = \frac{12.15^2 * 0.2^2}{2 * 9.81} = 0.30 \text{ m} \Rightarrow h = 0.2 \text{ m}$$

$$\Rightarrow p_C^{du} = p_{C'}^{du} = \gamma h = 9810 * 0.20 = 983.7 \text{ N/m}^2$$

$$\Rightarrow p_D^{du} = \gamma * (0.4 - 0.2) = 9810 * 0.2 = 1967.5 \text{ N/m}^2$$

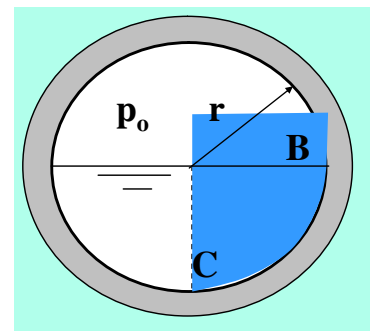
$$\Rightarrow p_B^{du} = \gamma * (0.4 + 0.1) = 4905 \text{ N/m}^2$$



**Ví dụ 17**

Một ống tròn bán kính  $r = 1 \text{ m}$  chứa nước đến nửa ống như hình vẽ. Trên mặt thoáng khí có áp suất dư  $p_0 = 0,5 \text{ m}$  nước. Biết nước ở trạng thái tĩnh. Tính tổng áp lực của nước tác dụng lên  $\frac{1}{4}$  mặt cong (BC) trên 1m dài của ống

**Giải:**



$$F_x = p_{cx} A_x = \gamma \left(0,5 + \frac{r}{2}\right) r \cdot 1 = 9810 * (0,5 + 0,5) * 1 = 9810 \text{ N}$$

$$F_z = \gamma W = \gamma \left(\pi \frac{r^2}{4} + 0,5r\right) \cdot 1 = 9810 * 1.285 = 12605.85 \text{ N}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = 15973.2 \text{ N}$$

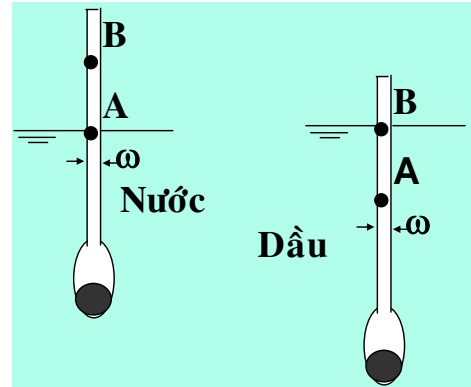
**Ví dụ 18**

Một ống đo tỉ trọng như hình vẽ có khối lượng  $M = 0,045\text{kg}$  và tiết diện ngang của ống là  $\omega = 290\text{mm}^2$ . Khi bỏ vào trong nước có tỉ trọng  $\delta_N = 1$ , ống chìm đến vạch A, và khi bỏ vào trong dầu có tỉ trọng  $\delta_D = 0,9$  ống chìm đến vạch B. Tìm khoảng cách đoạn AB

**Giải:**

$$G = gM = \gamma_n W = \gamma_d (W + L_{AB}\omega)$$

$$\Rightarrow W = \frac{G}{\gamma_n}; \quad L_{AB} = \frac{G}{\omega\gamma_n} \left( \frac{1}{\delta_d} - 1 \right)$$



$$L_{AB} = \frac{9.81 * 0.045}{290 * 10^{-6} * 9810} \left( \frac{1}{0.9} - 1 \right) * 1000 = 17.24\text{mm}$$

**Ví dụ 19:**

Bình trụ tròn chứa chất lỏng trong đó có thả phao hình cầu. Bình này lại được nhúng nổi trên mặt thoáng bể chứa cùng loại chất lỏng. Biết :  
 Trọng lượng của bình là  $G_1$ ; Trọng lượng của chất lỏng chứa trong bình là  $G_2$ ;  
 Tỷ số các chiều sâu (như hình vẽ)  $k=z_1/z_2$ ; Tìm trọng lượng của phao

**Giải:**

Theo định luật Ar.; toàn bộ hệ chịu tác dụng của lực đẩy Ar, hướng lên, bằng trọng lượng của khối chất lỏng bị vật chiếm chỗ.

Trong khi đó lực theo phương thẳng đứng tác dụng lên toàn bộ hệ bao gồm  $G+G_1+G_2$ .

Vậy:  $G + G_1 + G_2 = Ar = z_1 A \gamma$

với A là tiết diện ngang của bình.

Xét riêng hệ gồm chất lỏng trong bình và phao, ta có trọng lượng của phao cũng bằng trọng lượng của khối chất lỏng bị phao chiếm trong bình :  $G = z_2 A \gamma - G_2 \Rightarrow A \gamma = (G+G_2)/z_2$

Suy ra:  $G + G_1 + G_2 = z_1(G+G_2)/z_2 = kG+kG_2$

$$\Rightarrow G = \frac{G_1}{k-1} - G_2$$

