CHƯƠNG 3

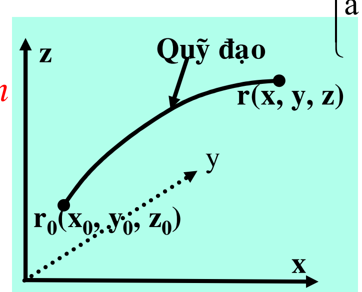
ĐỘNG HỌC

I. HAI PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU CHUYỂN ĐỘNG CỦA LƯU CHẤT

1. Phương pháp Lagrange

(J.L de Lagrange, nhà toán học người Pháp,1736-1883)

$$\vec{r}=f(\vec{r}_0,t)\Leftrightarrow\begin{cases}x=x(x_0,y_0,z_0,t)\\ y=x(x_0,y_0,z_0,t)\\ z=x(x_0,y_0,z_0,t)\end{cases}\rightarrow\quad \vec{u}=\frac{d\vec{r}}{dt}\Leftrightarrow\begin{cases}u_x=\dfrac{dx}{dt}\\ u_y=\dfrac{dy}{dt}\\ u_z=\dfrac{dz}{dt}\end{cases}\rightarrow\quad \vec{a}=\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Leftrightarrow\begin{cases}a_x=\dfrac{d^2x}{dt^2}\\ a_y=\dfrac{d^2y}{dt^2}\\ a_z=\dfrac{d^2z}{dt^2}\end{cases}$$



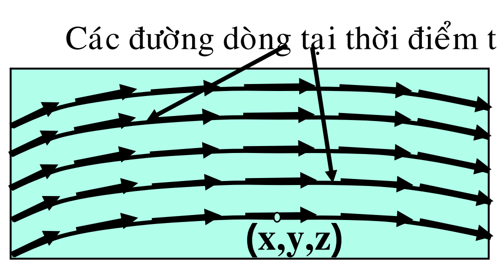
➢*Trong phương pháp Lagrage , các yếu tố chuyển động chỉ phụ thuộc vào thời gian , VD:* $u = at^2+b$

2. Phương pháp Euler

(L. Euler, nhà toán học người Thụy Sĩ, 1707-1783)

$$\vec{u}=\vec{u}(x,y,z,t)\Leftrightarrow\begin{cases}u_x=u_x(x,y,z,t)\\ u_y=u_y(x,y,z,t)\\ u_z=u_z(x,y,z,t)\end{cases}$$

➢Phương trình đường dòng: $\rightarrow$ $\dfrac{dx}{u_x}=\dfrac{dy}{u_y}=\dfrac{dz}{u_z}$



Ví dụ 1a: $u_x=3x^2$; $u_y=-6xy$; $u_z=0$

Thiết lập phương trình đường dòng: $\dfrac{dx}{3x^2}=\dfrac{dy}{-6xy}$

Chuyển các số hạng có biến x về vế trái, biến y về vế phải:

$$\frac{2xdx}{x^2}=\frac{dy}{-y}\Leftrightarrow\frac{2dx}{x}=\frac{dy}{-y}$$

Tích phân hai vế: $\displaystyle\int\frac{2dx}{x}=\int\frac{dy}{-y}$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x)=-\ln(y)+\ln C\Leftrightarrow x^2y=C$$

Vậy phương trình đường dòng có dạng: $x^2y=C$

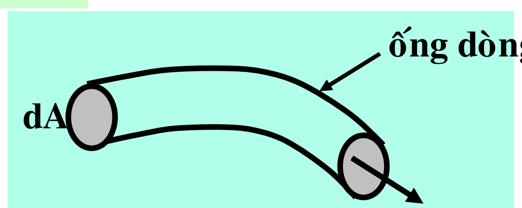
Ví dụ 1b: $u_x=x^2y+2x$; $u_y=-(y^2x+2y)$;

Thiết lập phương trình đường dòng: $\dfrac{dx}{x^2y+2x}=\dfrac{dy}{-(xy^2+2y)}$

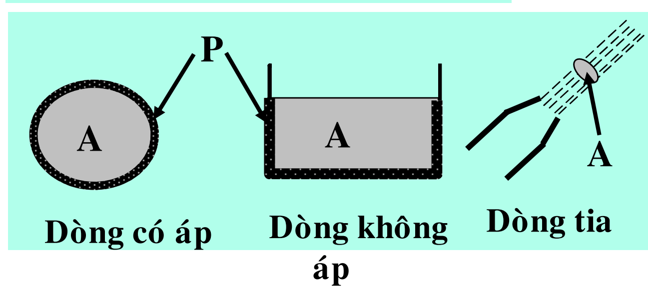
Trong trường hợp này ta không thể chuyển các số hạng có cùng biến x, y về cùng một phía, nên không thể lấy tích phân hai vế được, ta sẽ giải bài toán này sau trong chương thế lưu

II. CÁC KHÁI NIỆM THƯỜNG DÙNG

1. Đường dòng, dòng nguyên tố



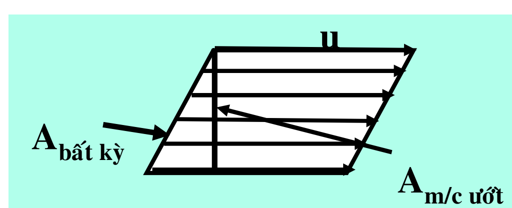
2. Diện tích mặt cắt ướt A,
   Chu vi ướt P,
   Bán kính thủy lực R=A/P



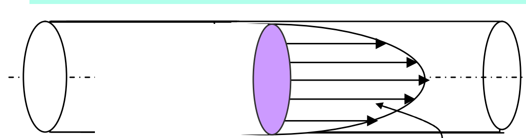
3. Lưu lượng Q,
   Vận tốc trung bình m/ cắt ướt V:

$$Q=\int_{Abatky}u_n dA=\int_{Am/c.uot}udA$$

$$V=\frac{Q}{A}$$



Nhận xét: *Lưu lượng chính là thể tích của biểu đồ phân bố vận tốc :*

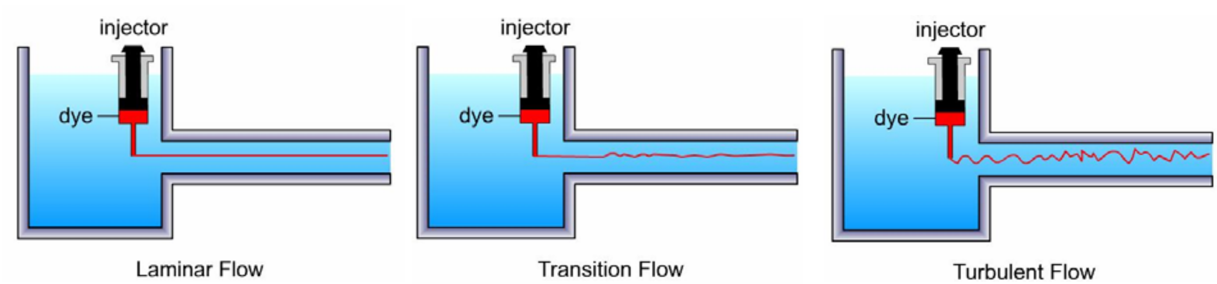


Biểu đồ phân bố vận tốc

III. PHÂN LOẠI CHUYỂN ĐỘNG:

1. **Theo ma sát nhớt:** → *Chuyển động chất lỏng lý tưởng*, : không có ma sát
   Chuyển động chất lỏng thực: có ma sát -Re $= \dfrac{F_{quantinh}}{F_{masat}}$
   Re=VD/ν=V4R/ν:**tầng**(Re<2300) - **rối** (Re>2300)
2. **Theo thời gian:** ổn định-không ổn định.
3. **Theo không gian:** đều-không đều.
4. **Theo tính nén được:** số Mach M=u/a
   a: vận tốc truyền âm; u:vận tốc phần tử lưu chất
   dưới âm thanh (M<1) - ngang âm thanh (M=1)
   trên âm thanh (M>1) - siêu âm thanh (M>>1)

➤ ***Thí nghiệm Reynolds***



IV. GIA TỐC PHẦN TỬ LƯU CHẤT :

Theo Euler:

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{du_z}{dt} = \underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial t}}_{\text{t.ph.cục-bộ}} + \underbrace{u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}}_{\text{thành phần đối lưu}}$$

Theo Lagrange:

$$\vec{u} = u(x_0, y_0, z_0, t) \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

V. PHÂN TÍCH CHUYỂN ĐỘNG CỦA LƯU CHẤT:

Trong hệ trục toạ độ O(x,y,z), xét vận tốc của hai điểm M(x,y,z) và M1(x+dx,y+dy,z+dz), vì hai điểm rất sát nhau, nên ta có:

$$u_{x1} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}dz$$

$$u_{y1} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x}dx + \frac{\partial u_y}{\partial y}dy + \frac{\partial u_y}{\partial z}dz$$

$$u_{z1} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x}dx + \frac{\partial u_z}{\partial y}dy + \frac{\partial u_z}{\partial z}dz$$

vận tốc chuyển động tịnh tiến

vận tốc biến dạng dài

vận tốc biến dạng góc và vận tốc quay

➤*Định lý Hemholtz*

Chuyển động

1. Tịnh tiến

2. Quay → Vận tốc quay: $\vec{\omega} = \frac{1}{2}Rot\vec{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{pmatrix}$

3. Biến dạng

Biến dạng góc → Suất biến dạng góc

Biến dạng dài → Suất biến dạng dài

$$\varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \qquad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

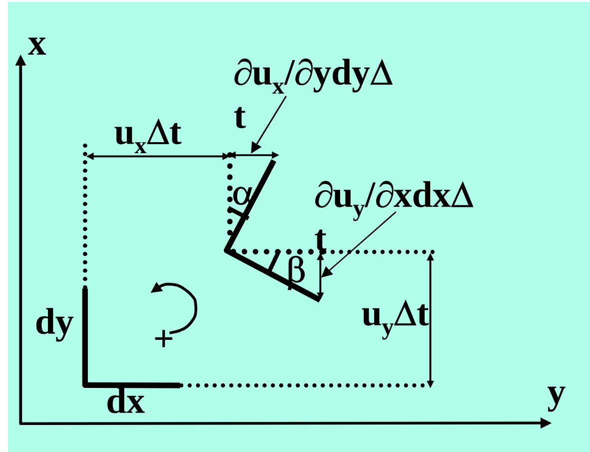
$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

•Chuyển động quay của phần tử lưu chất:

$$\omega = -\frac{\alpha+\beta}{2}\frac{1}{\Delta t} = -\frac{1}{2\Delta t}\left(\frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}dy\Delta t}{dy} + \frac{-\frac{\partial u_y}{\partial x}dx\Delta t}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\text{rot}u_z$$



$\text{rot}\,(\vec{u}) = 0$ ⟶ chuyển động không quay (thế)

$\text{rot}(\vec{u}) \neq 0$ ⟶ chuyển động quay

Ví dụ 2: Xác định đường dòng của một dòng chảy có : $u_x = 2y$ và $u_y = 4x$

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$$

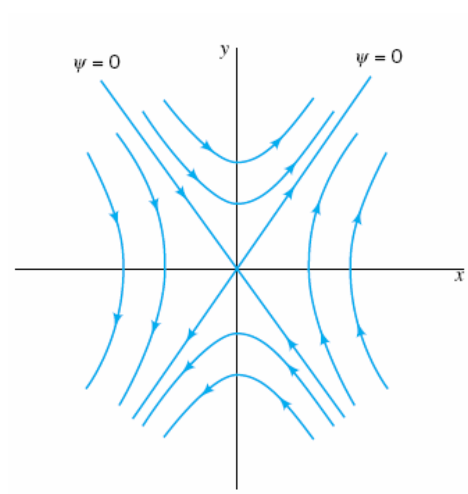
$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{4x}$$

$$4xdx = 2ydy$$

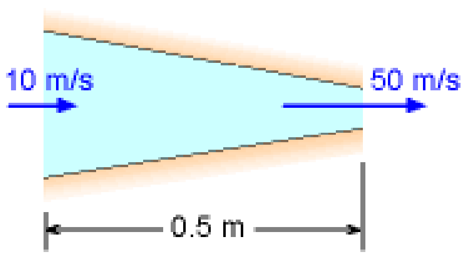
$$2xdx = ydy$$

$$2\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{y^2}{2} + C$$

$$2x^2 - y^2 = C$$



Example. 3:

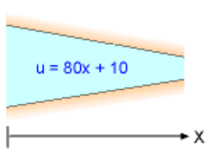


In a testing facility, the inlet and outlet velocities of a nozzle along the center line are measured to be 10 m/s and 50 m/s, respectively. Technician John is asked to provide a customer with the velocity and acceleration distribution of the fluid in the nozzle. The length of the nozzle is 0.5 m, as shown in the figure.

Derive the equations for the velocity and acceleration. What is the local acceleration of the fluid entering and exiting the nozzle?

•Assume that the flow is one-dimensional, and it varies linearly along the centerline in the nozzle.

CASE STUDY SOLUTION

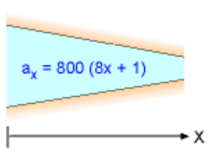


For the center streamline, the velocity of the fluid is one-dimensional and linear:

$u = ax + b$ where a and b are constants.

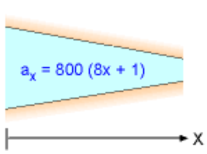
Based on the experimental measurements, u is 10 m/s when x is zero (inlet) while u is 50 m/s when x is 0.5 m (outlet). Hence, it can be determined that the constants a and b are 80 and 10, respectively. The velocity distribution is thus given by

$u = (80x + 10)$ m/s



The acceleration of the fluid is given by (use the fact that v = w = 0 for 1-D flow):

$$a_x = \frac{Du}{Dt}$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$= (80x + 10)\frac{\partial}{\partial x}(80x + 10)$$
$$= 800\,(8x + 1)$$

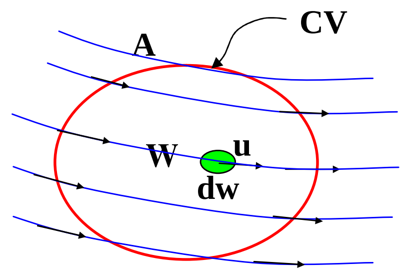


The local accelerations of the fluid at the inlet and outlet are then determined to be 800 m/s2 and 4,000 m/s2, respectively.

VI ĐỊNH LÝ VẬN TẢI REYNOLDS- PHƯƠNG PHÁP THỂ TÍCH KIỂM SOÁT

1. Thể tích kiểm soát, và đại lượng nghiên cứu:

Xét thể tích W trong không gian lưu chất chuyển động. W có diện tích bao quanh là A. Ta nghiên cứu đại lượng X nào đó của dòng lưu chất chuyển động qua không gian này. Đại lượng X của lưu chất trong không gian W được tính bằng:



$$X=\iiint_W k\rho dW$$

W: thể tích kiểm soát

X : Đại lượng cần nghiên cứu

k : Đại lượng đơn vị (đại lượng X trên 1 đơn vị khối lượng)

Ví dụ: X là khối lượng: k=1 ; $X=\iiint_W \rho dW$

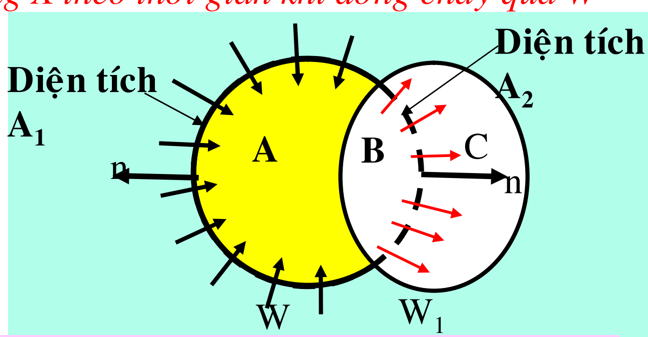
X là động lượng: $k=\vec{u}$ $\vec{X}=\iiint_W \vec{u}\rho dW$

X là động năng: $k=u^2/2$; $X=\iiint_W \frac{u^2}{2}\rho dW$

. Định lý vận tải Reynolds- phương pháp thể tích kiểm soát:

➢*Nghiên cứu sự biến thiên của đại lượng X theo thời gian khi dòng chảy qua W*

$$\frac{dX}{dt}=\left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_W+\iint_A k\rho u_n dA$$



Tại t: lưu chất vào chiếm đầy thể tích kiểm soát W.

Tại t+Δt: lưu chất từ W chuyển động đến và chiếm khoảng không gian W1.

$$\frac{dX}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta X}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X_{t+\Delta t}-X_t}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X_{W_1}-X_W}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(X_B^{t+\Delta t}+X_C^{t+\Delta t})-(X_A^t+X_B^t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(X_B^{t+\Delta t}+X_A^{t+\Delta t})-(X_A^t+X_B^t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X_C^{t+\Delta t}-X_A^{t+\Delta t}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X_W^{t+\Delta t}-X_W^t}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X_C^{t+\Delta t}-X_A^{t+\Delta t}}{\Delta t}$$

$$=\left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_W+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t\iint_{A_2}k\rho u_n dA+\Delta t\iint_{A_1}k\rho u_n dA}{\Delta t}$$

$$=\left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_W+\iint_A k\rho u_n dA$$

VII ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP TTKS

$$\frac{dX}{dt} = \left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_W + \iint_A k\rho u_n dA$$

1. PHƯƠNG TRÌNH LIÊN TỤC

X là khối lượng: theo đ. luật bảo toàn khối lượng: $\frac{dX}{dt} = 0$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial \iiint_W \rho dW}{\partial t} + \iint_A \rho u_n dA \underset{b.d.Gauss}{=} \iiint_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW + \iiint_W div(\rho u) dW = 0$$

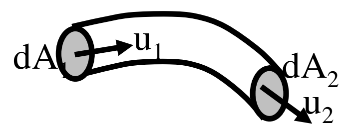
Hay : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho u) = 0$: ***dạng vi phân của ptr liên tục***

•Nếu ρ=const→ ***ptr vi phân liên tục của lưu chất không nén được:***

$$div(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

▪Dòng nguyên tố chuyển động ổn định: → ***ptr liên tục của dòng nguyên tố chuyển động ổn định:***

$$\iint_A \rho u_n dA = 0 \Leftrightarrow \rho_1 u_1 dA_1 = \rho_2 u_2 dA_2$$



•Đối với toàn dòng chuyển động ổn định (có một m/c vào, 1 m/c ra) → ***ptr liên tục cho toàn dòng lưu chất chuyển động ổn định dạng khối lượng:***

$$\int_{A_1} \rho_1 u_1 dA_1 = \int_{A2} \rho_2 u_2 dA_2 \Leftrightarrow M_1 = M_2$$

M1: khối lượng lưu chất vào m/c A1 trong 1 đv t.gian
M2: khối lượng lưu chất ra m/c A2 trong 1 đv t.gian

•Đối với toàn dòng chuyển động ổn định (có một m/c vào, 1 m/c ra), lưu chất không nén được: → ***ptr liên tục cho toàn dòng lưu chất không nén được chuyển động ổn định:***

$$Q_1 = Q_2 \quad \text{hay} \quad Q = const$$

•Trong trường hợp dòng chảy có nhiều mặt cắt vào và ra, c. động ổn định, lưu chất không nén được, tại một nút, ta có: → ***ptr liên tục tại một nút cho toàn dòng lưu chất không nén được chuyển động ổn định:***

$$\sum Q_{đến} = \sum Q_{đi}$$

2. PHƯƠNG TRÌNH NĂNG LƯỢNG $\frac{dX}{dt}=\left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_W+\iint_A k\rho u_n dA$

Khi X là năng lượng của dòng chảy có khối lượng m (ký hiệu là E, bao gồm nội năng, động năng và thế năng (thế năng bao gồm vị năng lẫn áp năng), ta có:

X = E = Eu + 1/2mu²+ mgZ với $Z=z+p/\gamma$

Như vậy, *năng lượng của một đơn vị khối lượng lưu chất k* bằng: $k=e_u+\frac{1}{2}u^2+gz+\frac{p}{\rho}$

trong đó: e_u là nội năng của một đơn vị khối lượng.
$1/2u^2$ là động năng của một đơn vị khối lượng.
gz là vị năng của một đơn vị khối lượng.
p/ρ là áp năng của một đơn vị khối lượng.

Định luật I Nhiệt động lực học: *số gia năng lượng được truyền vào chất lỏng trong một đơn vị thời gian (dE/dt) , bằng suất biến đổi trong một đơn vị thời gian của nhiệt lượng (dQ/dt) truyền vào khối chất lỏng đang xét, trừ đi suất biến đổi công (dW/dt) trong một đơn vị thời gian của khối chất lỏng đó thực hiên đối với môi trường ngoài (ví dụ công của lực ma sát):*

Như vậy
$$\frac{dE}{dt}=\frac{dQ}{dt}-\frac{dW}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dQ}{dt}-\frac{dW}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_W\left(e_u+\frac{1}{2}u^2+gz+\frac{p}{\rho}\right)\rho dw+\iint_A\left(e_u+\frac{1}{2}u^2+gz+\frac{p}{\rho}\right)\rho u_n dA} \longrightarrow$$

Dạng tổng quát của P. tr NL

3. PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LƯỢNG

Khi X là động lượng: $\longrightarrow$ $k=\vec{u}$ $\longrightarrow$ $\vec{X}=\iiint_W \vec{u}\rho dW$

Định biến thiên động lượng: *biến thiên động lượng của lưu chất qua thể tích W (được bao quanh bởi diện tích A) trong một đơn vị thời gian bằng tổng ngoại lực tác dụng lên khối lưu chất đó*:

$$\frac{d\vec{X}}{dt}=\sum\vec{F}_{ngoạilực}$$

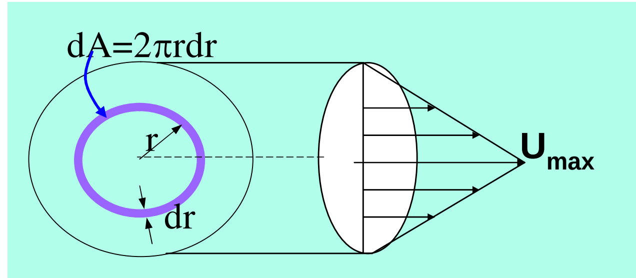
Như vậy, từ kết quả của pp TTKS: $\frac{dX}{dt}=\left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_W+\iint_A k\rho u_n dA$; ta có:

$$\boxed{\sum\vec{F}_{ngoạilực}=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_W(\vec{u})\rho dw+\iint_A(\vec{u})\rho u_n dA} \longrightarrow$$

Dạmg tổng quát của p.tr ĐL

Ví dụ 4: Một dòng chảy ra khỏi ống có vận tốc phân bố dạng như hình vẽ, với vận tốc lớn nhất xuất hiện ở tâm và có giá trị U_{max} = 12 cm/s . Tìm vận tốc trung bình của dòng chảy

Giải:



Tại tâm ống, $u=u_{max}$; tại thành ống, u=0.

Ta có trên phương r,; vận tốc dòng chảy phân bố theo quy luật tuyến tính:

$$u = \frac{u_{max}}{R}(R - r)$$

Lưu lượng :

$$Q = \int_0^R \frac{u_{max}}{R}(R-r)2\pi r dr = \frac{2\pi u_{max}}{R}\left[\frac{Rr^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_{r=R} = \frac{\pi u_{max} R^2}{3}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{u_{max}}{3}$$

$$V = 4cm/s$$

Ví dụ 5: Lưu chất chuyển động ổn định trong đường ống có đường kính D. Ở đầu vào của đoạn ống, lưu chất chuyển động tầng, vận tốc phân bố theo quy luật :

$$u = u_1\left[1 - \frac{r^2}{(R)^2}\right]$$

u_1: vận tốc tại tâm ống khi chảy tầng.
r : được tính từ tâm ống $(0 \le r \le D/2)$

Khi lưu chất chuyển động vào sâu trong ống thì chuyển sang chảy rối, với phân bố vận tốc như sau :

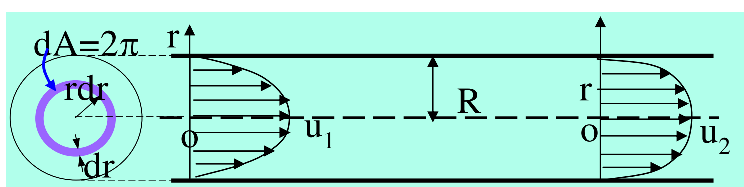
$$u = u_2\left(\frac{y}{R}\right)^{1/7}$$

u_2: vận tốc tại tâm ống khi chảy rối
y : được tính từ thành ống $(0 \le y \le D/2)$

Tìm quan hệ giữa u_1 và u_2

Giải:

Theo phương trình liên tục:



$$Q_1 = Q_2$$

$$Q_1 = \int_0^R u_1\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]2\pi r dr; \qquad Q_2 = \int_0^R u_2\left[\frac{y}{R}\right]^{1/7} 2\pi(R-y)dy$$

$$Q_1 = \int_0^R u_1\left[1 - \frac{r^2}{(R)^2}\right]2\pi r dr = 2\pi u_1\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4(R)^2}\right]_{r=R} = \frac{\pi u_1 R^2}{2}$$

$$Q_2 = -2\pi u_2\left[\int_R^0 R\left[\frac{y}{R}\right]^{1/7}dy - \int_R^0 y\left[\frac{y}{R}\right]^{1/7}dy\right] = 2\pi u_2\left[\frac{7y^{8/7}}{8}R^{6/7} - \frac{7y^{15/7}}{15}R^{-1/7}\right]_{y=R} = \frac{49}{60}\pi u_2 R^2$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{49}{30}u_2$$

Ví dụ 5:

Chất lỏng lý lưởng quay quanh trục thẳng đứng (oz). Giả sử vận tốc quay của các phân tố chất lỏng tỷ lệ nghịch với khoảng cách từ trục quay trên phương bán kính (V=a/r; a>0 là hằng số. Chúng minh rằng đây là một chuyển động thế. Tìm phương trình các đường dòng

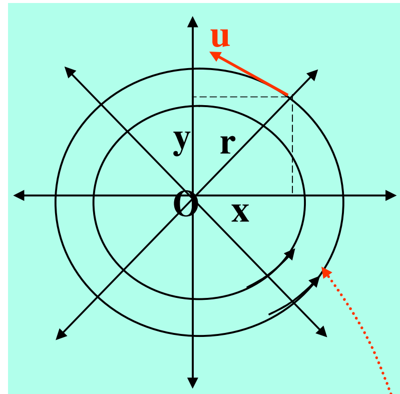
Giải:

chuyển động không quay (thế) $\longleftrightarrow$ $\text{rot}\,(\vec{u})_z = 0 \longleftrightarrow \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0$

$$u_x = u\cos(u,ox) = \frac{a}{r}\frac{-y}{r} = \frac{-ay}{r^2} = \frac{-ay}{x^2+y^2};$$

Suy ra:

$$u_y = u\cos(u,oy) = \frac{a}{r}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{ax}{r^2} = \frac{ax}{x^2+y^2}$$



$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ax}{x^2+y^2}\right) = \frac{a(x^2+y^2)-ax(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{a(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-ay}{x^2+y^2}\right) = \frac{-a(x^2+y^2)+ay(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{a(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Vậy: $\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \text{rot}(u)_z = 0$

Đây là chuyển động Một chuyển động thế trên mặt phẳng xOy

Phương trình các đường dòng: $u_x dy = u_y dx \Leftrightarrow \frac{-ay}{x^2+y^2}dy = \frac{ax}{x^2+y^2}dx$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2) = C$$