CHƯƠNG 6

THẾ LƯU

Giới hạn: *dòng chảy phẳng, lưu chất lý tưởng không nén được chuyển động ổn định*

I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Hàm thế vận tốc:

Ta định nghĩa hàm φ sao cho: $u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \text{hay} \quad u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}; \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ (1)

Trường véctơ u là trường có thế khi: $\int_A^B \vec{u}ds$ chỉ phụ thuộc vào hai vị trí A và B.

Ta có:

$$\int_A^B \vec{u}ds = \int_A^B (u_x dx + u_y dy) \overset{\text{tồn tại } \varphi \text{ thoả (1)}}{\Longrightarrow} \int_A^B \vec{u}ds = \int_A^B \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\right)$$

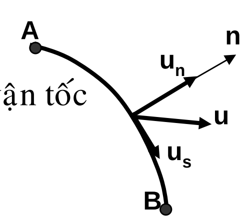
$$= \int_A^B d\varphi = \varphi_A - \varphi_B$$

Rõ ràng từ chứng minh trên, $\int_A^B \vec{u}ds$ chỉ phụ thuộc vào giá trị hàm thế tại A và B.

Vậy:

Dòng chảy có thế ⇔∃φ/thoả đ.k. (1) ⇔ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0$ ⇔ $\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$ ⇔ **rot(u)=0**

2. Phương trình đường đẳng thế: $d\varphi = 0 \Leftrightarrow u_x dx + u_y dy = 0$



3. Ý nghĩa hàm thế vận tốc: $\Gamma_{AB} = \varphi_B - \varphi_A$

$\Gamma_{AB} = \int_A^B u_s \overrightarrow{ds}$ là lưu số vận tốc

4. Tính chất hàm thế:

Từ ptr liên tục, ta có: $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$

⇔ Hàm thế thoả phương trình Laplace

5. Hàm dòng:

Khi dòng chảy lưu chất không nén được tồn tại, thì các thành phần vận tốc của nó thoả ptr liên tục : $\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0 \Leftrightarrow \exists \psi / u_x=\frac{\partial \psi}{\partial y}; u_y=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$ hay $u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}; u_\theta=-\frac{\partial \psi}{\partial r}$

ψ gọi là hàm dòng.

Như vậy ψ tồn tại trong mọi dòng chảy, còn φ chỉ tồn tại trong dòng chảy thế.

6. Hàm dòng trong thế phẳng:

Vì là dòng chảy thế nên: $\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}=0 \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=0$

Vậy trong dòng thế thì hàm ψ thoả ptr Laplace.

7. Đường dòng và ptr:

Từ ptr đường dòng: $u_x dy - u_y dx = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial x}dx = 0 \Leftrightarrow d\psi = 0$

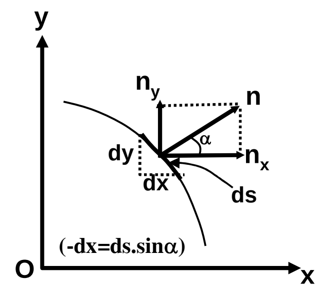
Như vậy trên cùng một đường dòng thì giá trị ψ là hằng số.

8. Ý nghĩa hàm dòng:

Ta có: $q_{AB}=\int_A^B u_n ds=\int_A^B \vec{u}\vec{n}ds=\int_A^B u_x n_x ds+u_y n_y ds=\int_A^B u_x \cos\alpha ds+u_y \sin\alpha ds$

$$=\int_A^B u_x dy - u_y dx=\int_A^B \frac{\partial \psi}{\partial y}dy-\frac{\partial \psi}{\partial x}dx=\int_A^B d\psi=\psi_B-\psi_A$$

Vậy: $q_{AB}=\psi_B-\psi_A$



9. Sự trực giao giữa họ các đường dòng và đường đẳng thế:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}=u_x(-u_y)+u_y(u_x)=0$$

Suy ra họ các đường dòng và các đường đẳng thế trực giao với nhau.

10. Cộng thế lưu:

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\ldots$$
$$\psi=\psi_1+\psi_2+\ldots$$

11. Biểu diễn dòng thế:

Để biểu diễn dòng chảy thế, ta có thể biểu diễn riêng từng hàm dòng và hàm thế, ta cũng có thể kết hợp hàm dòng với hàm thế thành một hàm thế phức như sau::

Thế phức f(z): $f(z)=\varphi+i\psi$ với $z = x+iy = e^{i\alpha}$.

Như vậy: $\frac{df}{dz}=u_x-iu_y=\frac{d\varphi}{dx}+i\frac{d\psi}{dy}$

II. CÁC VÍ DỤ VỀ THẾ LƯU

1. Chuyển động thẳng đều: từ xa vô cực tới, hợp với phương ngang một góc α.

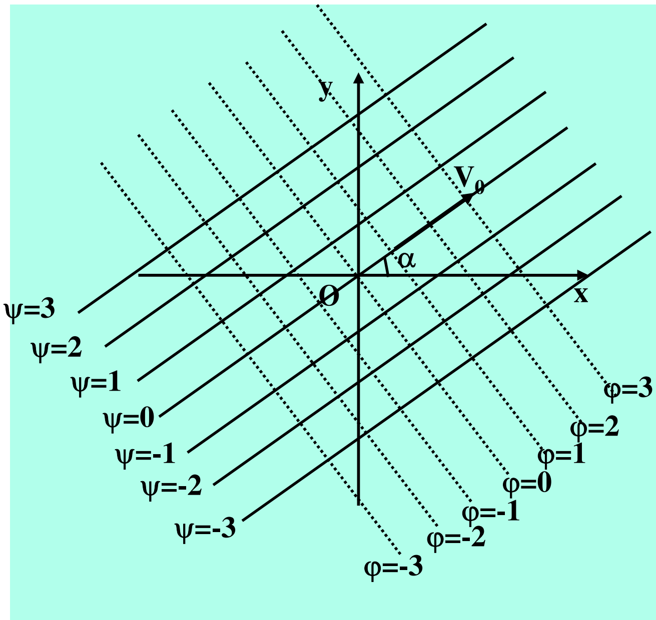
$$u_x = V_0\cos\alpha; \quad u_y = V_0\sin\alpha$$
$$d\psi = u_x dy - u_y dx$$
$$\psi = V_0 y\cos\alpha - V_0 x\sin\alpha + C$$

Chọn: $\psi=0$ là đường qua gốc toạ độ

$\Rightarrow C=0.$

Vậy: $\psi = V_0 y\cos\alpha - V_0 x\sin\alpha$

Tương tự: $\varphi = V_0 x\cos\alpha + V_0 y\sin\alpha$



Biễu diễn bằng hàm thế phức:

$$F(z) = \varphi + i\psi = (V_0 x\cos\alpha + V_0 y\sin\alpha) + i(V_0 y\cos\alpha - V_0 x\sin\alpha)$$
$$= x(V_0\cos\alpha - iV_0\sin\alpha) + yi(V_0\cos\alpha - iV_0\sin\alpha)$$
$$= az$$

với: $a=(V_0\cos\alpha - iV_0\sin\alpha)$ là số phức; $z=x+iy$ là biến phức.

2. Điểm nguồn, điểm hút: với lưu lượng q tâm đặt tại gốc toạ độ.

(q>0:điểm nguồn; q<0:điểm hút).

Hàm dòng:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{q}{2\pi r} \\ u_\theta &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}dr + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta = -u_\theta dr + ru_r d\theta = ru_r d\theta$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{q}{2\pi}\theta + C; \quad \text{chọn} \quad \psi = 0 \quad \text{khi} \quad \theta = 0$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{q}{2\pi}\theta = \frac{q}{2\pi}\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Hàm thế vận tốc:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta = u_r dr + ru_\theta d\theta = u_r dr = \frac{q}{2\pi r}dr$$

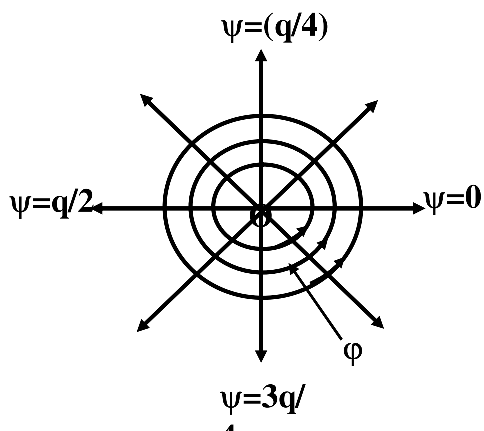
$$\Rightarrow \varphi = \frac{q}{2\pi}\ln(r) + C; \quad \text{chọn } \varphi=0 \quad \text{khi } r=1$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{q}{2\pi}\ln(r) = \frac{q}{4\pi}\ln(x^2+y^2)$$

$\Rightarrow$ Họ các đường dòng là những đường thẳng qua O.

Kết luận:

$$\begin{cases} \psi = \dfrac{q}{2\pi}\theta = \dfrac{q}{2\pi}\text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \varphi = \dfrac{q}{2\pi}\ln(r) = \dfrac{q}{4\pi}\ln(x^2+y^2) \\ f(z) = \dfrac{q}{2\pi}(\ln r + i\theta) = \dfrac{q}{2\pi}(\ln r + \ln e^{i\theta}) \\ \quad = \dfrac{q}{2\pi}\ln(re^{i\theta}) = \dfrac{q}{2\pi}\ln z = a\ln z \end{cases}$$



Ghi chú:

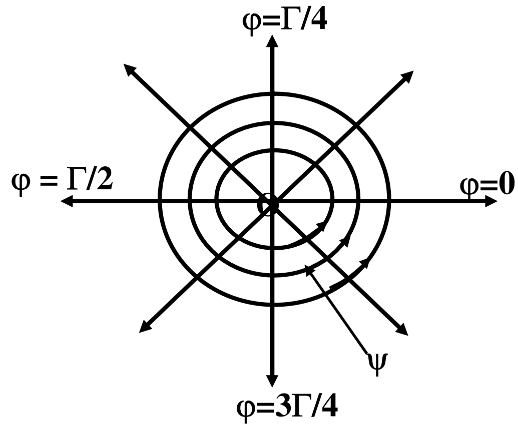
Trường hợp điểm nguồn (hút) có tâm đặt tại một vị trí khác gốc toạ độ, ví dụ đặt tại $A(x_0; y_0)$ thì trong công thức tính hàm dòng (hoặc thế vận tốc), tại vị trí nào có các biến x phải thay bằng $(x=x_0)$; tại vị trí nào có biến y phải thay bằng $(y-y_0)$.

3. Xoáy tự do: đặt tại gốc toạ độ và có lưu số vận tốc $\Gamma = \oint \overrightarrow{u\,ds} = \text{const}$

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r} = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \psi = \dfrac{-\Gamma}{2\pi}\ln(r) = \dfrac{-\Gamma}{4\pi}\ln(x^2+y^2) \\ f(z) = \dfrac{\Gamma}{2\pi}(\theta - i\ln r) = -\dfrac{i\Gamma}{2\pi}(\ln r + i\theta) \\ \qquad = \dfrac{-i\Gamma}{2\pi}\ln(re^{i\theta}) = \dfrac{-i\Gamma}{2\pi}\ln z = a\ln z \end{cases}$$

Ghi chú:
Γ>0: xoáy dương ngược chiều kim đồng hồ;
Γ<0: xoáy âm thuận chiều kim đồng hồ;

Tương tự, ta có trên đây là xoáy đặt tại O(0,0). Muốn biễu diễn cho xoáy có tâm đặt tại điểm bất kỳ, ta cũng thực hiện như trong phần ghi chú của điểm nguồn, hút.



Γ>0: xoáy dương

4. Lưỡng cực: là cặp điểm nguồn + hút có cùng lưu lượng qđặt cách nhau một đoạn ε vô cùng nhỏ (cho ε→0 với điều kiện εq→m_0 , là moment lưỡng cực).
Ví dụ ta xét trường hợp nằm trên trục hoành:
Tìm hàm dòng:

$$\psi = \psi_n + \psi_h = \frac{q}{2\pi}(\theta_n - \theta_h) = \frac{q}{2\pi}\left(\text{arctg}\frac{y}{x+\frac{\varepsilon}{2}} - \text{arctg}\frac{y}{x-\frac{\varepsilon}{2}}\right)$$

$$= \frac{q}{2\pi}\text{arctg}\left(\frac{\left(\dfrac{y}{x+\frac{\varepsilon}{2}}\right) - \left(\dfrac{y}{x-\frac{\varepsilon}{2}}\right)}{1+\left(\dfrac{y}{x+\frac{\varepsilon}{2}}\right)\left(\dfrac{y}{x-\frac{\varepsilon}{2}}\right)}\right) = \frac{q}{2\pi}\text{arctg}\left(\frac{y\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right) - y\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{x^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} + y^2}\right)$$

Khi ε→0 tử số trong dấu arctg tiến tới 0 nên ta có thể viết:

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{y\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right) - y\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{x^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} + y^2}\right) = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{-y\varepsilon}{x^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} + y^2}\right) \rightarrow \frac{-m_0}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

Tìm hàm thế vận tốc: $\varphi = \varphi_n + \varphi_h = \dfrac{q}{4\pi}\left[\ln\left(\left(x+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 + y^2\right) - \ln\left(\left(x-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 + y^2\right)\right]$

$$= \frac{q}{4\pi}\ln\left[\frac{\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + y^2}\right] = \frac{q}{4\pi}\ln\left[1 + \frac{2\varepsilon x}{\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + y^2}\right]$$

Triển khai $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots$ và bỏ qua các số hạng bậc cao vô cùng bé, ta có:

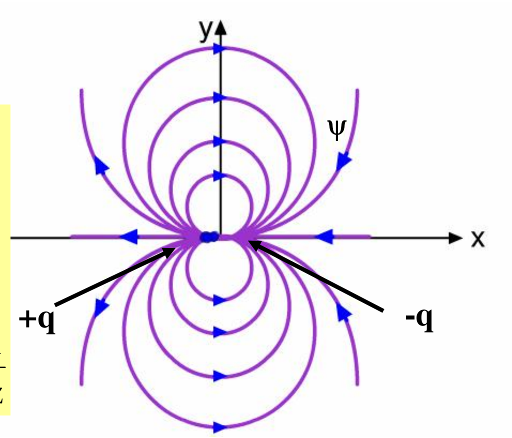
$$\varphi = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{2\varepsilon x}{\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 y^2}\right) \to \frac{m_0}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{khi} \quad \varepsilon \to 0$$

Vậy tóm lại, đối với chuyển động lưỡng cực thì:

$$\psi = \frac{-m_0}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-m_0}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\varphi = \frac{m_0}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{m_0}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}$$

$$f(z) = \frac{m_0}{2\pi}\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r} = \frac{m_0}{2\pi}\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{m_0}{2\pi}\frac{1}{z}$$

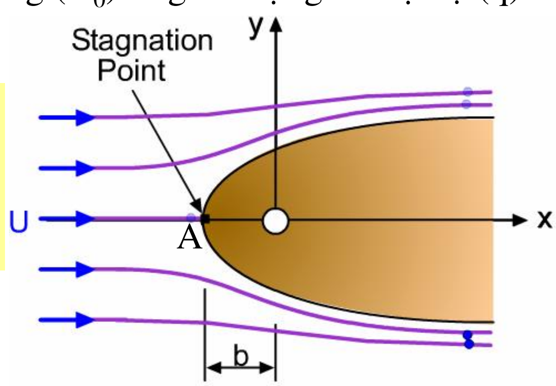


5. Dòng chảy quanh nửa cố thể:

Là chồng nhập của chuyển động thẳng đều ngang (U_0)+ nguồn tại gốc toạ độ (q)

$$\varphi = u_0 x + \frac{q}{4\pi}\ln(x^2+y^2) = u_0 r\cos\theta + \frac{q}{2\pi}\ln r$$

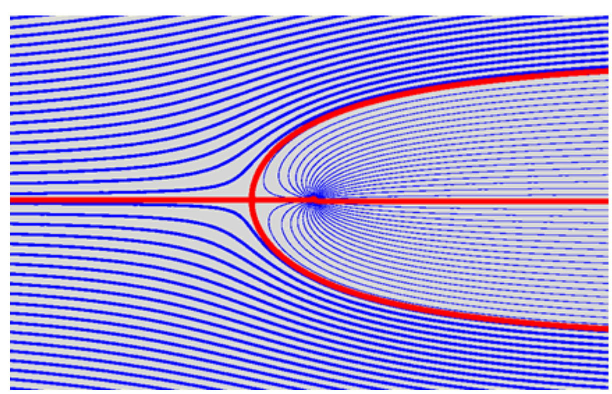
$$\psi = u_0 y + \frac{q}{2\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = u_0 r\sin\theta + \frac{q}{2\pi}\theta$$



Điểm dừng A:

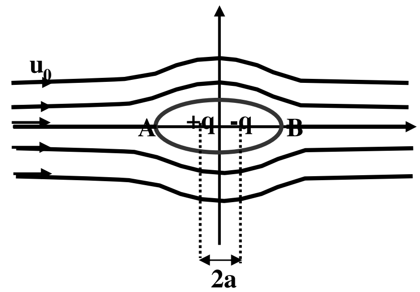
$$\mathbf{u_A = 0 \Leftrightarrow u_{xA} = 0; u_{yA} = 0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = u_0 + \dfrac{q}{4\pi}\dfrac{2x}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x_A = -\dfrac{q}{2\pi u_0} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Uparrow \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{q}{4\pi}\dfrac{2y}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \qquad y_A = 0 \end{cases}$$



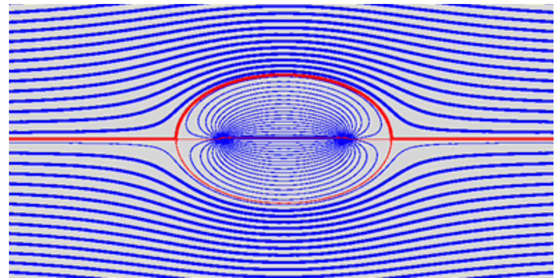
6. Dòng chảy quanh cố thể dạng Rankin

Là tổ hợp của dòng chuyển động thẳng ngang đều (u_0) + nguồn (+q) + hút(-q). Trong đó điểm nguồn và hút nằm trên trục hoành, cách nhau một đoạn 2a hữu hạn,



$$\varphi = u_o x + \frac{q}{4\pi}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

$$\psi = u_o y + \frac{q}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x+a}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-a}\right)\right]$$



Có hai điểm dừng A và B:

$$u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_x = 0 \\ u_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{q}{4\pi}\left(\dfrac{2y}{(x+a)^2+y^2} - \dfrac{2y}{(x-a)^2+y^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \{y = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = u_0 + \dfrac{q}{4\pi}\left(\dfrac{2(x+a)}{(x+a)^2+y^2} - \dfrac{2(x-a)}{(x-a)^2+y^2}\right) = 0 \\ \text{thế} \quad y = 0 \Leftrightarrow u_0 + \dfrac{q}{4\pi}\left(\dfrac{2}{(x+a)} - \dfrac{2}{(x-a)}\right) = 0 \\ \qquad \Leftrightarrow u_0 + \dfrac{q}{4\pi}\left(\dfrac{4a}{x^2-a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{x = \pm\sqrt{\dfrac{aq}{\pi u_0} + a^2}\right. \end{cases}$$

7. Dòng chảy quanh trụ tròn (Γ=0)

Xét tổ hợp của chuyển động thẳng đều, nằm ngang (u_0)+lưỡng cực (m_0)

$$\varphi = u_o x + \frac{m_0}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = u_o r\cos\theta + \frac{m_0}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r} = u_o r\cos\theta\left(1+\frac{m_0}{2\pi u_0 r^2}\right)$$

$$\psi = u_o y + \frac{-m_0}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = u_o r\sin\theta - \frac{m_0}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r} = u_o r\sin\theta\left(1-\frac{m_0}{2\pi u_0 r^2}\right)$$

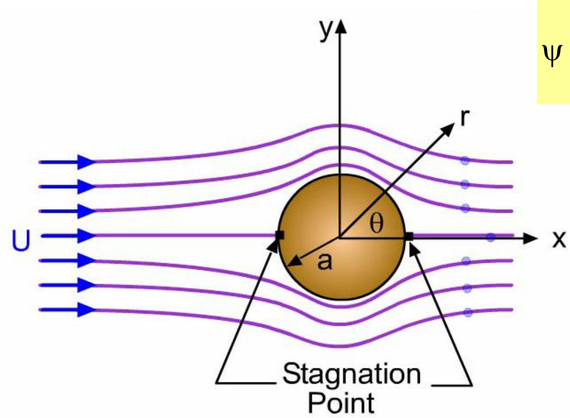
Xét đường dòng ψ=0 ⇔ $\theta = 0$ và $r = \sqrt{\dfrac{m_0}{2\pi u_0}}$

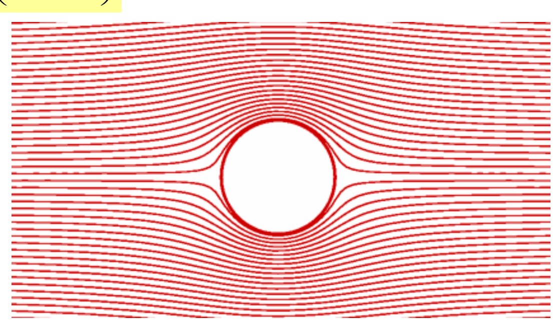
Do không có sự trao đổi lưu chất giữa trong và ngoài đường dòng ψ=0 → *Thay đường tròn* → $r = \sqrt{\dfrac{m_0}{2\pi u_0}}$ → *bằng đường tròn* → $R = \sqrt{\dfrac{m_0}{2\pi u_0}}$ → thì bản chất dòng chảy vẫn không đổi

Ta có hình ảnh của dòng chảy bao quanh trụ tròn. (trụ không xoay)

$$\varphi = u_o r\cos\theta\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)$$

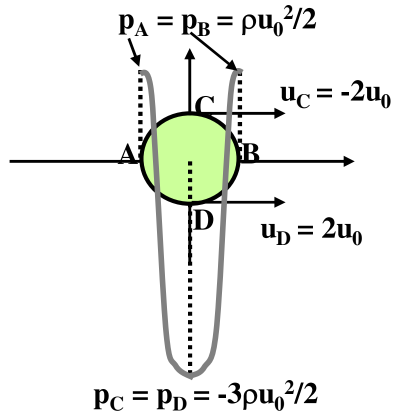
$$\psi = u_o r\sin\theta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)$$





➢ ***Tìm phân bố vận tốc trên mặt trụ*** r=R:

$$\Rightarrow \varphi = 2u_0 R\cos\theta \Rightarrow \begin{cases} u_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Big|_{r=R} = -2u_0\sin\theta \\ u_r = 0 \end{cases}$$



➢ ***Tìm hai điểm dừng trên mặt trụ:***

$$\mathbf{u_\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \quad \text{và} \quad \theta = \pi}$$

$\Rightarrow$ có hai điểm dừng A. B trước và sau mặt trụ.

➢ ***Tìm hai điểm có giá trị vận tốc lớn nhất trên mặt trụ:***

$$u_\theta = u_{max} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2};\theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$u_C = -2u_0;\quad u_D = 2u_0$$

$\Rightarrow$ C, D nằm trên và dưới mặt trụ có giá trị vận tốc lớn nhất.

➢ ***Khảo sát phân bố áp suất rên mặt trụ:***

Áp dụng P.Tr NL trên đường dòng ψ=0 từ điểm xa vô cực đến điểm trên mặt trụ:

$$p_\infty + \frac{\rho u_0^2}{2} = p_{tr} + \frac{\rho u_{tr}^2}{2}$$

Giả sử $p_\infty = p_a$ $\quad \mathbf{p_{tr}^{dư} = \dfrac{\rho u_0^2}{2}\left(1-\dfrac{u_{tr}^2}{u_0^2}\right) = \dfrac{\rho u_0^2}{2}\left(1-\dfrac{4u_0^2\sin^2\theta}{u_0^2}\right)}$

Tại A, B: $p_A = p_B = \dfrac{\rho u_0^2}{2}$

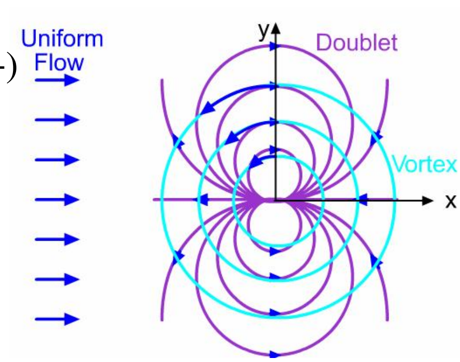
$$\mathbf{p_{tr}^{dư} = \frac{\rho u_0^2}{2}(1-4\sin^2\theta)}$$

Tại C, D: $p_D = p_D = -\dfrac{3\rho u_0^2}{2}$

Nhận xét: Do biểu đồ phân bố áp suất đối xứng qua ox lẫn oy nên *tổng lực tác dụng lên mặt trụ trong trường hợp này = 0*

7. Chuyển động quanh trụ tròn xoay (Γ≠0):

Bao gồm chuyển động quanh trụ tròn + xoáy tự do (Γ +)



$$\varphi = u_o r\cos\theta\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\psi = u_o r\sin\theta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

➢ *Phân bố vận tốc trên mặt trụ* :

Vì r = R nên $\quad u_r = 0; u_\theta = -2u_0\sin\theta + \dfrac{1}{R}\dfrac{\Gamma}{2\pi}$

suy ra:

$$u = 0 \Leftrightarrow 2u_0\sin\theta = \frac{\Gamma}{2\pi R} \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{\Gamma}{4\pi R u_0} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma < 4\pi R u_0 \to 2.\text{điểm.dừng} \\ \Gamma = 4\pi R u_0 \to 1.\text{điểm.dừng} \\ \Gamma > 4\pi R u_0 \to 0.\text{điểm.dừng} \end{cases}$$

➢ *Phân bố áp suất trên mặt trụ* :

$$p_\infty + \frac{\rho u_0^2}{2} = p_{tr} + \frac{\rho u_{tr}^2}{2} \quad \text{với} \quad u_\theta = -2u_0\sin\theta + \frac{1}{R}\frac{\Gamma}{2\pi}$$

Giả sử $p_\infty = p_a$ $\quad \mathbf{p_{tr}^{dư} = \dfrac{\rho u_0^2}{2}\left(1-\dfrac{u_{tr}^2}{u_0^2}\right) = \dfrac{\rho u_0^2}{2}\left[1-\left(2\sin\theta - \dfrac{\Gamma}{2\pi R u_0}\right)^2\right]}$

➢ *Lực tác dụng trên mặt trụ:*

Phương x: $\quad F_x = 0$

Lưu ý :

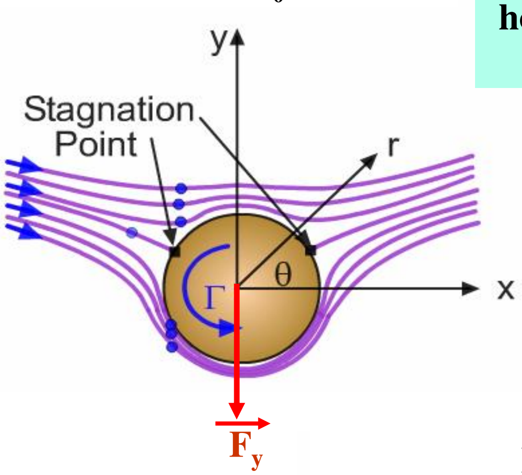
Phương y:

--- → ***Lực nâng Jukovs*** $\quad \mathbf{\Rightarrow F_y = -\displaystyle\int_0^{2\pi} p_{tr}^{dư} R\sin\theta.d\theta = -\rho\Gamma U_0}$

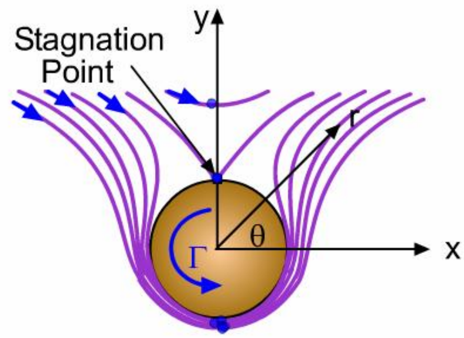
$$\mathbf{\int_0^{2\pi}\sin^n\theta.d\theta = 0}$$

Các trường hợp xoáy $\Gamma>0$

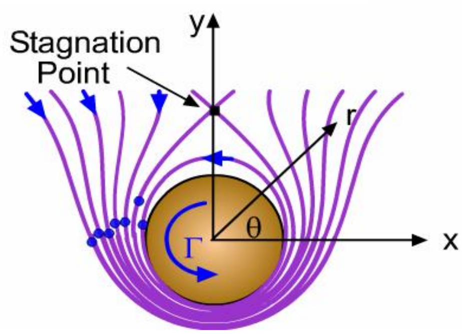
$\Gamma/2\pi Ru_0=1$



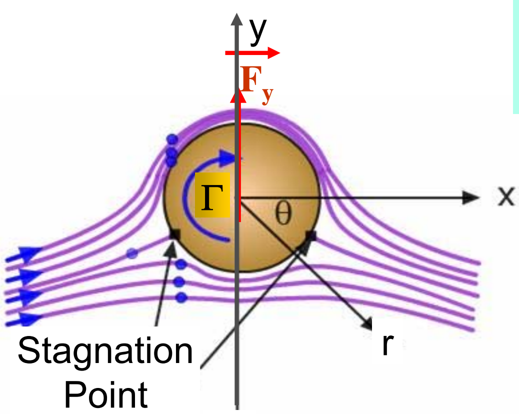
$\Gamma/2\pi Ru_0=2$



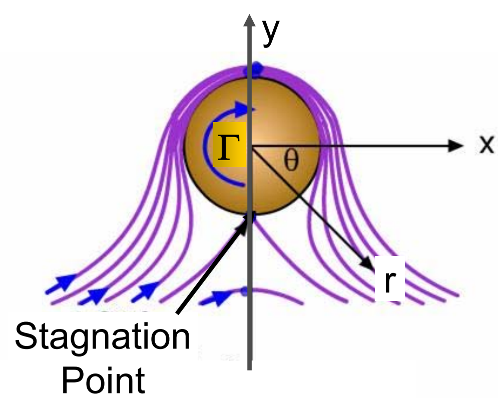
$\Gamma/2\pi Ru_0=3$



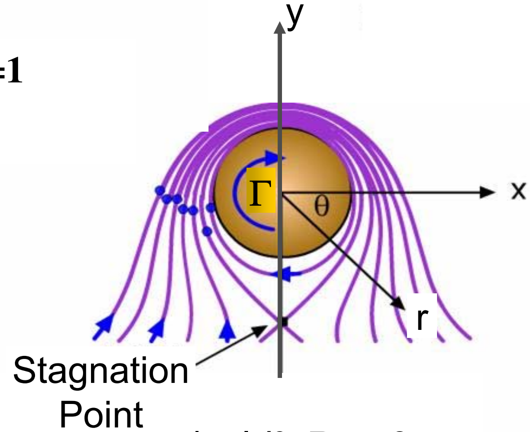
Các trường hợp xoáy $\Gamma< 0$



$|\Gamma|/2\pi Ru_0=1$



$|\Gamma|/2\pi Ru_0=2$



$|\Gamma|/2\pi Ru_0=3$

Ví dụ 1:

Chuyển động thế của chất lỏng hai chiều trên mặt phẳng nằm ngang xoy với hàm thế vận tốc $\varphi = 0,04x^3 + axy^2 + by^3$, x,y tính bằng m, φ tính bằng m^2/s.

1. Tìm a, b.
2. Tìm độ chênh áp suất giữa hai điểm A(0,0) và B(3,4), biếtb khối lượng riêng lỏng bằng 1300kg/m^3

Giải:

Từ hàm thế vận tốc $\varphi = 0,04x^3 + axy^2 + by^3$ ta có:

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,12x^2 + ay^2 \quad ; \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2axy + 3by^2$$

Các thành phần vận tốc phải thoả phương trình div(u)=0 nên:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 0,24x + 2ax + 6by = 0 \Leftrightarrow (0,24 + 2a)x + 6by = 0$$

Vì div(u)=0 đúng với mọi điểm nên thế (x=0; y=1) vào ta được **b = 0**

(x=1; y=0) vào ta được **a = -0,12**

$\Rightarrow \quad u_A=0; \qquad u_B = ((0,12*3^2 - 0,12*4^2)^2 + (-0,24*3*4)^2)^{1/2} = 3$ m/s

Vì đây là chuyển động thế nên p.tr Ber đúng cho hai điểm bất kỳ A và B, ta có:

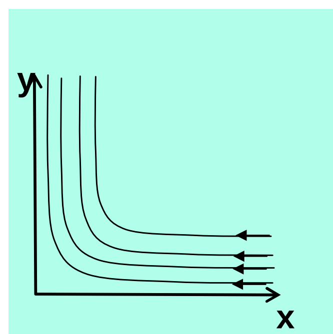
$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{u_A^2}{2} = \frac{p_B}{\rho} + \frac{u_B^2}{2} \Leftrightarrow (p_A - p_B) = \frac{\rho(u_B^2 - u_A^2)}{2} \Leftrightarrow \quad \Delta p_{AB} = \frac{1300(3^2)}{2} = 5,85KN/m^2$$

Ví dụ 2:

Dòng chảy thế uốn cong một góc 90^0 với hàm thế vận tốc được cho như sau:

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$$

(x,y tính bằng m).Tìm lưu lượng phẳng qua đường thẳng nối hai điểm A(1,1) và B(2,2)



Giải:

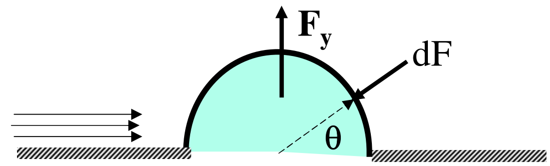
$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = x \quad ; \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -u_y \Rightarrow \partial\psi = -y\partial x \Rightarrow \psi = -yx + C(y)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = u_x \Rightarrow -x + C'(y) = -x \Rightarrow C(y) = const \Rightarrow \psi = xy + const$$

$$\Rightarrow q_{AB} = \psi_B - \psi_A = 2*2 - 1*1 = 3m^2/s$$

Ví dụ 3:



Gió thổi qua mái lều dạng bán trụ R=3m với V=20m/s, không khí có khối lượng riêng bằng 1,16 kg/m^3 . Tìm lực nâng tác dụng lên 1m bề dài lều.

Giải:

Để tìm lực nâng Fy tác dụng lên 1m bề dài lều, trên bán trụ ta chon một vi phân diên tích ds, tìm lực dF tác dụng lên ds, sau đó chiếu dF lên phương y →dFy. Và tích phân (dF_y) trên toàn bán trụ

Áp suất dư trên mặt trụ bằng $p_{tr}^{dư} = \frac{\rho u_0^2}{2}(1 - 4\sin^2\theta)$

$$\Rightarrow F_x = \int_0^\pi dF_x = -\int_0^\pi pds\cos(\theta) = -\int_0^\pi \frac{\rho u_0^2}{2}(1 - 4\sin^2\theta)\cos(\theta)Rd\theta = 0$$

$$\Rightarrow F_y = \int_0^\pi dF_y = -\int_0^\pi pds\sin(\theta) = -\int_0^\pi \frac{\rho u_0^2}{2}(1 - 4(1 - \cos^2\theta))\sin(\theta)Rd\theta$$

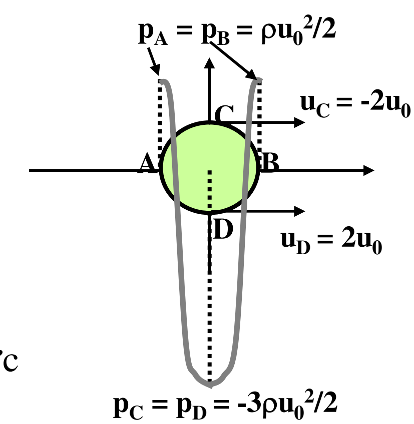
$$\Rightarrow F_y = -\frac{R\rho u_0^2}{2}\int_0^\pi (4\cos^2\theta - 3)\sin(\theta)d\theta = -\frac{R\rho u_0^2}{2}\left[\int_0^\pi (4\cos^2\theta(-d(\cos(\theta)) - \int_0^\pi 3\sin(\theta)d\theta\right]$$

$$\Rightarrow F_y = -\frac{R\rho u_0^2}{2}\left[3\cos\theta - \frac{4}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi = -\frac{R\rho u_0^2}{2}\left[\left(-3 + \frac{4}{3}\right) - \left(3 - \frac{4}{3}\right)\right] = \frac{5R\rho u_0^2}{3}$$

$$\Rightarrow F_y = 2320 \quad N$$

Ví dụ 4:

Một xi lanh hình trụ tròn di chuyển trong nước với vận tốc u_0 không đổi ở độ sâu 10m. Tìm u_0 để trên bề mặt xi lanh không xảy ra hiện tượng khí thực , biết nước ở 20^{0}C



Giải:

Ở 20^{0}C áp suất hơi bão hoà của nước : p^{bh} = 0,25m nước

Để trên bề mặt xi lanh không xảy ra hiện tượng khí thực thì $p_{tru}^{\;td} > p^{bh}$ = 0,25m nước

$\Rightarrow$ $p_{tru}^{\;ck} <$ **9,75m nước** hay $p_{tru}^{\;dư} > -$ **9,75m nước**

Áp suất dư nhỏ nhất trên mặt tru (nếu trụ di chuyển trên mặt thoáng), như ta đã biết, tại vị trí C và D, bà bằng: $p_C = p_D = -3\rho u_0^2/2$

Vậy nếu trụ di chuyển ở độ sâu 10m thì : $p_C = p_D = 10\gamma_n - 3\rho u_0^2/2$

Suy ra, vận tốc tối đa mà trụ có thể di chuyển được để không có hiện tượng khí thực xảy ra trên mặt trụ phải giải từ bất p.tr :

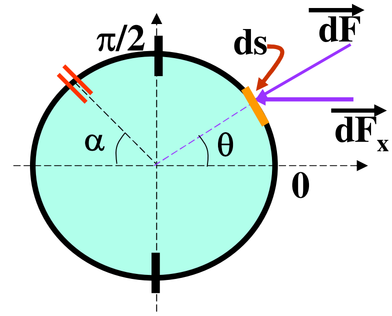
$$P_{tru}^{\;dư} = 10\gamma_n - 3\rho u_0^2/2 \;\; > -9{,}75\,\gamma_n$$

$$\Leftrightarrow 3\rho u_0^2/2 \;\; < 19{,}75\,\gamma_n$$

$$\Leftrightarrow u_0 < 11{,}365 \text{ m/s}$$

Ví dụ 5:

Hai nửa xi lanh được nối với nhau và đặt trong trường chảy đều có thế như hình vẽ. Người ta khoét 1 lỗ nhỏ tại vị trí góc α để cho không có lực tác dụng lên hai mối nối. Giả thiết rằng áp suất bên trong xi lanh bằng áp suất bên ngoài xi lanh tại lỗ khoét. Xác định góc α



Giải:

Để cho không có lực tác dụng lên hai mối nối thì tổng lực F_x tác dụng lên mỗi nửa mặt trụ phải bằng không.

Do biểu đồ áp suất trên mặt trụ phân bố đối xứng qua trục ox, nên ta chỉ cần xét tổng lực F_x trên ¼ mặt tr. Ta xét trên ¼ mặt trụ từ 0 đến $\pi/2$:

Áp suất dư trên mặt trụ:
$$p_{tr}^{dư} = \frac{\rho u_0^2}{2}(1 - 4\sin^2\theta)$$

Trên ¼ mặt trụ ta chọn vi phân ds, gọi dF_n là lực tác dụng lên ds từ bên ngoài mặt trụ, ta có: $dF_n = pds \Rightarrow dF_{nx} = -\,pds\cos\theta = -pR\cos\theta d\theta$

$$\Rightarrow F_{nx} = -\int_0^{\pi/2} \frac{\rho u_0^2}{2}(1 - 4\sin^2\theta)\cos\theta R d\theta = -\frac{\rho u_0^2 R}{2}\left[\sin\theta - \frac{4}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\rho u_0^2 R}{6}$$

Nhận xét:

Lực $F_{nx} > 0$ hướng theo chiều dương $\Rightarrow$ lực F_{tx} từ bên trong mặt trụ phải hướng theo chiều âm. Như vậy, áp suất tại lỗ khoét phải là áp suất chân không

Gọi p_α là áp suất tại lỗ khoét, ta có: $p_\alpha^{dư} = \frac{\rho u_0^2}{2}(1 - 4\sin^2\alpha)$

$$\Rightarrow F_{tx} = \int_0^{\pi/2} p_\alpha ds = \int_0^{\pi/2} p_\alpha \cos\theta R d\theta = p_\alpha R[\sin\theta]_0^{\pi/2} = p_\alpha R$$

$$\Rightarrow F_{tx} = \frac{\rho u_o^2 R}{2}(1 - 4\sin^2\alpha)$$

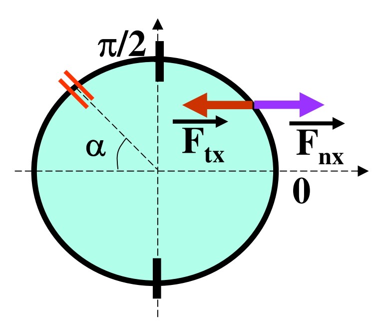
Ta có: $F_{nx} + F_{tx} = 0$

Suy ra: $F_{nx} = -F_{tx} \Rightarrow \frac{\rho u_o^2 R}{6} = -\frac{\rho u_o^2 R}{2}(1 - 4\sin^2\alpha)$

$$\Rightarrow 4\sin^2\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = 35{,}26^0$$



NỘI DUNG GIẢNG DẠY

I. **<u>Mở Đầu</u>**: *Giới thiệu về môn học, các tính chất lưu chất, các lực tác dụng lên lưu chất.*

II. **<u>Tĩnh học lưu chất</u>**: *Nghiên cứu về lưu chất ở trạng thái tĩnh, các phương trình cơ bản đặc trưng cho lưu chất ở trạng thái tĩnh, từ đó rút ra quy luật phân bố áo suất của các điểm trong môi trường lưu chất tĩnh, cũng như cách tính các áp lực của lưu chất lên một bề mặt vật. (chương này có hai phần: tĩnh tuyệt đối và tĩnh tương đối).*

III. **<u>Động học lưu chất</u>**: *Nghiên cứu về chuyển động của lưu chất (không xét đến lực), các phương pháp nghiên cứu, các loại chuyển động, định lý vận tải Reynolds về phương pháp thể tích kiểm soát, từ đó rút ra phương trình liên tục dựa vào nguyên lý bảo toàn khối lượng.*

IV. **<u>Đông lực học lưu chất</u>**: *Nghiên cứu cơ sở lý thuyết chuyển động của lưu chất, những phương trình vi phân đặc trưng cho lưu chất chuyển động, từ đó, cộng với ứng dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng và biến thiên động lượng để rút ra những phương trình cơ bản động lực học (phương trình năng lượng, phương trình động lượng) và các ứng dụng của nó.*

V. **Dòng chảy đều trong ống**: *Trong chương này ta nghiện cứu hai phần: Phần 1 về dòng chảy đều trong ống, phương trình cơ bản , phân bố vận tốc trong dòng chảy tầng, rối, các công thức tính toán tổn thất năng lượng trong dòng chảy. Phần 2 về các tính toán trong mạng đường ống (từ ống đơn giản, nối tiếp song song đến một mạng ống vòng…)*

VI. **Thế lưu**: *Trong chương này ta tập trung nghiên cứu dòng lưu chất lý tưởng không nén được, chuyển động thế trên mặt phẳng xOy, các ví vụ dòng chảy thế từ đơn giản (dòng thẳng đều, điểm nguồn, hút,… đến phức tạp hơn (lưỡng cực, dòng bao quanh trụ tròn…)*

Giảng viên: TS. Nguyễn Thị Bảy

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Bài giảng Cơ Lưu Chất- và Các ví dụ tính toán - Nguyễn Thị Bảy (Bô môn Cơ Lưu Chất). Website: http://www.dce.hcmut.edu.vn/vi/giangvien/detail.php?id=45**
2. **Gíao trình Cơ lưu chất - Bộ môn Cơ lưu Chất**
3. **Bài tập Cơ lưu Chất – Nguyễn thị Phương – Lê song Giang (BM Cơ lưu Chất)**
4. **Bài tập Cơ học Chất lỏng ứng dụng – Nguyễn hữu Chí, Nguyễn hữu Dy, Phùng văn Khương (có trong thư viện ĐHBK).**
5. **Solutions Manual. Introduction to Fluid Mechanics-Robert W.For, Alan T. Mc Donald (Thư viện ĐHBKhoa)**
6. Fundamental of Fluid mechanics–Phillip M. Berhart, Richard J. Gross, John I. Hochstein. Second edition, Addison –wesley Publising Company Inc. 1985 (Thư viện ĐHBK)
7. Applied Fluid Mechanics- Robert L. Mott , Fourth edition , Macmillian Publishing Company, 1990 (Thư viện ĐHBK)
8. Fluid mechanics – John Doughlas, Janusz M. Gasiorek , John A. Swaffiield. Fourth edition, Prentice Hall, 2001
9. E-book : Fluid Mechanics , Frank M. White , 1994
10. E-book : Shaum's interactive Fluid mechanics – Giles R.V et al.

Web: https://ecourses.ou.edu/cgi-bin/ebook.cgi?doc=&topic=fl Chean Chin Ngo, Kurt Gramoll

Website : www.engin.umich.edu

12. 2500 solved problems in Fluid mechanics and hydraulics. Jak B. Evett, Ph.D and Cheng Liu, Ph.D. McGraw-Hhill Book Company (có ở Bm CLC)