ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

TRƯỜNG CAO ĐẲNG KINH TẾ KỸ THUẬT

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ISO 9001 - 2008

GIÁO TRÌNH

MÔN HỌC: TOÁN ỨNG DỤNG 1

NGÀNH: CÔNG NGHỆ Ô TÔ

TRÌNH ĐỘ: TRUNG CẤP

(Ban hành kèm theo Quyết định số: /QĐ-CĐKTKT ngày tháng năm 20 của Hiệu trưởng Trường Cao đẳng Kinh tế - Kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh)

Thành phố Hồ Chí Minh, năm 2020

ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG CAO ĐẲNG KINH TẾ KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

GIÁO TRÌNH
MÔN HỌC: TOÁN ỨNG DỤNG 1
NGÀNH: CÔNG NGHỆ Ô TÔ
TRÌNH ĐỘ: TRUNG CẤP

THÔNG TIN CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

Họ tên: Lý Hoàng Ngân

Học vị: Thạc sĩ toán giải tích

Email: lyhoangngan@hotec.edu.vn

TRƯỞNG KHOA	TỔ TRƯỞNG BỘ MÔN	CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

HIỆU TRƯỞNG
DUYỆT

Thành phố Hồ Chí Minh, năm 2020

TUYÊN BỐ BẢN QUYỀN

Tài liệu này thuộc loại sách giáo trình nên các nguồn thông tin có thể được phép dùng nguyên bản hoặc trích dùng cho các mục đích về đào tạo và tham khảo.

Mọi mục đích khác mang tính lệch lạc hoặc sử dụng với mục đích kinh doanh thiếu lành mạnh sẽ bị nghiêm cấm.

LỜI GIỚI THIỆU

Bộ sách Giáo khoa môn Toán lớp 10, 11, 12 được biên soạn rất tỉ mỉ chu toàn với kiến thức logic từ cơ bản đến nâng cao phải mất một quãng thời gian dài 3 năm để tiếp thu kiến thức. Dựa vào bộ sách này, tôi biên soạn và chọn lọc lại nội dung từng chương cho phù hợp với chương trình đào tạo của nhà trường nói chung, phù hợp với nhu cầu của Khoa Ô tô nói riêng, cũng nhằm tạo điều kiện thuận lợi cho các em học sinh học tốt môn Toán trong nhà trường, tôi xin giới thiệu quyển Giáo trình Toán ứng dụng 1, là môn học trong những năm đầu học đại cương. Giáo trình môn học rất cô đọng, chỉ một học kì đã giúp các em học sinh ít nhiều những kiến thức cơ bản làm nền tảng cho các em bước vào học các môn chuyên ngành.

Giáo trình này bao gồm 4 chương như sau:

Chương 1. Véctơ

Chương 2. Phương trình_Hệ phương trình

Chương 3. Cung và góc lượng giác. Công thức lượng giác

Chương 4. Phương trình lượng giác

Phần hình học trong Chương 1 này trình bày về các khái niệm về véctơ, tổng và hiệu của hai véctơ, tích của véctơ với một số. Nội dung chương 2 giúp học sinh biết cách phân biệt phương trình tương đương và phương trình hệ quả, giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn, hệ phương trình bậc nhất hai ẩn và ba ẩn. Chương 3 giúp các em phân biệt cung và góc lượng giác, biết cách đổi từ độ sang radian và ngược lại, hơn nữa, cung cấp một vài công thức lượng giác để tính toán,…Trong Chương 4 này trình bày cách giải các phương trình lượng giác cơ bản.

Tuy thời gian đào tạo cho ngành nghề rất ngắn, chỉ có 2 năm, nhưng chương trình học của Khoa Ô tô đã tạo điều kiện xây dựng nền tảng kiến thức tương đối đủ đầy cho các em học sinh khi chọn ngành học cho mình.

Cám ơn Trường Cao đẳng kinh tế kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh và cảm ơn Khoa Ô tô đã tạo điều kiện cho tôi biên soạn quyển Giáo trình này giúp các em có định hướng nhìn nhận khái quát cho môn học cũng như cho ngành Ô tô.

Cám ơn Thầy cô đồng nghiệp chân thành giúp đỡ.

Vì hạn chế về thời gian nên rất mong sự đóng góp quí báu của Quý Thầy cô đồng nghiệp để Giáo trình ngày càng hoàn thiện hơn.

TP.Hồ Chí Minh, ngày 25 tháng 08 năm 2020

Chủ biên

Lý Hoàng Ngân

MỤC LỤC

	TRANG
Lời giới thiệu	…….1
CHƯƠNG 1. VECTƠ	
1.1. Các định nghĩa	4
1.2. Tổng và hiệu hai vectơ	5
1.3. Tích của vectơ với một số	6
CHƯƠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH-HỆ PHƯƠNG TRÌNH	9
2.1. Đại cương về phương trình	9
2.2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn	11
2.3. Phương trình và hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn	12
CHƯƠNG 3. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	…… 15
3.1. Cung và góc lượng giác	15
3.2. Gía trị lượng giác của một cung	17
3.3. Công thức lượng giác	20
CHƯƠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	…… 23
4.1. Phương trình sinx = a	23
4.2. Phương trình cosx = a	24
4.3. Phương trình tanx = a	24
4.4. Phương trình cotx = a	25
BÀI TẬP ÔN	27
TÀI LIỆU THAM KHẢO	

GIÁO TRÌNH MÔN HỌC

Tên môn học: TOÁN ỨNG DỤNG 1

Mã môn học: MH2103624

I. Vị trí, tính chất của môn học:

- Vị trí: là môn cơ bản khởi đầu cho ngành học

- Tính chất: môn chung

II. Mục tiêu môn học:

- Về kiến thức:

  + Trình bày được các khái niệm về véctơ, tổng và hiệu của hai véctơ, tích của véctơ với một số.

  + Nhận biết được hệ phuơng trình tuyến tính bậc nhất 2 ẩn, 3 ẩn.

  + Trình bày được giá trị lượng giác của một cung và công thức lượng giác.

  + Trình bày được công thức nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản.

- Về kỹ năng:

  + Tính được và xác định được độ dài của véctơ tổng, véctơ hiệu, tích của véctơ với một số.

  + Giải được hệ phương trình tuyến tính bậc nhất 2 ẩn, 3 ẩn.

  + Đổi được góc lượng giác từ radian ra độ và từ độ ra radian.

  + Giải được phương trình lượng giác cơ bản.

- Về năng lực tự chủ và trách nhiệm:

  + Rèn luyện tác phong học tập nghiêm túc, tôn trọng và giúp đỡ nhau trong học tập.

  + Thực hiện đúng nội quy học tập của nhà trường.

CHƯƠNG 1: VECTƠ

Mục tiêu:

+ Trình bày được các khái niệm về vectơ, tổng và hiệu của hai véctơ, tích của véctơ với một số.

+ Tính được và xác định được độ dài của véctơ tổng, véctơ hiệu, tích của véctơ với một số

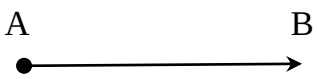
Nội dung

1.1. Các định nghĩa

1.1.1. Khái niệm vectơ

Định nghĩa: *Vectơ* là đoạn thẳng có hướng.

Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$ và đọc là "vectơ *AB*"



Hình 1.1

Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y},...$ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.[1]

1.1.2. Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng

Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ gọi là *giá* của vectơ đó.

Định nghĩa. Hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

1.1.3. Hai vectơ bằng nhau

- Mỗi vectơ có một *độ dài*, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, như vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$

- Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là *vectơ đơn vị*.

- Hai *vectơ bằng nhau* nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.[2]

---

[1] Sgk Hình học 10, trang 4

📖 Hãy chỉ ra các cặp vectơ bằng nhau trong hình bình hành ABCD.

1.1.4. Vectơ - không

Vectơ – không là vectơ có điểm đầu (gốc) trùng điểm cuối (ngọn).

Kí hiệu là $\vec{0}$

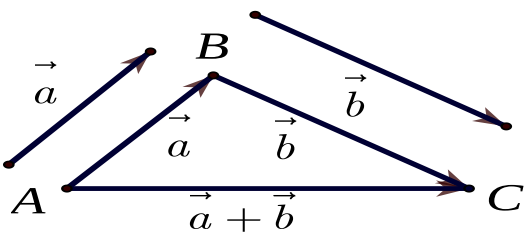
Quy ước: Vectơ $\vec{0}$ có độ dài bằng 0 và có cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ. Do đó có thể coi mọi vectơ – không đều bằng nhau.[3]

1.2. Tổng và hiệu hai véctơ

1.2.1. Tổng của hai véctơ

Định nghĩa. Cho hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$. Từ điểm A tùy ý vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là ***tổng*** của hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$

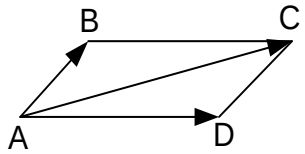
Kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ [4]



Hình 1.2

1.2.2. Quy tắc hình bình hành

Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.[5]



1.2.3. Tính chất của phép cộng các véctơ

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý ta có

---

[2] Sgk Hình học 10, trang 6
[3] Sgk Hình học 10, trang 6
[4] Sgk Hình học 10, trang 8
[5] Sgk Hình học 10, trang 9

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (tính chất giao hoán);

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (tính chất kết hợp);

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (tính chất vectơ – không).[6]

1.2.4. Hiệu của hai véctơ

a) Vectơ đối

Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là vectơ cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Mỗi véctơ đều có véctơ đối, chẳng hạn vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

Đặc biệt, vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là $\vec{0}$.[7]

b) Định nghĩa hiệu của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

CHÚ Ý

- Phép toán tìm hiệu của hai vectơ còn được gọi là *phép trừ* vectơ.
- Với ba điểm A, B , C tùy ý, ta luôn có :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc ba điểm);

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ (quy tắc trừ**).**

1.2.5. Áp dụng

- Điểm I là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

- Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

1.3. Tích của véctơ với một số

1.3.1. Định nghĩa

[6] Sgk Hình học 10, trang 9
[7] Sgk Hình học 10, trang 10

Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ .Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Quy ước $0\vec{a} = \vec{0}$, $k\vec{0} = \vec{0}$.[8]

1.3.2. Tính chất

Với hai vectơ và bất kì, với mọi số h và k, ta có

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;

$(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$; [9]

$h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;

$1.\vec{a} = \vec{a}$, $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$.

1.3.3. Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

- Nếu I là trung điểm của AB thì với mọi điểm M ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

- Nếu G là trọng tâm của ABC thì với mọi điểm M ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

1.3.4. Điều kiện hai vectơ cùng phương

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Nhận xét. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

1.3.5. Phân tích một véctơ theo hai véctơ không cùng phương

Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất một cặp số m, n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

---

[8] Sgk Hình học 10, trang 14

[9] Sgk Hình học 10, trang 14

CHƯƠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Mục tiêu:

+ Nhận biết được hệ phuong trình tuyến tính bậc nhất 2 ẩn, 3 ẩn.

+ Giải được hệ phương trình tuyến tính bậc nhất 2 ẩn, 3 ẩn.

Nội dung

2.1. Đại cương về phương trình

2.1.1. Khái niệm về phương trình

a) Phương trình một ẩn

Phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng $f(x) = g(x)$ (1)

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x. Ta gọi $f(x)$ vế trái, $g(x)$ là vế phải của phương trình (1).

Nếu có số thực x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ là mệnh đề đúng thì x_0 được gọi là một **nghiệm của phương trình** (1).

Giải phương trình (1) là tìm tất cả các nghiệm của nó (nghĩa là tìm tập nghiệm).

Nếu phương trình không có nghiệm nào cả thì ta nói phương trình **vô nghiệm** (hoặc nói tập nghiệm của nó là rỗng).[10]

CHÚ Ý

Có trường hợp, khi giải phương trình ta không viết được chính xác nghiệm của chúng dưới dạng số thập phân mà chỉ viết gần đúng. Giá trị đó gọi là **nghiệm gần đúng** của phương trình.

b) Điều kiện của một phương trình

Khi giải phương trình f(x) = g(x), ta cần lưu ý tới điều kiện đối với ẩn số x để f(x) và g(x) có nghĩa (tức là mọi phép toán đều thực hiện được). Ta cũng nói đó là *điều kiện xác định của phương trình* (hay gọi tắt là *điều kiện của phương trình*).

Khi các phép toán ở hai vế của một phương trình đều thực hiện được với mọi giá trị của x thì ta có thể không ghi điều kiện của phương trình.[11]

---

[10] Sgk Đại số 10, trang 53

c) Phương trình nhiều ẩn

Ngoài các phương trình một ẩn, ta còn gặp những phương trình có nhiều ẩn số, chẳng hạn:

$$x - 2y = 0 \quad (2)$$

$$x + y + 2z = 4y^2 \quad (3)$$

Phương trình (2) là phương trình hai ẩn *x* và *y*, còn (3) là phương trình ba ẩn *x*, *y* và *z*.

Khi *x* = 2, *y* = 1 thì hai vế của phương trình (2) có giá trị bằng nhau, ta nói cặp số (*x*; *y*) = (2; 1) là nghiệm của phương trình (2).

Tương tự, bộ ba số (*x*; *y*; *z*) = (-1; 1; 2) là một nghiệm của phương trình (3).

d) Phương trình chứa tham số

Trong một phương trình (một hoặc nhiều ẩn), ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là *tham số*.

Giải và biện luận phương trình chứa tham số nghĩa là xét xem với giá trị nào của tham số thì phương trình vô nghiệm, có nghiệm và tìm các nghiệm đó.

Chẳng hạn

$$mx - 3 = 0$$

có thể được coi là một phương trình ẩn x chứa tham số m.[12]

2.1.2. Phương trình tương đương và phương trình hệ quả

a) Phương trình tương đương

Hai phương trình được gọi là *tương đương* khi chúng có cùng tập nghiệm. [13]

b) Phép biến đổi tương đương

Để giải một phương trình, thông thường ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các *phép biến đổi tương đương*

ĐỊNH LÍ

---

[11] Sgk Đại số 10, trang 54
[12] Sgk Đại số 10, trang 55
[13] Sgk Đại số 10, trang 55

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương

-Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc cùng một biểu thức ;

-Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

CHÚ Ý

Chuyển vế và đổi dấu một biểu thức thực chất là thực hiện phép cộng hay trừ hai vế với biểu thức đó.

Ta dùng kí hiệu "$\Leftrightarrow$" để chỉ sự tương đương của các phương trình.[14]

c) Phương trình hệ quả

Nếu mọi nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ đều là nghiệm phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ thì phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ được gọi là *phương trình hệ quả* của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$

Ta viết

$$f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$$

Phương trình hệ quả có thể có thêm nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Ta gọi đó là *nghiệm ngoại lai.*

Khi giải phương trình, không phải lúc nào cũng áp dụng được phép biến đổi tương đương. Trong nhiều trường hợp ta phải thực hiện các phép biến đổi đưa tới phương trình hệ quả, chẳng hạn bình phương hai vế, nhân hai vế của phương trình với một đa thức. Lúc đó để loại nghiệm ngoại lai, ta phải thử lại các nghiệm tìm được.

Đối với phương trình nhiều ẩn, ta cũng có các khái niệm tương tự.[15].

2.2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai, ta thường bình phương hai vế

[14] Sgk Đại số 10, trang 55,56

[15] Sgk Đại số 10, trang 56

để đưa về một phương trình hệ quả không chứa ẩn dưới dấu căn.[16]

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \ g(x)^{\ 2} \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

2.3. Phương trình và hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn

2.3.1. Ôn tập về phương trình và hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

a) Phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn x,y có dạng tổng quát là

$$ax + by = c \quad (1)$$

trong đó a, b, c là các hệ số, với điều kiện a và b không đồng thời bằng 0.

Tổng quát, người ta chứng minh được rằng phương trình bậc nhất hai ẩn luôn luôn có vô số nghiệm. *Biểu diễn hình học tập nghiệm* của phương trình (1) là một đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*.[17]

b) Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

trong đó x, y là hai ẩn ; các chữ còn lại là hệ số.

Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một *nghiệm* của hệ phương trình (2).

Giải hệ phương trình (2) là tìm tập nghiệm của nó.

2.3.2. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

Phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là

$$ax + by + cz = d\ ,$$

trong đó x, y, z là ba ẩn ; a, b, c, d là các hệ số và a, b, c không đồng thời bằng 0.

Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát

[16] Sgk Đại số 10, trang 60
[17] Sgk Đại số 10, trang 63,64

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (3)$$

trong đó x, y, z là ba ẩn; các chữ còn lại là các hệ số.

Mỗi bộ ba số $(x_0;y_0;z_0)$ nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ được gọi là một *nghiệm* của hệ phương trình (3).[18]

[18] Sgk Đại số 10, trang 65

CHƯƠNG 3: CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Mục tiêu:

+ Trình bày được giá trị lượng giác của một cung và công thức lượng giác.

+ Đổi được góc lượng giác từ radian ra độ và từ độ ra radian.

Nội dung

3.1. Cung và góc lượng giác

3.1.1. Khái niệm cung và góc lượng giác

a) Đường tròn định hướng

Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại gọi là chiều âm.

Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ gọi là chiều dương.

Trên đường tròn định hướng cho hai điểm A, B. Một điểm M di động trên đường tròn theo một chiều (âm hoặc dương) từ A đến B tạo nên một *cung lượng giác* có điểm đầu là A điểm cuối là B.

Vậy hai điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng ta có vô số cung lượng giác điểm đầu A, điểm cuối B. Mỗi cung như vậy đều được kí hiệu là AB [19]

b) Góc lượng giác

Trên đường tròn định hướng cho một cung lượng giác CD. Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C tới D tạo nên cung lượng giác CD nói trên. Khi đó tia OM quay xung quanh gốc O trừ vị trí OC tới vị trí OD. Ta nói tia OM tạo ra một *góc lượng giác*, có tia đầu là OC, tia cuối là OD. Kí hiệu góc lượng giác đó là (OC,OD).[20]

c) Đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường tròn định hướng tâm O, bán kính R bằng 1 được gọi là *đường tròn lượng giác.*

---

[19] Sgk Đại số 10, trang 134

[20] Sgk Đại số 10, trang 135

3.1.2. Số đo của cung và góc lượng giác

A. Độ và rađian

a) Đơn vị rađian

Để đo góc, người ta dùng đơn vị đo góc lâu đời. Ngoài ra, trong Toán học và Vật lí người ta còn dùng một đơn vị nữa để đo góc và cung, đó là rađian (đọc là ra-đi-an). Cung tròn có độ dài bằng bán kính được gọi là *cung có số đo 1 rađian* [21](viết tắt là 1 rad).

b) Quan hệ giữa độ và rađian

$$1rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0,\ 1^0 = \frac{\pi}{180}rad.$$ [22]

CHÚ Ý

Khi viết số đo của một góc (hay cung) theo đơn vị rađian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn cung $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là cung $\frac{\pi}{2}$ rad.

Bảng chuyển đổi thông dụng

Độ	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
Rađian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

c) Độ dài của một cung tròn

Cung có số đo α (rad) của đường tròn bán kính R, có độ dài là $\ell = R\alpha$. [23]

B. Số đo của một cung lượng giác

Số đo của một cung lượng giác AB (A ≠ B) là một số thực, âm hay dương.

Kí hiệu số đo của cung AB là sđ AB

GHI NHỚ

Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π . Ta viết

[21] Sgk Đại số 10, trang 136
[22] Sgk Đại số 10, trang 136
[23] Sgk Đại số 10, trang 137

$$\text{sđ}\, AB = \alpha + k2\pi,\ \ k \in \square$$

Người ta cũng viết số đo bằng độ

$$\text{sđ}\, AB = a^0 + k360^0,\ \ k \in \square$$

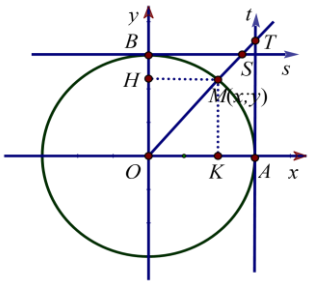
C. Số đo của một góc lượng giác

Số đo của góc lượng giác (OA,OC) là số đo của cung lượng giác AC tương ứng.

3.2. Gía trị lượng giác của một cung

3.2.1. Giá trị lượng giác của cung α

A. Định nghĩa



Hình 3.1

Trên đường tròn lượng giác cho cung $AM = \alpha$

Tung độ y = $\overline{OH}$ của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin\alpha$.

$$\sin\alpha = \overline{OH}$$

Hoành độ x = $\overline{OK}$ của điểm M gọi là côsin của α và kí hiệu là $\cos\alpha$.

Nếu $\cos\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gọi là tang của α và kí hiệu là $\tan\alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu tgα)

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Nếu $\sin\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gọi là côtang của α và kí hiệu là cot α (người ta còn dùng kí hiệu cotg α)

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Các giá trị $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \tan\alpha,\ \cot\alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác của cung* α

Ta cũng gọi trục tung là trục sin, còn trục hoành là trục côsin.[24]

CHÚ Ý

[24] Sgk Đại số 10, trang 141

Các định nghĩa trên cũng áp dụng cho các góc lượng giác.

B. Hệ quả

1) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \square$. Hơn nữa, ta có

$$\sin\left(\alpha + k2\pi\right) = \sin\alpha,\ \forall k \in \square;$$
$$\cos\left(\alpha + k2\pi\right) = \cos\alpha,\ \forall k \in \square.$$

2) Vì $-1 \le \overline{OK} \le 1$; $-1 \le \overline{OK} \le 1$ (hình 3.1) nên ta có

$$-1 \le \sin\alpha \le 1$$
$$-1 \le \cos\alpha \le 1.$$

3) Với mọi $m \in \square$ mà $-1 \le m \le 1$ đều tồn tại α và β sao cho $\sin\alpha = m$ và $\cos\beta = m$

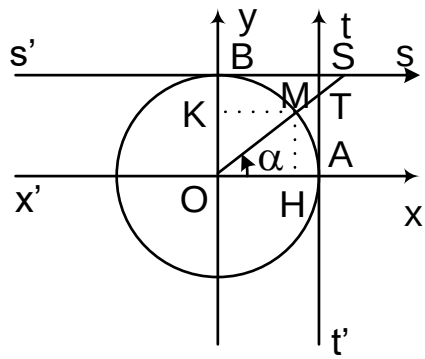
4) $\tan\alpha$ xác định với mọi $\alpha \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\left(k \in \square\right)$.

5) $\cot\alpha$ xác định với mọi $\alpha \ne k\pi$ $\left(k \in \square\right)$.

C. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$
$\cot\alpha$	$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3.2.2. Ý nghĩa hình học của tan và côtan



Hình 3.2

a) Ý nghĩa hình học của tanα

$$\tan\alpha = \overline{AT}$$

tanα được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AT}$ trên trục t/At. Trục t/At được gọi là *trục tang.*[25]

b) Ý nghĩa hình học của cotα

$$\cot\alpha = \overline{BS}$$

cotα được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ trên trục s/Bs. Trục s/Bs được gọi là *trục côtang.*[26]

3.2.3. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác

A. Công thức lượng giác cơ bản

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau với $k \in \square$

$$1)\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$2)\ 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\ (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$3)\ 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\ (\alpha \neq k\pi)$$

$$4)\ \tan\alpha.\cot\alpha = 1\ (\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$$

[27]

[25] Sgk Đại số 10, trang 144
[26] Sgk Đại số 10, trang 144
[27] Sgk Đại số 10, trang 145

B. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt[28]

Cung đối nhau (α **và** $-\alpha$)	**Cung bù nhau** (α **và** $\pi-\alpha$)	**Cung phụ nhau** (α **và** $\frac{\pi}{2}-\alpha$)
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$

Cung hơn kém π (α **và** $\pi+\alpha$)	**Cung hơn kém** $\frac{\pi}{2}$ (α **và** $\frac{\pi}{2}+\alpha$)
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$
$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

3.3. Công thức lượng giác

3.3.1. Công thức cộng

[28] Sgk Đại số 10, trang 147

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$$ [29]

3.3.2. Công thức nhân đôi

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$ [30]

3.3.3. Công thức biến đổi tích thành tổng, tổng thành tích

a) Công thức biến đổi tích thành tổng.

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]$$
$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}\big[\cos(a+b) - \cos(a-b)\big]$$
$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]$$ [31]

b) Công thức biển đổi tổng thành tích.

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$

[29] Sgk Đại số 10, trang 149
[30] Sgk Đại số 10, trang 150
[31] Sgk Đại số 10, trang 151

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$ [32]

[32] Sgk Đại số 10, trang 152

CHƯƠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Mục tiêu:

+ Trình bày được công thức nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản.

+ Giải được phương trình lượng giác cơ bản.

Nội dung

4.1. Phương trình sinx = m (1)

* Nếu $|m| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm

* Nếu $|m| \le 1$ thì phương trình (1) có nghiệm

$$(1) \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu α thỏa mãn $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arcsin\ m$.

Các trường hợp đặc biệt:

1. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4.2. Phương trình cosx = m (2)

* Nếu $|m| > 1$ thì phương trình (2) vô nghiệm

* Nếu $|m| \le 1$ thì phương trình (2) có nghiệm

$$(2) \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu α thỏa mãn $\begin{cases} 0 \le -\alpha \le \pi \\ \cos\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arccos m$.

Các trường hợp đặc biệt:

1. $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4.3. Phương trình tanx = m (3)

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

$(3) \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Các trường hợp đặc biệt:

1. $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

2. $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

3. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

4.4. Phương trình cotanx = m (4)

Điều kiện: $x \neq k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

$(4) \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

Các trường hợp đặc biệt:

1. $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

2. $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

3. $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

BÀI TẬP ÔN

CHƯƠNG 1: VECTƠ

1) Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 1 cm, BC = 2cm.

a/ Hãy vẽ vectơ tổng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b/ Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

2) Cho hình chữ nhật EBCD có EB = 3 cm, BC = 4 cm.

a/ Hãy vẽ vectơ tổng của hai vectơ $\overrightarrow{EB}$ và $\overrightarrow{ED}$.

b/ Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}$.

3) Cho hình chữ nhật FBCD có FB = 5 cm, BC = 6 cm.

a/ Hãy vẽ vectơ tổng của hai vectơ $\overrightarrow{FB}$ và $\overrightarrow{FD}$.

b/ Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FD}$.

4) Cho hình chữ nhật ABCD có $CAD = 60^0$, AD = 8 cm.

a/ Hãy vẽ vectơ tổng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b/ Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

5) Cho hình chữ nhật ABCD có $CAD = 30^0$, CD = 8 cm.

a/ Hãy vẽ vectơ tổng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b/ Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

CHƯƠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH-HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1) Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số:

a) $\begin{cases} x-3y-1=0 \\ x+2y=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8x-y=51 \\ 2x+3y=29 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=5 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-5y=7 \\ 3x+y=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -2x+7y=-9 \\ 4x-3y=7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 4x-3y=7 \end{cases}$

2) Hai bạn Vân và Lan đến cửa hàng mua trái cây. Bạn Vân mua 10 quả quýt, 7 quả cam với giá tiền là 17800 đồng. Bạn Lan mua 12 quả quýt, 6 quả cam

hết 18000 đồng. Hỏi giá tiền mỗi quả quýt và giá tiền mỗi quả cam là bao nhiêu?

3) Có hai dây chuyền áo sơ mi. Ngày thứ nhất cả hai dây chuyền may được 930 áo. Ngày thứ hai do dây chuyền thứ nhất tăng năng suất 18%, dây chuyền thứ hai tăng năng suất 15% nên cả hai dây chuyền may được 1083 áo. Hỏi trong ngày thứ nhất mỗi dây chuyền may được bao nhiêu áo sơ mi?

4) Hai bạn Yến và An đến cửa hàng mua áo. Bạn Yến mua 10 áo sơ mi, 7 áo thun với giá tiền là 1780000 đồng. Bạn An mua 12 áo sơ mi, 6 áo thun hết 1800000 đồng. Hỏi giá tiền mỗi áo sơ mi và giá tiền mỗi áo thun là bao nhiêu?

5) Hai bạn Mai và Hồng đến cửa hàng mua đồ. Bạn Mai mua 10 bút bi xanh, 7 bút bi đỏ với giá tiền là 178000 đồng. Bạn Hồng mua 12 bút bi xanh, 6 bút bi đỏ hết 180000 đồng. Hỏi giá tiền mỗi bút bi xanh và giá tiền mỗi bút bi đỏ là bao nhiêu?

CHƯƠNG 3: CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1) Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$.

2) Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$.

3) Cho $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\cos\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$.

4) Cho $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$.

5) Cho $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$

CHƯƠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Giải phương trình:

1) $\sin(x + 20^0) = \frac{1}{2}$

2) $\cos(x + 50^0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\sin(x + \frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\tan(x - \frac{\pi}{3}) = 1$

5) $\cot(x - \frac{\pi}{6}) = 1$ 6) $\sin(x - 40^0) = \frac{1}{2}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Trần Văn Hạo, **Đại Số 10**, Nhà xuất bản Giáo duc, 2010.

2. Trần Văn Hạo, **Hình học 10**, Nhà xuất bản Giáo duc, 2010.

3. Vũ Tuấn, **Bài tập Đại Số 10**, Nhà xuất bản Giáo duc, 2010.

4. Nguyễn Mộng Hy, **Bài tập Đại Số 10**, Nhà xuất bản Giáo duc, 2010.

5. Trần Văn Hạo, **Đại số và Giải tích 11**, Nhà xuất bản Giáo duc, 2010.