MỤC LỤC

CÁC DANH MỤC HÌNH

LỜI NÓI ĐẦU

Toán cao cấp dùng cho sinh viên Cao đẳng nghề của khoa Điện – Điện tử bao gồm những kiến thức cơ bản của Toán cao cấp, là cơ sở để cho sinh viên ứng dụng học tập các môn chuyên ngành.

Để phù hợp với đối tượng là những sinh viên Cao đẳng nghề của khoa Điện – Điện tử, khoa Khoa học Cơ bản đã biên soạn cuốn giáo trình "Toán cao cấp" giúp cho người học có tài liệu học tập. Giáo trình "Toán cao cấp" dùng cho sinh viên Cao đẳng nghề của khoa Điện – Điện tử được biên soạn phù hợp với chương trình hiện hành, nhưng theo hướng tiếp cận: Đơn giản về mặt lý thuyết, tăng cường hệ thống bài tập và hướng dẫn giải bài tập. Bài tập có tính chất vận dụng và yêu cầu khả năng tính toán. Giáo trình "Toán cao cấp" gồm 3 chương:

Chương 1: " Tập hợp – Mệnh đề. Số phức" Chương này cung cấp cho người học khái niệm cơ bản về tập hợp, các phép toán của tập hợp. Mệnh đề, các phép toán của mệnh đề. Cốt lõi của chương này cần nắm được khái niệm số phức, các phép toán về số phức, những kiến thức ở phần này được trình bày một cách cơ bản với hệ thống ví dụ và bài tập minh họa giúp người học nhận thức được.

Chương 2: "Phương trình vi phân". Chương này cung cấp cho người học những kiến thức cơ bản đầy đủ về phương trình vi phân: khái niệm phương trình vi phân, nghiệm phương trình vi phân; cách giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 và phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số là hằng sô.

Chương 3: " Phép biến đổi Laplace". Với mục đích tinh giản phù hợp với đối tượng nhưng vẫn đảm bảo tính khoa học, do vậy phần lý thuyết chủ yếu cung cấp cho người học những khái niệm, công thức và một số định lý (nhưng không chứng minh). Sau mỗi phần lý thuyết chúng tôi đưa ra hệ thống ví dụ minh họa để người học có thể dễ dàng tiếp thu những vấn đề lý thuyết đặt ra. Cuối chương đưa ra hệ thống bài tập có tính chất vận dụng, giúp cho người học hiểu và củng cố kiến thức.

Giáo trình được biên soạn lần đầu nên không tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi mong nhận được những ý kiến đóng góp của bạn đọc để giáo trình được hoàn thiện hơn.

Nhóm biên soạn

Chương 1
TẬP HỢP – MỆNH ĐỀ. SỐ PHỨC

1.1. Tập hợp

1.1.1. Khái niệm

Tập hợp được xem là một khái niệm ban đầu của toán học, được hiểu một cách trực giác không định nghĩa. Tuy nhiên ta có thể hiểu tổng quát như sau:

Tập hợp là một sự tụ tập của một số hữu hạn hoặc vô hạn các đối tượng xác định nào đó.

Mỗi đối tượng cấu thành tập hợp là một phần tử của tập hợp.

Ví dụ 1. Tất cả những người Việt Nam trên thế giới tạo thành tập hợp người Việt Nam. Mỗi người Việt Nam là một phần tử của tập hợp đó.

Ví dụ 2. Tất cả những sinh viên của trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Nam Định tạo thành tập hợp các sinh viên của trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Nam Định.

Ví dụ 3. Tất cả các điểm trong không gian tạo thành tập hợp điểm trong không gian.

Mỗi điểm là một phần tử của tập hợp đó.

Nếu x là một phần tử của tập X ta nói "x thuộc X" và viết $x \in X$

Nếu x không là một phần tử của tập X ta nói "x không thuộc X" và viết $x \notin X$

Cách mô tả một tập hợp

Để mô tả một tập hợp ta thường dùng hai cách sau đây:

Cách 1: Liệt kê các phần tử của tập hợp đó.

Ví dụ 1. Tập hợp các số tự nhiên:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$$

Ví dụ 2. Tập hợp các số nguyên:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$$

Ví dụ 3. Tập hợp các số hữu tỉ:

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{a}{b} \middle| a, b \in Z, \quad b \neq 0 \right\}$$

Cách 2: Chỉ ra những tính chất mà mọi phần tử của tập hợp đó đều có và chỉ những phần tử của tập hợp đó mới có. Những tính chất như vậy gọi là tính chất đặc trưng của tập hợp đang xét.

Ví dụ 1. A = {Các số chẵn}

Như vậy ta có $2 \in A$ và $3 \notin A$

Ta biết rằng x là một số chẵn khi và chỉ khi x=2k, k là một số nguyên. Do đó ta có thể viết:

$$A = \{x \mid x = 2k,\ k \in \text{¢}\}$$

Chú ý 1.1. Để tiện cho quá trình sử dụng, sau đây danh từ "tập hợp" ta sẽ gọi một cách vắn tắt là "tập". Để chỉ cùng một khái niệm ngoài danh từ tập ta còn dùng các từ họ, hệ, lớp,vv…

Định nghĩa 1 (Tập rỗng)

Tập rỗng là tập không có phần tử nào.

Kí hiệu : $\varnothing$ (chữ O với một gạch chéo).

Ví dụ 1. Tập nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là $\varnothing$ vì phương trình này không có nghiệm thực.

1.1.2. Tập con

Định nghĩa 1 (Tập con)

- *Nếu mọi phần tử của tập A cũng là phần tử của tập B thì ta nói A là tập con của B (hay B là tập chứa của A).*

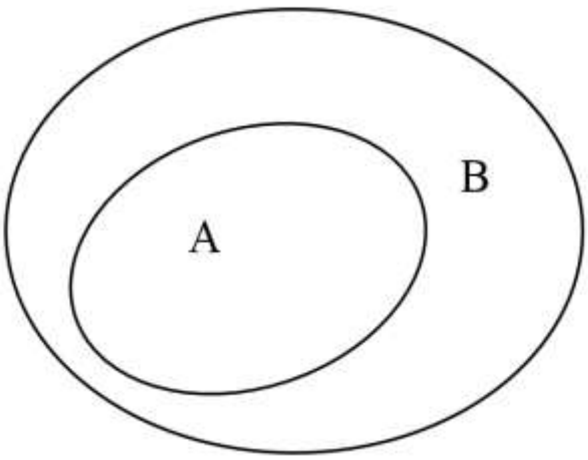
Khi đó ta viết

$$A \subseteq B \quad \text{hay} \quad B \supseteq A$$

-*Nếu mọi phần tử của tập A đều là phần tử của tập B nhưng có ít nhất một phần tử của tập B không là phần tử của tập A thì ta nói A là tập con thực sự của B (hay B là tập chứa thực sự của A)*

Khi đó ta viết

$$A \subset B \quad \text{hay} \quad B \supset A$$



Hình 1.1. Quan hệ bao hàm $A \subset B$

Chú ý 1.2.

- Kí hiệu $A \subseteq B$ được hiểu rằng A là tập con của B hoặc A có thể bằng B.
- Mọi tập hợp đều là tập con của chính nó. Tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

- Một tập hợp A không rỗng có ít nhất hai tập con là $\varnothing$ và chính nó. Chúng được gọi là tập con tầm thường của A.

Ví dụ 1. ¥ ⊂ ¢ ⊂ ¤ ⊂ ¡

Định nghĩa 2. (Sự bằng nhau của hai tập hợp)

Hai tập A và B được gọi là bằng nhau nếu A là tập con của B và B cũng là tập con của A.

Kí hiệu : $A = B$.

Ví dụ 1.

Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad B = \{1, 3, 5, 4, 2\}$

Thì $A = B$.

1.1.3. Các phép toán về tập hợp

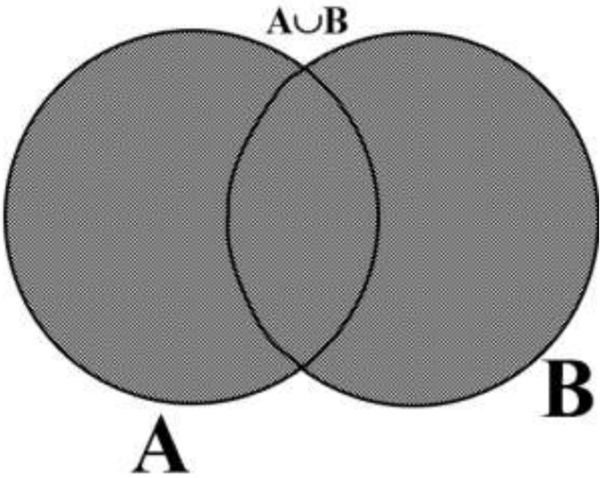
1) Phép hợp

Định nghĩa 1.

Hợp của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập A và B

Kí hiệu: $A \cup B$

Ta có $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ or } x \in B)$.



Hình 1.2. Hình biểu diễn $A \cup B$

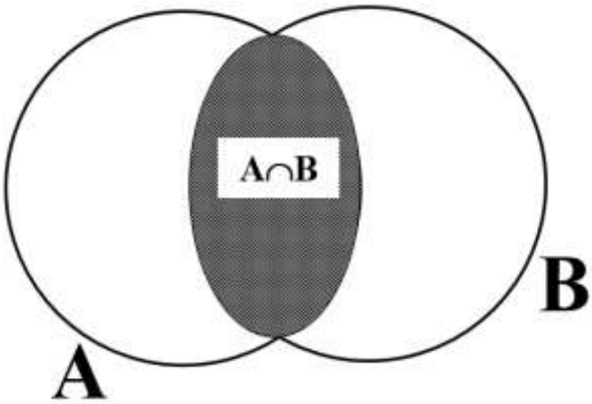
2) Phép giao

Định nghĩa 2.

Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc tập A vừa thuộc tập B.

Kí hiệu: $A \cap B$

Ta có $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (\mathrm{x} \in \mathrm{A} \text{ và } \mathrm{x} \in \mathrm{B})$.



Hình 1.3. Hình biểu diễn $A \cap B$

Tính chất

Cho hai tập hợp A và B. Khi đó ta có:

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cup A = A \cap A = A,$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

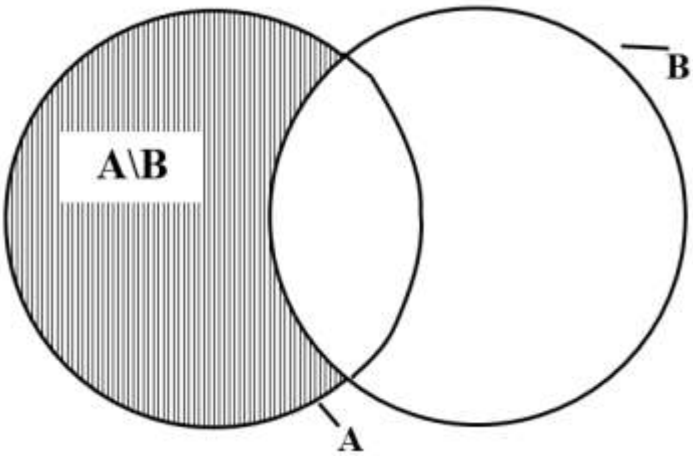
3) Hiệu của hai tập hợp

Định nghĩa 3.

Hiệu của tập hợp A và tập hợp B là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.

Kí hiệu: $A \setminus B$

Ta có $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ và } x \notin B)$.



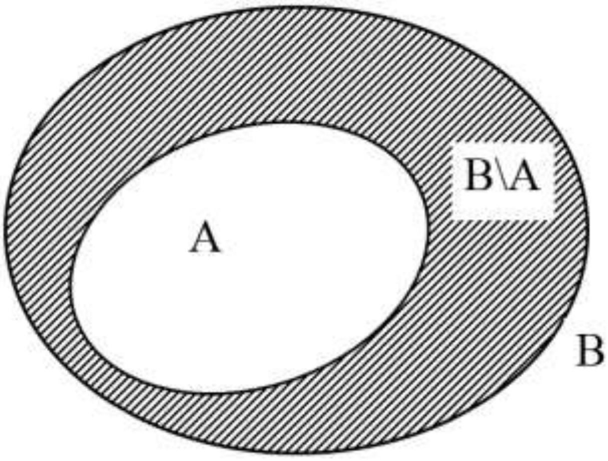
Hình 1.4. Hình biểu diễn $A \setminus B$

4) Phần bù

Định nghĩa 4.

Cho hai tập hợp A và B. Nếu $A\subset B$ *thì* $B\setminus A$ *được gọi là phần bù của* A *trong* B.

Kí hiệu $\overline{B}$. Nghĩa là $\overline{B}:=B\setminus A$



Hình 1.5. Biểu diễn phần bù của B trong A.

5) Định luật De Morgan

Với mọi $A\subset E$, $B\subset E$ *ta có*

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

Chứng minh

Xét $x\in E$ ta có

$x\in\overline{A\cup B}\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow\left(x\notin A;x\notin B\right)\Rightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B};$

$x\in\overline{A}\cap\overline{B}\Rightarrow\left(x\in\overline{A};x\in\overline{B}\right)\Rightarrow\left(x\notin A;x\notin B\right)\Rightarrow x\notin A\cup B$

$\Rightarrow x\in\overline{A\cup B}$

Vậy $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

Đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.

Ví dụ 1.

Cho A là tập nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0$ và B là tập nghiệm của phương trình $x^2-6x+5=0$

Khi đó

$$A=\{1,2\}\qquad B=\{1,5\}$$
$$A\cup B=\{1,2,5\}$$
$$A\cap B=\{1\}$$
$$A\setminus B=\{2\}$$
$$B\setminus A=\{5\}$$

Tập nghiệm của phương trình $\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2-6x+5\right)=0$ là $A\cup B=\{1,2,5\}$.

Tập nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{là } A \cap B = \{1\}.$$

1.2. Mệnh đề

1.2.1. Định nghĩa

Mệnh đề toán học được hiểu là một khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai, không thể nhập nhằng, nghĩa là không thể vừa đúng vừa sai, cũng không thể vừa không đúng vừa không sai.

Ví dụ 1.

1 < 2 là một mệnh đề toán học đúng.

5 > 9 là một mệnh đề toán học sai.

1.2.2. Các phép toán về mệnh đề

1) Phép phủ định

Định nghĩa 1

Phủ định của mệnh đề A là một mệnh đề, kí hiệu là $\overline{A}$, đúng khi A sai và sai khi A đúng.

Ví dụ 1.

A:= "10 lớn hơn 5"

$\overline{A}$:= "10 không lớn hơn 5"

Hoặc $\overline{A}$:= "10 nhỏ hơn hoặc bằng 5".

2) Phép hội

Định nghĩa 2

Hội của hai mệnh đề A và B là một mệnh đề, đọc là A và B, kí hiệu là $A \wedge B$ (hoặc A.B), đúng khi cả hai mệnh đề A, B đều đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

Ví dụ 1.

A:= "1 là nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$"

B:= "1 là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$"

$A \wedge B$:= "1 vừa là nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ vừa là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$"

Do A và B là hai mệnh đề đúng nên $A \wedge B$ là mệnh đề đúng.

3) Phép tuyển

Định nghĩa 3

Tuyển của hai mệnh đề A và B là một mệnh đề, đọc là A hoặc B, kí hiệu là $A \vee B$ (hoặc A+B), sai khi cả hai mệnh đề A, B đều sai, đúng trong các trường hợp còn lại.

Chú ý 1.3.

Để thiết lập mệnh đề tuyển của hai mệnh đề A, B ta ghép hai mệnh đó bởi liên từ "hoặc".

Ví dụ 1.

A: = "Số chẵn là số có chữ số tận cùng bằng 0,2,4,6 hoặc 8" là mệnh đề đúng.

B: = "Số chẵn là số có dạng a = 2m với m là số nguyên" là mệnh đề đúng.

$A \vee B$:="Số chẵn là số có chữ số tận cùng bằng 0,2,4,6 hoặc 8 hoặc số chẵn là số có dạng a = 2m với m là số nguyên" là mệnh đề đúng.

C: = "3>4" là mệnh đề sai

D: = "3 là số chẵn" là mệnh đề sai

$C \vee D$:= "3>4 hoặc 3 là số chẵn" là mệnh đề sai

$A \vee C$:= "Số chẵn là số có chữ số tận cùng bằng 0,2,4,6 hoặc 8 hoặc 3>4" là mệnh đề đúng.

4) Phép kéo theo

Định nghĩa 4

A kéo theo B là một mệnh đề, kí hiệu là $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$*, chỉ sai khi A đúng và B sai và đúng trong các trường hợp còn lại.*

Chú ý 1.4.

Mệnh đề $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ thường được diễn đạt là: "nếu A thì B" hoặc "có B khi có A" hoặc "từ A suy ra B" hoặc "A là điều kiện đủ để có B" hoặc "B là điều kiện cần để có A"…

Ví dụ 1.

A: = "12 là số chẵn" là mệnh đề đúng.

B: = "12 chia hết cho 2" là mệnh đề đúng.

$\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$: = "12 là số chẵn nên 12 chia hết cho 2" là mệnh đề đúng.

C: = "12 chia hết cho 5" là mệnh đề sai

$\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C}$:= "12 là số chẵn nên 12 chia hết cho 5" là mệnh đề sai.

5) Phép tương đương

Định nghĩa 5

A tương đương B là một mệnh đề, kí hiệu là $\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$*, nếu cả hai mệnh đề A và B đều đúng hoặc đều sai.*

Chú ý 1.5.

Mệnh đề "A tương đương B" thường được diễn đạt như sau: "A khi chỉ khi B" hoặc "A nếu và chỉ nếu B" hoặc "A là điều kiện cần và đủ để có B".

A tương đương B khi và chỉ khi cả hai mệnh đề $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ và $\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}$ đều đúng.

Ví dụ 1.

"A chia hết cho 2 khi và chỉ khi A là số chẵn" là mệnh đề đúng.

1.3. Số phức

1.3.1. Định nghĩa số phức. Số phức liên hợp

Ta biết rằng lũy thừa chẵn của mỗi số thực đều không âm, do đó trong tập hợp $\mathbb{R}$ không thể khai căn bậc chẵn của một số âm. Ví dụ phương trình $x^2+1=0$ có biệt số $\Delta<0$ nên không có nghiệm thực. Vì vậy, khi nghiên cứu các phương trình bậc ba, nhà toán học Italia R.Bonbelli (1526-1572) đã đưa ra định nghĩa đầu tiên về số phức, lúc đó gọi là số " không thể có" hoặc "số ảo" và căn bậc hai của -1 trong công trình Đại số (Bologne, 1572). Năm 1746, nhà toán học Pháp D'Alembert đã xây dựng dạng tổng quát của số phức và chấp nhận nguyên lý tồn tại n nghiệm của một phương trình bậc n.

Định nghĩa 1. (Số phức)

Số phức là số có dạng z = a+bi (hoặc z = a+bj) trong đó $a,b\in\mathbb{R}$, $i^2=-1$ *(hoặc* $j^2=-1$*)*

a được gọi là phần thực của số phức z. Kí hiệu Rez.

b được gọi là phần ảo của số phức z. Kí hiệu là Imz.

Tập hợp gồm tất cả các số phức thường được gọi là tập số phức và được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Vậy $\mathbb{C}=\{z=a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}, i^2=-1\}$

Ví dụ 1.

Cho $z=2+3i \to \operatorname{Re}z=2, \operatorname{Im}z=3$.

Chú ý :

Nếu a = 0 thì z = bi gọi là số thuần ảo.

Nếu b = 0 thì z = a là số thực. Vậy $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Định nghĩa 2. (Hai số phức bằng nhau)

Hai số phức $z_1=a_1+b_1i,\ z_2=a_2+b_2i$ *gọi là bằng nhau nếu*

$$\begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$$

Định nghĩa 3. (Số phức liên hợp)

Số phức $\overline{z}=a-bi$ *gọi là số phức liên hợp của số phức* $z=a+bi$.

Ví dụ 2.

a) Số phức liên hợp của số phức $z=2+3i$ là $\overline{z}=2-3i$.

b) Số phức liên hợp của số phức $z=-1-i$ là $\overline{z}=-1+i$.

Định nghĩa 4. (Số phức đối)

Số phức $-z=-a-bi$ *là số phức đối của số phức* $z=a+bi$.

Ví dụ 3.

a) Số phức đối của số phức $z = 2 - 5i$ là $-z = -2 + 5i$.

b) Số phức đối của số phức $z = i$ là $-z = -i$.

1.3.2. Các phép toán

a. Phép cộng

Ta gọi tổng của hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$ là số phức

$$z = \left(a_1 + a_2\right) + i\left(b_1 + b_2\right)$$

Ký hiệu: $z = z_1 + z_2$

*) Tính chất: $\forall z_1, z_2, z_3 \in$ £

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2) $z_1 + \left(z_2 + z_3\right) = \left(z_1 + z_2\right) + z_3$

Ví dụ 1.

$$\left(1+3i\right)+\left(2-i\right)=\left(1+2\right)+i\left(3-1\right)=3+2i$$

b. Phép trừ

Cho hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$, ta gọi số phức z là hiệu của hai số phức z_1 và z_2 nếu $z_1 = z_2 + z$

Ký hiệu: $z = z_1 - z_2$

Ví dụ 2.

$$\left(1-i\right)-\left(2+3i\right)=\left(1-2\right)+i\left(-1-3\right)=-1-4i$$

c. Phép nhân

Ta gọi tích của hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$ là số phức z xác định bởi

$$z = \left(a_1a_2 - b_1b_2\right) + i\left(a_1b_2 + a_2b_1\right)$$

Ký hiệu: $z = z_1.z_2$

*) Tính chất: $\forall z_1, z_2, z_3 \in$ £

1) $z_1z_2 = z_2z_1$

2) $z_1\left(z_2z_3\right) = \left(z_1z_2\right)z_3$

3) $z_1\left(z_2 + z_3\right) = z_1z_2 + z_1z_3$

4) $\left(-1\right)z = -z$

Ví dụ 3.

$$\left(2+2i\right).\left(4+3i\right)=\left(24-23\right)+i\left(23+24\right)=2+14i$$

d. Phép chia

Cho hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$, nếu $z_2 \neq 0$. Khi đó ta có thể tìm được một số phức $z = x + iy$ sao cho $z_2 z = z_1$.

Theo định nghĩa phép nhân ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_2 x - b_2 y = a_1 \\ b_2 x + a_2 y = b_1 \end{cases} \qquad (1)$$

Ta có

$$\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2^2 + b_2^2 \neq 0$$

vì $z_2 \neq 0$. Nên hệ (1) có nghiệm duy nhất. Số phức z gọi là thương của hai số phức z_1 và z_2.

Ký hiệu: $z = \dfrac{z_1}{z_2}$

Giải hệ (1) ta được $z = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\dfrac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_2^2 + b_2^2}$

Chú ý.

Trong khi giải bài tập ta có thể tìm thương của hai số phức z_1 và z_2 bằng cách nhân $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ với $\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$

Ví dụ 4.

$$\frac{3-5i}{2+i} = \frac{(3-5i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{1}{5} - \frac{13}{5}i$$

e. Lũy thừa bậc n của số phức

Tích của n số phức z gọi là lũy thừa bậc n của số phức z.

Ký hiệu: z^n

Vậy $z^n = \underbrace{zz...z}_{n}$

Ví dụ 5.

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3 = 1 - 3i\sqrt{3} + 3i^2 - 3\sqrt{3}i^3 = -8$$

f. Căn bậc n của số phức

Số phức ω được gọi là căn bậc n của số phức z nếu $\omega^n = z$

Ký hiệu: $\omega = \sqrt[n]{z}$

Ví dụ 6. Cho $z = a + ib$. Tìm $\sqrt{z}$, áp dụng tìm $\sqrt{3+4i}$

Giải

Giả sử $\mathrm{w} = x + iy = \sqrt{z} = \sqrt{a+ib} \Leftrightarrow (x+iy)^2 = a + ib$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \dfrac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \dfrac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Nếu b>0 thì x,y cùng dấu; nếu b<0 thì x,y trái dấu. Do đó có hai cặp (x, y) thỏa mãn bài toán.

Áp dụng:

$$\begin{cases} x = \pm \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{3^2+4^2}}}{\sqrt{2}} = \pm 2 \\ y = \pm \dfrac{\sqrt{-3+\sqrt{3^2+4^2}}}{\sqrt{2}} = \pm 1 \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị của $\sqrt{3+2i}$ là: $2+i$ và $-2-i$

Ví dụ 7. Thực hiện các phép tính sau:

a) i^3, i^4, i^5

b) $(1-i)(1+i)$

c) $(3+5i)+(2-3i)$

d) $(-2+7i)-(3-i)$

e) $\dfrac{2+5i}{1-i}$

Giải

a) $i^3 = i^2 i = -1.i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^5 = i^4 i = (i^2)^2 i = (-1)^2 i = i$

b) $(1-i)(1+i) = 1^2 - i^2 = 1-(-1) = 2$

c) $(3+5i)+(2-3i) = (3+2)+i(5-3) = 5+2i$

d) $(-2+7i)-(3-i) = (-2-3)+i(7+i) = -5+8i$

e) $\dfrac{2+5i}{1-i} = \dfrac{(2+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{(2-5)+i(2+5)}{2} = \dfrac{-3}{2}+\dfrac{7}{2}i$

Ví dụ 8. Tìm các số thực x, y thỏa mãn phương trình:

$$(3x-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})+(x-\mathrm{i}y)(1+2\mathrm{i}) = 5+6\mathrm{i}$$

Giải

Biến đổi vế trái:

$$(3x-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})+(x-\mathrm{iy})(1+2\mathrm{i})=6x+1+(3x-2)i+x+2y+(2x-y)i=(7x+2y+1)+(5x-y-2)i$$

Theo định nghĩa hai số phức bằng nhau suy ra:

$$\begin{cases}7x+2y+1=5\\ 5x-y-2=6\end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $x=\dfrac{20}{17}, y=\dfrac{-36}{17}$

Ví dụ 9. Thực hiện các phép tính sau:

a) i^{1721}

b) $\dfrac{1-i}{1+i}$

c) $(1-i\sqrt{3})^3$

Giải

a) $i^{1721}=\left(i^2\right)^{860}i=i$

b) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}=-i$

c) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^3=1-3\sqrt{3}i+3\left(\sqrt{3}i\right)^2-\left(\sqrt{3}i\right)^3=-8$

Ví dụ 10. Giải phương trình sau: $2z^2+2z+5=0$

Giải

Ta có $\Delta=1-10=-9=(3i)^2$

Suy ra $z=\dfrac{-1\pm 3i}{2}$

Ví dụ 11. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}z_1+iz_2=1\\ 2z_1+z_2=1+i\end{cases}$$

Giải

Đặt $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

suy ra $|A|=1-2i\neq 0$. Sử dụng phương pháp Cramer ta được

$$z_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & i\\ 1+i & 1\end{vmatrix}}{1-2i}=\frac{4+3i}{5}$$

$$z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & i \\ 2 & 1+i \end{vmatrix}}{1-2i} = \frac{3+i}{5}$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{4+3i}{5} \\ z_2 = \dfrac{3+i}{5} \end{cases}$$

1.3.3. Biểu diễn hình học của số phức

1) Biểu diễn hình học của số phức

Xét mặt phẳng tương ứng với hệ tọa độ Descartes Oxy và ta biểu diễn số phức $z = a+ib$ bởi một điểm $M(a,b)$ trong mặt phẳng xOy. Như vậy, các số thực sẽ được biểu diễn bởi các điểm trên trục Ox, các số thuần ảo được biểu diễn bởi các điểm trên Oy. Khi đó mặt phẳng xOy còn gọi là mặt phẳng phức, Ox gọi là trục thực, Oy gọi là trục ảo.

Ngược lại, với mỗi điểm M có tọa độ là (a,b) của mặt phẳng xOy ta đặt tương ứng với số phức $z = a+ib$.

Vậy có sự tương ứng 1 -1 giữa tập số phức £ và tập tất cả các điểm của mặt phẳng.

Ta gọi:

$r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ là môđun của số phức z. Ký hiệu là $|z|$

φ là góc có cạnh đầu là Ox, cạnh cuối là tia Oz gọi là argument của số phức z.

Ký hiệu $Argz$.

Số phức $z \neq 0$ có vô số argument sai khác nhau $2k\pi, k \in ¢$

Nếu $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ gọi là argument chính của z. Ký hiệu argz

*)Tính chất:

1) Hai số phức bằng nhau có môđun và argument bằng nhau.

2) $|z| = |\overline{z}|$

3) $z\overline{z} = |z|^2$

4) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

5) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

6) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Ví dụ 1. Tìm môđun của các số phức sau:

a) 1-4i

b) (2+i)(3-2i)

Giải

a) $|1-4i| = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$

b) $|(2+i)(3-2i)| = |(2+i)||(3-2i)| = \sqrt{5}\sqrt{13} = \sqrt{65}$

Ví dụ 2. Tìm môđun và argument các số phức sau:

a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

b) $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

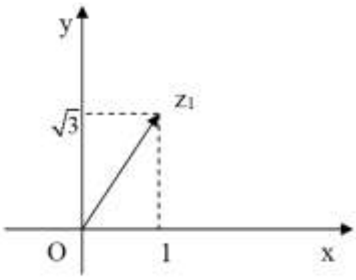
Giải

a) Ta có

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\mathrm{Arg}z_1 = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} + 2k\pi$$

vì z_1 ở góc phần tư thứ nhất



Hình 1.6. Biểu diễn hình học của số phức z=1+i $\sqrt{3}$

nên

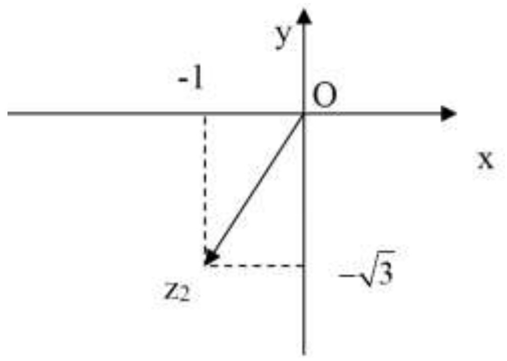
$$\mathrm{Arg}z_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \left(k \in ¢\right)$$

b) Ta có

$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\mathrm{Arg}z_2 = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{-1} + (2k+1)\pi$$

vì z_2 ở góc phần tư thứ ba



Hình 1.7. Biểu diễn hình học của số phức z=1-i$\sqrt{3}$

nên

$$\mathrm{Arg}z_2 = \frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \ (k \in ¢)$$

2) Biểu diễn hình học các phép toán

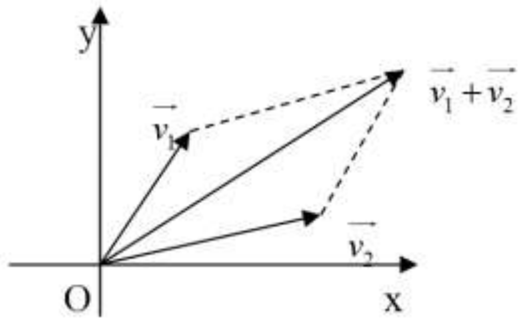
a. Phép cộng

Cho hai véctơ $z_1 = a_1 + ib_1$ và $z_2 = a_2 + ib_2$ và các véctơ tương ứng $\vec{v}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$, $\vec{v}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$.

Tổng 2 số phức $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

Tổng 2 véctơ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1 + a_2)\vec{i} + (b_1 + b_2)\vec{j}$

Vậy tổng $z_1 + z_2$ tương ứng với véctơ tổng $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

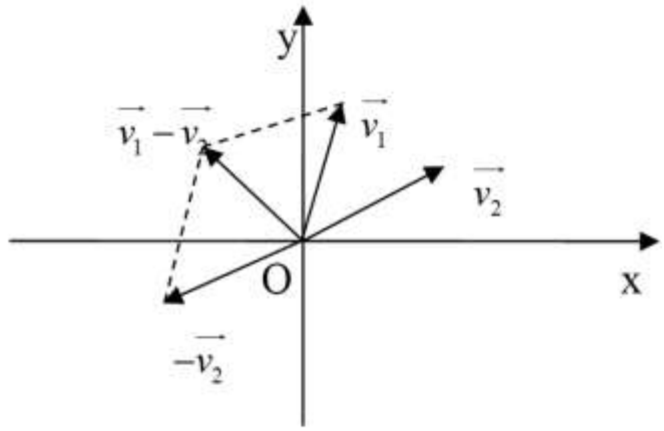


Hình 1.8. Biểu diễn hình học của phép cộng hai số phức

b. Khoảng cách giữa hai điểm

Khoảng cách giữa 2 điểm $M_1(a_1, b_1), M_2(a_2, b_2)$ bằng môđun của số phức $z_1 - z_2$ và bằng $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$

$$M_1M_2 = |z_1 - z_2| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

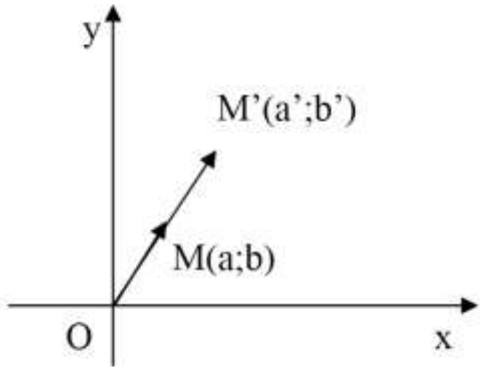


Hình 1.9. Biểu diễn hình học của phép lấy hiệu hai số phức

c. Tích của số phức và số thực

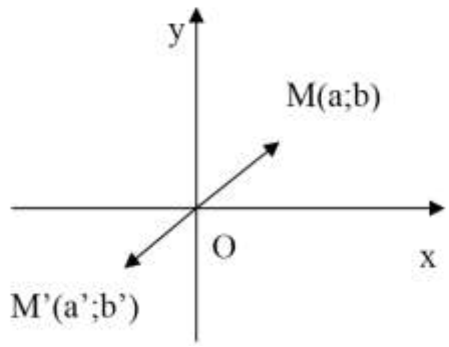
Cho $z = a + ib$ và véctơ tương ứng $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}, \lambda \in \mathbb{R}$ thì tích $\lambda z = \lambda a + i\lambda b$ tương ứng với véctơ $\lambda\vec{v} = \lambda a\vec{i} + \lambda b\vec{j}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Nếu $\lambda > 0$ thì $\lambda\vec{v}, \vec{v}$ cùng hướng và $|\lambda\vec{v}| = \lambda|\vec{v}|$



Hình 1.10. Biểu diễn hình học của phép lấy tích một số phức với một số thực λ>0

Nếu $\lambda < 0$ thì $\lambda\vec{v}, \vec{v}$ ngược hướng và $|\lambda\vec{v}| = -\lambda|\vec{v}|$



Hình 1.11. Biểu diễn hình học của phép lấy tích một số phức với một số thực λ<0

Nếu $\lambda = 0$ thì $\lambda\vec{v} = \vec{0}$

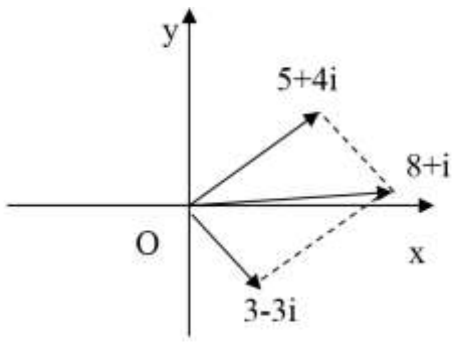
Ví dụ. Biểu diễn hình học các hệ thức sau trên mặt phẳng phức:

a) $(5+4i)+(3-3i)=8+i$

b) $2(3-2i)=6-4i$

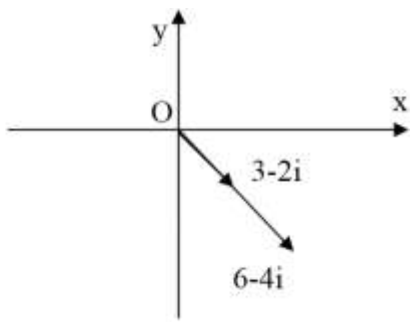
Giải

a)



Hình 1.12. Biểu diễn hình học của phép lấy tổng hai số phức z_1=5+4i và z_2=3-3i

b)



Hình 1.13. Biểu diễn hình học của phép lấy tích số phức z=3-2i với số thực λ=2

3) Dạng lượng giác của số phức

a. Tọa độ cực của số phức

Cho số phức $z=x+iy$, được biểu diễn bởi điểm $\mathrm{M}(x,y)\neq \mathrm{O}(0,0)$ trong mặt phẳng Oxy. Số thực $r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$ gọi là bán kính cực của điểm M.

Số đo $\varphi\in(0,2\pi)$ của góc lượng giác $(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OM})$ là argument của M.

Cặp có thứ tự (r,φ) gọi là toạ độ cực của M. Ký hiệu $M(r,\varphi)$.

Điểm O có $r=0$ và φ không xác định. Dễ dàng chứng minh được:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$$

*) Tính chất:

1) Nếu $x\neq 0 \Rightarrow \tan\varphi=\dfrac{y}{x} \Rightarrow \varphi=\arctan\dfrac{y}{x}+k\pi$

$$k=\begin{cases} 0 \text{ nếu } x>0, y>0 \\ 1 \text{ nếu } x<0 \\ 2 \text{ nếu } x>0, y<0 \end{cases}$$

2) Nếu $x=0, y\neq 0$

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\text{ nếu } y>0\\ 3\dfrac{\pi}{2}\text{ nếu } y<0\end{cases}$$

b. Dạng lượng giác của số phức

Cho số phức $z=x+iy$ ta có thể biểu diễn z ở dạng $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ trong đó $r=|z|,\varphi=Argz$ gọi là dạng lượng giác của số phức z.

Ví dụ 1. Viết các số phức sau sang dạng lượng giác:

a) $z_1=-1-i$

b) $z_2=-1+i\sqrt{3}$

c) $z_3=1-i\sqrt{3}$

d) $z_4=2$

e) $z_5=-3i$

Giải:

a) $z_1=-1-i$

$$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\varphi=\arctan\frac{y}{x}+\pi=\arctan 1+\pi=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

b) $z_2=-1+i\sqrt{3}$

$$r=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$$

$$\varphi=\arctan\frac{y}{x}+\pi=\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}+\pi=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

c) $z_3=1-i\sqrt{3}$

$$r=\sqrt{(1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$$

$$\varphi=\arctan\frac{y}{x}=\arctan-\sqrt{3}=\frac{5\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

d) $z_4 = 2$

$$r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{0}{2} = 0$$

$$\Rightarrow z_4 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$$

e) $z_5 = -3i$

$$r = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow z_5 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

c. Các phép toán

- Phép nhân

Cho $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Khi đó:

$$z_1.z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

Ví dụ 2.

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right),\ z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_1.z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

- Phép chia

Cho $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \neq 0$. Khi đó:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

Ví dụ 3.

Cho $z_1 = 1, z_2 = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)$$

- Luỹ thừa của một số phức

Định lý.(Công thức Demoivre)

Cho $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và $n \in ¥$ ta có

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$$

Chứng minh

Dùng công thức nhân với $z = z_1 = z_2 = \ldots = z_n$ ta được:

$$z^n = \underbrace{r\ldots r}_{n}\left[\cos\left(\underbrace{\varphi+\ldots+\varphi}_{n}\right) + i\sin\left(\underbrace{\varphi+\ldots+\varphi}_{n}\right)\right] = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$$

Ví dụ 4. Tính $\left(1+i\right)^{100}$

Giải

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow (1+i)^{100} = (\sqrt{2})^{100}\left(\cos\frac{100\pi}{4} + i\sin\frac{100\pi}{4}\right) = 2^{50}\left(\cos 25\pi + i\sin 25\pi\right)$$

Ví dụ 5. Tính $z = \dfrac{\left(1-i\right)^{100}\left(\sqrt{3}+i\right)^{5}}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}}$

Giải

Ta có:

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Thay vào biểu thức ta được $z = -1$

- Căn bậc n

Cho $z = r_1\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), \omega = r_2\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)$

$$\omega^n = r_2^n\left(\cos n\psi + i\sin n\psi\right)$$

$$\omega^n = z \Leftrightarrow \begin{cases} r_2 = \sqrt[n]{r_1} \\ \psi = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{k2\pi}{n}, k \in ¢ \end{cases}$$

Ví dụ 6.Tìm tất cả các giá trị $\sqrt{i}$

Giải

Ta có

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

suy ra

$$\sqrt{i} = cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right); k = 0, \pm 1, \pm 2,.$$

Vậy $\sqrt{i}$ có hai giá trị là :

$$z_1 = cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$z_2 = cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

Ví dụ 7. Tính $\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}}$

Giải

Ta có:

$$-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2} = 8\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ 2^3\left(cos\left(\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right)\right), k = 0,1,2$$

do đó có 3 giá trị của $\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}}$ là:

$$\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}} = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}\right)\right), k = 0,1,2$$

Ví dụ 8.Tìm tất cả các giá trị $\sqrt[n]{1}$

Giải

Ta có

$$1 = cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)$$

suy ra

$$\sqrt[n]{1} = cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}; k = 0, \pm 1, \pm 2,.$$

Vậy $\sqrt[n]{1}$ có n giá trị là

$$z_k = cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}; k = 0,1,...,n-1$$

4) Dạng mũ của số phức

a. Khái niệm

Ta có $e^{i\varphi} = cos\varphi + i\sin\varphi$ (Công thức Euler)

$\Rightarrow z = r(cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ gọi là dạng mũ của số phức z .

Ví dụ 1. Viết các số phức sau sang dạng mũ:

a) $z = -1 - i$

b) $z = 2 + 2i$

Giải

a) $z = -1 - i$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4} + k2\pi\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4} + k2\pi\right)\right)$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2}.e^{-i\left(\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right)}, k \in ¢$$

b) $z = 2 + 2i$

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)\right)$$

$$\Rightarrow z = 2\sqrt{2}.e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)}, k \in ¢$$

b. Các phép toán

1. Phép nhân

Cho hai số phức $z_1 = r_1.e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2.e^{i\varphi_2} \Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2.e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

2. Phép chia

Cho hai số phức $z_1 = r_1.e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2.e^{i\varphi_2} \neq 0 \Rightarrow \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}.e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Ví dụ 2. Cho 2 số phức $z_1 = -1 - i, z_2 = 2 + 2i$. Tính $z_1.z_2, \dfrac{z_1}{z_2}$

Giải

Ta có $z_1 = \sqrt{2}.e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \ z_2 = 2\sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}, \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}.e^{-i\pi} = \frac{1}{2}e^{-i(\pi + k2\pi)}, k \in ¢$$

1.4. Bài tập chương 1

1) Bài tập về mệnh đề

1.1.Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề (nếu là mệnh đề thì xét tính đúng sai).

a) 3 + 2 = 7 b) 4 + x = 3

c) x + y > 1 d) $2 - \sqrt{5} < 0$

e) $\pi^2 < 9{,}86$ f) $\sqrt{5}$ là số vô tỷ g). Bây giờ là mấy giờ

1.2. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau và phát biểu mệnh đề phủ định của nó.

a) 1794 chia hết cho 3 b) $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ .

c). $\pi < 3.15$ d) $|-125| \le 0$

1.3. Với mỗi câu sau, tìm hai giá trị thực của x để được một đề đúng, một mệnh đề sai

a) $3x^2 + 2x - 1 = 0$ b) $4x + 3 < 2x - 1$

1.4. Cho tam giác ABC. Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề đảo của nó, rồi xét tính đúng sai của chúng với:

a). P: "Góc A bằng 90^0" Q: "$BC^2 = AB^2 + AC^2$"

b). P: "$A = B$" Q: "Tam giác ABC cân"

1.5. Cho các mệnh đề kéo theo

Nếu a và b cùng chia hết cho c thì a + b chia hết cho c (a, b, c là những số nguyên)

Các số nguyên có tận cùng bằng 0 đều chia hết cho 5.

Tam giác cân có hai trung tuy n b ng nhau.

Hai tam giác bằng nhau có diện tích bằng nhau.

a) Hãy phát biểu mệnh đề đảo của các mệnh đề trên.

b) Phát biểu mệnh đề trên bằng cách sử dụng điều kiện đủ, điều kiện cần

1.6. Phát biểu thành lời các mệnh sau. Xét tính đúng sai và lập mệnh đề phủ định của chúng.

a) $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = -1$ b) $\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + x + 2 \ne 0$

c) $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, x < \dfrac{1}{x}$ d) $\exists x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 = 2$

e) $\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \le 0$ f) $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \le 0$

g) $\forall x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ k) $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

m) $\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + x + 1 > 0$ n) $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + x + 1 > 0$

1.7. Hãy lập mệnh đề phủ định cho các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 5x + 2 > 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 2x + 7$ là số nguyên tố

c) $\forall x \in \mathbb{R} \,/\, 5x - 3x^2 = 1$

d) $\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + x + 1 \le 0$

f) $\forall n \in \mathbb{N} \,/\, n^2 + 1$ không chia hết cho

g) Mọi học sinh của lớp đều thích môn học toán

2) Bài tập về tập hợp

1.1. Hãy liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \le 20, x \vdots 3\}$

b) Tập B là các số chính phương không vượt quá 100

c) $C = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n(n+1) \le 20\}$

d) $D = \{3k - 1 / k \in \mathbb{Z}, -5 \le k \le 3\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, |x| < 10\}$

f) $F = \left\{x \in \mathbb{Z} \,/\, 3 < |x| \le \dfrac{19}{2}\right\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$

h) $H = \{x \in \mathbb{R} \,/\, (2x^3 - 3x^2 - 5x)(4x^4 - 6x^2 + 8) = 0\}$

i) $I = \{x \in \mathbb{R} \,/\, (x^6 + x^2 + x = x^4 - x^3 + 1\}$

1.2. Xác định các tập sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng:

a) A = {2, 6,12, 20,30} b) B = {1, 2,3, 4,6,12}

c) C={3, 8, 15, 24, 35} d) $D = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{20}, \dfrac{1}{30}\right\}$

e) $E = \left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{4}{15}, \dfrac{5}{24}, \dfrac{6}{35}\right\}$ f) $F = \left\{1, \dfrac{3}{2}\right\}$

g) $G = \left\{1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, \dfrac{1}{36}\right\}$

h) Tập hợp các điểm M trên mặt phẳng thuộc đường tròn tâm O và đường kính 2R.

1.3. Tìm các tập con của các tập hợp sau đây:

a) A = {a, b, c, d} b) A = {0,1, 2, a,c}

c) $\varnothing$

1.4. Tìm các tập con gồm 2 phần tử của các tập hợp:

a). A = {1, 2,3, 4, a, d} b). A = {a, b,c, d,1, 2, 4,5}

1.5. Tìm các tập con gồm 2 phần tử của các tập hợp:

a). A = {1, 2,3, 4, a, d} b). A = {a, b,c, d,1, 2, 4,5}

1.6. Xét quan hệ của các tập hợp sau:

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \,/\, n \text{ là ước của } 6\}$ $B = \{n \in \mathbb{Z} \,/\, n \text{ là ước chung của 12 và 18}\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 5 = 0\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 9 = 0\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, 2|x| - 6 \le 0\}$ $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

d) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x - \sqrt{3-2x} = 0 \right\}$ $\qquad$ $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 + 2x - 3 = 0 \right\}$

1.7. Trong các tập dưới đây tập nào là tập rỗng:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 + x - 1 = 0 \right\}$ $\qquad$ b) $B = \left\{ x \in \mathbb{C} \ / \ |x| < 1 \right\}$

c) $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x^4 + x + 1 = 0 \right\}$ $\qquad$ d) $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - 2x + 5 = 0 \right\}$

e) $E = \left\{ x \in \mathbb{Q} \ / \ x^2 - 4x + 2 = 0 \right\}$ $\qquad$ f) $F = \left\{ x \in \mathbb{C} \ / \ |x - 1| < 3 \right\}$

2.8. Cho A = {1, 2,3, 4} B = {2, 4, 6} C = {1,3,5} .

Xác định các tập hợp sausau:

a). A ∩ B, A ∪ B b). A ∩ C, A ∪ C c). B ∩ C, B ∪ C

2.9. Cho tập hợp

E = {a,b, c, d} F = {b, c, e, g} G = {c, d, e, f } .

Chứng minh rằng: E ∩ (F ∪ G) = (E ∩ F) ∪ (E ∩ G) .

1.10. Cho A = {1, 2,3, 4,5} B = {2, 4,6,8} . Tìm A\B, B\A.

1.11. Cho hai tập hợp A, B. Hãy xác định:

a) (A\B)∩B

b) (A\B)∩A

c) (A\B)∪B

d) (A∩B)∪A

e) (A∪B)∩B

f) (A\B)∪B

g) (A\B)∩(B\A)

1.12. Cho hai tập hợp A, B.

$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \ / \ x \text{ là bội của 3 và } x<40 \right\}$

$B = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \ / \ x \text{ là bội của 5 và } x<60 \right\}$

a) Viết A, B dưới dạng liệt kê các phần tử

b) Tìm A∩B, A∪B, A\B

1.13. Cho A={1, 2}, B={1, 2, 3, 4}. Tìm tất cả các tập X sao cho A ∪ X =B.

1.14: Cho A={1,2,3,4,5,6} B={0,2,4,6,8}. Tìm tất cả các tập X sao cho X ⊆ B và X ⊆ A.

2) Bài tập về số phức

2.1. Hãy tính:

a) $\dfrac{(1+2j)^2 - (1-j)^3}{(3+2j)^3 - (2+j)^2}$ $\qquad$ b) $\dfrac{(1-j)^5 - 1}{(1+j)^5 + 1}$

c) $\frac{(1+j)^9}{(1-j)^7}$ d) $\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

2.2. Tìm 2 số thực x, y thỏa mãn:

a) $(1 + 2j)x + (3 – 5j)y = 1 – 3j$

b) $(x + a)(b + yj) = 4 + 3j$ (a, b là tham số)

2.3. Hãy tính các căn bậc hai của các số phức sau:

a) $3 – 4j$ b) $-15 + 8j$

c) $-8 + 6j$ d) $-3 – 4j$

2.4. Hãy viết các số phức sau ở dạng lượng giác và dạng mũ

a) 1 b) -1 c) j

d) -j e) 1 + j f) 1 - j

g) -1 + j h) -1 - j i) $1 + j\sqrt{3}$

j) $1 - j\sqrt{3}$ k) $-1 + j\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3} - j$

2.5. Tìm dạng lượng giác của số phức: $z = \frac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{3}+j}$. Tính z^{100}

2.6. Hãy biểu diễn hình học của các số phức z thỏa mãn:

a) $|z| < 2$ b) $|z - 1| \le 1$ c) $|z – 1 – j| < 1$

2.7. Giải phương trình:

a) $|z| - z = 1 + 2j$ b) $|z| + z = 2 + j$

c) $z^2 + (j – 2)z + 3 – j = 0$ d) $z^2 – (2 + 3j)z -1 + 3j = 0$

2.8. Đưa số phức sau về dạng lượng giác:

1) $z=1+i$

2) $z=-1+i$

3) $z=1+i\sqrt{3}$

4) $z=-1+i\sqrt{3}$

2.9. Tìm dạng mũ của số phức:

1) $z=2i$

2) $z=-2$

3) $z=i+\sqrt{3}$

4) $z=i-\sqrt{3}$

2.10. Tìm phần thực và phần ảo của số phức

1) $z=\frac{2-3i}{1+2i}+\frac{i-2}{4+i}$

2) $z = \dfrac{3i+2}{2+i} + \dfrac{2i-1}{4-i}$

2.11. Thực hiện phép tính

1) $\dfrac{4-3i}{(2i+5)(i-4)^2}$

2) $\dfrac{(1-2i)(5+4i)^2}{2i-3}$

2.12. Tính giá trị của biểu thức

1) $z = \dfrac{(1+i)^2(4-5i)}{(2+i)(8-3i)}$

2) $z = \dfrac{(2i+3)(1-4i)^2}{(4i+5)(i-9)}$

3) $z = \dfrac{(6i-1)^2(3+4i)}{(2i+5)(i-6)}$

4) $z = \dfrac{(1+2i)(5-i)^2}{2i+3}$

2.13. Tìm môđun của số phức $z = 1+4i+(1-i)^3$

2.14. Cho hai số phức: $z_1 = \sqrt{3}-5i$; $z_2 = \sqrt{3}-i$. Tính $\dfrac{z_1}{z_2}$ và $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$

2.15. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2+2z+10=0$.
Tính giá trị của biểu thức A = $|z_1|^2 + |z_2|^2$

2.16. Tìm số phức z thỏa mãn: $|z-(2+i)| = \sqrt{10}$ và $z.\overline{z} = 25$

2.17. Cho số phức z = 4 - 3i. Tìm $\dfrac{z+z^2}{\overline{z}}$

2.18. Giải phương trình sau (ẩn z): $z+2\overline{z} = (1+5i)^2$

2.19. Tìm căn bậc hai của số phức sau: $z = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

2.20. Tìm các căn bậc hai của số phức: $z = 21-20i$

2.21. Giải phương trình: $z^2 - 2(2+i)z + (7+4i) = 0$

2.22. Giải phương trình sau trên £ (ẩn z): $z^4+2z^3-z^2+2z+1=0$

2.23. Giải phương trình sau trên £ (ẩn z): $2z^4-2z^3+z^2+2z+2=0$

2.24. Giải hệ phương trình sau trên tập số phức: $\begin{cases} Z_1+Z_2 = 2+3i \\ Z_1^2+Z_2^2 = 5-4i \end{cases}$

2.25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện

$\left|z-(3-4i)\right|=2$

2.26. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|$

2.27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện

$\left|z-(5i-2)\right|=2$

2.28. Viết số phức sau dưới dạng đại định nghĩa: $z=\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^9}{(1+i)^5}$

2.29. Viết dạng lượng giác của số phức $z=1-\sqrt{3}i$

2.30. Viết dưới dạng lượng giác rồi tính: $(1+i)^{2010}$

2.31. Tìm dạng lượng giác của số phức sau: $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

2.32. Tìm phần thực và phần ảo của số phức sau: $z=\dfrac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}i\right)^{2008}}{\left(\sin\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)^{2009}}$

2.33. Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in ¡\ )$. Hỏi các số sau đây là số thực hay số ảo:

a) $z^2-\left(\overline{z}\right)^2$ b) $\dfrac{z^2+\left(\overline{z}\right)^2}{1+z\overline{z}}$

2.34. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z=2010i^{2009}+2009i^{2010}$

2.35. Giải phương trình sau trên tập hợp số phức: $z^2-2(1+2i)z+8i=0$

2.36. Tính z + $\overline{z}$ và z . $\overline{z}$ với :

a) z = 2 + 3i b) z = -5 + 3i .

2.37. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau :

a) (4 – i) + (2 + 3i) – (5 + i) b) $(1 + i)^2 - (1 - i)^2$ c) $(2 + i)^3 - (3 - i)^3$

d) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}-\dfrac{\sqrt{2}+i}{i}$

2.38. Tính :

a) $\dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$ b) $\dfrac{a+bi}{a-bi}$ c) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ d) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$

2.39. Tính: a) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ (với n là số nguyên dương) b) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

2.40. Giả sử $\varepsilon=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, tính :

a) $\left(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2\right)\left(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon\right)$ b) $(a+b)(a+b\varepsilon)\left(a+b\varepsilon^2\right)$ c) $\left(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2\right)^3+\left(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon\right)^3$

d) $\left(a\varepsilon^2+b\varepsilon\right)\left(b\varepsilon^2+a\varepsilon\right)$

2.41. Giải các hệ phương trình sau với x, y, z là số phức :

a) $\begin{cases}(3-i)x+(4+2i)y=2+6i\\(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i\end{cases}$ b) $\begin{cases}(2+i)x+(2-i)y=6\\(3+2i)x-(3-2i)y=8\end{cases}$

2.42. Tìm các số liên hợp với :

a) Bình phương của chính nó. b) Lập phương của chính nó.

2.43. Cho số phức z = x + iy (x, y thuộc R). Tìm phần thực và phần ảo của các số phức:

a) $z^2 - 2z + 4i$ b) $\dfrac{\bar{z}+i}{iz-1}$

2.44. Giải các phương trình sau (ẩn z) :

a) $\dfrac{2+i}{1-i}z=\dfrac{-1+3i}{2+i}$ b) $\left((2-i)\bar{z}+3+i\right)\left(iz+\dfrac{1}{2i}\right)=0$.

2.45. a) Chứng minh : $i^{2k+1}=(-1)^k.i, k\in N; i^{2k}=(-1)^k, k\in N.$

b) Giả sử $z_k=i^{2k}+i^{2k+1}, k\in N$. Tính tổng $z_k + z_{k+1}$

2.46. Thực hiện các phép tính :

a) $\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$; b) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^2-(2+i)^2}$; c) $\dfrac{(2+i)^3+(2-i)^3}{(2+i)^3-(2-i)^3}$; d) $(2-i)^6$

2.47. Cho hai số phức z = a + bi và z' = a' + b'i

a) Với điều kiện nào giữa a, b, a', b' thì tổng của chúng là số thực ? số ảo?

b) Cũng câu hỏi trên đối với hiệu z – z'.

2.48. a) Với điều kiện nào giữa a, b thì bình phương của z = a + bi là số thực, số ảo?

b) Cũng câu hỏi trên đối với z^3.

2.49. Xác định tập điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn : a) $z=a+ai, a\in R$ b) $\dfrac{1}{z-i}$ là số ảo

2.50. Xác định tập điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn :

a) z^2 là số thực âm b) $|z-i+2|+|z+i|=9$.

2.51. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z = x + yi với x, y thuộc R và thỏa mãn :

a) $1\le|z|\le 3$ b) $\begin{cases} x+y\le 1 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$

2.52. Chứng minh rằng :

a) Bình phương của hai số phức liên hợp cũng là liên hợp.

b) Lập phương của hai số phức liên hợp cũng là liên hợp.

c) Lũy thừa bậc n của 2 số phức liên hợp cũng là liên hợp.

2.53. Cho z = a + bi. Chứng minh $|z|\sqrt{2}\ge|a|+|b|$. Khi nào thì đẳng thức xảy ra ?

2.54. a) Các điểm A, B, C và A', B', C' trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số: 1 – i ; 2 + 3i ; 3 + i và 3i ; 3 – 2i ; 3 + 2i. CMR ABC và A'B'C' là 2 tam giác có cùng trọng tâm.

b) Biết các số phức biểu diễn bởi ba đỉnh nào đó của một hình bình hành trong mặt phẳng phức , hãy tìm số biểu diễn bởi đỉnh còn lại.

2.55. a) Xác định tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z = x + yi

$(x, y\in R)$ thỏa mãn điều kiện $z^2+\left(\bar{z}\right)^2=0$

b) Tìm số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện : $z^2+\left(\bar{z}\right)^2=0$ và $\left|\dfrac{z-1}{z-3}\right|=1$

b) $\left|\dfrac{z-1}{z-3}\right|=1\Leftrightarrow x=2$ nên có hai số phức thỏa mãn đề bài là : z_1 = 2(1 + i) và z_2 = 2(1 – i)

2.56. A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số :

1 + 2i , $1+\sqrt{3}+i, 1+\sqrt{3}-i, 1-2i$

Chứng minh rằng ABCD là một tứ giác nội tiếp đường tròn. Hỏi tâm đường tròn đó biểu diễn số phức nào?

2.57. Tìm các căn bậc hai của số phức: a) z = 200 b) z = - 13.

2.58. Tìm các căn bậc hai của số phức:

a) 3 + 4i b) $1-2i\sqrt{2}$ $1-2i\sqrt{2}$.

2.59. Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau:

a) $-1+4\sqrt{3}i$ b) -8i

2.60. Tìm các căn bậc hai của số phức: a) -8 + 6i b) -8 – 6i c) 8 – 6i d) 8 + 6i

2.61. Gọi z là căn bậc hai của 4 + i, z' là căn bậc hai của 4 – i. Tính z + z'.

2.62. Tìm số phức z mà $z^3 = -i$.

2.63. Tìm số phức z mà $z^4 = -1$.

2.64. Cho z = a + bi có các căn bậc hai là $\pm(m+ni)$. Tìm các căn bậc hai của –a – bi và a – bi

2.65. Giải các phương trình bậc hai sau đây trong tập hợp các số phức C:

a) $z^2 - z + 2 = 0$ b) $2z^2 - 5z + 4 = 0$

2.66. Giải các phương trình :

a) $z^2 + z + 1 = 0$ b) $z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$

2.67. Trong C hãy giải các phương trình sau đây:

a) $x^2 - (3 - i)x + 4 - 3i = 0$ b) $3x^2\sqrt{2} - 2x\sqrt{3} + \sqrt{2} = 0$.

2.68. Giải các phương trình sau: a) $x^2 + 3ix + 4 = 0$ b) $2x^2 - (4 + i)x = 1$

2.69: Giải các phương trình $z + \dfrac{1}{z} = k$ trong các trường hợp sau:

a) k = 1 b) k = $\sqrt{2}$

2.70. Giải các phương trình trong C:

a) $z^2 + \bar{z} = 0$ b) $(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$

b) 1, -2 , $\dfrac{-1+\sqrt{23}i}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{23}i}{2}$

2.71. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm: $z_1 = 6 - 3i$ và $z_2 = i$.

2.72. Chứng minh rằng:

Nếu phương trình: $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ với các hệ số thực có nghiệm là z_0 thì z_0 cũng là nghiệm của phương trình.

2.73. Giải các phương trình trong tập C:

a) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$

2.74. Giải phương trình trong C: $x^3 + 8 = 0$

2.75. Cho phương trình $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2 = 0$

a) Chứng tỏ rằng 1 + i là nghiệm của phương trình.

b) Tìm các nghiệm còn lại.

2.76. Giải phương trình $z^4 + 4 = 0$ và biểu diễn tập nghiệm trên mặt phẳng phức.

2.77. Viết dạng đại số của số phức sau:

a) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$ b) $2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i.\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

2.78. Biểu diễn các số phức sau dưới dạng lượng giác: a) -1 + i b) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.79. Tìm số phức z thỏa : (1 – z)(1 + 2i) + (1 – iz)(3 – 4i) = 1 + 7i . Viết số phức z dưới dạng lượng giác.

2.80. Tìm một acgumen của mỗi số phức sau:

a) $-\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}$ b) $1-\sin\varphi+i\cos\varphi(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$

2.81. Viết dưới dạng lượng giác của các số phức:

a) $1-i\tan\frac{\pi}{5}$ b) $1-\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi(\varphi\neq k2\pi, k\in z)$

2.82. **a) Với** điều kiện nào thì môđun của tổng hai số phức bằng tổng các môđun của hai số hạng?

b) Khi nào thì môđun của tổng hai số phức bằng hiệu các môđun của hai số hạng ?

2.83. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai acgumen của 2 số phức z_1, z_2 : Arg z_1 và Arg z_2 trong từng trường hợp sau:

a) $z_1z_2 = k$, $k < 0$ b) $z_1z_2 = -i$ c) $z_1 = -3z_2$ d) $\frac{\overline{z_1}}{z_2}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2.84. Tìm số phức z thỏa : $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|1-z|$

2.85. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện : a) $|z+1-i|\leq 1$ b) $|z-5i|\leq 3$ tìm các số có acgumen dương nhỏ nhất .

2.86. Viết z_1 và z_2 dưới dạng lượng giác rồi tính $z_1.z_2$ và $\frac{z_1}{z_2}$

a) $z_1=1+i\sqrt{3}$ và $z_2 = 1 + i$. Suy ra : $\cos\frac{\pi}{12}$ và $\sin\frac{\pi}{12}$

b) $z_1=\sqrt{3}+i$ và $z_2 = 1 - i$. Suy ra $\cos\frac{5\pi}{12}$ và $\sin\frac{5\pi}{12}$

2.87. Tìm vị trí của những điểm biểu diễn các số phức có:

a) Môđun bằng 2; 3. b) Acgumen bằng $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$.

2.88. Cho A, B, C D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số : $4 + (3 + \sqrt{3})i; 2+(3+\sqrt{3})i; 1+3i$ và 3 + i

Chứng minh rằng bốn điểm đó cùng nằm trên một đường tròn.

2.89. Dùng công thức Moivre để tính :

a) $\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)^5$ b) $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$ c) $(1 + i)^{16}$.

2.90. Tính gọn:

a) $\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)i^5\left(1+\sqrt{3}i\right)^7$ b) $\frac{(1+i)^{10}}{\left(\sqrt{3}+1\right)^9}$ c) $z^{2000}+\frac{1}{z^{2000}}$ biết rằng $z+\frac{1}{z}=1$

2.91. Tính :

a) $(1 + i)^n$ b) $\varepsilon_1^n+\varepsilon_2^n$ với $\varepsilon_1=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2};\varepsilon_2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

2.92. Viết dạng lượng giác các căn bậc hai của số phức: a) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

c) $-\sqrt{3}-i$

2.93. Tìm nghiệm phức của phương trình : $z^4 - 1 = i$

2.94. Với n nguyên dương nào thì số phức: $\left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^n$ là số thực, số ảo.

2.95. Biểu diễn $\cos^5 x.\cos^6 x$ theo coskx.

2.96. Chứng minh :

a) $C_n^1+C_n^4+C_n^7+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$; b) $C_n^2+C_n^5+C_n^8+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$

2.97. Cho số phức dạng lượng giác z = $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

Đặt $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Chứng minh :

a) $z=r.e^{i\varphi}$; b) $\left(r.e^{i\varphi}\right).\left(r'.e^{i\varphi'}\right)=rr'.e^{i(\varphi+\varphi')};z^n=r^n.e^{in\varphi}$;

c) $\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2};\sin^3\varphi=\frac{1}{4}\left(3\sin\varphi-\sin 3\varphi\right)$

2.98. Viết các số phức sau dưới dạng đại số:

a) $z = 2i^{10} + i^3$ b) $z = i^{2007} + i^{2008}$

2.99. Viết dưới dạng a + bi các số phức sau:

a) $z = (1 + i)^2 - (1 - i)^2$ b) $z = (2 + i)(-1 + i)(1 + 2i)^2$

c) $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$ d) $z=\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$

2.100. Tính : a) $(1 + 2i)^6$ b) $(2 + i)^7 + (2 - i)^7$

2.101. Giải hệ phương trình với ẩn số thực:

$$\begin{cases}(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)z+(1+4i)t=1+5i\\(3-i)x+(4-2i)y+(1+i)z+4it=2-i\end{cases}$$

2.102. Cho hai số phức z = a + bi và $z' = a' + b'i$

Với điều kiện nào giữa a, b, a', b' thì tích $z.z'$ của chúng là số thực ?số ảo?

2.103. Tính: a) $\left(\sqrt{3}+i\right)^2-\left(\sqrt{3}-i\right)^2$ b) $\left(\sqrt{3}+i\right)^2+\left(\sqrt{3}-i\right)^2$

c) $\left(\sqrt{3}+i\right)^3-\left(\sqrt{3}-i\right)^3$ d) $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{\left(\sqrt{3}-i\right)^2}$

2.104. Tìm phần thực và phần ảo của số phức: $z = (x + iy)^2 - 2(x + iy) + 5$ $(x, y \in R)$

Với x, y nào thì số phức đó là số thực?

2.105. Cho các số phức: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - 2i$. Hãy tính: $z_1^2.z_1z_2; 2z_1-z_2; z_1\overline{z_2}$ và $\dfrac{z_2}{z_1}$

2.106. Thực hiện phép tính: a) $\dfrac{3}{1+2i}$ b) $\dfrac{1+i}{1-i}$ c) $\dfrac{m}{i\sqrt{m}}$ d) $\dfrac{a+i\sqrt{a}}{a-i\sqrt{a}}$

e) $\dfrac{a+i\sqrt{b}}{i\sqrt{a}}$

2.107. Phân tích ra thừa số phức : a) $a^2 + 1$ b) $2a^2 + 3$ c) $4a^2 + 9b^2$

d) $3a^2 + 5b^2$

2.108. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn các điều kiện :

a) $|z+1+2i|\le 0$ b) $(1-i)\overline{z}=(1+i)z$ c) $\lg|z+i|\le 1$ d) $|z-2|^2+|z+2|^2=26$

2.109. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z : $|z|=\left|\dfrac{1}{z}\right|=|1-z|$

2.110. Cho số phức z = a + bi . Một hình vuông tâm là gốc tọa độ O, các cạnh song song với các trục tọa độ có độ dài bằng 4. Hãy xác định điều kiện của a và b để điểm biểu diễn của z:

a) Nằm trong hình vuông b) Nằm trên đường chéo hình vuông.

2.111. X/định tập hợp các điểm M trên mphẳng phức biểu diễn các số phức $\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2$, trong đó $|z-1|\le 2$.

2.112. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn từng điều kiện sau: a) $|2i-2\overline{z}|=|2z-1|$ b) $|2iz-1|=2|z+3|$

2.113. Tìm các căn bậc hai của số phức : a) 6 b) -2 ĐS: a) $\pm\sqrt{6}$ b) $\pm\sqrt{2}i$

2.114. Tìm các căn bậc hai của số phức : a) -5 + 12i b) $-17-20\sqrt{2}i$

2.115. Giải các phương trình trong tập số phức: a) $x^2 + 81 = 0$ b) $x^2 - x + 2 = 0$

2.116. Giải các phương trình: a) $z^2 - (3 - i)z + (4 - 3i) = 0$

b) $3ix^2 - 2x - 4 + i = 0$

2.117. Tìm số phức B để pt bậc hai $z^2 + Bz + 3i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng 8.

2.118. Lập phương trình có ẩn số x mà x phải thỏa mãn: Nếu số phức $z = x + iy$ là một nghiệm của phương trình $z^2 + pz + q = 0$, trong đó p, q là những số thực.

2.119. Giải phương trình: a) $z^4 - z^3 + \dfrac{z^2}{2} + z + 1 = 0$

b) $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0$

2.120. Tìm điều kiện cần và đủ về các số thực p,q để phương trình: $z^4 + pz^2 + q = 0$

a) Chỉ có nghiệm thực. b) Không có nghiệm thực. c) Có cả nghiệm thực và nghiệm không thực.

2.121. Gọi j là số phức có hệ số ảo dương và thỏa mãn $j^3 = 1$.Chứng minh rằng mọi số phức $z = a + bi$ đều viết được dưới dạng $z = x + yj$ với x và y thực. Nêu qui tắc cộng và nhân hai số phức dưới dạng đó.Viết số $\dfrac{1}{z}$ dưới dạng đó.

2.122. Định a để phươnh trình $z^3 - az^2 + 3az + 37 = 0$ có một nghiệm bằng -1. Tính các nghiệm z_1 và z_2 còn lại trong C. Vẽ ảnh A, M, N của -1, z_1,z_2. Tính chất của tam giác AMN?

2.123. Viết dạng đại số của số phức:

a) $\cos\pi + i\sin\pi$ b) $2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$ c) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi\pi}{3}\right)$

1.124.Cho $z_1 = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{7} + i\sin\dfrac{3\pi}{7}\right)$. Tính z_1, z_2; $|z_1.z_2|$ và $\arg(z_1.z_2)$.

2.125. Viết dạng lượng giác của số phức: $-\sqrt{3} - i; \sqrt{3} + i; 4; -3i$

2.126. Cho số phức z_1,z_2 có một acgumen tương ứng là $\varphi_{1,}\varphi_2$. Tìm quan hệ $\varphi_{1,}\varphi_2$ để:

a) $z_1z_2 = k$, $k > 0$ b) $z_1z_2 = 2i$ c) $z_1 = 3.\overline{z_2}$

2.127. Viết các số sau đây dưới dạng lượng giác: a) $z = \dfrac{1}{1 + i\tan\varphi}$

b) $z = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$

2.128. Chứng minh mọi số phức $z \neq -1$ mà môđun bằng 1, đều có thể đặt dưới dạng : $z = \dfrac{1 + ti}{1 - ti}$,trong đó t là một số thực nào đó.

2.129. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z biết rằng một acgumen của $\frac{z+i}{z-i}$ bằng $\frac{\pi}{3}$.

2.130. a) Xét các điểm trong mặt phẳng biểu diễn các số 2 + i, 3 + i để chứng minh rằng nếu tan a = $\frac{1}{2}$,

tan b = $\frac{1}{5}$ với a, b $\in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì a + b = $\frac{\pi}{4}$.

b) Xét các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số 2 + i, 5 + i, 8 + i để chứng minh rằng nếu

tan a = $\frac{1}{2}$,tan b = $\frac{1}{3}$, tan c = $\frac{1}{8}$ với a, b, c $\in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì a + b + c = $\frac{\pi}{4}$.

2.131.Tính gọn : a) $(1 + i)^{25}$ b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^n$ c) $\left(1+\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^6$

2.132. Tính gọn: a) $\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ b) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$ c) $\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{\left(1-i\right)^{20}}+\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{\left(1+i\right)^{20}}$

2.133. Viết dạng lượng giác các căn bậc hai của số phức: a) $1 + i\sqrt{3}$ b) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

2.134. Tìm nghiệm phức của phương trình: a) $x^3 + 2i = 2$ b) $(x + 2)^5 + 1 = 0$.

2.135. Cho z = $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.Tìm $n \in N^*$ để : a) z^n là số thực. b) z^n là số ảo.

2.136. Tìm tổng hữu hạn: a) $C_n^1-\frac{1}{3}C_n^3+\frac{1}{9}C_n^5-\frac{1}{27}C_n^7+-...$ b) $C_n^3+C_n^7+C_n^{11}+-...$

2.137. Biểu thị: a) sin 7x theo sinx, cosx. b) tan 6x theo tan x

2.138. Tìm phần ảo của số phức z biết :

$$z=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$$

2.139. Tìm modun của số phức $\bar{z}+iz$

Biết số phức z thỏa mãn $\bar{z}=\frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$

2.140. Trong mp tọa độ Oxy tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn :

$$\left|z-i\right|=\left|(1+i)z\right|$$

Hướng dẫn giải bài tập chương 1

2.8. Đưa số phức sau về dạng lượng giác:

1) $z = 1 + i$

Giải

Dạng lượng giác: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$r = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\varphi = 1 \\ \sqrt{2}\sin\varphi = 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$

Vậy $z = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$

2) $z = -1 + i$

Giải

Dạng lượng giác: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$r = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\varphi = -1 \\ \sqrt{2}\sin\varphi = 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \dfrac{3\pi}{4}$

Vậy $z = \sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4})$

3) $z = 1 + i\sqrt{3}$

Giải

Dạng lượng giác: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$r = 2$

$\begin{cases} 2\cos\varphi = 1 \\ 2\sin\varphi = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$

Vậy $z = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$

4) $z = -1 + i\sqrt{3}$

Giải

Dạng lượng giác: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$r = 2$

$\begin{cases} 2\cos\varphi = -1 \\ 2\sin\varphi = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \dfrac{2\pi}{3}$

Vậy $z = 2(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})$

2.9. Tìm dạng mũ của số phức:

1) $z = 2i$

Giải

Dạng mũ: $z = re^{i\varphi}$

$r = 2$

$$\begin{cases} 2\cos\varphi = 0 \\ 2\sin\varphi = 2 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Vậy $z = re^{i\frac{\pi}{2}}$

2) $z = -2$

Giải

Dạng mũ: $z = re^{i\varphi}$

$r = 2$

$$\begin{cases} 2\cos\varphi = -2 \\ 2\sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \pi$$

Vậy $z = re^{i\pi}$

3) $z = i + \sqrt{3}$

Giải

Dạng mũ: $z = re^{i\varphi}$

$r = 2$

$$\begin{cases} 2\cos\varphi = \sqrt{3} \\ 2\sin\varphi = 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Vậy $z = re^{i\frac{\pi}{6}}$

4) $z = i - \sqrt{3}$

Giải

Dạng mũ: $z = re^{i\varphi}$

$r = 2$

$$\begin{cases} 2\cos\varphi = -\sqrt{3} \\ 2\sin\varphi = 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}$$

Vậy $z = re^{i\frac{5\pi}{6}}$

2.10. Tìm phần thực và phần ảo của số phức

1) $z = \dfrac{2-3i}{1+2i} + \dfrac{i-2}{4+i}$

Giải

$z = \dfrac{(2-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} + \dfrac{(i-2)(4-i)}{(4+i)(4-i)}$

$= \dfrac{-4-7i}{5} + \dfrac{6i-7}{17}$

$= -\dfrac{103}{85} - \dfrac{89}{85}i$

$\mathrm{Re}(z) = -\dfrac{103}{85}$, $\mathrm{Im}(z) = -\dfrac{89}{85}$

2) $z = \dfrac{3i+2}{2+i} + \dfrac{2i-1}{4-i}$

Giải

$z = \dfrac{(3i+2)(2-i)}{(2+i)(2-i)} + \dfrac{(2i-1)(4+i)}{(4-i)(4+i)}$

$= \dfrac{7+4i}{5} + \dfrac{7i-6}{17}$

$= \dfrac{89}{85} + \dfrac{103}{85}i$

$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{89}{85}$, $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{103}{85}$

2.11. Thực hiện phép tính

1) $\dfrac{4-3i}{(2i+5)(i-4)^2}$

Giải

$\dfrac{4-3i}{(2i+5)(i-4)^2} = \dfrac{4-3i}{(2i+5)(15-8i)}$

$= \dfrac{4-3i}{91-10i}$

$= \dfrac{(4-3i)(91+10i)}{(91+10i)(91-10i)}$

$= \dfrac{394}{8381} - \dfrac{233}{8381}i$

2) $\dfrac{(1-2i)(5+4i)^2}{2i-3}$

Giải

$$\frac{(1-2i)(5+4i)^2}{2i-3} = \frac{(1-2i)(9+40i)}{2i-3}$$

$$= \frac{89+22i}{2i-3}$$

$$= \frac{(89+22i)(-3-2i)}{(2i-3)(-3-2i)}$$

$$-\frac{223}{13}-\frac{244}{13}i$$

2.12. Tính giá trị của biểu thức

1) $z = \dfrac{(1+i)^2(4-5i)}{(2+i)(8-3i)}$

Giải

$$z = \frac{2i(4-5i)}{(2+i)(8-3i)} = \frac{10+8i}{19+2i} = \frac{(10+8i)(19-2i)}{(19+2i)(19-2i)} = \frac{206}{361}+\frac{132}{361}i$$

2) $z = \dfrac{(2i+3)(1-4i)^2}{(4i+5)(i-9)}$

Giải

$$z = \frac{(2i+3)(-15-8i)}{(4i+5)(i-9)} = \frac{29+54i}{49+31i} = \frac{(29+54i)(49-31i)}{(49+31i)(49-31i)} = \frac{3095}{3362}+\frac{1747}{3362}i$$

3) $z = \dfrac{(6i-1)^2(3+4i)}{(2i+5)(i-6)}$

Giải

$$z = \frac{-(35+12i)(3+4i)}{(2i+5)(i-6)} = \frac{57+176i}{7i+32} = \frac{(57+176i)(-7i+32)}{(7i+32)(-7i+32)} = = \frac{3056}{1073}.$$

4) $z = \dfrac{(1+2i)(5-i)^2}{2i+3}$

Giải

$$z = \frac{(1+2i)(24-10i)}{2i+3} = \frac{44+38i}{2i+3} = \frac{(44+38i)(3-2i)}{2^2+3^2} = 16+2i$$

2.13. Tìm môđun của số phức $z = 1+4i+(1-i)^3$

Lời giải: Vì $(1-i)^3 = 1^3-3i+3i^2-i^3 = 1-3i-3+i = -2-2i$

Suy ra: $z = -1+2i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$

2.14. Cho hai số phức: $z_1 = \sqrt{3}-5i$; $z_2 = \sqrt{3}-i$. Tính $\dfrac{z_1}{z_2}$ và $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$

Lời giải: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{3}-5i}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{\left(\sqrt{3}-5i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)} = \dfrac{8-4\sqrt{3}i}{4} = 2-\sqrt{3}i$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{7}$$

2.15. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2+2z+10=0$.

Tính giá trị của biểu thức A = $|z_1|^2+|z_2|^2$

<u>Lời giải:</u> Ta có: $\Delta = 1^2 - 10 = -9 = 9i^2$

Phương trình có các nghiệm: $z_1 = -1 - 3i$; $z_2 = -1 + 3i$

Ta có: $|z_1|^2+|z_2|^2 = (-1)^2+(-3)^2+(-1)^2+3^2 = 20$

2.16. Tìm số phức z thỏa mãn: $\left|z-(2+i)\right| = \sqrt{10}$ và $z.\overline{z} = 25$

<u>Lời giải</u>: Đặt z = a + bi với a, b $\in$ ¡ , ta có:

$$\begin{cases} z.\overline{z} = 25 \\ \left|z-(2+i)\right| = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 25 \\ \left|(a-2)+(b-1)i\right| = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 25 \\ (a-2)^2+(b-1)^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 25 \\ 2a+b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 5 \\ b = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có hai số phức cần tìm : z = 3 + 4i , z = 5 + 0i

2.17. Cho số phức z = 4 - 3i. Tìm $\dfrac{z+z^2}{\overline{z}}$

Lời giải: $z+z^2 = (4-3i)+(4+3i)^2 = 11-27i$

$$\Rightarrow \frac{z+z^2}{\overline{z}} = \frac{11-27i}{4+3i} = \frac{(11-27i)(4-3i)}{4^2+3^2} = \frac{-37-141i}{25}$$

2.18. Giải phương trình sau (ẩn z): $z+2\overline{z} = (1+5i)^2$

Lời giải: Giả sử $z = a+bi$; $z+2\overline{z} = (1+5i)^2$

$\Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow a+bi+2(a-bi) = 1+10i+25i^2$

$$\Leftrightarrow 3a-bi = -24+10i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -24 \\ -b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = -10 \end{cases} \Rightarrow z = -8-10i$$

2.19. Tìm căn bậc hai của số phức sau: $z = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải: Ta có: $z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{isin}\frac{3\pi}{4}\right)$

Suy ra z có hai căn bậc hai là:

w = $\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k2\pi}{2}\right) + \mathrm{isin}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k2\pi}{2}\right)\right]$ $(k = 0;1)$

+ Khi $k = 0 \Rightarrow$ w = $\sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{isin}\frac{3\pi}{8}\right)$

+ khi $k = 1 \Rightarrow$ w = $\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \pi\right) + \mathrm{isin}\left(\frac{3\pi}{8} + \pi\right)\right]$

= $\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{8} + \mathrm{isin}\frac{11\pi}{8}\right)$

2.20. Tìm các căn bậc hai của số phức: $z = 21 - 20i$

Lời giải:

Gọi $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là một căn bậc hai của z.

Ta có: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 & (1) \\ 2xy = -20 & (2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow y = -\frac{10}{x}$

Thay $y = -\frac{10}{x}$ vào (1) ta được: $x^2 - \frac{100}{x^2} = 21$

$$\Leftrightarrow x^4 - 21x^2 - 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$$

$x = 5 \Rightarrow y = -2; x = -5 \Rightarrow y = 2$

Vậy số phức đã cho có hai căn bậc hai là: $5 - 2i$ và $-5 + 2i$

* Cách khác: $z = 25 - 2.5.2i + (2i)^2 = (5 - 2i)^2$

Vậy số phức đã cho có hai căn bậc hai là: $5 - 2i$ và $-5 + 2i$

2.21. Giải phương trình: $z^2 - 2(2 + i)z + (7 + 4i) = 0$

Lời giải: Ta có: $\Delta' = -35 - 12i$. Ta tìm các căn bậc hai $x + yi$ của Δ':

$(x + yi)^2 = -35 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -35 \\ 2xy = -12 \end{cases}$

Do đó ta giải được 2 căn bậc hai là: $-(1 - 6i); 1 - 6i$

nên phương trình có hai nghiệm: $z_1 = 3 - 4i$ và $z_2 = 2 + 2i$

2.22. Giải phương trình sau trên $\mathbb{C}$ (ẩn z): $z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0$

Lời giải:

$z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} + 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$ (do z $\neq 0$)

Đặt w = $z + \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = w^2 - 2$, ta được:

$w^2 - 2 + 2w - 1 = 0 \Leftrightarrow w^2 + 2w - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w=1 \\ w=-3 \end{array}\right.$

Do đó: $z + \frac{1}{z} = 1$ (1) hay $z + \frac{1}{z} = -3$ (2)

+ Giải (1) $\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$

Ta có: $\Delta = 1 - 4 = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt: $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}; z_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

+ Giải (2) $\Leftrightarrow z^2 + 3z + 1 = 0$. Ta có: $\Delta = 9 - 4 = 5$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt: $z_3 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; z_4 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

Tóm lại phương trình đã cho có bốn nghiệm:

$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}; z_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}; z_3 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; z_4 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

2.23. Giải phương trình sau trên £ (ẩn z): $2z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z + 2 = 0$

Lời giải: $2z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 2\left(z - \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$

Đặt w = $z - \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = w^2 + 2$, ta được:

$2\left(w^2 + 2\right) - 2w + 1 = 0 \Leftrightarrow 2w^2 - 2w + 5 = 0$

+ Giải: $2w^2 - 2w + 5 = 0\,(*)$

Ta có: $\Delta' = 1 - 10 = -9 = (3i)^2$

Vậy phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt: $w_1 = \frac{1+3i}{2}; w_2 = \frac{1-3i}{2}$

Do đó: $z - \frac{1}{z} = \frac{1+3i}{2}$ (1) hay $z - \frac{1}{z} = \frac{1-3i}{2}$ (2)

+ Giải (1) $\Leftrightarrow z^2 - \left(\frac{1+3i}{2}\right)z - 1 = 0 \Leftrightarrow 2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0$

Ta có: $\Delta = (1+3i)^2 + 16 = 8 + 6i$

Số phức $z = x + yi$ $(x, y \in ¡)$ là căn bậc hai của $\Delta = 8 + 6i$ khi và chỉ khi

$$z^2 = 8+6i \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 8+6i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 8+6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \quad (**)$$

Giải (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{9}{x^2} = 8 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} hay \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Suy ra có hai căn bậc hai của Δ là $3+i$ và $3-i$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm: $z_1 = \dfrac{1+3i+3+i}{4} = 1+i; z_2 = \dfrac{1+3i-3-i}{4} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

+ Giải (2) $\Leftrightarrow z^2 - \left(\dfrac{1-3i}{2}\right)z - 1 = 0 \Leftrightarrow 2z^2 - (1-3i)z - 2 = 0$

Ta có: $\Delta = (1-3i)^2 + 16 = 8-6i$

Số phức $z = x+yi \ (x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của $\Delta = 8-6i$ khi và chỉ khi

$$z^2 = 8-6i \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 8-6i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 8-6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases} (***)$$

Giải (***) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{9}{x^2} = 8 \\ y = -\dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \\ y = -\dfrac{3}{x} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = -\dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = -\dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Suy ra có hai căn bậc hai của Δ là $-3+i$ và $3-i$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm: $z_3 = \dfrac{1-3i+3-i}{4} = 1-i; z_4 = \dfrac{1-3i-3+i}{4} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Tóm lại phương trình đã cho có bốn nghiệm:

$z_1 = 1+i; z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i; z_3 = 1-i; z_4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

1.24. Giải hệ phương trình sau trên tập số phức: $\begin{cases} Z_1 + Z_2 = 2+3i \\ Z_1^2 + Z_2^2 = 5-4i \end{cases}$

Lời giải: hpt $\Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 + Z_2 = 2+3i \\ Z_1.Z_2 = -5+8i \end{cases}$

Z_1 và Z_2 là 2 nghiệm phương trình: Z^2 - (2 + 3i)Z - 5 + 8i = 0

Có $\Delta = 15-20i = \left[\sqrt{5}(2-i)\right]^2$

$$\left[\begin{array}{l} Z_1 = \left(1+\sqrt{5}\right) + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}i \\ Z_2 = \left(1-\sqrt{5}\right) + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}i \end{array}\right.$$

1.25. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện

$\left|z-(3-4i)\right| = 2$

Lời giải: Đặt z = x + yi; x, y $\in$ ¡ , ta có:

$\left|z-(3-4i)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|(x-3)+(y+4)i\right| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2} = 2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2 = 2$

Vậy tập hợp các điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z = x + yi thỏa mãn điều kiện đã cho là đường tròn tâm I(3; -4); bán kính R = 2

2.26. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $2\left|z-i\right| = \left|z-\bar{z}+2i\right|$

Lời giải: Gọi z = x + yi (x, y $\in$ ¡)

Ta có: $2\left|z-i\right| = \left|z-\bar{z}+2i\right|$

$\Leftrightarrow 2\left|x+(y-1)i\right| = \left|(2+2y)i\right|$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(2+2y)^2}$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}x^2$

2.27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện

$\left|z-(5i-2)\right| = 2$

Lời giải: Đặt z = x + yi (x, y $\in$ ¡)

Ta có: z - 5i + 2 = (x + 2) + (y - 5)i

Suy ra: $\left|z-(5i-2)\right| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2} = 2 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-5)^2 = 4$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm I(-2; 5), bán kính R = 2.

2.28. Viết số phức sau dưới dạng đại số: $z = \dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^9}{(1+i)^5}$

Lời giải: + Xét $z_1 = \left(\sqrt{3} - i\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$\Rightarrow z_1^9 = 2^9\left[\cos\left(-\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{9\pi}{6}\right)\right] = 2^9\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

+ Xét $z_2 = (1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$\Rightarrow z_2^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow z = \frac{z_1^9}{z_2^5} = 64\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 64\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -64 - 64i$

2.29. Viết dạng lượng giác của số phức $z = 1 - \sqrt{3}i$

Lời giải: $z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)i\right]$

2.30. Viết dưới dạng lượng giác rồi tính: $(1+i)^{2010}$

Lời giải: $(1+i)^{2010} = \left(\sqrt{2}\right)^{2010}\left(\cos\frac{2010\pi}{4} + i\sin\frac{2010\pi}{4}\right)$

$$= 2^{1005}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2^{1005}(0+i) = 2^{1005}.i$$

2.31. Tìm dạng lượng giác của số phức sau: $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$

Lời giải:

$$z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \frac{2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} = \frac{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]} = 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

2.32. Tìm phần thực và phần ảo của số phức sau: $z = \frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}i\right)^{2008}}{\left(\sin\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{2009}}$

Lời giải: $z = \frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}i\right)^{2008}}{\left(\sin\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{2009}} = \frac{\left[2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{2008}}{\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2009}}$

$$=\frac{\left[2\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\text{isin}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{2008}}{\left[cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\text{isin}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{2009}}=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^{2008}\left[cos\left(-\frac{2008\pi}{3}\right)+\text{isin}\left(-\frac{2008\pi}{3}\right)\right]}{\cos\left(-\frac{2009\pi}{6}\right)+\text{isin}\left(-\frac{2009\pi}{6}\right)}$$

$$=\left(2\sqrt{2}\right)^{2008}\left[cos\left(-\frac{2008\pi}{3}+\frac{2009\pi}{6}\right)+\text{isin}\left(-\frac{2008\pi}{3}+\frac{2009\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2^{3012}\left[cos\left(-\frac{669\pi}{2}\right)+\text{isin}\left(-\frac{669\pi}{2}\right)\right]=-2^{3012}i$$

Do đó: phần thực bằng 0; phần ảo bằng -2^{3012}.

2.33. Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in ¡\ )$. Hỏi các số sau đây là số thực hay số ảo:

a) $z^2-(\overline{z})^2$ b) $\frac{z^2+(\overline{z})^2}{1+z\overline{z}}$

Lời giải:

a) $z^2-(\overline{z})^2=(a+bi)^2-(a-bi)^2=4abi$ là số ảo

b) $\frac{z^2+(\overline{z})^2}{1+z\overline{z}}=\frac{(a+bi)^2+(a-bi)^2}{1+(a+bi)(a-bi)}=\frac{2(a^2+b^2)}{1+a^2+b^2}$ lầ số thực

2.34. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z=2010i^{2009}+2009i^{2010}$

Lời giải: $z=2010i^{2009}+2009i^{2010}=2010(i^2)^{1004}.i+2009(i^2)^{1005}=2010i-2009$

$\Rightarrow$ phần thực và phần ảo

2.35. Giải phương trình sau trên tập hợp số phức: $z^2-2(1+2i)z+8i=0$

2.36. Tính z + $\overline{z}$ và z . $\overline{z}$ với :

a) z = 2 + 3i b) z = -5 + 3i . ĐS: a) 4 và 13 b) -10 và 34

2.37. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau :

a) (4 – i) + (2 + 3i) – (5 + i) b) $(1 + i)^2 - (1 - i)^2$ c) $(2 + i)^3 - (3 - i)^3$

d) $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}-\frac{\sqrt{2}+i}{i}$

ĐS: a) 1 và 1 b) 0 và 4 c) -16 và 37 d) $\frac{\sqrt{3}-3}{2}$ và $\frac{2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}{2}$

2.38. Tính :

a) $\frac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$ b) $\frac{a+bi}{a-bi}$ c) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ d) $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$

ĐS: a) cos2x + isin2x b) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}$ c) 2 d) $\frac{-1-32i}{25}$

2.39. Tính: a) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ (với n là số nguyên dương) b) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

ĐS: a) $-2i^{n+1}$ b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

2.40. Giả sử $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, tính :

a) $\left(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2\right)\left(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon\right)$ b) $(a+b)(a+b\varepsilon)\left(a+b\varepsilon^2\right)$ c)

$\left(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2\right)^3+\left(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon\right)^3$

d) $\left(a\varepsilon^2+b\varepsilon\right)\left(b\varepsilon^2+a\varepsilon\right)$ HD: Để ý : $\varepsilon^2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$ và $\varepsilon^3=1$

a) $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)$ b) a^3+b^3

c) $2(a^3+b^3+c^3)-3(a^2b+a^2c+b^2a+c^2a+c^2b)+12abc$ d) a^2-ab+b^2

2.41. Giải các hệ phương trình sau với x, y, z là số phức :

a) $\begin{cases}(3-i)x+(4+2i)y=2+6i\\(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i\end{cases}$ b) $\begin{cases}(2+i)x+(2-i)y=6\\(3+2i)x-(3-2i)y=8\end{cases}$

ĐS: a) x = 1 + i , y = i b) x = 2 + i , y = 2 – i

2.42. Tìm các số liên hợp với :

a) Bình phương của chính nó. b) Lập phương của chính nó.

ĐS: a) 0; 1; $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$ b) 0; 1; -1; i; -i

2.43. Cho số phức z = x + iy (x, y thuộc R). Tìm phần thực và phần ảo của các số phức:

a) $z^2-2z+4i$ b) $\frac{\bar{z}+i}{iz-1}$

ĐS: a) x^2-y^2-2x và $2(xy-y+2)$; b) $\frac{-2xy}{x^2+(y+1)^2}$ và $\frac{y^2-x^2-1}{x^2+(y+1)^2}$

2.44. Giải các phương trình sau (ẩn z) :

a) $\frac{2+i}{1-i}z=\frac{-1+3i}{2+i}$ b) $\left((2-i)\bar{z}+3+i\right)\left(iz+\frac{1}{2i}\right)=0$. ĐS: a) $\frac{22}{25}+\frac{4}{25}i$ b) -1 + i

2.45. a) Chứng minh : $i^{2k+1}=(-1)^k.i, k\in N; i^{2k}=(-1)^k, k\in N.$

b) Giả sử $z_k=i^{2k}+i^{2k+1}, k\in N$. Tính tổng z_k+z_{k+1}. ĐS: b) 0.

2.46. Thực hiện các phép tính :

a) $\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$; $b)\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^2-(2+i)^2}$; $c)\dfrac{(2+i)^3+(2-i)^3}{(2+i)^3-(2-i)^3}$; d) $(2-i)^6$

ĐS: a) $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$ b) $\dfrac{21}{34}+\dfrac{9}{17}i$ c) $-\dfrac{2}{11}i$ d) -117 – 44i

2.47. Cho hai số phức z = a + bi và $z' = a' + b'i$

a) Với điều kiện nào giữa a, b, a', b' thì tổng của chúng là số thực ? số ảo?

b) Cũng câu hỏi trên đối với hiệu $z - z'$.

ĐS: a) $z + z'$ là số thực nếu $b = -b'$, là số ảo nếu $a = -a'$, $b \neq -b'$

b) $z - z'$ là số thực nếu $b = b'$, là số ảo nếu $a = a'$, $b \neq b'$.

2.48. a) Với điều kiện nào giữa a, b thì bình phương của z = a + bi là số thực, số ảo?

b) Cũng câu hỏi trên đối với z^3.

HD: a) $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

Z^2 là số thực nếu a = 0 hoặc b = 0 hoặc a = b = 0 .

Z^2 là số thuần ảo nếu $|a| = |b| \neq 0$

b) $z^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i$

z^3 là số thực nếu b = 0 hoặc $b^2 = 3a^2$

z^3 là số ảo nếu a = 0, $b \neq 0$ hoặc $a^2 = 3b^2$, $b \neq 0$.

2.49. Xác định tập điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn : a) $z = a + ai, a \in R$ b) $\dfrac{1}{z-i}$ là số ảo

ĐS: a) Đường thẳng y = x b) Trục ảo Oy trừ (i)

2.50. Xác định tập điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn :

a) z^2 là số thực âm b) $|z-i+2|+|z+i|=9$. ĐS: a) Trục thực Ox từ gốc O. b) Elip

2.51. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z = x + yi với x, y thuộc R và thỏa mãn :

a) $1 \leq |z| \leq 3$ b) $\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

1.52. Chứng minh rằng :

a) Bình phương của hai số phức liên hợp cũng là liên hợp.

b) Lập phương của hai số phức liên hợp cũng là liên hợp.

c) Lũy thừa bậc n của 2 số phức liên hợp cũng là liên hợp.

2.53. Cho z = a + bi. Chứng minh $|z|\sqrt{2} \geq |a| + |b|$. Khi nào thì đẳng thức xảy ra ? ĐS: $b = \pm a$

2.54. a) Các điểm A, B, C và A', B', C' trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số :

1 – i ; 2 + 3i ; 3 + i và 3i ; 3 – 2i ; 3 + 2i. CMR ABC và $A'B'C'$ là 2 tam giác có cùng trọng tâm.

b) Biết các số phức biểu diễn bởi ba đỉnh nào đó của một hình bình hành trong mặt phẳng phức , hãy tìm số biểu diễn bởi đỉnh còn lại.

HD: b) $z_1 + z_2 - z_3$, $z_2 + z_3 - z_1$, $z_3 + z_1 - z_2$

2.55. a) Xác định tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z = x + yi

$(x, y \in R)$ thỏa mãn điều kiện $z^2 + \left(\bar{z}\right)^2 = 0$

b) Tìm số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện : $z^2 + \left(\bar{z}\right)^2 = 0$ và $\left|\dfrac{z-1}{z-3}\right| = 1$

HD: a) $z^2 + \left(\bar{z}\right)^2 = 2\left(x^2 - y^2\right)$. Suy ra $z^2 + \left(\bar{z}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2$

Vậy tập hợp cần tìm là hai đường thẳng : y = $\pm$ x

b) $\left|\dfrac{z-1}{z-3}\right| = 1 \Leftrightarrow x = 2$ nên có hai số phức thỏa mãn đề bài là : z_1 = 2(1 + i) và z_2 = 2(1 – i)

2.56. A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số :

1 + 2i , $1+\sqrt{3}+i, 1+\sqrt{3}-i, 1-2i$

Chứng minh rằng ABCD là một tứ giác nội tiếp đường tròn. Hỏi tâm đường tròn đó biểu diễn số phức nào?

HD: vì mỗi cặp số 1 + 2i, 1 – 2i và $1+\sqrt{3}+i, 1+\sqrt{3}-i$ là cặp số phức liên hiệp nên hai điểm A, D và hai điểm B, C đối xứng qua Ox; phần thực của hai số đầu khác phần thực của hai số sau nên ABCD là một hình thang cân . Do đó nó là một tứ giác nội tiếp đường tròn có tâm J nằm trên trục đối xứng Ox; J biểu diễn số thực x sao cho :

$\left|\overrightarrow{JA}\right| = \left|\overrightarrow{JB}\right| \Leftrightarrow \left|1-x+2i\right| = \left|1-x+\sqrt{3}+i\right| \Leftrightarrow x = 1$. Từ đó suy ra tâm đường tròn biểu diễn : z = 1

* Cách khác: $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3}-i$, $\overrightarrow{DB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3}+3i$. Mà

$\dfrac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i} = \sqrt{3}i$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB} = 0$.

T/tự (hay vì lí do đ/x qua Ox), $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AC} = 0$.Từ đó suy ra AD là một đ/kính của đ/tròn đi qua các điểm A, B, C, D.

2.57. Tìm các căn bậc hai của số phức: a) z = 200   b) z = - 13.   ĐS: a) $\pm 10\sqrt{2}$ b) $\pm i\sqrt{13}$

2.58. Tìm các căn bậc hai của số phức:

a) 3 + 4i b) $1-2i\sqrt{2}\ 1-2i\sqrt{2}$. ĐS: a) $\pm(2+i)$ b) $\pm\left(\sqrt{2}-i\right)$

2.59. Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau:

a) $-1+4\sqrt{3}i$ b) -8i. ĐS: a) $\pm\left(\sqrt{3}+2i\right)$ b) $\pm(2-2i)$

2.60. Tìm các căn bậc hai của số phức: a) -8 + 6i b) -8 – 6i c) 8 – 6i
d) 8 + 6i

ĐS: a) $\pm(1+3i)$ b) $\pm(1-3i)$ c) $\pm(3-i)$ d) $\pm(3+i)$

1.61. Gọi z là căn bậc hai của 4 + i, z' là căn bậc hai của 4 – i. Tính z + z'.

ĐS: $\pm\sqrt{8+2\sqrt{17}},\pm i\sqrt{-8+2\sqrt{17}}$

2.62. Tìm số phức z mà z^3 = -i. ĐS: Có 3 số phức : i, $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

2.63. Tìm số phức z mà z^4 = -1. ĐS: Có 4 số phức : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$ và $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)\,2$

2.64. Cho z = a + bi có các căn bậc hai là $\pm(m+ni)$. Tìm các căn bậc hai của –a – bi và a – bi

ĐS: $\pm(n-mi)$ và $\pm(m-ni)$

2.65. Giải các phương trình bậc hai sau đây trong tập hợp các số phức C:

a) $z^2 - z + 2 = 0$ b) $2z^2 - 5z + 4 = 0$ (Tốt nghiệp THPT 2006)

ĐS: a) $z=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$ b) $z=\frac{5\pm i\sqrt{7}}{4}$

2.66. Giải các phương trình :

a) $z^2 + z + 1 = 0$ b) $z^2 - z\sqrt{3}+1=0$ ĐS: a) $z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$

2.67. Trong C hãy giải các phương trình sau đây:

a) x^2 - (3 – i)x + 4 – 3i = 0 b) $3x^2\sqrt{2}-2x\sqrt{3}+\sqrt{2}=0$. ĐS: a) 2 + i ; 1 – 2i b) $\frac{\sqrt{6}}{6}\pm i\frac{\sqrt{6}}{6}$

2.68. Giải các phương trình sau: a) $x^2 + 3ix + 4 = 0$ b) $2x^2 - (4 + i)x = 1$

ĐS: a) $x_1 = i$; $x_2 = -4i$ b) $x_1 = \frac{1}{4}\left(4+\sqrt{\frac{\sqrt{593}+23}{2}}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{\frac{\sqrt{593}-23}{2}}\right)i$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(4-\sqrt{\frac{\sqrt{593}+23}{2}}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{593}-23}{2}}\right)i$$

2.69: Giải các phương trình $z+\frac{1}{z}=k$ trong các trường hợp sau:

a) k = 1 b) k = $\sqrt{2}$ ĐS: a) z = $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ b) z = $\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$

2.70. Giải các phương trình trong C:

a) $z^2+\overline{z}=0$ b) $(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$

HD: Đặt z = x + yi dẫn đến hệ phương trình hai ẩn x, y:

Kết quả: $z_1 = 0$; $z_2 = -1$; $z_3 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}; z_4=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) 1, -2 , $\frac{-1+\sqrt{23}i}{2},\frac{-1-\sqrt{23}i}{2}$

2.71. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm: $z_1 = 6 - 3i$ và $z_2 = i$. ĐS: $z^2 - (6 - 2i)z + 6i + 3 = 0$

2.72. Chứng minh rằng:

Nếu phương trình: $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$ với các hệ số thực có nghiệm là z_0 thì z_0 cũng là nghiệm của phương trình.

2.73. Giải các phương trình trong tập C:

a) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$ ĐS: a) x = $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\pm\frac{i}{2}$ b) x = $\pm 4\pm i$

2.74. Giải phương trình trong C: $x^3 + 8 = 0$

HD: Ta có: $x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x^2-2x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1\pm i\sqrt{3} \end{array}\right.$

2.75. Cho phương trình $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2 = 0$

a) Chứng tỏ rằng 1 + i là nghiệm của phương trình.

b) Tìm các nghiệm còn lại.

ĐS: b) $z_2 = 1 - i$; $z_3 = -\frac{1+\sqrt{13}}{6}; z_4=\frac{\sqrt{13}-1}{6}$

2.76. Giải phương trình $z^4 + 4 = 0$ và biểu diễn tập nghiệm trên mặt phẳng phức.

HD: Ta có : $z^4 + 4 = (z^2 + 2i)(z^2 - 2i) = 0$

Nghiệm của $z^2 + 2i = 0$ là các căn bậc hai của -2i, đó là: $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i$

Nghiệm của $z^2 - 2i = 0$ là các căn bậc hai của 2i, đó là: $z_3 = 1 + i$, $z_4 = -1 - i$

Vậy $z^4 + 4 = 0$ có 4 nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 .

2.77. Viết dạng đại số của số phức sau:

a) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ b) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i.\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

HD: a) $\sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-i$

b) $2\left(cos\frac{3\pi}{4}+i.\sin\frac{3\pi}{4}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

2.78. Biểu diễn các số phức sau dưới dạng lượng giác: a) -1 + i b) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ĐS: a) $\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ b) $8\left(cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$ c)

$cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3}$

2.79. Tìm số phức z thỏa : (1 – z)(1 + 2i) + (1 – iz)(3 – 4i) = 1 + 7i . Viết số phức z dưới dạng lượng giác.

ĐS: z = $-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i=\frac{3\sqrt{5}}{5}(cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ trong đó : $cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{5}},\sin\varphi=-\frac{2}{\sqrt{5}}(\pi<\varphi<\frac{3\pi}{5}$

2.80. Tìm một acgumen của mỗi số phức sau:

a) $-\sin\frac{\pi}{8}-icos\frac{\pi}{8}$ b) $1-\sin\varphi+icos\varphi(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ ĐS: a) $-\frac{5\pi}{8}$; b) $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$

2.81. Viết dưới dạng lượng giác của các số phức:

a) $1-i\tan\frac{\pi}{5}$ b) $1-cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi(\varphi\neq k2\pi,k\in z)$

HD: a) Ta có :

$$1-i\tan\frac{\pi}{5}=1-i\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left(cos\frac{\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left[cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$$

b) $1-cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}-2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}cos\frac{\varphi}{2}$

2.82. **a) Với** điều kiện nào thì môđun của tổng hai số phức bằng tổng các môđun của hai số hạng?

b) Khi nào thì môđun của tổng hai số phức bằng hiệu các môđun của hai số hạng ?

ĐS: a) Nếu hiệu hai acgumen bằng 2kπ, k là số nguyên.

b) Nếu hiệu hai acgumen bằng $\pi+2k\pi$, với k nguyên.

2.83. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai acgumen của 2 số phức z_1, z_2 : Arg z_1 và Arg $z_2$trong từng trường hợp sau:

a) $z_1z_2 = k$, $k < 0$ b) $z_1z_2 = -i$ c) $z_1 = -3z_2$ d) $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

ĐS: a) $\text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 = \pi + k2\pi$ b) $\text{Arg}z_1 - \text{Arg}z_2 = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

c) $\text{Arg}z_1 = \pi + \text{Arg}z_2 + 2k\pi$ d) $\text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

2.84. Tìm số phức z thỏa : $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |1 - z|$

2.85. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện : a) $|z + 1 - i| \le 1$ b) $|z - 5i| \le 3$

tìm các số có acgumen dương nhỏ nhất . ĐS: a) z = i b) $\dfrac{12}{5} + \dfrac{16}{5}i$

2.86. Viết z_1 và z_2 dưới dạng lượng giác rồi tính $z_1.z_2$ và $\dfrac{z_1}{z_2}$

a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ và $z_2 = 1 + i$. Suy ra : $\cos\dfrac{\pi}{12}$ và $\sin\dfrac{\pi}{12}$

b) $z_1 = \sqrt{3} + i$ và $z_2 = 1 - i$. Suy ra $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ và $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

2.87. Tìm vị trí của những điểm biểu diễn các số phức có:

a) Môđun bằng 2; 3. b) Acgumen bằng $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$.

ĐS: a) Các đường tròn tâm O và bán kính R = 2, R = 3.

b) Đó là các tia không kể gốc O , lần lượt là : Oz_1, Oz_2, Oz_3, Oz_4.

2.88. Cho A, B, C D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số :

$4 + (3 + \sqrt{3})i; 2 + (3 + \sqrt{3})i; 1 + 3i$ và 3 + i

Chứng minh rằng bốn điểm đó cùng nằm trên một đường tròn.

HD: Cách 1: Đưa về bài toán tọa độ; Cách 2: Dự đoán tâm i(3 + 3i)

Cách 3: Chứng minh góc lượng giác:

2.89. Dùng công thức Moivre để tính :

a) $\left(\cos\dfrac{\pi}{15} + i\sin\dfrac{\pi}{15}\right)^5$ b) $\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$ c) $(1 + i)^{16}$. ĐS: a) $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) 1

c) 256

2.90. Tính gọn:

a) $\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) i^5\left(1+\sqrt{3}i\right)^7$ b) $\frac{(1+i)^{10}}{\left(\sqrt{3}+1\right)^9}$ c) $z^{2000} + \frac{1}{z^{2000}}$ biết rằng

$z + \frac{1}{z} = 1$

ĐS: a) 128i b) -1/16 c) -1

2.91. Tính :

a) $(1 + i)^n$ b) $\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n$ với $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}; \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. ĐS: a) $2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$ b) $2\cos\frac{2n\pi}{3}$

2.92. Viết dạng lượng giác các căn bậc hai của số phức: a) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

c) $-\sqrt{3} - i$

ĐS: a) $z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ và $z_2 = -\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

b) $z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$ và $z_2 = -\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}$

c) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ và $z_2 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

2.93. Tìm nghiệm phức của phương trình : $z^4 - 1 = i$

2.94. Với n nguyên dương nào thì số phức: $\left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^n$ là số thực, số ảo.

HD: $\left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

Số đó là số thực $\Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow n = 4k$ (k nguyên dương)

Số đó là số ảo $\Leftrightarrow \cos\frac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow n = 4k + 2$ (k là số nguyên không âm)

2.95. Biểu diễn $\cos^5 x.\cos^6 x$ theo coskx.

ĐS: $\cos^5 x = \frac{1}{10}\left(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x\right)$; $\cos^6 x = \frac{1}{32}\left(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10\right)$

2.96. Chứng minh :

a) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + ... = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$; b) $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + ... = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$

2.97. Cho số phức dạng lượng giác z = $r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$

Đặt $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Chứng minh :

a) $z = r.e^{i\varphi}$; b) $\left(r.e^{i\varphi}\right).\left(r'.e^{i\varphi'}\right) = rr'.e^{i(\varphi+\varphi')}; z^n = r^n.e^{in\varphi}$; c)

$\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \sin^3\varphi = \dfrac{1}{4}\left(3\sin\varphi - \sin 3\varphi\right)$

Chương 2
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

2.1. Phương trình vi phân cấp 1

2.1.1. Khái niệm phương trình vi phân cấp 1, nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, nghiệm kỳ dị.

Định nghĩa: Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng:

$$F(x , y , y') = 0 \qquad (1)$$

trong đó:
- x là biến số độc lập
- y = f(x) là hàm số phải tìm
- y' là đạo hàm cấp 1 của hàm số y = f(x)

Chú ý: Nếu giải được phương trình (1) đối với y' thì phương trình sẽ có dạng:

$$y' = f(x , y) \qquad (2)$$

Ví dụ 1: 1) $y' + xy = x \sin x$ là phương trình vi phân cấp 1

2) $yy' + x^2 + y^2 = 0$ là phương trình vi phân cấp 1

Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm số thoả mãn phương trình ấy, tức là mọi hàm số sao cho khi thế nó vào phương trình ta được một đồng nhất thức (= 0)

Giải một phương trình vi phân tức là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 1: $y' = f(x , y)$ là hàm số có dạng: $y = \varphi(x , C)$, $C \in R$

Nhiều khi ta không tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (2) dưới dạng $y = \varphi(x , C)$ mà tìm được một hệ thức: $\Phi(x , y ,C) = 0$, nó xác định nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn. Hệ thức ấy được gọi là **tích phân tổng quát** của phương trình (2).

Khi thay C bằng một giá trị C_0 xác định ($C = C_0$) thì hàm số $y = \varphi(x , C_0)$ được gọi là **nghiệm riêng** của phương trình (2).

Phương trình (2) có thể có một số nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát, những nghiệm ấy được gọi là **nghiệm kỳ dị**

Điều kiện $y = f(x)$ lấy giá trị y_0 khi $x = x_0$ được gọi là **điều kiện ban đầu** và được viết là: $y\Big|_{x=x_0} = y_0$

Ví dụ 2: $y'' + 4y = e^x$ là phương trình vi phân cấp 2, có nghiệm là:

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \quad (C_1 , C_2 \in R)$ (*Sinh viên tự chứng minh*)

Lưu ý: ứng với một cặp giá trị C_1, C_2 ta được một nghiệm của phương trình vi phân, nghiệm này được gọi là nghiệm riêng của phương trình vi phân ứng với giá trị C_1 , C_2.

Ví dụ 3: Giải phương trình vi phân: $y' = \cos x \qquad (1)$

<u>Giải</u>:

Ta có: y = $\int$ y'dx = $\int$ cosx dx= sinx + C

Cho y = 2 khi x = $\frac{\pi}{2}$, ta có:

$$2 = \sin\frac{\pi}{2} + C \Leftrightarrow C = 1$$

Kết luận: y = sin x + 1 là nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn điều kiện đã cho y = 2 khi x = $\frac{\pi}{2}$.

2.1.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm.

Cho phương trình vi phân cấp 1: y' = f(x , y) (2)

Giả sử f(x , y) liên tục trong một miền D nào đó của mặt phẳng Oxy và giả sử (x_0,y_0) là một điểm nào đó thuộc miền D. Khi đó: trong một lân cận nào đó của điểm $x = x_0$, tồn tại ít nhất một nghiệm y = f(x) của phương trình (2) lấy giá trị y_0 khi $x = x_0$

Ngoài ra, nếu đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ cũng liên tục trong miền D thì nghiệm đó là duy nhất.

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (2) thoả mãn điều kiện ban đầu, còn được gọi là bài toán Cauchy của phương trình (2).

2.2. Một số phương trình vi phân cấp 1

2.2.1. Phương trình với biến số phân ly

Định nghĩa: Phương trình có biến số phân li là phương trình có dạng :

$$f(x).dx = g(x).dy$$

Cách giải: lấy nguyên hàm 2 vế, ta được:

$\int f(x).dx = \int g(y).dy$ hay $F(x) = G(x) + C$

trong đó: $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$

$G(y)$ là nguyên hàm của $g(y)$

<u>Ví dụ</u>: Giải phương trình: (1 + x)ydx (1 – y)xdy = 0

$\Leftrightarrow (1+x)ydx = (y-1)xdy$

Nếu $x.y \neq 0 < x \neq 0,\ y \neq 0 >$ thì chia 2 vế của phương trình cho $x.y$ ta được:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = \left(1 - \frac{1}{y}\right)dy$$

$$\Leftrightarrow \quad \int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = \int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \ln|x| = y - \ln|y| + C$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|x| + \ln|y| + x - y = C$$

$\Leftrightarrow \quad \ln|x.y| + x - y = C$ là nghiệm tổng quát của phương trình

Nếu $x = 0$ hoặc $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình và là nghiệm kỳ dị

Chú ý: *Phương trình khuyết dạng:* $y' = f(x)$ *hoặc* $y' = f(y)$ *cũng là những nghiệm của phương trình có biến số phân li.*

2.2.2. Phương trình đẳng cấp cấp 1

Định nghĩa: Phương trình thuần nhất là phương trình có dạng: $y' = f(\frac{y}{x})$ (4)

Cách giải:

Đặt: $\frac{y}{x} = u(x)$ trong đó u = u(x) là một hàm số biến x

$\Rightarrow \quad y = u.x$, $y' = f(u)$

Lấy đạo hàm hai vế theo x, ta được:

$$y' = y'_x\, u_x + x.u'_x$$

mà $y' = f(u)$

Suy ra : $u + x.u' = f(u)$

$$\Leftrightarrow \quad x.\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

$$\Leftrightarrow \quad x.du = \left(f(u) - u\right)dx$$

Nếu $f(u) - u \neq 0$ thì $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \quad \ln|x| = \int \frac{du}{f(u)-u} = \Phi(u) + \ln|C|$ (C *là hằng số khác* 0)

$$\Rightarrow \quad |x| = e^{\Phi(u) + \ln|C|}$$

$$= e^{\ln|C|}.e^{\Phi(u)}$$

$= |C|.e^{\Phi(u)}$ ($\Phi(u)$ là nguyên hàm của $\frac{1}{f(u)-u}$)

$$\Rightarrow \quad x = C\,e^{\Phi(u)}$$

Suy ra : $y = u.x = C.u.e^{\Phi(u)}$

Vậy: Nghiệm tổng quát của phương trình là : $\begin{cases} x = C.e^{\Phi(u)} \\ y = C.u.e^{\Phi(u)} \end{cases}$

Nếu $f(u) \equiv u$ thì $du = 0$

$$\Rightarrow \quad u = C \quad \text{(C là hằng số)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} = C \qquad \Rightarrow \quad y = Cx$$

Nghiệm của phương trình là $y = Cx$

Còn nếu $f(u) = u$ tại một số hữu hạn điểm $u = u_0$ thì ta có thể dễ dàng chứng minh được hàm số $y = u_0 x$ cũng là nghiệm của phương trình.

Chú ý: Phương trình dạng:

$$P(x,y).dx + Q(x,y).dy = 0 \qquad (*)$$

trong đó $P(x,y)$ & $Q(x,y)$ là hai hàm số thuần nhất cùng bậc, thì phương trình (*) cũng là phương trình thuần nhất.

Chẳng hạn: 1) $(2xy - 5y^2)dx + (3y^2 - xy)dy = 0$

2) $(x^2 - 2y^2)dx - (x^3 + 4x^2 y)dy = 0$

Ví dụ 1: Giải phương trình : $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{x - y}{x + y}$$

Đặt $y = u.x$, $u = u(x)$ là một hàm số biến x

Ta có : $\begin{cases} y' = u + x.u' \\ y' = \dfrac{x - ux}{x + ux} = \dfrac{1 - u}{1 + u} \end{cases} \Rightarrow u + x.u' = \dfrac{1 - u}{1 + u}$

$$\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{1 - u}{1 + u} - u = -\frac{u^2 + 2u - 1}{u + 1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} + \frac{(u + 1)du}{u^2 + 2u - 1} = 0$$

Lấy nguyên hàm 2 vế, ta được: $\ln|x| + \ln\sqrt{|u^2 + 2u - 1|} = \ln|C|$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(|x|\sqrt{|u^2 + 2u - 1|}\right) = \ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \quad |x|\sqrt{|u^2 + 2u - 1|} = |C|$$

$$\Leftrightarrow \quad |x^2u^2 - 2ux^2 - x^2| = C^2$$

mà $\quad y = u.x$

$\Rightarrow \quad \left|y^2 - 2xy - x^2\right| = C^2$

$\Rightarrow \quad y^2 - 2xy - x^2 = C$ (C là hằng số)

Kết luận: Nghiệm tổng quát của phương trình là: $y^2 - 2xy - x^2 = C$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $y' = \dfrac{3y^2 - x^2}{2xy}$

Giải :

Ta có : $y' = \dfrac{3}{2}\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{y}$ (1)

Đặt : $u = \dfrac{y}{x}$

Khi đó y=ux

$y' = u'x + u$ (*)

Theo 1 ta lại có : $y' = \dfrac{3}{2}u - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{u}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra:

$$u'x + u = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}\frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow u'x = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{2}\frac{u^2 - 1}{u}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}x = \frac{1}{2}\frac{u^2 - 1}{u}$$

$$\Rightarrow \frac{2du}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

2.2.3. Phương trình tuyến tính

1) Định nghĩa:

Phương trình tuyến tính là phương trình có dạng:

$$y' + p(x).y = q(x) \qquad (5)$$

trong đó p(x), q(x) là những hàm số liên tục.

Phương trình tuyến tính được gọi là **thuần nhất** nếu $q(x) \equiv 0$

Phương trình tuyến tính được gọi là **không thuần nhất** nếu $q(x) \neq 0$

2) Cách giải:

Để giải phương trình (5), trước hết ta giải phương trình thuần nhất tương ứng:

$y' + p(x).y = 0 \qquad (5^0)$

$$y \neq 0 : (5^0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\,p(x).dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{d_y}{y} = \int -p(x).dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \int -p(x).dx + \ln|C| \qquad (C \neq 0 \text{ là hằng số})$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x).dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{y}{C}\right| = e^{-\int p(x).dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad |y| = |C|e^{-\int p(x).dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = Ce^{-\int p(x).dx}$$

$$\Rightarrow \quad y = C.\,e^{-\int p(x).dx} \qquad (6)$$

y = 0 cũng là nghiệm của phương trình (5^0) và là 1 nghiệm riêng của (6) ứng với C = 0.

Vậy: Nghiệm tổng quát của (5^0) là: $y = C.\,e^{-\int p(x).dx}$

Để tìm nghiệm của phương trình (5), ta coi C ở phương trình (6) là một hàm số đối với biến x (tức là C = C(x)) :

Ta có: $y = C.\ e^{-\int p(x).dx}$

$$\Rightarrow \quad y' = C'.\ e^{-\int p(x).dx} - C.p(x)\ e^{-\int p(x).dx}$$

Thay vào phương trình (5): $\quad y' + p(x).y = q(x)$

$$\Rightarrow \quad C'.\ e^{-\int p(x).dx} - C.p(x).\ e^{-\int p(x).dx} + p(x).C.\,e^{-\int p(x).dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow \quad C'.\ e^{-\int p(x).dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow \quad C' = q(x).\ e^{\int p(x).dx}$$

$$\Rightarrow \quad C = \int\left(q(x).e^{\int p(x)dx}\right)dx + K \qquad (\text{K là hằng số tuỳ ý})$$

Thay vào (6), ta được: $y = \left[\int\left(q(x).e^{\int p(x)dx}\right)dx + K\right].\,e^{-\int p(x).dx}$

$$\Rightarrow \quad y = K.\ e^{-\int p(x).dx} + e^{-\int p(x).dx}.\int\left(q(x).e^{\int p(x)dx}\right)dx$$

Kết luận: Nghiệm tổng quát của phương trình (5) là:

$$y = K.\ e^{-\int p(x).dx} + e^{-\int p(x).dx}.\int\left(q(x).e^{\int p(x)dx}\right)dx \qquad (6')$$

Chú ý: Phương pháp giải trên được gọi là ***phương pháp biến thiên hằng số Lagrange.***

Nhận xét:

Số hạng thứ 2 ($e^{-\int p(x).dx}.\int\left(q(x).e^{\int p(x)dx}\right)dx$) trong vế phải của (6’) là nghiệm riêng của phương trình (5) ứng với K = 0.

Số hạng thứ 1 (K. $e^{-\int p(x).dx}$) trong vế phải của (6’) là **nghiệm** tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (5^0)

Tóm lại:

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng cộng với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất.

Để giải phương trình tuyến tính không thuần nhất: y’ + p(x).y = q(x) ta làm như sau:

Xét phương trình thuần nhất tương ứng: y’ + p(x).y = 0

$\Rightarrow$ **Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng :** $y = C.e^{-\int p(x).dx}$

Coi C = C(x) là một hàm số biến x:

Ta có: $y = C.\ e^{-\int p(x).dx}$

$\Rightarrow$ $y' = C'.\ e^{-\int p(x).dx} - C.p(x)\ e^{-\int p(x).dx}$

Thay vào phương trình (5): y’ + p(x).y = q(x)

$\Rightarrow$ $C'.\ e^{-\int p(x).dx} - C.p(x).\ e^{-\int p(x).dx} + p(x).C.e^{-\int p(x).dx} = q(x)$

$\Rightarrow$ $C' = q(x).\ e^{\int p(x).dx}$

$\Rightarrow$ **Tìm được C**

Kết luận: Thay C vừa tìm được vào nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, ta được nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $y' - \frac{y}{x-1} = x + 2$ (1)

Giải:

Phương trình thuần nhất tương ứng là :

$y' - \frac{y}{x-1} = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-1}$

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1}$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x-1| + \ln|c|$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln|c||x-1|$

$\Rightarrow \; y = c(x-1)$

Ví dụ 2: Giải phương trình : $(x^2+1).y' + x.y = - x$ (2)

Ta có:

y = -1 là một nhiệm riêng của phương trình (2).

Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$(x^2+1).y' + x.y = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{x}{x^2+1}.dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất.

Kết luận: Nghiệm tổng quát của phương trình (2) là: $y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

Ví dụ 3: Tìm nghiệm của phương trình: $(x^2 +1).\, y' + xy = 1$

thoả mãn điều kiện: $y|_{x=0} = 2$

<u>Giải</u>:

Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$(x^2 +1).\, y' + xy = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{x}{x^2+1}.dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}}$ (C là hằng số)

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là : $y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}}$

Coi C = C(x) là một hàm số biến x. Ta có:

$$y = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\Rightarrow \quad y' = C'\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

Thay vào phương trình: $(x^2+1).\ y' + xy = 1$

$\Rightarrow \quad (x^2+1)\left(C'\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - C\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right) + x\dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}} = 1$

$\Leftrightarrow \quad C'\sqrt{x^2+1} - C\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + x\dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}} = 1$

$\Leftrightarrow \quad C'\sqrt{x^2+1} = 1$

$\Leftrightarrow \quad C' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow \quad C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}\ ) + K$ (K: hằng số)

Vậy: Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+K}{\sqrt{x^2+1}}$$

Theo bài ra: $y\big|_{x=0} = 2$ thay vào, ta được:

$$2 = \frac{\ln\left(0+\sqrt{0+1}\right)+K}{\sqrt{0+1}}$$

$$\Rightarrow \quad K = 2$$

Kết luận: Nghiệm cần tìm là: $y = \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+2}{\sqrt{x^2+1}}$

2.2.4. Phương trình Bernouli

Định nghĩa: Phương trình Bernoulli là phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)\,y^{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0,1)$$

Chú ý: Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì phương trình trên trở thành phương trình tuyến tính.

Cách giải:

Với $y \neq 0$, chia 2 vế cho y^{α} ta được :

$y^{-\alpha}y' + p(x).y^{1-\alpha} = q(x)$ (*)

Đặt: $z = y^{1-\alpha}$ $\Rightarrow$ $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}.y'$

Thay vào (*) ta được: $z' + (1-\alpha)p(x).z = (1-\alpha)q(x)$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đối với z.

Giải phương trình này ta tìm được z, sau đó thay vào tìm $y = ?$

Với $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình (*) và là nghiệm kỳ dị của phương trình.

Ví dụ: Giải phương trình $y' + \frac{2}{x+1}y + (1+x)^3y^2 = 0$

Với $y \neq 0$, chia 2 vế cho y^2 ta được:

$$y^{-2}y' + \frac{2}{x+1}y.y^{-1} + (1+x)^3 = 0 \qquad (1)$$

Đặt: $z = y^{-1}$ $\Rightarrow$ $z' = -y^{-2}.y'$

Suy ra : (1) $\Rightarrow$ $-z' + \frac{2}{x+1}z + (1+x)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad z' - \frac{2}{x+1}z = (1+x)^3 \qquad (1')$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp 1.

Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$z' - \frac{2}{x+1}z = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2}{x+1}.z$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{2}{x+1}dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|z| = 2\ln|x+1| + \ln|C| \quad \text{(C là hằng số)}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = C.(1+x)^2$$

Coi $C = C(x)$ là hàm số biến x. Ta có:

$z = C.(1+x)^2$

$\Rightarrow$ $z' = C'.(1+x)^2 + 2C.(1+x)$

Thay vào (1') ta được:

$$C'(x+1)^2 + 2C(x+1) - \frac{2}{x+1}C(x+1) = (x+1)^3$$

$$\Rightarrow \quad C' = x+1$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{(x+1)^2}{2} + K \quad \text{k là hằng số}$$

$$\Rightarrow \quad z = \left(\frac{(x+1)^2}{2} + K\right)(x+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{(x+1)^4 + 2K(x+1)^2}{2}$$

Vậy: Nghiệm tổng quát của phương trình (1') là: $z = \frac{(x+1)^4 + 2K(x+1)^2}{2}$

mà $z = y^{-1}$ hay $y = \dfrac{1}{z}$

Suy ra : $y = \dfrac{2}{(x+1)^4 + 2K(x+1)^2}$

Với y = 0: cũng là nghiệm của phương trình, đó là nghiệm kỳ dị.

2.3. Phương trình vi phân cấp 2

2.3.1. Định nghĩa phương trình vi phân cấp 2, nghiệm tổng quát, nghiệm riêng

Định nghĩa: Phương trình vi phân cấp hai la phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (1)$$

Nếu giải được phương trình trên đối với y'', thì nó sẽ có dạng:

$$y'' = f(x,y, y') \qquad (2)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2) là hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ trong đó C_1, C_2 là những hằng số.

Hệ thức $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ xác định nghiệm tổng quát của phương trình (2) dưới dạng ẩn, và được gọi là **phương trình tổng quát** của nó.

Khi cho $C_1 = a$; $C_2 = b$ thì nghiệm $y = \phi(x, a, b)$ được gọi là một **nghiệm riêng** của phương trình (2)

Ví dụ: 1) $y.y'' + y'^2 + y.y' + x^2.y^2 = 0$

2) $y'' - 2\dfrac{y}{x} = x\cos x$ là phương trình tuyến tính cấp 2

2.3.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Cho phương trình: $y'' = f(x, y, y')$ (2)

Nếu $f(x, y, y')$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$ & $\dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ liên tục trong một miền D nào đó trong R^3 & nếu (x_0, y_0, y'_0) là một điểm thuộc miền D thì trong một lân cận nào đó của điểm $x = x_0$, tồn tại một nghiệm duy nhất y = y(x) của phương trình (2) thoả mãn các điều kiện: $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y'_0$

Ta thừa nhận định lý này.

2.3.3. Phương trình khuyết

1) Phương trình khuyết y và y': F(x,y") = 0

<u>*Cách giải*</u>:

Đặt: p = y' $\Rightarrow$ F(x,p') = 0 Đây là phương trình vi phân cấp 1, ta giải tìm được p , sau đó thay vào tìm y = ?

Ví dụ: Giải phương trình: $x = (y'')^2 + y'' + 1$

Đặt: $p = y'$

$\Rightarrow$ $x = (p')^2 + p' + 1$

Đặt $p' = t$

Ta có : $\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ \dfrac{dp}{dx} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = (2t+1)dt \\ dp = tdx \end{cases}$

$\Rightarrow$ $dp = (2t^2 + t)dt$

$\Rightarrow$ $p = \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2 + C_1$

mà $y' = p$, $dx = (2t + 1)dt$

$$\Rightarrow y = \int pdx$$

$$= \int (\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1)(2t+1)dt$$

$$= \int (\frac{4}{3}t^4 + \frac{5}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2C_1t + C_1)dt$$

$$= y = \frac{4}{15}t^5 + \frac{5}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + C_1t^2 + C_1t + C_2$$

Vậy: Phương trình tham số của tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = \dfrac{4}{15}t^5 + \dfrac{5}{12}t^4 + \dfrac{1}{6}t^3 + C_1t^2 + C_1t + C_2 \end{cases}$$

1) Phương trình khuyết y: $F(x , y' , y'') = 0$

Cách giải: Đặt $y' = p$, ta được: $F(x , p , p') = 0$ đây là **phương** trình vi phân cấp 1 đối với p. Giải phương trình này tìm p , sau đó thay vào tìm y = ?

Ví dụ: Tìm một nghiệm riêng của phương trình

$x^2)\ y'' – xy'=2$

thỏa mãn các điều kiện: $y|_{x=0} = 0$; $y'|_{x=0} = 0$

<u>Giải:</u>

Đặt : $y' = p \rightarrow y'' = p'$ ta có: $(1-x^2)p'-xp = 2$ đây là phương trình tuyến tính cấp 1 đối với p.

Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$(1-x^2)\ p' – xp = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{xdx}{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|p| = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \ln|K| \qquad \text{(K là hằng số)}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{K}{\sqrt{1-x^2}}$$

Cho K = K(x) là hàm số biến x, ta có:

$$K' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad K = 2\arcsin x + C_1$$

Trong đó: (C_1 là hằng số)

Suy ra : $p = \dfrac{2\arcsin x + C_1}{\sqrt{1-x^2}}$

Vậy $\quad y = \displaystyle\int \frac{2\arcsin x + C_1}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad$ (C_1 , C_2 là hằng số)

$$\Leftrightarrow \quad y = (\arcsin x)^2 + C_1.\arcsin x + C_2$$

Theo bài ra:

Với $y\big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$

Với $y'\big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

Kết luận: nghiệm riêng cần tìm là : y = $(\arcsin x)^2$

3) Phương trình khuyết x: F(y,y',y'') = 0

Cách giải: Đặt y' = p

$$\Rightarrow \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = y'.\frac{dp}{dy} \quad \Rightarrow \quad y'' = p.\frac{dp}{dy}$$

Thay vào phương trình : $F(y, p, p\dfrac{dp}{dy}) = 0$ đây là phương trình cấp 1 đối với p

Ví dụ: Giải phương trình $2y.y'' = y'^2 + 1$

Đặt y'=p $\Rightarrow$ $y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}.\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$

Thay vào ta được:

$$2.y.p\frac{dp}{dy} = p^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{2pdp}{1+p^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \ln|1+p^2| + \ln|C_1|$$

$$\Leftrightarrow \quad y = C_1(1+p^2)$$

$$\Rightarrow \quad dy = 2C_1dp$$

mà $\quad p = y' = \dfrac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{p} = \frac{2C_1p.dp}{p} = 2.C_1.dp$$

$$\Rightarrow \quad dp = \frac{1}{2C_1}dx$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{x}{2C_1} + C_2$$

Vậy: nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$y = C_1\left[\left(\frac{x}{2C_1} + C_2\right)^2 + 1\right] = C_1 + \frac{(x + 2C_1C_2)^2}{4C_1}$$

Đặt: $2C_1C_2 = -a$, $2C_1 = p$

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình có dạng:

$$2p(y - \frac{p}{2}) = (x - a)^2$$

Chú ý: Những phương trình cấp 2 khuyết còn được gọi là những ***phương trình giảm cấp được,*** vì có thể dễ dàng đưa chúng về những phương trình cấp 1.

2.3.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất

Đó là phương trình có dạng: $\quad y'' + p(x).\, y' + q(x).\, y = 0 \qquad (2)$

Định lý 1: Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là 2 nghiệm của phương trình (2) thì $C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình đó, trong đó C_1 & C_2 là 2 hằng số.

Chứng minh:

Vì $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là nghiệm của phương trình (2) nên:

$$y''_1 + p(x).y'_1 + q(x).\, y_1 = 0$$

$$y''_2 + p(x).y'_2 + q(x).\, y_2 = 0$$

Nhân dòng trên với C_1 và dòng dưới với C_2, rồi cộng 2 vế của chúng lại, ta được :

$$\Rightarrow \quad (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$$

$\Rightarrow \quad C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (2).

Định nghĩa 1: Hai hàm số $y_1(x)$, $y_2(x)$ được gọi là **độc lập tuyến tính** trên đoạn [a,b] nếu tỉ số $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq k$ – hằng số trên đoạn đó. Ngược lại, hai hàm đó gọi là **phụ thuộc tuyến tính**.

Ví dụ:

- Hai hàm số y = sinx và y = cosx độc lập tuyến tính trên R

vì $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ = tgx $\neq$ hằng số.

- Hai hàm số y = 2.e^x và y = 5. e^x là phụ thuộc tuyến tính

vì $\dfrac{2.e^x}{5.e^x} = \dfrac{2}{5}$ hằng số.

Định nghĩa 2: Cho hàm số y_1 (x), y_2(x). Định thức:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

được gọi là ***định thức Wronsky*** của y_1, y_2 và được kí hiệu là W(y_1, y_2) hay vắn tắt là W nếu không sợ nhầm lẫn.

Định lí 2: Nếu hai hàm số y_1(x) và y_2(x) phụ thuộc tuyến tính trên [a, b] thì

$$W(y_1, y_2) \equiv 0 \text{ trên đoạn đó.}$$

Thật vậy, vì $y_2 = ky_1$ với k là hằng số nên $y_2' = ky_1'$, do đó

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & ky_1 \\ y_1' & ky_1' \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0$$

Định lí 3: Cho y_1, y_2 là 2 nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất (2). Nếu định thức Wronsky W(y_1,y_1) khác không tại một giá trị x = x_0 nào đó trên đoạn [a;b] (trên đó các hệ số p(x), q(x) là liên tục) thì nó khác không với mọi x trên đoạn đó.

Chứng minh:

Vì y_1(x) , y_2(x) là nghiệm của phương trình (2) nên :

$$y_1'' + p(x).y_1' + q(x).y_1 = 0$$

$$y_2'' + p(x).y_2'' + q(x).y_2 = 0$$

Nhân dòng trên với (- y_2) và dòng dưới với (y_1) , rồi cộng 2 vế lại với nhau, ta được :

$$(y_1.y_2'' - y_2.y_1'') + p(x).(y_1y_2' - y_2y_1') = 0 \qquad (*)$$

mà W = $y_1y_2' - y_2y_1'$

$$\Rightarrow \quad W' = \left(y_1y_2' - y_2y_1'\right)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - (y_2'y_1' + y_2y_1'') = y_1y_2'' - y_2y_1''$$

Suy ra : (*) $\Leftrightarrow$ W' + p(x).W = 0

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dW}{W} = -p(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|W| = -\int_{x_0}^{x} p(x)dx + \ln|C|$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{W}{C}\right| = -\int_{x_0}^{x} p(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} \qquad (**)$$

Thay x = x_0, ta được : C = W(x_0)

Suy ra: $W = W(x_0).e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$

Theo giả thiết: $W(x_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; W(x) \neq 0 \quad , \quad \forall x \in [a,b]$ *(đpcm)*

<u>**Hệ quả**</u> : Nếu W(y_1,y_2) = 0 tại $x = x_0 \in [a,b]$ thì W(y_1,y_2) ≡ 0 tại $\forall x \in [a,b]$

Định lí 4: Nếu các nghiệm y_1 , y_2 của phương trình (2) là độc lập tuyến tính trên [a,b] thì định thức Wronsky W(y_1,y_2) khác không tại mọi điểm của đoạn ấy.

<u>*Chứng minh*</u>:

Giả sử W = 0 tại một điểm nào đó của đoạn [a,b] theo định lý 3 thì:

$$W \equiv 0 \text{ trên đoạn ấy}$$

$$\Rightarrow \quad y_1y_2' - y_2y_1' = 0 \quad , \forall x \in [a,b]$$

Tại những điểm của đoạn [a,b] ở đó $y_1 \neq 0$, ta có:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{0}{y_1^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_2}{y_1} = k$$, k là hằng số, tại những điểm ấy

Điều này mâu thuẫn với giả thiết y_1 & y_2 độc lập tuyến tính.

Vậy: $W \neq 0 \quad , \quad \forall x \in [a,b]$

Chú ý: tại những điểm của đoạn [a,b] ở đó y_1 = 0, người ta đã chứng minh được $\frac{y_2}{y_1}$ cũng là hằng số.

Định lí 5: Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là 2 nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (2) thì nghiệm tổng quát của phương trình (2) là:

$$y = C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x) \qquad (2')$$

trong đó: C_1, C_2 là những hằng số tuỳ ý.

<u>*Chứng minh*</u>.

Theo định lí 1, $y = C_1y_1 + C_2y_2$ cũng là nghiệm của phương trình (2)

Ta cần chứng minh rằng với mọi điều kiện ban đầu $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ có thể tìm được những hằng số C_1 , C_2 để nghiệm $C_1y_1 + C_2y_2$ tương ứng thoã mãn các điều kiện ấy.

Thế các điều kiện ban đầu vào (2'), ta được:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) \end{cases} \qquad (2.1)$$

đây là một hệ hai phương trình đại số tuyến tính đối với C_1, C_2

Ta có: Định thức của ma trận hệ số là:

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

đó chính là giá trị của định thức Wronsky $W(y_1, y_2)$ tại $x = x_0$, nó khác không vì y_1, y_2 độc lập tuyến tính.

Suy ra: $D \neq 0$ $\Rightarrow$ Hệ (2.1) có nghiệm duy nhất C_1, C_2

Vậy: có thể xác định được C_1, C_2 để $C_1 y_1 + C_2 y_2$ thoả mãn các điều kiện ban đầu cho trước. Do đó (2') là nghiệm tổng quát của phương trình (2).

Ví dụ : Phương trình y" + y = 0 có 2 nghiệm riêng là $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, hai nghiệm ấy độc lập tuyến tính.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, C_1 và C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Chú thích 1. Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm phụ thuộc tuyến tính của phương trình (2), tức là $y_1(x) = K y_2(x)$ với K là một hằng số nào đó. Do đó, biểu thức $y = (C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, C_1 và C_2 là hằng số tuỳ ý, có thể viết là $y = (C_1 K + C_2) y_2(x)$, nó thự sự chỉ phụ thuộc một hằng số tuỳ ý nên không là nghiệm tổng quát của phương trình (2).

Chú thích 2. Định lí 5 cho thấy muốn tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (2), chỉ cần tìm 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó. Như chúng ta sẽ thấy ở phần dưới, có phương pháp để tìm được 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình trình tuyến tính thuần nhất với hệ số không đổi. Nhưng đối với phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số biến thiên, không có phương pháp tổng quát để giải quyết vấn đề đó. Tuy nhiên, định lí sau đây cho ta cách tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số biến thiên nếu ta biết trước một nghiệm riêng khác 0 của nó.

Định lí 6: Nếu đã biết một nghiệm riêng $y_1(x) \neq 0$ của phương trình (2), ta có thể tìm được một nghiệm riêng $y_2(x)$ của phương trình đó, độc lập tuyến tính với $y_1(x)$, có dạng: $y_2(x) = y_1(x).\ u(x)$

Chứng minh.

Đặt $y = y_1(x).u(x)$.

Ta cần tìm u(x) sao cho $y = y_1(x).u(x)$. thoã mãn phương trình (2).

Ta có

$$y' = y_1'u + y_1u' \quad ; \qquad y'' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''.$$

Thế vào phương trình (2), ta được:

$$y''+p.y'+q.y = 0$$

$$\Rightarrow \quad (y_1''u + 2y_1'u' + y_1u'') + p(y_1'u + y_1u') + qy_1u = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_1u'' + (2y_1' + py_1)u' + (y_1''u + py_1' + qy_1)u = 0.$$

mà $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$, vì y_1 là một nghiệm của phương trình (2).

Suy ra :

$y_1u'' + (2y_1' + py_1u)u' = 0$ đây là phương trình cấp 2 đối với u, khuyết u

Đặt u' = v, ta được phương trình cấp 1 đối với v:

$$y_1v' + (2y_1' + py_1)v = 0$$

hay

$$\frac{dv`}{v} = -(\frac{2y_1'}{y_1} + p)\,dx.$$

Lấy tích phân hai vế:

$$\ln|v| = -2\ln|y_1| - \int p(x)dx = -2\ln|y_1| + \phi(x) + \ln|C_1|$$

$\varphi(x)$ là một nguyên hàm nào đó của –p(x)

Vậy: $\quad v = C_1\dfrac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2} = C_1g(x), \qquad$ với $g(x) = \dfrac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2}$.

Do đó

$$u = C_1\int g(x)dx = C_1G(x) + C_2 \qquad \text{(vì } u' = v)$$

trong đó G(x) là một nguyên hàm của g(x).

Ta được:

$$y = [C_1G(x) + C_2]y_1 = C_1y_1G(x) + C_2y_1.$$

Chọn $C_2 = 0, C_1 = 1$, ta được $y_2 = y_1G(x)$, đó là một nghiệm của (2), độc lập tuyến tính với y_1, vì $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = G'(x) = g(x) = \dfrac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2} \neq 0$

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0. \qquad (3)$$

Dễ thấy rằng $y_1 = x$ là một nghiệm riêng. Tìm một nghiệm riêng khác, có dạng $y_2 = x.u(x)$. Thế vào phương trình đã cho, ta được:

$$u''x(1-x^2)+2u'=0.$$

Đặt u’ = v, ta có

$$v'x(1-x^2)+2v=0$$

hay

$$\frac{dv}{v}=-\frac{2dx}{x(1-x^2)}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$v=K_1\frac{1-x^2}{x^2}=K_1\left(\frac{1}{x^2}-1\right).$$

K_1 là hằng số tuỳ ý. Chọn K_1 = -1 ta được $v=1-\frac{1}{x^2}$, do đó $u=x+\frac{1}{x}+K_2$.

Chọn K_2 = 0, ta được $u=x+\frac{1}{x} \Rightarrow y_2=x.u=x^2+1$.

Hai nghiệm $y_1=x$, $y_2=x^2+1$ là độc lập tuyến tính, nên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y=C_1x+C_2(x^2+1),$$

C_1, C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Chú thích. Cũng có thể tìm y_2 từ công thức (**). Chia hai vế của công thức ấy cho y_1^2, ta được:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}=\frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int p(x)dx}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_2}{y_1}=\int\frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int p(x)dx}dx+K.$$

mà $\quad \frac{y_2}{y_1}=u(x)$

$$\Rightarrow \quad u(x)=\int\frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int p(x)dx}dx+K$$

Chọn C = 1, K = 0, ta được

$$y_2=y_1u=y_1\int\frac{1}{y_1^2}.e^{-\int p(x)dx}dx \qquad (2.2)$$

Như vậy nếu phương trình (2) có một nghiệm **riêng là $y_1(x)$ thì nghiệm tổng quát của nó là** :

$$y = C_1y_1 + C_2y_1\int \frac{1}{y_1^2}.e^{-\int p(x)dx}dx. \qquad (2.3)$$

Ví dụ: Trở lại ví dụ trên. Phương trình $(1-x^2)y'' + 2y = 0$, có một nghiệm riêng là $y_1 = x$. Chia hai vế của phương trình cho $(1-x^2)$, ta thấy $p(x) = \frac{2x}{1-x^2}$, do đó

$$-\int p(x)dx = \int \frac{2x}{x^2-1}dx = \ln(x^2-1).$$

$$\Rightarrow \qquad y_2 = \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx = \int \frac{1}{x^2}e^{\ln(x^2-1)}dx = \int \frac{x^2-1}{x^2}dx = x + \frac{1}{x}$$

Theo công thức (2.3) ta được:

$$y = C_1x + C_2x(x + \frac{1}{x}) = C_1x + C_2(x^2+1).$$

2.3.5. Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính không thuần nhất.

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

1) Định nghĩa: Đó là phương trình có dạng:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Định lí 7: Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (1) bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (2) với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất (1).

<u>*Chứng minh*</u>

Gọi $\overline{y}$ là một nghiệm tổng quát của phương trình (2), tức là:

$$\overline{y''} + p(x)\overline{y'} + q(x)\overline{y} = 0$$

Y là một nghiệm riêng nào đó c`ủa phương trình (1) , tức là:

$$Y'' + p(x)Y' + q(x)Y = f(x)$$

Đặt $y = \overline{y} + Y$.

Ta có $y' = \overline{y'} + Y'$; $y'' = \overline{y''} + Y''$

Thế vào vế trái phương trình (1), ta được :

$$\begin{aligned} VT &= y'' + p(x)y' + q(x)y \\ &= \overline{y''} + Y'' + p(x)(\overline{y'} + Y') + q(x)(\overline{y} + Y) \\ &= [\overline{y''} + p(x)\overline{y'} + q(x)\overline{y}] + [Y'' + p(x)Y' + q(x)Y]. \end{aligned}$$

Theo giả thiết:

$$\overline{y''} + p(x)\overline{y'} + q(x)\overline{y} = 0$$

$$Y'' + p(x)Y' + q(x)Y = f(x)$$

Suy ra: VT = f(x) $\Rightarrow$ $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

Vậy: $y = \overline{y} + Y$ cũng là nghiệm của phương trình (1).

Vì $\overline{y}$ phụ thuộc hai hằng số tuỳ ý nên $y = \overline{y} + Y$ cũng phụ thuộc hai hằng số tuỳ ý. Do đó, có thể chứng minh nó là nghiệm tổng quát của phương trình (1) như trong chứng minh định lí 5.

Định lí 8: **(Nguyên lí chồng nghiệm)**

Nếu $y_1(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình:

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$ **và** $y_2(x)$ **là một nghiệm riêng của phương trình** $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$ **thì** $y = y_1(x) + y_2(x)$ **là một nghiệm riêng của phương trình** $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$.

Chứng minh

Ta có:

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (y_1 + y_2)'' + p(x)(y_1 + y_2)' + q(x)(y_1 + y_2) \\ &= \left[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right] + \left[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right] \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

Vậy: $y = y_1(x) + y_2(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

2) Phương pháp biến thiên hằng số

Giả sử đã biết nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (2) là

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \qquad (2.1)$$

trong đó C_1 , C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Bây giờ, ta muốn tìm nghiệm của phương trình tuyến tính không thuần nhất (1), ta coi $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ là hai hàm số biến x. Ta tìm C_1 , C_2 để cho (2.1) là một nghiệm của phương trình không thuần nhất (1).

Ta có:

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_1'y_1 + C_2'y_2.$$

Chọn C_1 , C_2 sao cho: $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$

Khi đó: $y' = C_1y_1' + C_2y_2'$

$$\Rightarrow \quad y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2'.$$

Thế vào phương trình (1), ta được:

$$C_1\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) + C_2\left(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Vì y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình thuần nhất (2) nên các biểu thức trong dấu ngoặc của vế trái bằng không, ta được:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Vậy: hàm số $y = C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm của phương trình (1) nếu C_1 , C_1 thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases} \qquad (*)$$

Định thức của hệ phương trình (*) chính là định thức Wronsky của hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (1), nó luôn khác 0. Vì vậy hệ phương trình trên có một nghiệm duy nhất.

Giả sử $C_1' = \varphi_1(x)$, $C_2' = \varphi_2(x)$.

Lấy tích phân, ta được

$$C_1 = \Phi_1(x) + K_1 \quad , \quad C_2 = \Phi_2(x) + K_2$$

trong đó: $\Phi_1(x)$ là một nguyên hàm của $\varphi_1(x)$

$\Phi_2(x)$ là một nguyên hàm của $\varphi_2(x)$

K_1 , K_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Vậy: nghiệm tổng quát của phương trình (1) là:

$$y = K_1y_1 + K_2y_2 + \Phi_1(x).y_1 + \Phi_2(x).y_2$$

Ví dụ *:* Giải phương trình

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 1 - x^2$$

Nếu $x \neq \pm 1$, phương trình có thể viết là

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 1.$$

Ta đã biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1x + C_2(x^2 + 1)$$

trong đó C_1 , C_2 là các hằng số tuỳ ý (xem ví dụ trang 99 - 100).

Biểu thức ấy là nghiệm của phương trình không thuần nhất đã cho.

Coi $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ là những hàm số biến x thoã mãn hệ (*), tức là:

$$\begin{cases} C_1'x + C_2'(x^2 + 1) = 0 \\ C_1' + C_2'\,2x = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được

$$C_1' = -\frac{x^2+1}{x^2-1} = -\left(1+\frac{2}{x^2-2}\right)$$

$$C_2' = \frac{x}{x^2-1}$$

Suy ra: $$C_1 = -\left(x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + K_1$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + K_2$$

trong đó K_1 , K_2 là những hằng số tuỳ ý.

Vậy: nghiệm tổng quát phải tìm là:

$$y = -x\left(x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + \frac{1}{2}(x^2+1)\ln\left|x^2-1\right| + K_1x + K_2(x^2+1)$$

2.3.6. Phương trình vi phân cấp 2 với hệ số là hằng số

Phương trình thuần nhất:

Cho phương trình: $$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1)$$

trong đó p, q là hai hằng số. Ta biết rằng muốn tìm nghiệm tổng quát của nó, chỉ cần tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính. Ta sẽ tìm nghiệm riêng của nó dưới dạng:

$$y = e^{kx} \qquad (1.1)$$

trong đó: k là một hằng số nào đó mà ta sẽ tìm.

Ta có $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2e^{kx}$.

Thế vào phương trình (1), ta được :

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

Vì $e^{kx} \neq 0$ nên ta có:

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (1.2)$$

Suy ra: nếu k thoã mãn phương trình (1.2) thì hàm số $y = e^{kx}$ là một nghiệm của phương trình (1).

Phương trình (1.2) được gọi là **phương trình đặc trưng** của phương trình vi phân (1). Đó là một phương trình bậc hai, nó có hai nghiệm k_1, k_2 thực hay phức. Có thể xảy ra ba trường hợp :

Hai số k_1 , k_2 thực và khác nhau:

Khi ấy phương trình (1) có hai nghiệm:

$$y_1 = e^{k_1x} \quad ; \quad y_2 = e^{k_2x}$$

$\Rightarrow$ Hai nghiệm ấy độc lập tuyến tính vì $\dfrac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq$ hằng số.

Suy ra: nghiệm tổng quát của phương trình (1) là:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

C_1 , C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Ví dụ*:* Tìm nghiệm của phương trình

$$y'' + y' - 2y = 0$$

thoã mãn các điều kiện

$$y\Big|_{x=0} = 0, \quad y'\Big|_{x=0} = 1$$

Phương trình đặc trưng của phương trình đã cho là $k^2 + k - 2 = 0$, nó có hai nghiệm phân biệt $k_1 = 1$; $k_2 = -2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Suy ra:

$$y' = C_1e^x - 2C_2e^{-2x}.$$

Từ các điều kiện ban đầu ta được:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - 2C_2 = 1 \end{cases}$$

Do đó $C_1 = \dfrac{1}{3}$; $C_2 = -\dfrac{1}{3}$

Vậy: nghiệm riêng phải tìm là

$$y = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}$$

$k_1 = k_2$ là hai số thực trùng nhau $k_1 = k_2$:

Ta đã có một nghiệm riêng của phương trình (1) là $y_1 = e^{k_1x}$.

Ta sẽ tìm một nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1 dưới dạng:

$$y_2 = y_1.u(x) = u(x)e^{k_1x}$$

Ta có:

$$y_2' = u'.e^{k_1x} + k_1u.e^{k_1x}$$

$$y_2'' = u''e^{k_1x} + 2k_1u'e^{k_1x} + k_1^2ue^{k_1x}$$

Thế vào phương trình (1), ta được

$$e^{k_1x}\left[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u\right] = 0$$

Vì k_1 là nghiệm kép của phương trình đặc trưng: $k_1^2 + pk_1 + q = 0$

nên ta có:

$$k_1 = -\frac{p}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2k_1 + q = 0$$

Suy ra: $e^{k_1 x} u'' = 0 \quad \Rightarrow \quad u'' = 0$

$$\Rightarrow \quad u = Ax + B \quad ,$$

trong đó A, B là những hằng số tuỳ ý.

Chọn A = 1, B = 0 ta được : u = x $\quad \Rightarrow \quad y_2(x) = xe^{k_1 x}$

Như vậy hai nghiệm độc lập tuyến tính của (1) là $y_1(x) = e^{k_1 x}$ và $y_2(x) = x e^{k_1 x}$.

Kết luận: nghiệm tổng quát của phương trình (1) là:

$$y = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$$

Ví dụ: Giải phương trình

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Phương trình đặc trưng của nó là $k^2 + 6k + 9 = 0$, nó có một nghiệm kép k = 3

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của nó là:

$$y = e^{3x} (C_1 x + C_2).$$

k_1 và k_2 là hai số phức liên hợp: $k_1 = \alpha + i\beta \quad ; \quad k_2 = \alpha - i\beta$

Hai nghiệm riêng của phương trình (1) là:

$$\overline{y_1} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$$

$$\overline{y_2} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

Theo công thức Euler: $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$

$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$$

Suy ra: $\overline{y_1} = e^{\alpha x} (\cos\beta x + i\sin\beta x)$

$$\overline{y_2} = e^{\alpha x} (\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Nếu $\overline{y_1}, \overline{y_2}$ là hai nghiệm của phương trình (1) thì:

$$y_1 = \frac{\overline{y_1} + \overline{y_2}}{2} = e^{\alpha x} \cos\beta x$$

$$y_2 = \frac{\overline{y_1} - \overline{y_2}}{2i} = e^{\alpha x} \sin\beta x$$

cũng là nghiệm của phương trình (1).

mà $\frac{y_1}{y} = \cot g\, \beta x$ khác hằng số

$\Rightarrow$ Hai nghiệm y1 và y2 độc lập tuyến tính.

Kết luận: nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

Chú thích : Đối với phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số không đổi cấp cao hơn hai, phương pháp giải cũng tương tự như đối với phương trình cấp hai.

Ví dụ 1: Giải phương trình y''' – 4y' = 0.

Phương trình đặc trưng của nó là $k^3 - 4k = 0$, nó có ba nghiệm là k = 0, k = 2, k = -2. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Phương trình đặc trưng $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ hay $(k^2 + 1)^2 = 0$

có hai nghiệm kép k = i và k = -1.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x.$$

Phương trình không thuần nhất:

Cho phương trình: y'' + py' + qy = f(x) (2)

trong đó p, q là những hằng số.

Ở trên, ta đã tìm được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (1). Vậy chỉ việc áp dụng phương pháp biến thiên hằng số để tìm nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (2). Nhưng đối với một số dạng đặc biệt của vế phải f(x), ta có thể tìm được một nghiệm riêng của phương trình (2) mà không cần một phép tính tích phân nào. Chỉ cần cộng nghiệm riêng ấy vào nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (1), ta sẽ được nghiệm tổng quát của (2).

Ta sẽ tìm nghiệm riêng của (2) trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x}.P_n(x)$

trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n, α là một hằng số.

Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của (2), ta tìm một nghiệm riêng của (2) có dạng:

$$Y = e^{\alpha x} Q_n(x) \qquad (2.1)$$

trong đó $Q_n(x)$ là một đa thức bậc n.

Muốn xác định $Q_n(x)$ ta phải xác định (n + 1) hệ số của nó và được xác định như sau:

Ta có

$$Y' = \alpha Q_n(x)e^{\alpha x} + Q_n^{'}(x)e^{\alpha x}$$

$$Y'' = \alpha^2 Q_n(x)e^{\alpha x} + 2\alpha Q_n^{'}(x)e^{\alpha x} + Q_n^{'}(x)e^{\alpha x}.$$

Thế vào (2), ta được

$$e^{\alpha x}\left[Q_n^{''}(x) + (2\alpha + p)Q_n^{'}(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x)\right] = e^{\alpha x}P_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad Q_n^{''}(x) + (2\alpha + p)Q_n^{'}(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x) \qquad (*)$$

Vì α không là nghiệm của phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất (1), nên $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$, do đó vế phải của đẳng thức (*) cũng là một đa thức bậc n, cùng bậc với đa thức ở vế phải $P_n(x)$.

Bằng cách đồng nhất hệ số của các số hạng cùng bậc ở hai vế của đẳng thức (*), ta được (n + 1) phương trình bậc nhất của (n + 1) ẩn, với ẩn là các hệ số của $Q_n(x)$. Phương pháp tìm các hệ số của $Q_n(x)$ nêu trên được gọi là ***phương pháp hệ số bất định***.

Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0$$

$$(2\alpha + p) \neq 0$$

Khi đó vế trái của đẳng thức (*) là một đa thức bậc (n – 1). Ta nâng bậc của nó lên một đơn vị mà không tăng số các hệ số của nó, muốn vậy chỉ việc thay $Q_n(x)$ bởi $x.Q_n(x)$.

Trong trường hợp này, ta sẽ tìm một nghiệm riêng của (2) có dạng:

$$Y = xe^{\alpha x}Q_n(x) \qquad (2.2)$$

Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0$$

$$(2\alpha + p) = 0$$

Vế trái của đẳng thức (*) là một đa thức bậc (n-2). Ta nâng bậc của nó lên 2 đơn vị mà không tăng số các hệ số của nó, muốn vậy chỉ việc thay $Q_n(x)$ bởi $x^2.Q_n(x)$.

Trong trường hợp này, ta tìm một nghiệm riêng của (2) có dạng:

$$Y = x^2e^{\alpha x}Q_n(x) \qquad (2.3)$$

Ví dụ 1: Giải phương tình y’’ + 3y’ – 4y = x

Phương trình đặc trưng $k^2 + 3k - 4 = 0$ có hai nghiệm đơn $k_1 = 1$ và $k_2 = -4$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\overline{y} = C_1e^{x} + C_2e^{-4x}$$

Vế phải của phương trình có dạng $e^{\alpha x}P_1(x)$ trong đó $\alpha = 0$, $P_1(x) = x$.

Vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, vậy ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$$Y = Ax + B.$$

Thế vào phương trình trên, ta được

$$-4Ax + 3A - 4B = x.$$

Suy ra : $\quad -4A = 1 \;,\; 3A - 4B = 0$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{4} \;,\; B = -\frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow \quad Y = -\frac{x}{4} - \frac{3}{16}$$

Nghiệm tổng quát phải tìm là: $\quad y = \overline{y} + Y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{x}{4} - \frac{3}{16}$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$y'' - y' = e^x(x+1)$.

Phương trình đặc trưng $k^2 - k = 0$ có hai nghiệm $k_1 = 0$, $k_2 = 1$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$\overline{y} = C_1 + C_2e^x$. Vế phải của phương trình đã cho có dạng $e^{\alpha x}P_1(x)$

Vì $\alpha = 1$ là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$Y = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx)$.

Ta có :

$$Y' = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(Ax + B)$$

$$Y'' = e^x(Ax^2 + Bx) + 2e^x(Ax + B) + e^x.2A$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được :

$$e^x(2Ax + B + 2A) = e^x(x + 1).$$

Suy ra : $\quad 2A = 1 \;,\; B + 2A = 1$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \;,\; B = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y = \frac{1}{2}x^2e^x$$

Nghiệm tổng quát phải tìm là :

$$y = \overline{y} + Y = C_1 + C_2e^x + \frac{1}{2}x^2e^x$$

Ví dụ 3: Giải phương trình $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}$

Phương trình đặc trưng có nghiệm kép $k_1 = k_2 = 3$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = (C_1x + C_2)e^{3x}$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $e^{\alpha x} P_1(x)$

Vì $\alpha = 3$ là một nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$Y = x^2e^{3x}(Ax + B) = e^{3x}(Ax^3 + Bx^2)$

Ta có :

$Y' = 3e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + e^{3x}(Ax^2 + Bx),$

$Y'' = 9e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + 6\, e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx) + e^{3x}(6Ax + 2Bx).$

Thế vào phương trình đã cho, ta được:

$\mathbf{e^{3x}[(6A - 10B)\, x + 2B] = xe^{3x}}$

Suy ra: $\mathbf{6A - 10B = 1 \quad , \quad B = 0}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{A = \frac{1}{6} \quad , \quad B = 0}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{Y = \frac{x^3}{6} e^{3x}}$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là :

$y = \overline{y} + Y = (C_1x + C_2)e^{3x} + \frac{x3}{6} e^{3x}$

Trường hợp 2: **$f(x) = P_m(x) \cos\beta x + P_n(x) \sin\beta x$, trong đó $P_m(x)$, $P_n(x)$ là những đa thức bậc m, n ; β là hằng số**.

Người ta chứng minh được rằng:

Nếu $\pm\, i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì ta có thể tìm một nghiệm riêng của phương trình (2) có dạng:

$Y = Q_l\,(x) \cos\beta x + R_l\,(x) \sin\beta x$ (2.4)

trong đó $Q_l\,(x)$, $R_l\,(x)$ là những đa thức bậc $l = \max\,(m\,,\,n)$

Nếu $\pm\, i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì ta có thể tìm một nghiệm riêng của phương trình (2) có dạng:

$Y = x[\, Q_l\,(x) \cos\beta x + R_l\,(x) \sin\beta x]$ (2.5)

Ví dụ 1: Giải phương trình $y'' + y = x.\sin x$.

Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$ có nghiệm $k_{1,2} = \pm\, i \Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $R_1(x) \sin\beta x$, trong đó $R_1(x) = x$, $\beta = 1$, nhưng $\pm\, i\beta = \pm\, i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$Y = x[(Ax + B) \cos x + (A_1x + B_1) \sin x]$

Tính Y', Y'' rồi thế vào phương trình đã cho ta được:

$[4A_1x + 2(A + B_1)]\cos x + [-4Ax + 2(A_1 - B)]\sin x = x\sin x$

Suy ra: $4A_1 = 0$, $A + B_1 = 0$, $-4A = 1$, $A_1 - B = 0$

$\Rightarrow \quad A = -\frac{1}{4}$, $B_1 = \frac{1}{4}$, $A_1 = 0$, $B = 0$

$\Rightarrow \quad Y = \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x)$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là :

$y = \overline{y} + Y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x)$

Ví dụ 2: Giải phương trình $y'' - y' = 2\cos^2 x$

Giải

Phương trình đặc trưng $k^2 - k = 0$ có hai nghiệm $k_1 = 0$, $k_2 = 1$

$\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1 + C_2e^x$

Vế phải của phương trình đã cho là $f(x) = 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$.

Theo nguyên lý chồng nghiệm, ta tìm được một nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng tổng $Y_1 + Y_2$

trong đó: Y_1 nghiệm riêng của phương trình với vế phải $f_1(x) = 1$

Y_2 là nghiệm riêng của phương trình với vế phải $f_2(x) = \cos 2x$.

Vì $f_1(x) = 1 = e^{\alpha x}$ với $\alpha = 0$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên Y_1 có dạng $Y_1 = Ax$. Thế vào phương trình ta được: $A = -1 \Rightarrow Y_1 = -x$

Vì $f_2(x) = \cos 2x$ mà $\pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $Y_2 = B\cos 2x + C\sin 2x$. Thế vào phương trình ta được : $B = -\frac{2}{10}$, $C = -\frac{1}{10} \Rightarrow Y_2 = -\frac{2}{10}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x$.

Kết luận: Nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = \overline{y} + Y_1 + Y_2 = C_1 + C_2e^x - x - \frac{2}{10}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x$$

Chú thích 1: Nếu $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$, ta có thể đưa về phương trình với vế phải có dạng đã xét ở trên bằng cách đặt $y = e^{\alpha x}z$.

Ví dụ : Giải phương trình $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}\sin x$

Đặt: $y = e^{-x}z$

Ta có: $y' = e^{-x}z' - e^{-x}z$

$y'' = e^{-x}z'' - 2e^{-x}z' + e^{-x}z$

Thế vào phương trình, ta được :

$$z'' + z = x\sin x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là :

z = C_1cosx + C_2sinx + $\frac{x}{4}$(sinx – xcosx) *(xem ví dụ 1)*

Vậy : nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

y = e^{-x} [C_1cosx + C_2sinx + $\frac{x}{4}$(sinx – xcosx)]

Chú thích 2: Đối với phương trình tuyến tính thần nhất, có hệ số không đổi, cấp cao hơn hai, cũng có thể tìm nghiệm riêng tương tự đối với phương trình cấp hai.

Ví dụ : Giải phương trình $y^{(4)}$ + 2y” + y = cosx

Ở ví dụ trên, ta thấy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$\overline{y} = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$$

Vì phương trình đặc trưng $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm kép $k_1 = i$ và $k_2 = -i$. Vế phải của phương trình đã cho là cosx, do đó ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng : $Y = x^2(A\cos x + B\sin x)$

Thay vào phương trình đã cho ta tìm được:

$A = -\frac{1}{8}$, $B = 0 \Rightarrow Y = -\frac{1}{8}x^2\cos x$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$y = \overline{y} + Y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x - \frac{1}{8}x^2\cos x$

2.4. Bài tập chương 2

2.1. Giải các phương trình đẳng cấp cấp 1 sau:

1) $y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$ 2) $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ 3) $y' = \frac{xy - y^2}{x^2}$

4) $y' = \frac{x + ye^{\frac{y}{x}}}{x - ye^{\frac{y}{x}}}$ 5) $y' = \frac{x^2 + 2y^2}{4xy}$ 6) $y' = \frac{2xy - y^2}{3x^2}$

7) $y' = \frac{x - 3y}{x}$ 8) $y' = -\frac{x + 4y}{x}$ 9) $y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$

10) $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ 11) $y' = \frac{xy - y^2}{x^2}$ 12) $y' = \frac{x + ye^{\frac{y}{x}}}{x - ye^{\frac{y}{x}}}$

13) $\frac{dy}{dx} = 2xy$ Đáp số : $y = ke^{x^2}$

14) $\frac{dy}{dx} = 3x^2e^{-y}$ Đáp số : $y = \ln(x^3 + e^2)$

15) $\frac{dy}{dx} = 2x(y^2 + 1)$ Đáp số : $y = \mathrm{tg}(x^2 + C)$

16) $(1+x)dy - ydx = 0$ Đáp số : $y = C(1+x)$

17) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{y}$ Đáp số : $x^2 + y = C^2$

18) $(\mathrm{e}^{2y} - \mathrm{y})\cos\mathrm{x}\dfrac{dy}{dx} = e^y \sin 2x,\ \ y(0) = 0$ Đáp số : $e^y + ye^{-y} + e^{-y} = 4 - 2\cos x$

19) $\dfrac{dy}{dt} + 4y = y(e^{-t} + 4)$ Đáp số : $y = ce^{-(\mathrm{e}^{-t})}$

20) $\dfrac{dx}{dr} = r^2(1+x^2)$ Đáp số : $x = tg(\dfrac{r^3}{3} + C)$

21) $x^2\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0;\ y(1) = 3$ Đáp số : $y = \dfrac{3x}{4x-3}$

22) $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$ Đáp số : $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + C$

23) $(e^y + 1)^2 e^{-y}dx + (\mathrm{e}^x + 1)^3 e^{-x}dy = 0$ Đáp số : $(e^x + 1)^{-2} + 2(\mathrm{e}^y + 1)^{-1} = C$

24) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$ Đáp số : $(\mathrm{y}+3)^5 e^x = c(x+4)^5 e^y$

25) $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$ Đáp số : $y = \sin(\dfrac{1}{2}x^2 + C)$

26) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 + \sin\mathrm{x}}{3(y-1)^2};\ \ y(0) = 2$ Đáp số : $y = 1 + (2x - \cos x + 2)^{\frac{1}{3}}$

27) $y' = \dfrac{x^3y - y}{y^4 - y^2 + 1};\ \ y(0) = 1$ Đáp số : $y^4 - 2y^2 + 4\ln|y| = x^4 - 4x - 1$

Hướng dẫn giải một số bài tập

7) $y' = \dfrac{x - 3y}{x}$ Đặt $\mathrm{u} = \dfrac{y}{x}$. Thay vào phương trình ta được : $\mathrm{u'\,x = 1\text{-}\ 4u}$

Biến đổi về phương trình với biến số phân ly: $\dfrac{du}{1-4u} = \dfrac{dx}{x}$

Giải phương trình với biến số phân ly ta được: $-\dfrac{1}{4}\ln|1-4u| - \ln|x| + C = 0$

Thay $\mathrm{u} = \dfrac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$-\frac{1}{4}\ln|1 - 4\frac{y}{x}| - \ln|x| + C = 0$$

8) $y' = -\dfrac{x + 4y}{x}$

Đặt $\mathrm{u} = \dfrac{y}{x}$. Thay vào phương trình ta được : $\mathrm{u'\,x = -\ (1+ 5u)}$

Biến đổi về phương trình với biến số phân ly: $-\dfrac{du}{1+5u}=\dfrac{dx}{x}$

Giải phương trình với biến số phân ly ta được: $-\dfrac{1}{5}\ln|1+5u|-\ln|x|+C=0$

Thay $u=\dfrac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$-\frac{1}{5}\ln|1+5\frac{y}{x}|-\ln|x|+C=0$$

9) $y'=\dfrac{3y^2-x^2}{2xy}$

Đặt $u=\dfrac{y}{x}$. Thay vào phương trình ta được : $u'x=\dfrac{u^2-1}{2u}$

Biến đổi về phương trình với biến số phân ly: $\dfrac{2udu}{u^2-1}=\dfrac{dx}{x}$

Giải phương trình với biến số phân ly ta được: $\ln|u^2-1|-\ln|x|+C=0$

Thay $u=\dfrac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$\ln|(\frac{y}{x})^2-1|-\ln|x|+C=0$$

10) $y'=\dfrac{xy-y^2}{x^2-2xy}$

Đặt $u=\dfrac{y}{x}$. Thay vào phương trình ta được : $u'x=\dfrac{u^2}{1-2u}$

Biến đổi về phương trình với biến số phân ly: $\dfrac{(1-2u)du}{u^2}=\dfrac{dx}{x}$

Giải phương trình với biến số phân ly ta được: $-\dfrac{1}{u}-2\ln|u|-\ln|x|+C=0$

Thay $u=\dfrac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$-\frac{x}{y}-2\ln|\frac{y}{x}|-\ln|x|+C=0$$

11) $y'=\dfrac{xy-y^2}{x^2}$

Đặt $u=\dfrac{y}{x}$. Thay vào phương trình ta được : $u'x=-u^2$

Biến đổi về phương trình với biến số phân ly: $-\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x}$

Giải phương trình với biến số phân ly ta được: $\frac{1}{u}-\ln|x|+C=0$

Thay $u=\frac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là : $\frac{x}{y}-\ln|x|+C=0$

12) $y'=\dfrac{x+ye^{\frac{y}{x}}}{x-ye^{\frac{y}{x}}}$

Đặt $u=\frac{y}{x}$. Thay vào phương trình ta được : $u'x=\frac{1}{e^u}$

Biến đổi về phương trình với biến số phân ly: $e^u du=\frac{dx}{x}$

Giải phương trình với biến số phân ly ta được:

Thay $u=\frac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$e^{\frac{y}{x}}-\ln|x|+C=0$$

2.2. Giải các phương trình tuyến tính cấp 1 sau:

1) $y'-\frac{y}{x-1}=x+2$

2) $y'-\frac{y}{x+1}=x-2$

13) $y'-\frac{y}{x-1}=x+2$

3) $y'-\frac{y}{2(x-2)}=2x-3$

4) $y'-\frac{y}{2(x+1)}=3x-2$

14) $y'-\frac{y}{2(x-2)}=x^2-4$

5) $y'-\frac{2y}{x}=x^2+x-1$

6) $y'-\frac{2y}{x-1}=x^2-2x+3$

15) $y'-\frac{y}{2(x+1)}=x^2-1$

7) $y'+\frac{y}{x+2}=x-1$

8) $y'+\frac{y}{x+4}=x+3$

16) $y'-\frac{2y}{x}=x^2+x-1$

9) $y'+\frac{y}{2x}=2x+1$

10) $y'-\frac{y}{x+3}=x$

17) $y'-\frac{2y}{x-1}=x^2-2x+3$

11) $y'+\frac{y}{2(x-1)}=x$

12) $y'-\frac{y}{x+3}=x$

18) $y'+\frac{y}{x-2}=x-1$

Hướng dẫn giải một số bài tập

12) $y'-\frac{y}{x+3}=x$

Giải phương trình: $y'-\frac{y}{x+3}=0$ ta được $y=C(\mathrm{x}+3)$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được:

$$C'(x)=\frac{x}{x+3}$$

$$\Rightarrow C(x)=x-3\ln|\mathrm{x}+3|+C$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y=(\mathrm{x}+3)(x-3\ln|\mathrm{x}+3|+C)$$

13) $y'-\frac{y}{x-1}=x+2$

Giải phương trình: $y'-\frac{y}{x-1}=0$ ta được $y=C(\mathrm{x}-1)$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được:

$$C'(x)=\frac{x+2}{x-1}$$

$$\Rightarrow C(x)=x+3\ln|\mathrm{x}-1|+C$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y=(x+3\ln|\mathrm{x}-1|+C)(x-1)$$

14) $y'-\frac{y}{2(x-2)}=x^2-4$

Giải phương trình: $y'-\frac{y}{2(x-2)}=0$ ta được $y=C\sqrt{x-2}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được:

$$C'(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{x-2}}$$

$$\Rightarrow C(x)=\frac{4}{3}\sqrt{(\mathrm{x}-2)^3}+2\sqrt{\mathrm{x}-2}+C$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$y=(\frac{4}{3}\sqrt{(\mathrm{x}-2)^3}+2\sqrt{\mathrm{x}-2}+C)\sqrt{\mathrm{x}-2}$$

15) $y'-\frac{y}{2(x+1)}=x^2-1$

Giải phương trình: $y'-\frac{y}{2(x+1)}=0$ ta được $y=C\sqrt{x+1}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được:

$$C'(x)=\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$$

$\Rightarrow C(x)=2\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$\Rightarrow y=(2\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C)\sqrt{x+1}$$

16) $y'-\frac{2y}{x}=x^2+x-1$

Giải phương trình: $y'-\frac{2y}{x}=0$ ta được $y=C\,x^2$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được:

$$C'(x)=\frac{x^2+x-1}{x^2}$$

$\Rightarrow C(x)=x+\ln|x|+\frac{1}{x}+C$

Vậy phương trình có nghiệm là: $y=(x+\ln|x|+\frac{1}{x}+C)\,x^2$

17) $y'-\frac{2y}{x-1}=x^2-2x+3$

Giải phương trình: $y'-\frac{2y}{x-1}=0$ ta được $y=C(x-1)^2$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được:

$$C'(x)=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow C(x)=x-\frac{2}{x-1}+C$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$y=(x-\frac{2}{x-1}+C)(x-1)^2$$

18) $y'+\frac{y}{x-2}=x-1$

Giải phương trình: $y'+\frac{y}{x-2}=0$ ta được $y=\frac{C}{x-2}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được:

$$C'(x)=(x-2)(x-1)$$

$$\Rightarrow C(x)=\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+2x+C$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$y=(\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+2x+C)\frac{1}{x-2}$$

19) $y'+\frac{y}{x+4}=x+3$

Giải phương trình: $y'+\frac{y}{x+4}=0$ ta được $y=\frac{C}{x+4}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được:

$$C'(x)=(x+3)(x+4)$$

$$\Rightarrow C(x)=\frac{x^3}{3}-7\frac{x^2}{2}+12x+C$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$y=(\frac{x^3}{3}-7\frac{x^2}{2}+12x+C)\frac{1}{x+4}$$

20) $y'+\frac{y}{2x}=2x+1$

Giải phương trình: $y'+\frac{y}{2x}=0$ ta được $y=\frac{C}{\sqrt{x}}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được:

$$C'(x)=(2x+1)\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow C(x)=\frac{4}{5}\sqrt{x^5}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$y=(\frac{4}{5}\sqrt{x^5}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C)\frac{1}{\sqrt{x}}$$

21) $y'+\frac{y}{2(x-1)}=x$

Giải phương trình: $y'+\frac{y}{2(x-1)}=x$ ta được $y=\frac{C}{\sqrt{x-1}}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được:

$$C'(x) = \mathrm{x}\sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$y = (\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C)\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

2.3. Giải các phương trình vi phân cấp 2 với hệ số hằng sau:

1) $y''-3y'+2y = e^x(x+1)$

2) $y''-3y'+2y = e^x(x+1)$

Phương trình đặc trưng: $k^2-3k+2=0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^* = x(\mathrm{ax}+b)e^x$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^* = x(-\frac{1}{2}\mathrm{x}\text{- }2)e^x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \ x(-\frac{1}{2}\mathrm{x}\text{- }2)e^x$$

3) $y''+7y' = 4x-3$

Phương trình đặc trưng : $k^2+7k=0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 + C_2e^{-7x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^* = x(\mathrm{ax}+b)$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^* = x(\frac{2}{7}\mathrm{x}\text{ - }\frac{25}{49})$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = C_1 + C_2e^{-7x} + \ x(\frac{2}{7}\mathrm{x}\text{ - }\frac{25}{49})$$

4) $y''-4y'+3y=e^x(x-1)$

Phương trình đặc trưng : $k^2-4k+3=0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{3x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^*=x(\mathrm{ax}+b)e^x$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^*=x(-\frac{1}{4}\mathrm{x}-\frac{1}{4})e^x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}+\ x(-\frac{1}{4}\mathrm{x}-\frac{1}{4})e^x$$

5) $y''-5y'+6y=e^x(x+2)$

Phương trình đặc trưng : $k^2-5k+6=0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^*=(\mathrm{ax}+b)e^x$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^*=(\frac{1}{2}\mathrm{x}+\frac{7}{4})e^x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\ (\frac{1}{2}\mathrm{x}+\frac{7}{4})e^x$$

6) $y''-4y'+4y=e^x(x-2)$

Phương trình đặc trưng : $k^2-4k+4=0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^*=(\mathrm{ax}+b)e^x$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^*=\mathrm{x}e^x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \text{ x}e^x$$

7) $y'' + 4y' + 4y = e^x(2x - 1)$

Phương trình đặc trưng : $k^2 + 4k + 4 = 0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^* = (\text{ax} + b)e^x$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^* = (\frac{2}{9}x - \frac{7}{27})e^x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + (\frac{2}{9}x - \frac{7}{27})e^x$$

8) $y'' + 6y' + 9y = e^x(3x + 1)$

Phương trình đặc trưng : $k^2 + 6k + 9 = 0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^* = (\text{ax} + b)e^x$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^* = (\frac{3}{16}\text{x - }\frac{1}{32})e^x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + (\frac{3}{16}\text{x - }\frac{1}{32})e^x$$

9) $y'' - 4y' = x^2 + 1$

Phương trình đặc trưng : $k^2 - 4k = 0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{4x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^* = x(\text{ax}^2 + bx + c)$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^* = x(-\frac{1}{12}\text{x}^2 - \frac{1}{16}x - \frac{9}{32})$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = C_1 + C_2 e^{4x} + \ x(-\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{16}x - \frac{9}{32})$$

10) $y'' + 3y' = x^2 - 2x$

Phương trình đặc trưng : $k^2 + 3k = 0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-3x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^* = x(\text{ax}^2 + bx + c)$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^* = x(\frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{8}{27})$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \ x(\frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{8}{27})$$

11) $y'' - y' - 2y = -4x^2 + 4x + 10$

Phương trình đặc trưng : $k^2 - k - 2 = 0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^* = \text{ax}^2 + bx + c$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^* = 2\text{x}^2 - 4x - 1$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \ 2\text{x}^2 - 4x - 1$$

12) $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 3$

Phương trình đặc trưng : $k^2 + 3k + 2 = 0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^* = \text{ax}^2 + bx + c$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^* = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$$

13) $y'' - 6y' + 9y = 2x + 1$

Phương trình đặc trưng : $k^2 - 6k + 9 = 0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^* = \text{ax} + b$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^* = \frac{2}{9}x + \frac{7}{27}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{2}{9}x + \frac{7}{27}$$

14) $y'' - 2y' + y = 2x - 1$

Phương trình đặc trưng : $k^2 - 2k + 1 = 0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^x + C_2xe^x$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^* = \text{ax} + b$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^* = 2x + 3$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + 2x + 3$$

15) $3y'' - 2y' - y = 5e^x$

Phương trình đặc trưng : $3k^2 - 2k - 1 = 0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^{-\frac{1}{3}x} + C_2e^x$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^* = \text{ax}e^x$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^* = \frac{5}{4}xe^x$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$y = C_1e^{-\frac{1}{3}x} + C_2e^x + \frac{5}{4}xe^x$$

16) $4y'' - 3y' - y = 7e^x$

Phương trình đặc trưng : $4k^2 - 3k - 1 = 0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{-\frac{1}{4}x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^* = \mathrm{ax}e^x$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^* = \frac{7}{5}xe^x$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$y = C_1e^{-\frac{1}{4}x} + C_2e^x + \frac{7}{5}xe^x$$

17) $y'' - 6y' = 3x + 2$

Phương trình đặc trưng : $k^2 - 6k = 0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 + C_2e^{6x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng :

$$y^* = x(\mathrm{ax} + b)$$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được :

$$y^* = x(-\frac{1}{4}\mathrm{x} - \frac{5}{12})$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = C_1 + C_2e^{6x} + x(-\frac{1}{4}\mathrm{x} - \frac{5}{12})$$

2.5. Hãy đưa về dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 và tìm nghiệm:

1) $y' + 3y = 3$ Đáp số: $y = Ce^{-3x}$

2) $\frac{dy}{dx} = -2xy;\ y(1) = 1$ Đáp số: $y = e^{1-x^2}$

3) $y' = y + x^2;\ y(0) = 1$ **Đáp số:** $y = 3e^x - (x^2 + 2x + 2)$

4) $\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 + 2$ **Đáp số:** $y = Ce^x - x^2 - 2x - 4$

5) $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^4e^x$ **Đáp số:** $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$

6) $(x^2 - 9)\dfrac{dy}{dx} - xy = 0$ **Đáp số:** $y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2 - 9}}$

7) $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases};\ y(0) = 0$ **Đáp số:** $y = \begin{cases} 1 - e^{-x}; & 0 \le x \le 1 \\ (e-1)e^{-x}; & x > 1 \end{cases}$

8) $x^2y' - +xy = 1$ **Đáp số:** $y = x^{-1}\ln x + c^{-1}; x > 0$

9) $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2\,\mathrm{sinx}$ **Đáp số:** $y = cx - x\cos x; x > 0$

10) $x^2y' + \mathrm{x(x+2)\,y} = e^x$ **Đáp số:** $y = \dfrac{1}{2x^2}\mathrm{e}^x + \dfrac{C}{x^2}\mathrm{e}^{-x}; x > 0$

11) $ydx - 4(x + y^6)dy = 0$ **Đáp số :** $x = 2y^2 + \mathrm{c}y^2; y > 0$

12) $\cos x\dfrac{dy}{dx} + (\mathrm{sinx})\,\mathrm{y} = 1$ **Đáp số:** $y = \sin x + c\cos x;\ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

13) $xy' + \mathrm{y} = e^x;\ y(1) = 2$ **Đáp số:** $y = \dfrac{e^x}{x} + \dfrac{2-e}{x};\ 0 < x$

14) $(\mathrm{x}+1)\dfrac{dy}{dx} + \mathrm{y} = \ln;\ y(1) = 10$ **Đáp số:** $(\mathrm{x}+1)\,\mathrm{y} = x\ln x - x + 21;\ 0 < x$

2.6. Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân sau nếu có dạng vi phân toàn phần:

1) $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ **Đáp số:** $x^2y - y = 0$

2) $(\mathrm{e}^{2y} - \mathrm{ycos(xy)})\,\mathrm{dx} + (2\,\mathrm{xe}^{2y} - \mathrm{xcos(xy)} + 2\,\mathrm{y})\,\mathrm{dy} = 0$

Đáp số: $xe^{2y} - \sin(xy) + y^2 + c = 0$

3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy^2 - \cos x\sin x}{y(1 - x^2)};\ y(0) = 2$ **Đáp số:** $y^2 - (1 - \mathrm{x}^2) - \cos^2 x = 3$

4) $(2x + 2y^2) + (4\,\mathrm{xy} + 3\,\mathrm{y}^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$ **Đáp số :** $x^2 + 2\,\mathrm{xy}^2 + y^3 = C$

5) $(2xy + 1) + (x^2 + 4\,\mathrm{y})y' = 0$ **Đáp số:** $x^2y + \mathrm{x} + 2y^2 = C$

6) $(2x + 1 + 2y^2) + (4\,\mathrm{xy} + 3y^2)y' = 0; y(0) = -1$ **Đáp số:** $2xy^2 + y^3 + x^2 + x = -1$

7) $2xy - (4y^2 + \mathrm{xy})y' = 0$

Đáp án: Không có dạng vi phân toàn phần.

8) $(e^x + x) + y\dfrac{dy}{dx} = 0$ Đáp số: $e^x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} = C$

9) $(x^2 + 4y)\,y' = 2xy + 1$

Đáp án: Không có dạng vi phân toàn phần.

10) $(x^3 - 3y^2x)\dfrac{dy}{dx} = y^3 - 3x^2y - y\dfrac{dy}{dx}$ Đáp số: $x^3y - xy^3 + \dfrac{y^2}{2} = C$

11) $x\cos(xy)dy + (y\cos(xy) - 2x)dx = 0;\ y(1) = 2$ Đáp số: $\sin(xy) - x^2 = \sin 2 - 1$

12) $(\sin t + t^2e^y - 3)\dfrac{dy}{dx} + (y\cos t + 2te^y) = 0; y(\dfrac{\pi}{2}) = 0$ Đáp số: $y\sin t + t^2e^y - 3y = \dfrac{\pi^2}{4}$

13) $(3t^2x - x^3) - (t^3 + 3x^2t)\,y' = 0$

Đáp án: Không có dạng vi phân toàn phần.

2.7. Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân sau nếu có dạng phương trình vi phân đẳng cấp:

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x+y}$ Đáp số: $x^2 - 2xy - y^2 = C$

2) $x^2\dfrac{dy}{dx} = y^2 - xy + x^2; y(1) = 2$ Đáp số: $y = x\left(1 - \dfrac{1}{\ln|x| - 1}\right)$

3) $y^2 = (xy - x^2)\dfrac{dx}{dy}$ Đáp số: $\dfrac{y}{x} - \ln|y| = C$

4) $S\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{t^2 + S^2}{t}; S(2) = 1$ Đáp án: $S(t) = t\left(\ln(\dfrac{t}{2})^2 + \dfrac{1}{4}\right)$

5) $x\dfrac{dx}{dy} = 2y\dfrac{dx}{dy} + x - 3$

Đáp án: Không có dạng đẳng cấp

6) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\cos(xy) - 1}{xy}$

Đáp án: Không có dạng đẳng cấp

7) $t\dfrac{dx}{dt} = t + 2x$ Đáp số: $x = ct^2 - t$

8) $(x^2 + y^2)dy + 2xydx = 0$ Đáp số: $y^3 + 3yx^2 = C$

9) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - 6x}{2x - y}; y(0) = 1$ Đáp số: $(y - 3x)^{\frac{1}{5}}(y + 2x)^{\frac{4}{5}} = 1$

10) $x^2\dfrac{dy}{dx}-(4x^2+xy+y^2)=0; y(1)=-1$ Đáp số: $y=2xtg\left(x\ln|x|+acrtg\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

2.8. Giải các phương trình Bernaulli:

1) $x\dfrac{dy}{dx}+y=x^2y^2$ Đáp số: $y=\dfrac{1}{-x^2+cx}$

2) $x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{y^2}$ Đáp số: $y^3=1+cx^{-3}$

3) $\dfrac{dy}{dx}=y(xy^3-1)$ Đáp số: $y^{-3}=x+\dfrac{1}{3}+ce^{3x}$

4) $t^2\dfrac{dy}{dt}+y^2=ty$ Đáp số: $e^{\frac{t}{y}}=ct$

5) $x^2\dfrac{dy}{dx}-2xy=3y^4; y(1)=\dfrac{1}{2}$ Đáp số: $y^{-3}=-\dfrac{9}{5}x^t+\dfrac{49}{5}x^{-6}$

Chương 3
PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

3.1. Phép biến đổi Laplace

3.1.1. Định nghĩa phép biến đổi Laplace

Định nghĩa 1. Phép biến đổi Laplace ký hiệu: L là một quy luật liên kết hàm $f(t)$ với một hàm $F(s)$ xác định bởi:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (1)$$

$F(s)$ gọi là biến đổi Laplace của hàm $f(t)$

$f(t)$ gọi là biến đổi Laplace ngược của hàm $F(s)$

Cặp $f(t), F(s)$ gọi là cặp biến đổi Laplace.

Định nghĩa 2.(Hàm gốc)

Hàm biến thực $f(t)$ gọi là hàm gốc nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

1) $f(t) = 0, \forall t < 0$

2) $f(t)$ liên tục từng khúc khi $t > 0$

3) $f(t)$ không tăng nhanh hơn hàm mũ khi $t \to \infty$, nghĩa là:

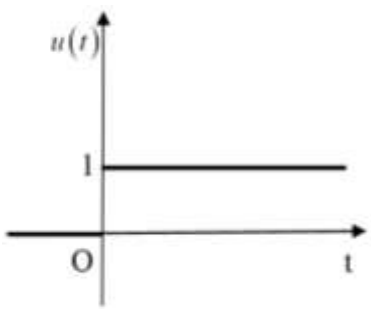
$(\exists M > 0)(s_0 \ge 0)(\forall t > 0)$ sao cho $|f(t)| \le Me^{s_0 t}$, s_0 gọi là chỉ số tăng của $f(t)$.

Ví dụ 1. Hàm

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } t < 0 \\ 1 \text{ nếu } t > 0 \end{cases}$$

là hàm gốc.

Thật vậy, vì $|u(t)| \le 1$ nên điều kiện 1, 2 được thỏa mãn. Chọn $M = 1, s_0 = 0$ dễ dàng kiểm tra được điều kiện 3 cũng thỏa mãn.



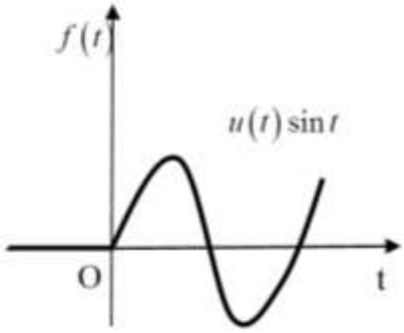
Hình 3.1. Biểu diễn đồ thị hàm số

Ví dụ 2. Hàm

$$f(t) = u(t)\sin t = \begin{cases} 0 \text{ nếu } \ t < 0 \\ \sin t \text{ nếu } \ t > 0 \end{cases}$$

là hàm gốc.

Thật vậy, vì $|u(t)\sin t| \le 1$ nên điều kiện 1, 2 được thỏa mãn. Chọn $M = 1, s_0 = 0$ dễ dàng kiểm tra được điều kiện 3 cũng thỏa mãn.



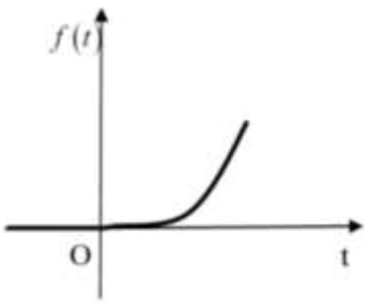
Hình 3.2. Biểu diễn đồ thị hàm số

Ví dụ 3. Hàm

$$f(t) = u(t)t^2 = \begin{cases} 0 \text{ nếu } \ t < 0 \\ t^2 \text{ nếu } \ > 0 \end{cases}$$

là hàm gốc.

Thật vậy, vì $|u(t)t^2| \le 2e^t$ nên điều kiện 1, 2 được thỏa mãn. Chọn $M = 2, s_0 = 1$ dễ dàng kiểm tra được điều kiện 3 cũng thỏa mãn.



Hình 3.3. Biểu diễn đồ thị hàm số

3.1.2. Điều kiện đủ để tồn tại phép biến đổi Laplace.

1) Điều kiện cần

Phép biến đổi Laplace tồn tại nếu tích phân (1) hội tụ khi s ở trong một khoảng nào đó (gọi là khoảng hội tụ)

2) Điều kiện đủ

Định lý. Nếu hàm $f(t)$ liên tục từng khúc trên mọi khoảng hữu hạn $0 \le t \le N$ và có hoành độ hội tụ s_0 khi $t > N$ thì biến đổi Laplace $F(s)$ của nó tồn tại $\forall s > s_0$.

3.1.3. Phép biến đổi Laplace của một số hàm số cơ bản.

1) Hàm bậc thang đơn vị $u(t)$

Định nghĩa. (Hàm bậc thang đơn vị)

Hàm $u(t)=\begin{cases}0 \text{ nếu } t<0\\ 1 \text{ nếu } t>0\end{cases}$ được gọi là hàm bậc thang đơn vị.

Đồ thị của $u(t)$ là hình 3.1

Ta có: $L\{u(t)\}=\int_0^{+\infty}1.e^{-st}dt=\frac{1}{s},\ s>0$

2) Hàm mũ e^{-at}

$$L\{e^{-at}\}=\int_0^{\infty}e^{-at}e^{-st}dt=\frac{1}{s+a}, s>-a$$

Vậy $L\{e^{-at}\}=\frac{1}{s+a}, s>-a$

Ví dụ 1. Tìm biến đổi Laplace của các hàm sau:

a) e^{-5t} b) e^{3t} c) $e^{\frac{1}{2}t}$

Giải

a) $L\{e^{-5t}\}=\frac{1}{s+5}, s>-5$

b) $L\{e^{3t}\}=\frac{1}{s-3}, s>3$

c) $L\left\{e^{\frac{1}{2}t}\right\}=\frac{1}{s-\frac{1}{2}}=\frac{2}{2s-1}, s>\frac{1}{2}$

3) Hàm lượng giác $\cos at, \sin at$

$$L\{\cos at\}=\int_0^{+\infty}\cos at\, e^{-st}dt=\frac{s}{s^2+a^2}, s>0$$

$$L\{\sin at\}=\int_0^{+\infty}\sin at\, e^{-st}dt=\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$$

Ví dụ 2. Tìm biến đổi Laplace của các hàm sau:

a) $\sin t$ b) $\cos 2t$ c) $\sin(-3t)$

Giải

a) $L\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}, s>0$

b) $L\{\cos 2t\}=\frac{s}{s^2+4}, s>0$

c) $L\{\sin(-3t)\} = \dfrac{-3}{s^2+9}, s>0$

4) Hàm lũy thừa $t^n, n \in ¥$

$$L\{t^n\} = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt = \frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$$

Ví dụ 3.Tìm biến đổi Laplace của các hàm sau:

a) f(t)=1 b) f(t)= t c) f(t)= t^3

d) $f(t) = 4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}$ e) $f(t) = t - e^{-2t}\sin 4t$

Giải

a) $L\{1\} = \dfrac{1}{s}, s>0$

b) $L\{t\} = \dfrac{1}{s^2}, s>0$

c) $L\{t^3\} = \dfrac{3!}{s^4} = \dfrac{6}{s^4}, s>0$

d) Ta có:

$L\{t^2\} = \dfrac{2}{s^3}$ $L\{\cos 2t\} = \dfrac{s}{s^2+4}$ $L\{e^{-t}\} = \dfrac{1}{s+1}$

vậy $L\{f(t)\} = \dfrac{8}{s^3} - \dfrac{3s}{s^2+4} + \dfrac{5}{s+1}, s>0$

e) Ta có

$L\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$ $L\{\sin 4t\} = \dfrac{4}{s^2+16}$

$$\Rightarrow L\{e^{-2t}\sin 4t\} = \frac{4}{(s+2)^2+4^2} = \frac{4}{s^2+2s+20}$$

Vậy $L\{f(t)\} = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{4}{s^2+2s+20}, s>0$

3.1.4. Phép biến đổi Laplace ngược

1) Định nghĩa

Định nghĩa. Cho hàm $F(s)$ nếu tồn tại một hàm $f(t)$ sao cho $L\{f(t)\} = F(s)$ thì $f(t)$ gọi là biến đổi Laplace ngược của hàm $F(s)$. Ký hiệu $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ }

Ví dụ. Ta có $L\{e^{-3t}\} = \dfrac{1}{s+3} \Rightarrow L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$

2) Các tính chất của phép biến đổi Laplace ngược

a) Tính chất tuyến tính

Định lý 1. $L^{-1}\{c_1F_1(s) + c_2F_2(s)\} = c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$

Ví dụ 1. Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm $F(s)=\frac{4}{s-2}-\frac{3s}{s^2+16}+\frac{5}{s^2+4}$

Giải

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}-\frac{3s}{s^2+16}+\frac{5}{s^2+4}\right\}=4e^{2t}-3\cos 4t+\frac{5}{2}\sin 2t$$

b)Tính chất dời thứ nhất (dời theo s)

Định lý 2.

$$L^{-1}\{F(s+a)\}=e^{-at}f(t)=e^{-at}L^{-1}\{F(s)\}$$

hay $L^{-1}\{F(s)\}=e^{-at}L^{-1}\{F(s-a)\}$

Ví dụ 2. Tìm $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\}$

Giải

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)^2+2^2};F(s+1)=\frac{1}{s^2+2^2}$$

$$L^{-1}\{F(s+1)\}=\frac{1}{2}\sin 2t\Rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2}e^{t}\sin 2t$$

c)Tính chất dời thứ hai (dời theo t)

Định lý 3. $L^{-1}\{e^{-\mathrm{as}}F(s)\}=f(t-a)u(t-a)$

Ví dụ 3. Tìm $L^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\}$

Giải

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\}=\frac{e^{2t}t^3}{3!}=\frac{1}{6}e^{2t}t^3$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\}=\frac{1}{6}e^{2(t-5)}(t-5)^3u(t-5)$$

d) Tính chất đổi thang đo

Định lý 4. $L^{-1}\{F(\mathrm{as})\}=\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right),\ (a>0)$

Ví dụ 4. Tìm $L^{-1}\left\{\frac{2s}{4s^2+16}\right\}$

Giải

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}=cos4t\Rightarrow f(t)=\frac{1}{2}\cos\frac{4t}{2}=\frac{1}{2}cos2t$$

e) Biến đổi Laplace ngược của đạo hàm

Định lý 5. $L^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\}=(-1)^n t^n L^{-1}\left\{F(s)\right\}$

hay $L^{-1}\left\{F(s)\right\}=\dfrac{(-1)^n}{t^n}L^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\}$

Vậy để tìm biến đổi Laplace ngược của đạo hàm ta thực hiện theo các bước sau:

1) Tính đạo hàm cấp n của $F(s)$

2) Tìm biến đổi Laplace ngược của đạo hàm đó

3) Nhân kết quả tìm được với $\dfrac{(-1)^n}{t^n}$

Ví dụ 5. Tìm $f(t)$ nếu $F(s)=\ln\dfrac{s+1}{s-1}$

Giải

$F'(s)=\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s-1}$

$L^{-1}\left\{F'(s)\right\}=e^{-t}-e^{t}=-2sht$

$\Rightarrow L^{-1}\left\{F(s)\right\}=\dfrac{-1}{t}(-2sht)=\dfrac{2sht}{t}$

f) Biến đổi Laplace ngược của tích phân

Định lý 6. $L^{-1}\left\{\int_s^{+\infty}F(u)du\right\}=\dfrac{1}{t}L^{-1}\left\{F(s)\right\}$

Hay $L^{-1}\left\{F(s)\right\}=t\,L^{-1}\left\{\int_s^{+\infty}F(u)du\right\}$

Ví dụ 6. Tìm $f(t)$ nếu $F(s)=\dfrac{s}{\left(s^2-1\right)^2}$

Giải

$\int_s^{+\infty}F(u)\,du=\int_s^{+\infty}\dfrac{u}{\left(u^2-1\right)^2}du=\dfrac{1}{2\left(s^2-1\right)}$

$L^{-1}\left\{\dfrac{1}{2\left(s^2-1\right)}\right\}=\dfrac{1}{2}sht\Rightarrow L^{-1}\left\{F(s)\right\}=\dfrac{1}{2}t\,sht$

g) Nhân với s^n

Định lý 7. $L^{-1}\left\{s^nF(s)\right\}=f^{(n)}(t)=\dfrac{d^n}{dt^n}L^{-1}\left\{F(s)\right\}$

Ví dụ 7. Tìm $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\}$

Giải

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t=f(t)$$

$$f'(t)=\cos 2t \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}=\cos 2t$$

h) Chia cho s^n

Định lý 8. $L^{-1}\left\{\dfrac{F(s)}{s^n}\right\}=\int_0^t \int_0^t . \int_0^t L^{-1}\{F(s)\}dt^n$

Ví dụ 8. Tìm $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right\}$

Giải

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t=f(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}=\int_0^t \frac{1}{2}\sin 2u du=\frac{1-\cos 2t}{4}$$

m) Tích chập

Định lý 9. Nếu $L^{-1}\{F(s)\}=f(t);L^{-1}\{G(s)\}=g(t)$ thì

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=f(t)*g(t)$$

Ví dụ 9. Tìm $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}$

Giải

Ta có

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^t;L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=e^{2t}$$

suy ra

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}=e^t*e^{2t}=\int_0^t e^u e^{2(t-u)}du=e^{2t}-e^t$$

3.2. Các tính chất của phép biến đổi Laplace

3.2.1. Tính chất tuyến tính

Định lý 1. Nếu $F_1(s), F_2(s)$ lần lượt là biến đổi Laplace của các hàm $f_1(t), f_2(t)$ và $c_1, c_2 = const$. Khi đó

$$L\left\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

Chứng minh

$$L\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = \int_0^{+\infty} \left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] e^{-st} dt =$$

$$c_1 \int_0^{+\infty} f_1(t) e^{-st} dt + c_2 \int_0^{+\infty} f_2(t) e^{-st} dt = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

Ví dụ 1.Tìm biến đổi Laplace của hàm $f(t) = 4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}$

Giải: Ta có

$$L\left\{f(t)\right\} = L\left\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\right\} = 4L\left\{t^2\right\} - 3L\left\{\cos 2t\right\} + 5L\left\{e^{-t}\right\}.$$

Mà

$$L\left\{t^2\right\} = \frac{2!}{s^3};\ L\left\{\cos 2t\right\} = \frac{s}{s^2+4}; L\left\{e^{-t}\right\} = \frac{1}{s+1}$$

Vậy

$$L\left\{f(t)\right\} = 4\frac{2!}{s^3} - 3\frac{s}{s^2+4} + 5\frac{1}{s+1} = \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1}, \quad s > 0$$

Ví dụ 2. Tìm biến đổi Laplace của hàm $f(t) = 2t^2 - e^{2t} + \frac{1}{3}\sin 3t$

Giải: Ta có

$$L\left\{f(t)\right\} = L\left\{2t^2 - e^{2t} + \frac{1}{3}\sin 3t\right\} = 2L\left\{t^2\right\} - L\left\{e^{-(-2)t}\right\} + \frac{1}{3}L\left\{\sin 3t\right\}$$

mà:

$$L\left\{t^2\right\} = \frac{2!}{s^3}; L\left\{e^{-(-2)t}\right\} = \frac{1}{s-2}; L\left\{\sin 3t\right\} = \frac{3}{s^2+9}$$

Suy ra $L\left\{f(t)\right\} = \frac{4}{s^3} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2+9},\ s > 2$

Ví dụ 3. Tìm biến đổi Laplace của hàm $f(t) = 3t^4 - 2t^3 + \cos 2t - \frac{1}{3}e^t$

Giải

$$L\left\{3t^4\right\} = 3\frac{4!}{s^5} = \frac{72}{s^5};\ L\left\{2t^3\right\} = 2\frac{3!}{s^4} = \frac{12}{s^4}$$

$L\left\{\frac{1}{3}e^t\right\} = \frac{1}{3}\frac{1}{s-1},\ s>1$; $L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$

Suy ra $L\{f(t)\} = \frac{72}{s^5} - \frac{12}{s^4} + \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{3(s-1)},\ s>1$

3.2.2. Tính chất dời thứ nhất (dời theo s)

Định lý 2. Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ thì $L\{e^{-at}f(t)\} = F(a+s)\}$

Chứng minh

$$L\{e^{-at}f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)e^{-(s+a)t}dt = F(a+s)$$

Định lý này được diễn tả như sau: biến đổi Laplace của e^{-at} nhân với một hàm $f(t)$ sẽ bằng biến đổi Laplace $F(s)$ của $f(t)$, với s thay bởi $s+a$. Từ đó, ta có các công thức quan trọng sau:

$$L\{e^{-at}\cos bt\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}, s>-a$$

$$L\{e^{-at}\sin bt\} = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}, s>-a$$

$$L\{e^{-at}t^n\} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, s>-a$$

Ví dụ 4. Tìm $L\{t^2e^{3t}\}$

Giải

$$L\{t^2e^{3t}\} = \frac{2!}{(s-3)^3} = \frac{2}{(s-3)^3},\ \ s>3$$

Ví dụ 5. Tìm biến đổi Laplace của hàm $f(t) = t^2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} + \cos 2t$

Giải

$$L\{t^2\} = \frac{2}{s^3} \Rightarrow L\{t^2e^{-t}\} = \frac{2}{(s+1)^3}$$

$$L\left\{\frac{3}{2}e^{-3t}\right\} = \frac{3}{2}\frac{1}{s+3}; L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{3}{2s+6} + \frac{s}{s^2+4},\ s>0$$

Ví dụ 6. Tìm biến đổi Laplace của hàm $f(t) = e^{-2t}\sin 4t$

Giải

Ta có $L\{\sin 4t\} = \dfrac{4}{s^2+4^2}$

suy ra $L\{e^{-2t}\sin 4t\} = \dfrac{4}{(s+2)^2+4^2} = \dfrac{4}{s^2+4s+20}$

Ví dụ 7. Tìm biến đổi Laplace của hàm $f(t) = e^{-t}\cos 2t$

Giải

Ta có $L\{\cos 2t\} = \dfrac{s}{s^2+4^2}$

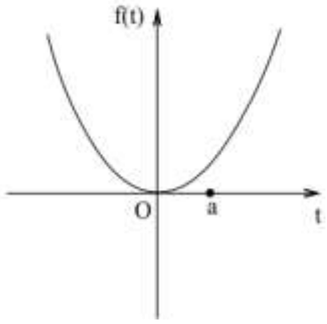
suy ra $L\{e^{-t}\cos 2t\} = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+4^2} = \dfrac{s+1}{s^2+2s+17}$

3.2.3. Tính chất dời thứ hai (dời theo t)

Định lý 3. Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ thì $L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

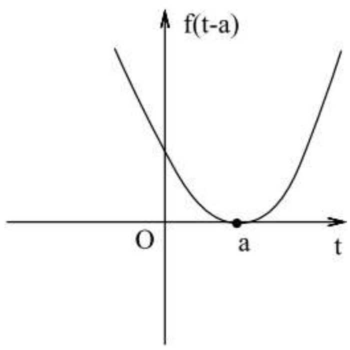
trong đó $u(t-a) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } t < a \\ 1 \text{ nếu } t > a \end{cases}$

Ta thử xét xem đồ thị của hàm $f(t-a)u(t-a)$ được suy ra từ đồ thị của hàm $f(t)$ như thế nào. Để định vị trí, xét hàm $f(t) = t^2$ có đồ thị như sau:



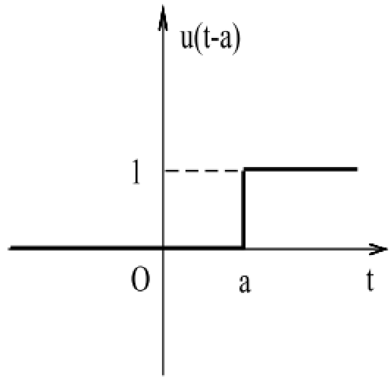
Hình 3.4. Biểu diễn đồ thị hàm số f(t)=t²

Ta có đồ thị của hàm $f(t-a) = (t-a)^2$ là



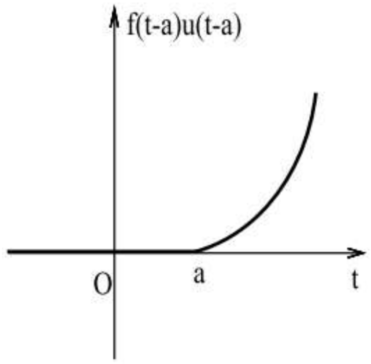
Hình 3.5. Biểu diễn đồ thị hàm số f(t-a)=(t-a)²

Như vậy, từ đồ thị của hàm $f(t) = t^2$ dời một khoảng là a ta được đồ thị của hàm $f(t-a) = (t-a)^2$. Mặt khác, đồ thị của hàm $u(t-a)$ là



Hình 3.6. Biểu diễn đồ thị hàm số u(t-a)

Nhân hàm $(t-a)^2$ với $u(t-a)$ ta được hàm $f(t-a)u(t-a)$



Hình 3.7. Biểu diễn đồ thị hàm số f(t-a)u(t-a)

Vậy từ đồ thị của hàm $f(t)$ ta dời một khoảng là a rồi cắt bỏ phía trái thì được đồ thị của hàm $f(t-a)u(t-a)$

Ví dụ 8. Tìm $F(s)$ nếu

$$f(t)=\begin{cases}\cos\left(t-\dfrac{2\pi}{3}\right) \text{nếu } t>\dfrac{2\pi}{3}\\ 0 \text{ nếu } t<\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$$

Giải : $L\{\cos t\}=\dfrac{s}{s^2+1}$ suy ra $L\{f(t)\}=\dfrac{se^{-\frac{2\pi s}{3}}}{s^2+1}$

3.2.4. Tính chất đổi thang đo

Định lý 4. Nếu $L\{f(t)\}=F(s)$ thì $L\{f(at)\}=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right),\ a>0$

Chứng minh

Đặt $x=at \Rightarrow dt=\dfrac{dx}{a}$. Ta có:

$$L\{f(at)\}=\int_0^\infty f(at)e^{-st}dt=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(x)e^{-\frac{sx}{a}}dx=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Ví dụ 9. Biết $L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \arctan\frac{1}{s}$, tìm $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$

Giải

Ta có: $L\left\{\frac{\sin at}{at}\right\} = \frac{1}{a}L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \frac{1}{a}\arctan\frac{1}{(s/a)} = \frac{1}{a}\arctan\frac{a}{s}$.

Vậy $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \arctan\frac{a}{s}$

3.2.5. Biến đổi Laplace của đạo hàm

Định lý 5. Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ thì :

$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

$L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

....

$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - . - f^{(n-1)}(0)$

Ví dụ 10.Tìm $L\{\sin at\}$

Giải

$f(t) = \sin at \Rightarrow f'(t) = a\cos at,\ f''(t) = -a^2\sin at$

suy ra $f(0) = 0;\ f'(0) = a$

Vậy $L\{-a^2\sin at\} = s^2F(s) - s.0 - a \Rightarrow F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$

3.2.6. Biến đổi Laplace của tích phân

Định lý 6. Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ thì $L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$

Chứng minh

Đặt $g(t) = \int_0^t f(u)du \Rightarrow g'(t) = f(t), g(0) = 0$ suy ra

$L\{g'(t)\} = sG(s) - g(0) = sG(s) = L\{f(t)\} = F(s)$.

Vậy $G(s) = \frac{F(s)}{s}$ hay $L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$

Ví dụ 11. Tìm $L\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}du\right\}$

Giải

$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \arctan\frac{1}{s}$ **suy ra** $L\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}du\right\} = \frac{1}{s}\arctan\frac{1}{s}$

3.2.7. Nhân với t^n

Định lý 7. Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ **thì** $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$

Chứng minh

Ta có $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

Dùng quy tắc đạo hàm dưới dấu tích phân:

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds}\left[f(t)e^{-st}\right]dt$$

$$= \int_0^{\infty} -tf(t)e^{-st}dt = -L\{tf(t)\}$$

Vậy công thức đúng với $n = 1$. Dùng quy nạp suy ra định lý được chứng minh.

Ví dụ 12. Tìm biến đổi Laplace của hàm $f(t) = tsinat$

Giải

$$L\{t\sin at\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = \frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$$

Ví dụ 13. Tìm biến đổi Laplace của hàm $f(t) = t^2cosat$

Giải

$$L\{t^2\cos at\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{2s^3-6a^2s}{\left(s^2+a^2\right)^3}$$

3.2.8. Biến đổi Laplace của tích chập

Định nghĩa. Cho hai hàm $f(t), g(t),\ t \ge 0$. Tích chập của f và g là một hàm ký hiệu là

$f * g$ xác định bởi công thức:

$$f * g = \int_o^t f(u)g(t-u)du$$

*) Tính chất của tích chập:

1) $f(t)*g(t) = g(t)*f(t)$

2) Nếu $f(t)$ và $g(t)$ là các hàm gốc thì $f(t)*g(t)$ cũng là hàm gốc.

Định lý 9. Nếu $L\{f(t)\} = F(s)$ và $L\{g(t)\} = G(s)$. thì

$L\{f(t)*g(t)\} = F(s)G(s)$

Ví dụ 16. Tìm $L\{t*\sin t\}$

Giải

$$L\{t*\sin t\} = L\{t\}\, L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$$

3.2.9. Biến đổi Laplace của hàm tuần hoàn

Định lý 8. Nếu $f(t)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T > 0$ thì

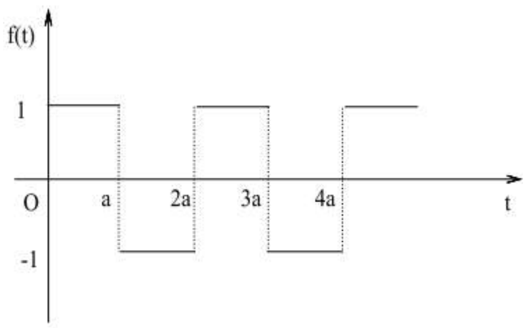
$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$$

Ví dụ 14. Tìm biến đổi Laplace của hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ $2a$ sau:

Giải

$$\int_0^{2a} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^a e^{-st}dt - \int_a^{2a} e^{-st}dt = \frac{\left(e^{-as}-1\right)^2}{s}$$ suy ra

$$L\{f(t)\} = \frac{\left(e^{-as}-1\right)^2}{s\left(1-e^{-2as}\right)} = \frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}$$



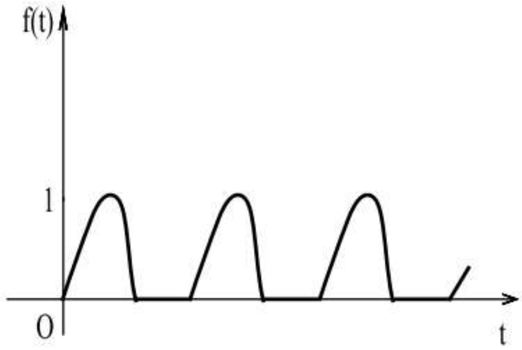
Hình 3.8. Biểu diễn đồ thị hàm số f(t)

Ví dụ 15. Cho

$$f(t) = \begin{cases} \sin t \text{ nếu } 0 < t < \pi \\ 0 \text{ nếu } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Vẽ đồ thị của $f(t)$ (đường sin chỉnh lưu bán sóng) và tìm $L\{f(t)\}$

Giải



Hình 3.9. Biểu diễn đồ thị hàm số f(t)

Ta có:

$$\int_0^{2\pi} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st}\,0\,dt = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

Suy ra

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1} = \frac{1}{\left(1-e^{-\pi s}\right)\left(s^2+1\right)}$$

3.3. Cách tìm hàm gốc và ứng dụng

3.3.1. Sử dụng tính chất của biến đổi thuận và tính duy nhất của biến đổi ngược

Ví dụ 1. Tìm $L^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\} = f(t)$

Giải

Ta có $\frac{6s-4}{s^2-4s+20} = \frac{6(s-2)+8}{(s-2)^2+16} = 6\frac{s-2}{(s-2)^2+4} + 2\frac{4}{(s-2)^2+4}$

suy ra $f(t) = e^{2t}(6\cos 4t + 2\sin 4t)$

Ví dụ 2. Tìm $L^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\} = f(t)$

Giải

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\} = \frac{e^{2t}t^3}{3!} = \frac{1}{6}t^3e^{2t}$$

$$\Rightarrow f(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\} = \frac{1}{6}(t-5)^3 e^{2(t-5)}u(t-5)$$

Ví dụ 3. Tìm $f(t)$ biết $F(s) = \ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$

Giải

Ta có $F'(s)=\dfrac{-2}{s\left(s^2+1\right)}=-2\left[\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+1}\right]$

$L^{-1}\left\{F'(s)\right\}=-2\left[u(t)-\cos t\right]$

$\Rightarrow L^{-1}\left\{F(s)\right\}=\dfrac{-1}{t}L^{-1}\left\{F'(s)\right\}=\dfrac{2\left[u(t)-\cos t\right]}{t}$

3.3.2. Khai triển Heaviside.

Một vấn đề quan trọng là tìm biến đổi Laplace ngược của phân thức hữu tỉ $F(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$, trong đó $\deg P(s)<\deg Q(s)$. Tương tự như phương pháp khai triển phân thức khi tính tích phân, ta khai triển $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ thành tổng các phân số sơ cấp rồi tìm biến đổi Laplace của các phân số sơ cấp đó. Phương pháp tìm biến đổi Laplace ngược như trên gọi là phương pháp khai triển Heaviside (Oliver Heaviside (1850-1925) là một kỹ sư người Anh).

1) Trường hợp : Q(s) chỉ có nghiệm đơn

Định lý 1. Cho $P(s)$, $Q(s)$ là hai đa thức $\deg P(s)<\deg Q(s)$. Giả sử $Q(s)$ có n nghiệm thực phân biệt $a_1,a_2,..,a_n$. Khi đó:

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(a_k)e^{a_kt}}{Q'(a_k)}$$

Ví dụ 1. Tìm $L^{-1}\left\{\dfrac{s^2+2}{s(s+1)(s+2)}\right\}$

Giải

Ta có $P(s)=s^2+2,\ Q(s)=s(s+1)(s+2)$ có 3 nghiệm thực phân biệt là $s=0;\ s=-1; s=-2$

$P(0)=2; P(-1)=3; P(-2)=6$

$Q'(s)=3s^2+6s+2\ \Rightarrow Q'(0)=2; Q'(-1)=-1; Q'(-2)=2$

$\Rightarrow f(t)=1-3e^{-t}+3e^{-2t}$

Ví dụ 2. Tìm $L^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{s^2-2s-3}\right\}$

Giải

Ta có $P(s)=3s+2,\ Q(s)=s^2-2s-3$ có 2 nghiệm thực là $s=-1;\ s=3$

$Q'(s)=2s-2\ \Rightarrow Q'(-1)=-4; Q'(3)=4$

$P(-1) = -1; P(3) = 11$

$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{11}{4}e^{3t}$

Ví dụ 3. Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm

$$F(s) = \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)}$$

Giải

Ta có:

$P(s) = 2s^2 - 4; Q(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6$ có 3 nghiệm thực phân biệt là $s = -1; s = 2; s = 3$

$Q'(s) = 3s^2 - 8s + 1$

$Q'(-1) = 12; Q'(2) = -3; Q'(3) = 4$

$P(-1) = -2; P(2) = 4; P(3) = 14$

Vậy $f(t) = \frac{-1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}$

2) Trường hợp : Q(s) có nghiệm thực bội

Định lý 2. Giả sử Q(s) có nghiệm thực $s = a$ bội m (nghĩa là Q(s) chứa thừa số $(s-a)^m$). Khi đó số hạng của $f(t)$ ứng với $(s-a)^m$ là:

$$e^{at}\left[\frac{A_1 t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{A_2 t^{m-2}}{(m-2)!} + . + A_m\right]$$

trong đó $A_k = \lim\limits_{s \to a}\left\{\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left[(s-a)^m F(s)\right]\right\}, \ k = 1, 2, , m$

Ví dụ 4. Tìm $L^{-1}\left\{\frac{5s^2 - 15s - 11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$

Giải

$P(s) = 5s^2 - 15s - 11, \ Q(s) = (s+1)(s-2)^3 = s^4 - 5s^3 + 6s^2 + 4s - 8$

$Q'(s) = 4s^3 - 15s^2 + 12s + 4$

Với nghiệm $s = -1$

$Q'(-1) = -27; P(-1) = 9$

Số hạng của $f(t)$ ứng với $s = -1$ là: $\frac{9}{-27}e^{-t} = \frac{-1}{3}e^{-t}$

Với nghiệm $s = 2$ (bội 3)

ta có $(s-2)^3 F(s) = \dfrac{5s^2 - 15s - 11}{s+1}$

$\dfrac{d}{ds}\left[(s-2)^3 F(s)\right] = \dfrac{5s^2 + 10s - 4}{(s+1)^2}$

$\dfrac{d^2}{ds^2}\left[(s-2)^3 F(s)\right] = \dfrac{18}{(s+1)^3}$

$A_1 = \lim\limits_{s \to 2} \dfrac{1}{0!} \dfrac{5s^2 - 15s - 11}{s+1} = -7$

$A_2 = \lim\limits_{s \to 2} \dfrac{1}{1!} \dfrac{5s^2 + 10s - 4}{(s+1)^2} = 4$

$A_3 = \lim\limits_{s \to 2} \dfrac{1}{2!} \dfrac{18}{(s+1)^3} = \dfrac{1}{3}$

Suy ra số hạng của $f(t)$ ứng với $s = 2$ là:

$e^{2t}\left(\dfrac{-7t^2}{2!} + \dfrac{4t}{1!} + \dfrac{1}{3}\right) = e^{2t}\left(\dfrac{-7t^2}{2} + 4t + \dfrac{1}{3}\right).$

Vậy $f(t) = \dfrac{-1}{3} e^{-t} + e^{2t}\left(\dfrac{-7t^2}{2} + 4t + \dfrac{1}{3}\right)$

3) Trường hợp: Q(s) có một cặp nghiệm phức đơn liên hợp

Giả sử Q(s) có một cặp nghiệm phức đơn liên hợp $s = -a \pm ib$ (nghĩa là Q(s) chứa thừa số

$(s+a)^2 + b^2$). Khi đó số hạng của $f(t)$ ứng với $(s+a)^2 + b^2$ là:

$\dfrac{e^{-at}}{b}\left(\phi_{\mathrm{Im}} \cos bt + \phi_{\mathrm{Re}} \sin bt\right)$

trong đó $\phi_{\mathrm{Re}}, \phi_{\mathrm{Im}}$ lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $\phi(-a+ib)$ với

$\phi(s) = \left[(s+a)^2 + b^2\right].F(s)$

Ví dụ 5. Tìm $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2 + 2s + 10)(s+2)^2}\right\}$

Giải

Ta có: $F(s) = \dfrac{s}{\left((s+1)^2 + 3^2\right)(s+2)^2}$

$\phi(s) = \left[(s+1)^2 + 3^2\right].F(s) = \dfrac{s}{(s+2)^2}$

$$-a \pm ib = -1 \pm 3i \Rightarrow \phi(-1+3i) = \frac{-1+3i}{(-1+3i+2)^2} = \frac{13}{50} - i\frac{9}{50} \;\Rightarrow\; \phi_{\mathrm{Re}} = \frac{13}{50}, \phi_{\mathrm{Im}} = \frac{-9}{50}$$

Do đó số hạng của $f(t)$ ứng với $(s+1)^2 + 3^2$ là: $\dfrac{e^{-t}}{3}\left[\dfrac{-9}{50}\cos 3t - \dfrac{13}{50}\sin 3t\right]$

+) Ta có: $A_1 = \lim\limits_{s \to -2} \dfrac{s}{s^2 + 2s + 10} = \dfrac{-1}{5}$;

$$A_2 = \lim_{s \to -2} \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+2s+10}\right) = \lim_{s \to -2} \frac{s^2+2s+10 - s(2s+2)}{(s^2+2s+10)^2} = \frac{3}{50}$$

Suy ra số hạng của $f(t)$ ứng với số hạng $(s+2)^2$ là:

$$e^{-2t}\left(\frac{-1}{5}t + \frac{3}{50}\right) = \left(\frac{3-10t}{50}\right)e^{-2t}$$

Vậy $f(t) = \dfrac{(3-10t)}{50}e^{-2t} + \dfrac{e^{t}}{3}\left[\dfrac{-9}{50}\cos 3t - \dfrac{13}{50}\sin 3t\right]$

3.3.3. Ứng dụng giải phương trình vi phân.

1) Ứng dụng giải phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng

Giải phương trình

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + . + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t) \qquad (2)$$

thỏa mãn các điều kiện ban đầu:

$$x(0) = x_0; x'(0) = x_1;; x^{(n-1)}(0) = x_{n-1},\ a_0 \neq 0 \qquad (3)$$

Hàm $f(t)$, nghiệm $x(t)$ cùng với $x^{(k)}(t), k = 1,2,,n$ là các hàm gốc.

Cách giải:

+) Bước 1: Dùng phép biến đổi Laplace đưa phương trình (2) về **phương** trình đại số biến s.

Đặt $X(s) = L\{x(t)\},\ F(s) = L\{f(t)\}$

Áp dụng công thức biến đổi Laplace của đạo hàm với điều kiện ban đầu (3) ta có:

$$L\{a_0 x(t)\} = a_0 X(s)$$

$$L\{a_1 x'(t)\} = a_1\left[sX(s) - x_0\right]$$

....

$$L\{a_n x^{(n)}(t)\} = a_n\left[s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - . - s x_{n-2} - x_{n-1}\right]$$

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + . + a_1 s + a_0\right)X(s)$$

$$= F(s) + x_0\left(a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + . + a_1\right)$$

$+x_1\left(a_n s^{n-2}+a_{n-1}s^{n-3}+.+a_2\right)+.+x_{n-1}a_n$

$\Leftrightarrow A(s)X(s)=F(s)+B(s)$ (Phương trình ảnh)

$$\Rightarrow X(s)=\frac{F(s)+B(s)}{A(s)}$$

+) Bước 2: Ảnh ngược $x(t)=L^{-1}\left\{X(s)\right\}$ là nghiệm cần tìm.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $y''+y=t;\ y(0)=1, y'(0)=-2$

Giải

Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình :

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

Theo giả thiết ta có: $y(0)=1, y'(0)=-2$ suy ra

$$s^2Y(s)-s+2+Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

do đó $Y(s)=\dfrac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}+\dfrac{s-2}{s^2+1}=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{3}{s^2+1}$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{Y(s)\right\}=t+\cos t-3\sin t$$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $y'''-2y''+y'=4;\ y(0)=1, y'(0)=2; y''(0)=-2$

Giải

Lấy biến đổi Laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được:

$$L\left\{y(t)\right\}=Y(s); L\left\{y'(t)\right\}=sY(s)-1$$

$$L\left\{y''(t)\right\}=Y(s)-s-2; L\left\{y'''(t)\right\}=s^3Y(s)-s^2-2s+2; L\left\{4\right\}=\frac{4}{s}$$

Thay vào phương trình ta được

$$Y(s)\left(s^3-2s^2+s\right)=\frac{4}{s}+s^2-5$$

suy ra

$$Y(s)=\frac{s^3-5s^2+4}{s^2\left(s-1\right)^2}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta được nghiệm của phương trình là

$$Y(s)=3+4t-4e^t$$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $y''-3y'+2y=4e^{2t};\ y(0)=-3, y'(0)=5$

Giải

Lấy biến đổi Laplace 2 vế của phương trình :

$$\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]-\left[3sY(s)-y(0)\right]+2Y(s)=\frac{4}{s-2}$$

Thay $y(0)=-3, y'(0)=5$ và giải theo $Y(s)$ ta được

$$Y(s)=\frac{s^2+2s+3}{\left(s^2+2s+2\right)\left(s^2+2s+5\right)}$$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{Y(s)\right\}=\frac{1}{3}e^{-t}\left(\sin t+\sin 2t\right)$$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $y^{(3)}-3y''+3y'-y=t^2e^t$; $y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=-2$

Giải

Lấy biến đổi Laplace 2 vế của phương trình:

$$\left[s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)\right]-3\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]$$

$$+3\left[sY(s)-y(0)\right]-Y(s)=\frac{2}{(s-1)^3}$$

Thay $y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=-2$ và giải theo $Y(s)$ ta được

$$Y(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{2}{(s-1)^6}$$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{Y(s)\right\}=e^t-te^t-\frac{t^2e^t}{2}+\frac{t^5e^t}{60}$$

Ví dụ 5. Giải phương trình $y''+4y=2\sin 2t$ với $y(0)=-1; y'(0)=0$

Giải

Lấy biến đổi Laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được:

$$L\left\{y(t)\right\}=Y(s); L\left\{y'(t)\right\}=s^2Y(s)+s; L\left\{2\sin 2t\right\}=\frac{4}{s^2+4}$$

Thay vào phương trình ta được

$$\left(s^2+4\right)Y(s)=\frac{4}{s^2+4}\Rightarrow Y(s)=\frac{4}{\left(s^2+4\right)^2}-\frac{s}{s^2+4}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta được nghiệm của phương trình là

$$y(t)=\frac{\sin 2t}{4}-\frac{(t+2)\cos 2t}{2}$$

Ví dụ 6. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y''+2y'+y=te^{-t}$

Giải

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình ta đặt $y(0)=C_1; y'(0)=C_2$

Lấy biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta được:

$$\left(s^2+2s+1\right)Y\left(s\right)-\left(s+2\right)C_1-C_2=\frac{1}{\left(s+1\right)^2}$$

Suy ra

$$Y\left(s\right)=\frac{1}{\left(s+1\right)^4}+\frac{C_1+C_2}{\left(s+1\right)^2}+\frac{C_1}{s+1}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta được nghiệm của phương trình là

$$y\left(t\right)=\frac{1}{6}t^3e^{-t}+\left(C_1+C_2t\right)e^{-t}$$

Ví dụ 7. Giải phương trình vi phân $x''+5x'+6x=f(t), t\geq 0$

với

$$f(t)=\begin{cases}3 & \text{nếu } 0\leq t<6\\ 0 & \text{nếu } t\geq 6\end{cases}$$

và thỏa mãn điều kiện ban đầu $x(0)=0,\ x'(0)=2$

Giải

Ta có $f(t)=3\left[u(t)-u(t-6)\right]$nên $F(s)=L\left[f(t)\right]=\frac{3}{s}-\frac{3}{s}e^{-6s}$.

Giả sử

$$L\left[x(t)\right]=X(s)\Leftrightarrow L^{-1}\left[X(s)\right]=x(t)$$

Lấy biến đổi Laplace cả hai vế của phương trình đã cho ta được

$$L\left[x''(t)\right]+5L\left[x'(t)\right]+6L\left[x(t)\right]=L\left[f(t)\right]$$

$$\Leftrightarrow s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+5sX(s)-5x(0)+6X(s)=\frac{3}{s}-\frac{3}{s}e^{-6s}$$

$$\Leftrightarrow X(s)(s^2+5s+6)=\frac{3}{s}+2.\frac{3e^{-6s}}{s}$$

$$\Leftrightarrow X(s)=\frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)}-e^{-6s}\frac{3}{s(s+2)(s+3)}$$

$$\Leftrightarrow X(s)=\left(\frac{1}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}\right)-e^{-6s}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{s}-\frac{3}{2}\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược hai vế của đẳng thức cuối cùng ta có

$$L^{-1}\left[X(s)\right]=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t-e^{-3t}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-2(t-6)}+e^{-3(t-6)}\right)u(t-6)\ \ (t\geq 0)$$

Vậy nghiệm của bài toán là

$$x(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t-e^{-3t}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-2(t-6)}+e^{-3(t-6)}\right)u(t-6)\quad (t\geq 0)$$

Ví dụ 8. Giải phương trình vi phân $x''+5x'+6x=f(t)+3f'(t)$

với $f(t) = e^{-t}u(t)$ và các điều kiện ban đầu đều bằng 0.

Giải

Ta có $f(t) = e^{-t}u(t)$ nên $F(s) = L\left[f(t)\right] = \dfrac{1}{s+1}$

Giả sử $L\left[x(t)\right] = X(s) \Leftrightarrow L^{-1}\left[X(s)\right] = x(t)$

Lấy biến đổi Laplace cả hai vế của phương trình đã cho ta được

$$L\left[x''(t)\right] + 5L\left[x'(t)\right] + 6L\left[x(t)\right] = L\left[f(t)\right] + 3L\left[f'(t)\right]$$

$$\Leftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 5sX(s) - 5x(0) + 6X(s) = F(s) + 3sF(s) - 3f(0)$$

$$\Leftrightarrow X(s)(s^2 + 5s + 6) = \frac{1}{s+1} + \frac{3s}{s+1}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{3s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s+2} + \frac{5}{s+3}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược hai vế của đẳng thức cuối cùng ta có

$$L^{-1}\left[X(s)\right] = x(t) = -e^{-t} + 4e^{-2t} - 5e^{-3t} \quad (t \geq 0)$$

Vậy nghiệm của bài toán là

$$x(t) = -e^{-t} + 4e^{-2t} - 5e^{-3t} \quad (t \geq 0)$$

Ví dụ 9. Giải phương trình vi phân $x'' + \lambda^2 x = \cos \lambda t$

với điều kiện ban đầu $x(0) = 1,\quad x\left(\dfrac{\pi}{2\lambda}\right) = 1$

Giải

Giả sử $L\left[x(t)\right] = X(s) \Leftrightarrow L^{-1}\left[X(s)\right] = x(t)$

Lấy biến đổi Laplace cả hai vế của phương trình đã cho ta được

$$L\left[x''(t)\right] + \lambda^2 L\left[x(t)\right] = L\left[\cos \lambda t\right]$$

$$\Leftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + \lambda^2 X(s) = L\left[\cos \lambda t\right]$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu của bài toán ta có

$$(s^2 + \lambda^2)X(s) = s + x'(0) + \frac{s}{s^2 + \lambda^2}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{s}{(s^2 + \lambda^2)^2} + \frac{s}{s^2 + \lambda^2} + \frac{x'(0)}{s^2 + \lambda^2}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\lambda} t \sin \lambda t + \cos \lambda t + \frac{x'(0)}{\lambda} \sin \lambda t$$

Lại có

$$1 = x\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) = \frac{\pi}{4\lambda^2} + \frac{x'(0)}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'(0)}{\lambda} = 1 - \frac{\pi}{4\lambda^2}$$

Khi đó

$$x(t) = \frac{1}{2\lambda} t \sin \lambda t + \cos \lambda t + \left(1 - \frac{\pi}{4\lambda^2}\right) \sin \lambda t$$

Vậy nghiệm cần tìm là

$$x(t) = \frac{1}{2\lambda} t \sin \lambda t + \cos \lambda t + \left(1 - \frac{\pi}{4\lambda^2}\right) \sin \lambda t$$

Ví dụ 10. Giải phương trình vi phân

$$x'' + x = \begin{cases} \sin t & \text{nếu } 0 \le t \le \pi \\ 0 & \text{nếu } t > \pi \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu $x(0) = x'(0) = 0$

Giải: Giả sử $L[x(t)] = X(s) \Leftrightarrow L^{-1}[X(s)] = x(t)$

Lấy biến đổi Laplace cả hai vế của phương trình đã cho ta được

$$L[x''(t)] + L[x(t)] = \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t dt$$

$$= \frac{-e^{-st}}{s^2+1}(s.\sin t + \cos t)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Leftrightarrow s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)^2}$$

Sử dụng kết quả bài toán: Nếu $f(t) = \sin t(1 - u_\pi(t)) = \sin t + u_\pi(t)\sin(t-\pi)$

$$L[f(t)] = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

ta tìm được

$$x(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) + u_\pi(t)\left[\frac{1}{2}(\sin(t-\pi) - (t-\pi)\cos(t-\pi)\right]$$

Vậy nghiệm của bài toán là

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) & \text{nếu } 0 \le t < \pi \\ -\frac{1}{2}\pi\cos t & \text{nếu } t \ge \pi. \end{cases}$$

Ví dụ 11: Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y''' - y = e^t;\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+s+1)(s-1)^2}$$

$$P(s) = 1$$

$$Q(s) = (s^2+s+1)(s-1)^2$$

Có nghiệm thực bội 2 là $s=1$ và 2 nghiệm phức liên hợp là $s = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Số hạng của $y(t)$ ứng với nghiệm bội 2 là $s=1$ là $e^t\left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}\right)$

Số hạng của $y(t)$ ứng với 2 nghiệm phức $s = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ là $\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

Vậy nghiệm của phương trình là $y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + e^t\left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}\right)$

Ví dụ 12**.** Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t};\ y(0) = -3, y'(0) = 5$$

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$$s^2Y(s) + 3s - 5 - 3sY(s) + 9s + 2Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

Vậy nghiệm của phương trình là

2) Ứng dụng giải hệ phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x' = f(x,y) + a(t) \\ y' = g(x,y) + b(t) \end{cases}$ thỏa mãn các điều kiện ban đầu:

$x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Hàm $a(t), b(t)$, nghiệm $x(t), y(t)$ là các hàm gốc.

Cách giải:

+) Bước 1: Thực hiện phép biến đổi Laplace hai vế các phương trình của hệ

Đặt $X(s) = L\{x(t)\}$, $Y(s) = L\{y(t)\}$

Hệ phương trình sẽ tương đương với một hệ đại số tuyến tính của $X(s), Y(s)$. Giải hệ đại số tuyến tính đó ta tìm được $X(s), Y(s)$.

+) Bước 2: Nghiệm của hệ (1) là:

$$\begin{cases} x(t) = L^{-1}\{X(s)\} \\ y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} \end{cases}$$

Ví dụ 1. Giải hệ $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = y - 2x \end{cases}$ với điều kiện ban đầu là: $x(0) = 8, y(0) = 3$

Giải

Lấy biến đổi Laplace 2 vế của các phương trình ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} sX(s) - 8 = 2X(s) - 3Y(s) \\ sY(s) - 3 = Y(s) - 2X(s) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này được

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{5}{s+1} + \dfrac{3}{s-4} \\ Y(s) = \dfrac{5}{s+1} - \dfrac{2}{s-4} \end{cases}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta được nghiệm của hệ ban đầu là

$$\begin{cases} x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t} \\ y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} x' + 3x + y = 0 \\ y' - x + y = 0 \end{cases}$ với điều kiện ban đầu là $x(0) = 1; y(0) = 1$

Giải

Lấy biến đổi Laplace 2 vế của các phương trình ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} (s+3)X(s) + Y(s) = 1 \\ -X(s) + (s+1)Y(s) = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này được

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{s}{(s+2)^2} \\ Y(s) = \dfrac{s+4}{(s+2)^2} \end{cases}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta được nghiệm của hệ ban đầu là\\

$$\begin{cases} x(t) = (1 - 2t)e^{-2t} \\ y(t) = (1 + 2t)e^{-2t} \end{cases}$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} x' - 2y = 0 \\ y' + 2x = t \end{cases}$ với điều kiện ban đầu là $x(0) = y(0) = 0$

Giải

Lấy biến đổi Laplace 2 vế của các phương trình ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} sX(s) - 2Y(s) = \dfrac{1}{s} \\ 2X(s) + sY(s) = \dfrac{1}{s^2} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này được:

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{s^2 + 2}{(s^2 + 4)s^2} \\ Y(s) = \dfrac{-1}{(s^2 + 4)s} \end{cases}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta được nghiệm của hệ ban đầu là:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin 2t}{4} \\ y(t) = \dfrac{1}{4}(1 - cos2t) \end{cases}$$

Ví dụ 4. Giải hệ $\begin{cases} x' = -x + y + e^t \\ y' = -3x + 2y + 2e^t \end{cases}$ với điều kiện ban đầu là: $x(0) = 1, y(0) = 1$

Giải

Lấy biến đổi Laplace 2 vế của các phương trình ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} (s+1)X(s) - Y(s) = \dfrac{1}{s-1} + 1 \\ 3X(s) + (s-2)Y(s) - 3 = \dfrac{2}{s-1} + 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này được

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{1}{s-1} \\ Y(s) = \dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta được

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^t \end{cases}$$

Ví dụ 5. Giải hệ $\begin{cases} x'' + y' + 3x = 15e^{-t} \\ y'' - 4x' + 3y = 15\sin 2t \end{cases}$

với điều kiện ban đầu là: $x(0) = 35, x'(0) = -48, y(0) = 27, y'(0) = -55$

Giải

Lấy biến đổi Laplace hai vế của các phương trình ta được hệ

$$\begin{cases} \left(s^2+3\right)X(s)+sY(s)=35s-21+\dfrac{15}{s+1} \\ -4sX(s)+\left(s^2+3\right)Y(s)=27s-195+\dfrac{30}{s^2+4} \end{cases}$$

Giải hệ này bằng quy tắc Cramer ta được

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{30s}{s^2+1}-\dfrac{45s}{s^2+9}+\dfrac{3}{s+1}+\dfrac{2s}{s^2+4} \\ Y(s)=\dfrac{30s}{s^2+9}-\dfrac{60s}{s^2+1}-\dfrac{3}{s+1}+\dfrac{2}{s^2+4} \end{cases}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta được nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x(t)=30\cos t-15\sin 3t+3e^{-t}+2\cos 2t \\ y(t)=30\cos 3t-60\sin t-3e^{-t}+\sin 2t \end{cases}$$

Ví dụ 6. Tìm nghiệm tổng quát của hệ $\begin{cases} x'(t)-y(t)=0 \\ y'(t)+x(t)=0 \end{cases}$

Giải

Để tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình ta giả sử $x(0)=C_1; y(0)=C_2$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của các phương trình ta được hệ

$$\begin{cases} sX(s)-Y(s)=C_1 \\ X(s)+sY(s)=C_2 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{C_1s+C_2}{s^2+1} \\ Y(s)=\dfrac{C_1s-C_2}{s^2+1} \end{cases}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta được nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t \\ y(t)=C_2\cos t-C_1\sin t \end{cases}$$

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y'(t)+z'(t)+y(t)+z(t)=1 \\ y'(t)+z(t)=e^t \end{cases}$

với điều kiện ban đầu $y(0)=-1, \quad z(0)=2$

Giải

Lấy biến đổi Laplace hai vế của các phương trình ta được hệ

$$\begin{cases} sL\left[y(t)\right]+1+sL\left[z(t)\right]-2+L\left[y(t)\right]+L\left[z(t)\right]=\dfrac{1}{s} \\ sL\left[y(t)\right]+1+L\left[z(t)\right]=\dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được

$$L\left[y(t)\right]=\frac{-s^2+s+1}{s(s-1)^2}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow y(t)=1-2e^t+te^t$$

và $\quad z(t)=e^t-y'(t)=2e^t-te^t$

Vậy nghiệm của bài toán là : $\begin{cases} y(t)=1-2e^t+te^t \\ z(t)=2e^t-te^t. \end{cases}$

3.4. Bài tập chương 4

1. Tìm biến đổi Laplace của các hàm sau:

   a) $2e^{4t}$

   b) $5t-3$

   c) $2t^2-e^{-t}$

   d) $3\cos 5t$

2. Tìm biến đổi Laplace của các hàm sau:

   a) t^3e^{-2t}

   b) $e^{-t}\cos 2t$

   c) $3t^4-2t^3-2\sin 5t$

   d) $4t^2-3\cos 2t+5e^{-t}$

   e) $2t^2-e^{2t}+\frac{1}{3}\sin 3t$

   g) $2t-e^{2t}+\sin t$

3. Cho $f(t)=\begin{cases} 2t \text{ nếu } 0\le t\le 1 \\ t \text{ nếu } t>1 \end{cases}$

   a) Vẽ đồ thị của $f(t)$

   b) Tìm $L\left\{f(t)\right\}$

   c) Tìm $L\left\{f'(t)\right\}$

4. Cho $L\left\{f(t)\right\}=\dfrac{s^2-s+1}{(2s+1)^2(s-1)}$. Hãy tìm $L\left\{f(2t)\right\}$.

5. Cho $L\left\{f(t)\right\}=\dfrac{e^{\frac{-1}{s}}}{s}$. Hãy tìm $L\left\{e^{-t}f(3t)\right\}$

6. Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm sau:

   a) $\dfrac{2s+1}{s(s+1)}$

b) $\dfrac{3s-8}{4s^2+25}$

c) $\dfrac{3s+2}{4s^2+12s+9}$

d) $\dfrac{s^2}{s^2+2s+2}$

g) $\dfrac{3s+2}{4s^2+12s+9}$

7. Dùng phương pháp khai triển Heaviside tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm sau:

a) $\dfrac{2s-11}{(s+2)(s-3)}$

b) $\dfrac{19s+37}{(s+1)(s-2)(s+3)}$

c) $\dfrac{s+5}{(s+1)(s^2+1)}$

8. Dùng phương pháp khai triển Heaviside tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm sau:

a) $\dfrac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}$

b) $\dfrac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)^2}$

c) $\dfrac{11s^3-47s^2+56s+4}{(s-2)^3(s+2)}$

9. Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y''+9y=\cos 2t; y(0)=1, y'(0)=-1$

b) $y''+4y=9t; y(0)=1, y'(0)=7$

c) $y^{(3)}-y=e^t; y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

10. Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y''-3y'+2y=4t+12e^{-t}; y(0)=6, y'(0)=-1$

b) $y''-4y'+5y=125t^2; y(0)=y'(0)=0$

c) $y^{(4)}+2y''+y=\sin t; y(0)=y'(0)=y''(0)=y^{(3)}(0)=0$

11. Giải các hệ phương trình vi phân sau:

a) $\begin{cases} x' + 3x + y = 0 \\ y' - x + y = 0 \end{cases}$ với $y(0) = x(0) = 0$

b) $\begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t} \\ 2x + y' - 3y = 3e^{2t} \end{cases}$ với $x(0) = 2; y(0) = 0$

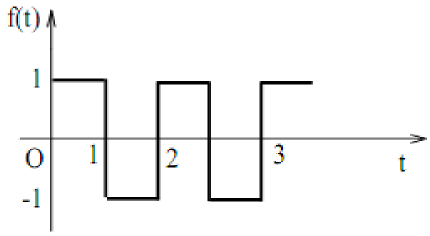
12. Giải các hệ phương trình vi phân sau:

a) $\begin{cases} x' - 2x - 4y = cost \\ y' + x + 2y = sint \end{cases}$ với $x(0) = y(0) = 0$

b) $\begin{cases} y' - x' - 2y + 2x = sint \\ y'' + 2x' + y = 0 \end{cases}$ với $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$

c) $\begin{cases} x' + 2y'' = e^{-t} \\ x' + 2x - y = 1 \end{cases}$ với $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$

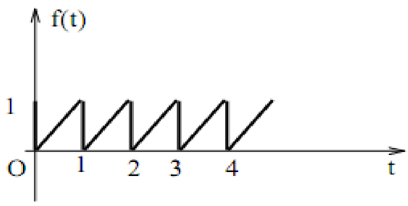
13. Cho hàm $f(t)$ có đồ thị



Hình 3.10. Hàm sóng vuông

Viết phương trình của $f(t)$ và tìm $L\{f(t)\}$

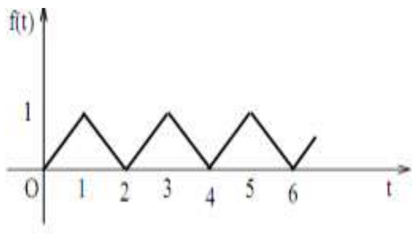
14. Cho hàm $f(t)$ có đồ thị



Hình 3.11. Hàm sóng răng cưa

Viết phương trình của $f(t)$ và tìm $L\{f(t)\}$

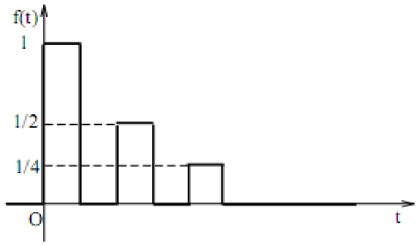
15. Cho hàm $f(t)$ có đồ thị



Hình 3.12. Hàm sóng tam giác

Viết phương trình của $f(t)$ và tìm $L\{f(t)\}$

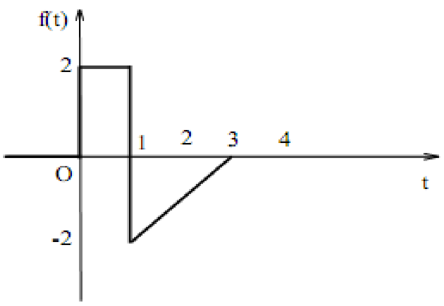
16. Cho hàm $f(t)$ có đồ thị



Hình 3.13. Hàm sóng chữ nhật

Viết phương trình của $f(t)$ và tìm $L\{f(t)\}$

17. Cho hàm $f(t)$ có đồ thị



Hình 3.14. Hàm sóng tự do

Viết phương trình của $f(t)$ và tìm $L\{f(t)\}$

18. Xác định $F(s)$ của các hàm $f(t)$ sau:

a) $f(t)=\left(5e^{-9t}-2e^{-t}+e^{t}\right)u(t)$

b) $f(t)=\left(5e^{-t}+e^{t}\right)u(t+1)$

c) $f(t)=u(t)-2u(t-1)$

19. Tìm biến đổi Laplace của các hàm sau:

a) $10\delta(t+4)$

b) $\delta^{(2)}(t-1)+\delta(t)+5u(t)$

c) $\frac{d}{dt}\left[e^{-t}u(t)\right]$

d) $\frac{d}{dt}\left[e^{-t}\cos 2t\, u(t)\right]$

Hướng dẫn giải một số bài

20) Tìm biến đổi laplace của hàm : $f(t)=t^2-3\cos 2t+\sin 3t$

Giải

$L\{t^2\}=\frac{2}{s^3}$; $L\{\cos 2t\}=\frac{s}{s^2+4}$; $L\{\sin 3t\}=\frac{3}{s^2+9}$; $L\{f(t)\}=\frac{2}{s^3}-\frac{3s}{s^2+4}+\frac{3}{s^2+9}$

Điều kiện chung : s > 0

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y''+y'+y=\cos t-\sin t\ ;\ \ y(0)=y'(0)=1$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ta được phương trình ảnh là

$Y(s)=\frac{s+1}{s^2+1}$

$\Rightarrow Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được

y(t) = cost + sin t

Vậy nghiệm của phương trình là : y(t) = cost + sin t

21.

a) Tìm biến đổi laplace của hàm : $f(t)=t^2-4e^{2t}+\frac{1}{3}\sin 3t$

Giải

$L\{t^2\}=\frac{2}{s^3}$; $L\{\sin 3t\}=\frac{3}{s^2+9}$; $L\{e^{-(-2t)}\}=\frac{1}{s-2}$

Vậy $L\{f(t)\}=\frac{2}{s^3}-\frac{4}{s-2}+\frac{1}{s^2+9}$

Điều kiện chung : s > 2

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình

$y''+y=t\ ;\ \ y(0)=y'(0)=0$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ta được phương trình ảnh là

$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$

$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được

y(t) = t - sin t

Vậy nghiệm của phương trình là : y(t) = t - sin t

22.

a) Tìm biến đổi laplace của hàm : $f(t) = 5t^2 - 2t^3 + \cos 2t - \frac{1}{3}e^{-t}$

Giải

$L\{3t^2\} = \frac{6}{s^3}$; $L\{2t^3\} = \frac{12}{s^4}$; $L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$; $L\left\{\frac{1}{3}e^{-t}\right\} = \frac{1}{3}\frac{1}{s+1}$

Vậy $L\{f(t)\} = \frac{6}{s^3} - \frac{12}{s^4} + \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{3}\frac{1}{s-1}$

Điều kiện chung : s > 0

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y'' + y' + y = t + 1;\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ta được phương trình ảnh là

$Y(s)(s^2+s+1) = \frac{1+s}{s^2} + 1$

$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2}$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được y(t) = t

Vậy nghiệm của phương trình là : y(t) = t

23.

a) Tìm biến đổi laplace của hàm : $f(t) = 2t - e^{2t} + \sin t$

Giải

$L\{2t\} = \frac{2}{s^2}$; $L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$; $L\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$

$L\{f(t)\} = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2+1}$

Điều kiện chung : s > 2

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y''+y=t\ ;\ \ y(0)=1,\ y'(0)=-2$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình, và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$$s^2Y(s)-s+2+Y(s)=\frac{1}{s^2}\quad \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+1}$$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được

$$y(t)=t+\cos t-3\sin t$$

Vậy nghiệm của phương trình là $y(t)=t+\cos t-3\sin t$

24.

a) Tìm biến đổi laplace của hàm : $f(t)=t^2+e^{-t}\cos 2t$

Giải

$$L\{t^2\}=\frac{2}{s^3}\ ;\ \ L\{\cos 2t\}=\frac{s}{s^2+4}\quad \Rightarrow L\{e^{-t}\cos 2t\}=\frac{s+1}{(s+1)^2+4^2}=\frac{s+1}{s^2+2s+17}$$

Vậy $\quad L\{f(t)\}=\frac{s+1}{s^2+2s+17}+\frac{2}{s^3}$

Điều kiện chung : s > 0

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình

$$y''+4y'-5y=3;\ y(0)=0, y'(0)=0$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình, và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$$Y(s)=\frac{3}{s(s-1)(s+5)}$$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được

$$y(t)=-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{10}e^{-5t}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $y(t)=-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{10}e^{-5t}$

25.

a) Tìm biến đổi laplace của hàm : $f(t)=t-\sin 4t+e^{-t}.\cos t$

$$L\{t\}=\frac{1}{s^2}\ ;\ L\{\sin 4t\}=\frac{4}{s^2+16}\ ;\ L\{e^{-t}\cos t\}=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

Vậy $\quad L\{f(t)\}=\frac{1}{s^2}-\frac{4}{s^2+16}+\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$

Điều kiện chung : s > 0

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y''+2y'+y=te^{-t};\ y(0)=0, y'(0)=1$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$$s^2Y(s)-1+2sY(s)+Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s+1)^4}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được

$$y(t)=\frac{1}{6}t^3e^{-t}+te^{-t}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $y(t)=\frac{1}{6}t^3e^{-t}+te^{-t}$

27. Tìm biến đổi laplace của hàm : $f(t)=t^2e^{3t}-e^{-t}+\sin t$

Giải

$$L\{t^2e^{3t}\}=\frac{2}{(s-3)^3};\quad L\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1};\ L\{e^{-t}\}=\frac{1}{s+1}\Rightarrow\quad L\{f(t)\}=\frac{2}{(s-3)^3}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s^2+1}$$

Điều kiện chung : s > 3

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$2y'-y=4\ ;\ y(0)=0$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình, và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{4}{s(2s-1)}$$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{4}{s(2s-1)}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s(2s-1)}\right\}=L^{-1}\left\{-\frac{4}{s}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{8}{2s-1}\right\}$$

Suy ra $\quad y(t)=-4+4e^{\frac{1}{2}t}$

Vậy nghiệm của phương trình là $\quad y(t)=t+\cos t-3\sin t$

28.

a) Tìm biến đổi laplace của hàm : $f(t)=3t^4-2\sin 5t+te^{\frac{1}{2}t}$

Giải

$L\left\{3t^4\right\}=\dfrac{72}{s^5}$; $L\left\{2\sin 5t\right\}=\dfrac{10}{s^2+25}$; $L\left\{te^{\frac{1}{2}t}\right\}=\dfrac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}$

Vậy $$L\{f(t)\}=\frac{72}{s^5}-\frac{10}{s^2+25}+\frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Điều kiện chung : s > 1/2

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y''+y=1\,;\,y(0)=1,\ y'(0)=2$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$$Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2+1}$$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2+1}\right\}= 1+2\sin t$$

Vậy nghiệm của phương trình là $y(t)=t+\cos t-3\sin t$

29.

a) Tìm biến đổi laplace của hàm : $f(t)=t^2e^{3t}+e^{-2t}.\sin 4t+e^{-t}.\cos 4t$

Giải

$L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\dfrac{2}{(s-3)^3}$; $L\left\{e^{-2t}\sin(4t)\right\}=\dfrac{4}{(s+2)^2+16}=\dfrac{4}{s^2+4s+20}$; $L\left\{e^{-t}\cos 2t\right\}=\dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$

Vậy $$L\{f(t)\}=\frac{2}{(s-3)^3}+\frac{4}{s^2+4s+20}+\frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

Điều kiện chung : s > 3

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$2y'-y=t\ ;\ y(0)=0$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$$Y(s)=\frac{1}{s^2(2s-1)}$$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(2s-1)}\right\}$$

$$y(t) = 2e^{t/2} - t - 2$$

Vậy nghiệm của phương trình là $y(t) = t + \cos t - 3\sin t$

30.

a) Tìm biến đổi laplace của hàm : $f(t) = 3t^2 + t^3e^{-t} + \cos 3t$

Giải

$L\{3t^2\} = \dfrac{6}{s^3}$; $L\{t^3e^{-t}\} = \dfrac{6}{(s+1)^4}$; $\Rightarrow L\{\cos 3t\} = \dfrac{s}{s^2+9}$

Vậy $\qquad L\{f(t)\} = \dfrac{6}{s^3} + \dfrac{6}{(s+1)^4} + \dfrac{s}{(s^2+9)}$

Điều kiện chung : s > 0

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y'' - 2y' + y = te^{2t} \;\; ; \;\; y(0) = y'(0) = 0$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)^2}$$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s-2)^2}\right\}$$

$$y(t) = e^t(t+2) + e^{2t}(t-2)$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $y(t) = e^t(t+2) + e^{2t}(t-2)$

31.

a) Tìm biến đổi laplace của hàm : $f(t) = 3t^4 - t^3 - \dfrac{1}{3}e^{-t} + \cos 2t$

Giải

$L\{3t^4\} = \dfrac{72}{s^5}$, $L\{t^3\} = \dfrac{6}{s^4}$; $L\{\cos 2t\} = \dfrac{s}{s^2+4}$; $\Rightarrow L\left\{\dfrac{1}{3}e^{-t}\right\} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s+1}$

Vậy $\qquad L\{f(t)\} = \dfrac{72}{s^5} - \dfrac{6}{s^4} - \dfrac{1}{3(s-1)} + \dfrac{s}{s^2+4}$

Điều kiện chung : s > 0

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y'' - 3y' + 2y = 1 ; y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)(s-2)}$$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)(s-2)}\right\}$$

$$y(t) = 1/2 - e^t + 1/2e^{2t}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $y(t) = 1/2 - e^t + 1/2e^{2t}$

32.

a) Tìm biến đổi laplace của hàm : $f(t) = t^2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} + \cos 2t$

Giải

$L\left\{t^2e^{-t}\right\} = \frac{2}{(s+1)^3}$; $L\left\{\frac{3}{2}e^{-3t}\right\} = \frac{3}{2s+6}$; $L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$

Vậy $L\{f(t)\} = \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{3}{2s+6} + \frac{s}{s^2+4}$

Điều kiện chung : s > 0

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y'' - 3y' + 2y = 8e^{-2t} \; ; \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$$Y(s) = \frac{8}{(s+2)(s-1)(s-2)}$$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-1)(s-2)}\right\}$$

$$y(t) = -8/3\, e^t + 2e^{2t} + 2/3e^{-2t}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $y(t) = -8/3\, e^t + 2e^{2t} + 2/3e^{-2t}$

33.

a) Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm: $F(s) = \frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} - \frac{1}{s^2}$

Giải

$L^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}\right\} = 4e^{2t}$; $L^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+16}\right\} = 3\cos 4t$; $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$

Vậy $L^{-1}\{F(s)\}=4e^{2t}-3\cos 4t$ -t

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y'''+3y''+3y'+y=te^{-t};\ y(0)=0, y'(0)=y''(0)=0$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$$s^3Y(s)+3s^2Y(s)+3sY(s)+Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s+1)^5}$$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được

y(t) = $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^5}\right\}\Rightarrow y(t)=\frac{1}{24}t^4e^{-t}$

Vậy nghiệm của phương trình là $y(t)=\frac{1}{24}t^4e^{-t}$

34.

a) Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm : $F(s)=\frac{1}{s^2-2s+5}$

Giải

Có $F(s)=\frac{1}{s^2-2s+5}=\frac{1}{(s-1)^2+2^2}$; $F(s+1)=\frac{1}{s^2+4}\Rightarrow L^{-1}\{F(s+1)\}=\frac{1}{2}\sin 2t$

Áp dụng tính chất dời thứ nhất,suy ra:

$$L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2}e^t\sin 2t$$

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y''+2y'+2y=2t+2;\ y(0)=0, y'(0)=1$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$$s^2Y(s)+2sY(s)+2Y(s)=\frac{2s+2}{s^2}+1\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được: $y(t)=t$

Vậy nghiệm của phương trình là : $y(t)=t$

35.

a) Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm :

$$F(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+1}$$

Giải

$L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-1}\right\}=e^{t}$; $\quad L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\}=\cos 2t$; $\quad L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$

Vậy $L^{-1}\{F(s)\}=e^{t}+\cos 2t$ + sint

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y'''+4y'=1;\ y(0)=0, y'(0)=y''(0)=0$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

$s^3Y(s)+4sY(s)=\dfrac{1}{s}$ $\qquad$ Suy ra Y(s) = $\dfrac{1}{s^2(s^2+4)}$

$$Y(s)=\frac{1}{4}\frac{1}{s^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{s^2+4}$$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được:

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{4(s^2+4)}\right\}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\quad y(t)=\dfrac{1}{4}t-\dfrac{1}{8}\sin 2t$

36.

a) Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm :

$$F(s)=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}+\frac{s}{s^2+4}$$

Giải

$L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\}=e^{2t}$; $\quad L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-1}\right\}=e^{t}$; $\quad L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\}=\cos 2t$

Vậy $L^{-1}\{F(s)\}=e^{2t}-e^{t}$ + cos2t

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình:

$$y''+y=t\quad;\quad y(0)=y'(0)=0$$

Giải

Lấy biến đổi laplace 2 vế của phương trình và thay điều kiện ban đầu ta được phương trình ảnh là

Y(s) = $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

Biến đổi L ngược hai vế của phương trình trên ta được:

$y(t) = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}$

$L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)}\right\} = \sin t$ suy ra $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t\int_0^t \sin u du^2 = -\sin t + t$

$\Rightarrow$ y(t) = -sint +t

Vậy nghiệm của phương trình là : y(t) = -sint +t

Đáp số của một số bài tập chương 4

1.

a) $\dfrac{2}{s-4}$

b) $\dfrac{5}{s^2} - 3$

c) $\dfrac{4}{s^3} - \dfrac{1}{s+1}$, $s > 1$

d) $\dfrac{3s}{s^2+25}$

2.

a) $\dfrac{6}{(s+2)^4}$

b) $\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}$

c) $\dfrac{72}{s^5} - \dfrac{12}{s^4} - \dfrac{10}{s^2+25}$

4. $\dfrac{s^2-2s+4}{4(s+1)^2(s-2)}$

5. $\dfrac{e^{\frac{-3}{s+1}}}{s+1}$

6.

a) $1+e^{3t}$

b) $\dfrac{1}{2}t^2 + 1$

c) $t^2 + \dfrac{1}{2}e^t$

7.

a) $3e^{-2t} - e^{3t}$

b) $-2e^{-3t}-3e^{-t}+5e^{2t}$

c) $2e^{-t}+3\cos t-2\sin t$

8.

a) $(3t-2)e^{t}+4e^{-3t}$

b) $t\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)$

c) $\left(2t^2-t+5\right)e^{2t}+6e^{-2t}$

9.

a) $y(t)=\dfrac{4\cos 3t}{5}+\dfrac{4\sin 3t}{5}+\dfrac{\cos 2t}{5}$

b) $y(t)=t$

c) $y(t)=\dfrac{2}{5}\left(1-e^{t}\right)\cos t+\dfrac{1}{5}\left(1+6e^{t}\right)\sin t$

10.

a) $3e^{t}-2e^{2t}+2t+3+2e^{-t}$

b) $25t^2+40t+22+2e^{2t}\left(2\sin t-11\cos t\right)$

c) $\dfrac{1}{8}\left[\left(3-t^2\right)\sin t-3t\cos t\right]$

11.

a) $\begin{cases} x=(1-2t)e^{-2t} \\ y=(1+2t)e^{-2t} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x=e^{t}+e^{2t} \\ y=e^{t}-e^{2t} \end{cases}$

12.

a) $\begin{cases} x=4t+2-2cost-3sint \\ y=-2t+2sint \end{cases}$

b) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{9}e^{-t}+\dfrac{4}{45}e^{2t}-\dfrac{1}{5}\cos t-\dfrac{2}{5}\sin t+\dfrac{1}{3}te^{-t} \\ y=\dfrac{1}{9}e^{-t}-\dfrac{1}{9}e^{2t}+\dfrac{1}{3}te^{-t} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=1+e^{-t}-e^{-at}-e^{-bt} \\ y=1+e^{-t}-be^{-at}-ae^{-bt} \end{cases}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đình Trí, Toán cao cấp 1, NXB Giáo dục, 2004
2. Nguyễn Đình Trí, Toán cao cấp 3, NXB Giáo dục, 2004
3. Đậu Thế Cấp, hàm biến phức, NXB Giáo dục, 2000
4. Nguyễn Kim Đính, phép biến đổi Laplace, Đại học Kỹ thuật thành phố Hồ Chí Minh, 1998
5. Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải, Hàm biến phức, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 1997
6. Trương Văn Thương, hàm số biến số phức, NXB Giáo dục, Hà Nội, 2002
7. Phan Bá Ngọc, Hàm phức và phép biến đổi Laplace, NXB Giáo dục, 1996