LỜI NÓI ĐẦU

Ngày nay, những tư tưởng, phương pháp và kết quả của toán học đã thâm nhập vào hầu hết các lĩnh vực của đời sống, như lĩnh vực của cơ học, vật lý lý thuyết, hóa học lượng tử,…Toán cao cấp từ lâu đã nằm trong chương trình bắt buộc của các trường Đại học kỹ thuật, đóng vai trò then chốt trong việc rèn luyện tư duy khoa học, cung cấp công cụ toán học để sinh viên học các môn khác.

Cuốn sách Toán cao cấp này được chúng tôi biên soạn nhằm mục đích cung cấp tài liệu học tập cho sinh viên Cao đẳng nghề của khoa Cơ khí. Giáo trình bao gồm những kiến thức cơ bản của môn toán cao cấp, là cơ sở cho sinh viên học tập các môn chuyên ngành.

Giáo trình gồm 3 chương:

Chương 1: Ma trận – Định thức và hệ phương trình tuyến tính. Chương này trình bày kiến thức cơ bản về ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính, các phép toán về ma trận và một số phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính.

Chương 2: Phép tính vi phân và tích phân. Chương này trình bày những vấn đề quan trọng của đạo hàm, tích phân hàm một biến. Nội dung chính của chương là các phương pháp tính đạo hàm và tích phân. Đặc biệt, trong chương hai chúng tôi có phần lý thuyết tính gần đúng và ứng dụng tích phân để tính diện tích, thể tích các vật thể, phần này sử dụng nhiều cho lĩnh vực cơ học.

Chương 3: Phương trình vi phân. Chương này trình bày một cách có hệ thống về phương trình vi phân: khái niệm phương trình vi phân, cách giải một số dạng phương trình vi phân cấp một và cấp hai.

Do giáo trình được giảng dạy cho sinh viên Cao đẳng nghề không phải chuyên ngành toán, nên chúng tôi không đi sâu vào việc chứng minh những lý thuyết toán học phức tạp. Thay vào đó chúng tôi đưa ra nhiều ví dụ minh họa với các bước làm cụ thể và chi tiết. Cuối mỗi chương đều có một lượng lớn bài tập để rèn luyện, ngoài ra chúng tôi còn có mục đáp số và hướng dẫn giải.

Mặc dù, đã có nhiều cố gắng trong biên soạn nhưng Giáo trình không thể tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các đồng nghiệp và đọc giả xa gần.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU i
Chương 1. MA TRẬN - ĐỊNH THỨC VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH 1
1.1. MA TRẬN 1
1.1.1. Định nghĩa 1
1.1.2. Các phép toán về ma trận 4
1.2. ĐỊNH THỨC 12
1.2.1. Định nghĩa 12
1.2.2. Các tính chất 15
1.2.3. Cách tính định thức bằng phép biến đổi sơ cấp 18
1.3. HẠNG CỦA MA TRẬN 21
1.3.1. Định nghĩa 21
1.3.2. Cách tính hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp về hàng 22
1.4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO 24
1.4.1. Định nghĩa 24
1.4.2. Định lý 26
1.4.3. Cách tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi sơ cấp 29
1.5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH 30
1.5.1. Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính 30
1.5.2. Hệ Cramer 31
1.5.3. Phương pháp khử Gauss 34
1.5.4. Hệ thuần nhất 36
1.5.5. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát 37
BÀI TẬP CHƯƠNG 1 40
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG 1 46
Chương 2. PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀ TÍCH PHÂN 60
2.1. ĐẠO HÀM 60
2.1.1. Định nghĩa đạo hàm: 60
2.1.2. Các công thức về tính đạo hàm. 61
2.1.3. Đạo hàm cấp cao 67
2.2. VI PHÂN 68
2.2.1. Định nghĩa 68
2.2.2. Các công thức tính vi phân 69
2.2.3. Vi phân cấp cao 71
2.3. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH 72

2.3.1. Định lý Lagrange (Lagơrăng) 72
2.3.2. Định lý Cauchy (côsi) 72
2.3.3. Công thức Taylor 72
2.3.4. Công thức L'Hospital 74
2.4. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH 77
2.4.1. Định nghĩa 77
2.4.2. Bảng tích phân cơ bản 78
2.4.3. Các phương pháp tính tích phân bất định 78
3.1.4. Tích phân các hàm số hữu tỷ 83
2.5. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH 86
2.5.1. Khái niệm về tích phân xác định 86
2.5.2. Các tính chất của tích phân xác định 87
2.5.3. Công thức Newton-Leibnitz 88
2.5.4. Các phương pháp tính tích phân xác định 88
BÀI TẬP CHƯƠNG 2 99
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG 2 102
Chương 3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 115
3.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT 115
3.1.1. Một số khái niệm mở đầu. 115
3.1.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm 116
3.2. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT 116
3.2.1. Phương trình với biến số phân ly 116
3.2.2. Phương trình đẳng cấp cấp một 117
3.2.3. Phương trình tuyến tính 120
3.2.4. Phương trình Bernoully 126
3.3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI 128
3.3.1. Một số khái niệm mở đầu 128
3.3.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm 128
3.3.3. Phương trình vi phân cấp hai có thể giảm cấp được 129
3.3.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất 132
3.3.5. Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính không thuần nhất. 138
3.3.6. Phương trình vi phân cấp 2 với hệ số là hằng số 141
BÀI TẬP CHƯƠNG 3 152
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG 3 156
TÀI LIỆU THAM KHẢO 171

Chương 1
MA TRẬN - ĐỊNH THỨC VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.1. MA TRẬN

Khi ta có m x n số, ta có thể xếp thành một bảng số hình chữ nhật chứa m hàng, n cột. Một bảng số như thế gọi là một *ma trận*.

1.1.1. Định nghĩa

Một bảng số chữ nhật có m hàng, n cột

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \textit{hay} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gọi là một ma trận cỡ $m \times n$, *và ký hiệu là:* $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *hay* $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$

trong đó: $\mathbf{a_{ij}}$ *là phần tử của ma trận* A *nằm ở giao điểm của hàng i và cột j.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

hàng thứ i
(i là chỉ số hàng)

Cột thứ j
(j là chỉ số cột)

Ví dụ 1: Bảng số $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

là một ma trận cỡ 2 x 3 với các phần tử

$a_{11} = 1$ $\quad$ $a_{12} = -4$ $\quad$ $a_{13} = 6$

$a_{21} = 2$ $\quad$ $a_{22} = 5$ $\quad$ $a_{23} = 0$

Ví dụ 2: Bảng số $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

là một ma trận cỡ 3 x 1 với các phần tử

$a_{11} = 1$ $\quad$ $a_{21} = 2$ $\quad$ $a_{31}=4$

Ví dụ 3: Bảng số A = $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

là ma trận cỡ 1 x 4 với các phần tử

$a_{11}= 2$, $a_{12}= - 3$, $a_{13}= 4$, $a_{14}= 9$

Ví dụ 4: Cho bảng số A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

Bảng số trên là ma trận cỡ 3 x 2 với các phần tử là

$a_{11}= 1$, $a_{12}= 5$, $a_{21}= 6$, $a_{22}= -2$, $a_{31}= 7$, $a_{32}= 8$

Ví dụ 5: Cho bảng số A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

Bảng số trên là ma trận cỡ 3 x 3 với các phần tử

$a_{31} = 2$	$a_{23} = 0$	$a_{21} = 0$
$a_{11} = 1$	$a_{33} = 8$	$a_{13} = 7$
$a_{12} = 5$	$a_{22} = 6$	$a_{32} = - 4$

Khi m = n thì ta gọi ma trận A là ***ma trận vuông cấp n*** (gọi tắt là ma trận cấp n)

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{...} & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{...} & \mathbf{a_{2n}} \\ \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \mathbf{...} & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix} \quad \textbf{(số hàng = số cột)}$$

a_{11} , a_{22} , … , a_{nn} *được gọi là các* ***phần tử chéo****.*

Đường thẳng đi qua các phần tử chéo được gọi là ***đường chéo chính***

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} & \mathbf{a_{14}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & \mathbf{a_{24}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & \mathbf{a_{34}} \\ \mathbf{a_{41}} & \mathbf{a_{42}} & \mathbf{a_{43}} & \mathbf{a_{44}} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Đường chéo chính}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} & \mathbf{a_{14}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & \mathbf{a_{24}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & \mathbf{a_{34}} \\ \mathbf{a_{41}} & \mathbf{a_{42}} & \mathbf{a_{43}} & \mathbf{a_{44}} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Đường chéo phụ}$$

Ví dụ 6: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 3.

Đường chéo chính là đường thẳng nối các phần tử 1, 6, 8.

Đường chéo phụ là đường thẳng nối các phần tử 2, 6, 7.

Ma trận tam giác trên: *là ma trận vuông cấp n mà tất cả các phần tử nằm ở dưới đường chéo chính đều bằng 0, tức là* $a_{ij} = 0$ *nếu* $i > j$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} & \dots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & \dots & \mathbf{a_{2n}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{a_{33}} & \dots & \mathbf{a_{3n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 7: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ là một ma trận tam giác trên.

Ma trận tam giác dưới: *là ma trận vuông cấp n mà tất cả các phần tử nằm ở trên đường chéo chính đều bằng 0, tức là* $a_{ij} = 0$ *nếu* $i < j$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \mathbf{a_{n3}} & \dots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 8: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ là một ma trận tam giác dưới.

Ma trận chéo: *là ma trận vuông cấp n mà tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo đều bằng 0 , tức là* $a_{ij} = 0$ *nếu* $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ hay } \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & O & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 9: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ là một ma trận chéo.

Ma trận đơn vị: *là ma trận chéo mà tất cả các phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 1 và ký hiệu là I.*

Ví dụ 10: 1) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận đơn vị cấp 2.

2) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận đơn vị cấp 3.

Ma trận không: *là ma trận mà tất cả các phần tử của nó đều bằng không. Ma trận không ký hiệu là **O**.*

Ví dụ 11: 1) $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận không cỡ 2 x 3

2) $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận không cấp 2.

Hai ma trận bằng nhau:

*Hai ma trận A và B được gọi là bằng nhau, ký hiệu A = B, nếu chúng **cùng cỡ** và các phần tử có cùng vị trí bằng nhau, tức là:*

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \left[a_{ij}\right]_{mxn} \quad , \quad B = \left[b_{ij}\right]_{mxn} \\ \quad a_{ij} = b_{ij} \quad , \quad \forall i, j \end{cases}$$

Ví dụ 12: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ có nghĩa là $a = 1,\ b = 2,\ c = 3,\ \mathrm{d} = 5$.

1.1.2. Các phép toán về ma trận

a) Phép cộng hai ma trận cùng cỡ:

Định nghĩa: *Cho 2 ma trận cùng cỡ m* x *n : $A = \left[\mathbf{a}_{\mathbf{ij}}\right]_{\mathbf{m\times n}}$; $B = \left[\mathbf{b}_{\mathbf{ij}}\right]_{\mathbf{m\times n}}$. Tổng A + B là một ma trận C cỡ m* x *n mà phần tử $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Ta viết C = A + B*

$$A + B = \left[a_{ij}\right]_{mxn} \quad + \quad \left[b_{ij}\right]_{mxn} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{mxn}$$

Ví dụ 13: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Khi đó: $A + B = \begin{bmatrix} 1-2 & 4+3 \\ 3+1 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Ví dụ 14: Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 4 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

Ta có $A + B = \begin{bmatrix} 2-5 & -5+2 & 4+4 \\ -1+4 & 4-5 & -3-2 \\ 3+3 & 1+1 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 8 \\ 3 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Chú ý: Điều kiện để 2 ma trận cộng được với nhau là 2 ma trận cùng cỡ .

Ví dụ 15: Cho 2 ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Hai ma trận A và B không cộng với nhau được vì A và B không cùng cỡ, ma trận A cỡ 2 x 2 , ma trận B cỡ 2 x 3.

Tính chất:

- A + B = B + A (tính giao hoán)
- A + O = O + A = A (O là ma trận không)
- (A + B) + C = A + (B + C) (tính kết hợp)
- Ma trận –A = $\left[-\mathbf{a}_{ij}\right]_{m\times n}$ được gọi là ma trận đối của ma trận A.

  Khi đó: A + (-A) = (-A) + A = O

b) Phép nhân ma trận với một số:

Định nghĩa: *Cho ma trận : A =* $\left[\mathbf{a}_{ij}\right]_{m\times n}$ *và số thực k.*

Ta nói: Tích của số thực k với ma trận A hay tích của ma trận A với số thực k là một ma trận cỡ m × n , ký hiệu là k.A hay A.k và được xác định như sau:

$$k.A = A.k = \left[\mathbf{k.a}_{ij}\right]_{m\times n}$$

Ví dụ 16: Tính

a) $2.\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ b) $(-3).\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Giải.

a) $2.\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7 & 2.0 & 2.1 \\ 2.2 & 2.5 & 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 2 \\ 4 & 10 & 8 \end{bmatrix}$

b) $(-3).\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3).2 & (-3).3 \\ (-3).(-6) & (-3).4 \\ (-3).7 & (-3).(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 18 & -12 \\ -21 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}.1 & \frac{1}{2}.4 & \frac{1}{2}.(-1) \\ \frac{1}{2}.3 & \frac{1}{2}.2 & \frac{1}{2}.2 \\ \frac{1}{2}.2 & \frac{1}{2}.3 & \frac{1}{2}.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Tính chất: Cho 2 ma trận A, B cùng cấp và 2 số thực k, h $\in$ R

1) k.(A + B) = k.A + k.B
2) (k + h).A = k.A + h.A
3) k.(h.A) = (k.h).A
4) 1.A = A
5) 0.A = O

Ví dụ 17: Cho 3 ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Hãy thực hiện các phép tính sau:

a) (A - B) + C　　　b) 2A - (B + C)

c) A + B - C　　　d) 3A -2B + 4C

Giải.

a) $A - B + C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1-1 & 2-2 \\ 2+2 & -3-1 \\ 1+1 & 2-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2-2 & 0+1 \\ 4+2 & -4-1 \\ 2+3 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $\quad 2A - (B + C) = 2.\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

c) $\quad A + B - C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1+1+2 & 2+2-1 \\ 2-2-2 & -3+1+1 \\ 1-1-3 & 2+3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

d) $\quad 3A - 2B + 4C = 3.\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 4.\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -9 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 8 & -4 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3-2-8 & 6-4+4 \\ 6+4+8 & -9-2-4 \\ 3+2+12 & 6-6+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 18 & -15 \\ 17 & 8 \end{bmatrix}$$

c) Phép nhân ma trận với ma trận:

Định nghĩa: *Xét 2 ma trận: A =* $\left[a_{\text{ij}}\right]_{mxp}$ *và B =* $\left[b_{\text{ij}}\right]_{pxn}$ *, trong đó số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B và đều bằng p.*

Ta nói: ***Tích của ma trận A.B là ma trận C =*** $\left[\mathbf{c}_{\mathbf{ij}}\right]_{\mathbf{m\times n}}$ ***có m hàng n cột mà phần tử*** $\boldsymbol{c_{ij}}$ ***được tính bởi công thức:***

$$\mathbf{c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \ldots + a_{ip}.b_{pj}} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{p}} \mathbf{a_{ik}.b_{kj}}$$

(c_{ij} *bằng hàng i của ma trận A nhân với cột j của ma trận* B)

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \mathbf{a_{i3}} & \mathbf{\ldots\ldots} & \mathbf{a_{ip}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b_{1j}} \\ \mathbf{b_{2j}} \\ \mathbf{b_{3j}} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{b_{pj}} \end{bmatrix} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \ldots + a_{ip}.b_{pj}$$

Như vậy điều kiện để ma trận A nhân được với ma trận B là số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B.

Ví dụ 18: Cho 2 ma trận: A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ và B = $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Ma trận A nhân được với ma trận B vì ma trận A có 2 cột bằng số hàng của ma trận B. Tuy nhiên tích B.A không thực hiện được vì số cột của ma trận B là 4 khác với số hàng của ma trận A.

Ví dụ 19: Cho 2 ma trận: A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ và B = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 10 & 8 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Kích thước của ma trận C = A.B là 2 x 3.

Ta có C = $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$ trong đó:

c_{11} = hàng 1 x cột 1 = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ = 1.1+ 2.10+ 0.0 = 21

c_{12} = hàng 1 x cột 2 = $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\8\\2\end{bmatrix}$ = 1.3+ 2.8+ 0.2= 19

c_{13} = hàng 1 x cột 3 = 1.5 + 2.6 + 0.4 = 17

c_{21} = hàng 2 x cột 1 = $\begin{bmatrix}3 & -4 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\10\\0\end{bmatrix}$ = 3.1+ (-4).10+ 7.0= - 37

c_{22} = hàng 2 x cột 2 =3.3 + (-4).8 + 7.2 = -9

c_{23} = hàng 2 x cột 3 = 3.5 + (-4).6 + 7.4 = 19

Vậy C = $\begin{bmatrix}21 & 19 & 17\\-37 & -9 & 19\end{bmatrix}$

Ví dụ 20: Cho C = $\begin{bmatrix}2 & -3 & 6\\4 & 5 & 7\\8 & -9 & 2\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}-3 & 2\\2 & 6\\5 & -3\end{bmatrix}$

Cỡ của ma trận C là 3 x 2. Trong đó các phần tử được tính như sau :

c_{11} = hàng 1 x cột 1 = $\begin{bmatrix}2 & -3 & 6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-3\\2\\5\end{bmatrix}$ = 2.(-3) +(- 3) .2 + 6.5 = 18

c_{12} = hàng 1 x cột 2 = 2.2 + (-3).6 + 6.(-3) = - 32

c_{21} = hàng 2 x cột 1 =$\begin{bmatrix}4 & 5 & 7\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-3\\2\\5\end{bmatrix}$ = 4.(-3) + 5.2 + 7.5 = 33

c_{22} = hàng 2 x cột 2 = 4.2 + 5.6 + 7. (-3) = 17

c_{31} = hàng 3 x cột 1 = $\begin{bmatrix}8 & -9 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\2\\5\end{bmatrix}$ = 8.(-3) + (-9). 2 + 2.5 = - 32

c_{32} = hàng 3 x cột 2 = 8.2+ (-9).6+ 2.(-3) = -44

Vậy C = $\begin{bmatrix}18 & -32\\33 & 17\\-32 & -44\end{bmatrix}$

Ví dụ 21 : Cho 2 ma trận : A = $\begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & 3\end{bmatrix}$ và B = $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{bmatrix}$

Ta có

$$A.B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Qua ví dụ 21 ta nhận thấy rằng phép nhân 2 ma trận không có tính chất giao hoán. Ngay cả trong trường hợp tích A.B và B.A đều thực hiện được thì tích A.B và B.A không bằng nhau.

Ví dụ 22: Cho 2 ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Như vậy khi tích A.B = O ta không suy ra được ma trận A = O hoặc B = O.

Tính chất:

$A.(B + C) = A.B + A.C$

$(B + C).A = B.A + C.A$

$A.(B.C) = (A.B).C$

$k.(A.B) = (k.A).B = A.(k.B)$

d) Ma trận chuyển vị:

Định nghĩa: *Xét ma trận* $A = \left[\mathbf{a}_{ij}\right]_{m\times n}$. *Từ ma trận A ta đổi hàng thành cột, cột thành hàng ta được một ma trận mới gọi là* ***ma trận chuyển vị*** *của ma trận A, ký hiệu là* A^t.

Khi đó: $A^t = \left[\mathbf{a}_{ji}\right]_{n\times m}$

Ví dụ 23: Cho ma trận: $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. Viết A^t

Từ ma trận A, ta chuyển hàng 1 thành cột 1 trong ma trận A^t, hàng 2 thành cột 2 trong ma trận A^t, hàng 3 thành cột 3 ta được ma trận A^t.

Vậy $A^t = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

Ví dụ 24: Cho A = $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 & 7 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & -6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ A^t = $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -6 \\ 7 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(hàng 1, 2, 3 trong ma trận A lần lượt chuyển thành cột 1, 2, 3 trong ma trận A^t)

Ví dụ 25: Cho 2 ma trận: A = $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ và B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Hãy tính:

1) $(A.B)^t$ 2) $B^t.A^t$

Giải.

1) A.B = $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = (c_{ij})_{3x4}$

c_{11} = 5.2 + (-2).(-1)= 12

c_{12} = 5.3+ (-2).4 = 7

c_{13} = 5.(-5) + (-2).2 = -29

c_{14} = 5.3 + (-2).4 =7

c_{21} = (-1).2 + 3.(-1) = -5

c_{22} = (-1).3 + 3.4 = 9

c_{23} = (-1).(-5) + 3.2 = 11

c_{24} = (-1).3 + 3.4 = 9

c_{31} = 2.2+ (-4).(-1) = 8

c_{32} = 2.3 + (-4).4 = -10

c_{33} = 2.(-5) + (-4).2 = -18

c_{34} = 2.3 + (-4).4 = -10

Vậy AB = $\begin{bmatrix} 12 & 7 & -29 & 7 \\ -5 & 9 & 11 & 9 \\ 8 & -10 & -18 & -10 \end{bmatrix}$

Do đó $(A.B)^t = \begin{bmatrix} 12 & -5 & 8 \\ 7 & 9 & -10 \\ -29 & 11 & -18 \\ 7 & 9 & -10 \end{bmatrix}$

2) $B^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $A^t = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

$$B^t.A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -5 & 8 \\ 7 & 9 & -10 \\ -29 & 11 & -18 \\ 7 & 9 & -10 \end{bmatrix}$$

Từ ví dụ 25 ta có $(A.B)^t = B^t.A^t$. Ta công nhận định lý sau.

Định lý: Cho 2 ma trận: $A = \left[a_{ij}\right]_{mxp}$ và $B = \left[b_{ij}\right]_{pxn}$. Khi đó $(A.B)^t = B^t.A^t$

1.2. ĐỊNH THỨC

1.2.1. Định nghĩa

a, Định nghĩa 1(định nghĩa về ma trận con).

Xét ma trận vuông cấp n:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1j} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2j} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{i1} & \mathbf{a}_{i2} & \cdots & \mathbf{a}_{ij} & \cdots & \mathbf{a}_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{nj} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

Từ ma trận A, bỏ đi hàng i và cột j ta thu được ma trận vuông cấp n-1. Ma trận này được gọi là ***ma trận con tương ứng với phần tử a_{ij}*** *và ký hiệu là M_{ij}.*

Ví dụ 26: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Khi đó A có các ma trận con tương ứng sau:

$M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (từ ma trận A bỏ đi hàng 1 và cột 1) ;

$M_{12} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (từ ma trận A bỏ đi hàng 1 và cột 2) ;

$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (từ ma trận A bỏ đi hàng 2 và cột 1) ;

$M_{13} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; $M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$; $M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$; $M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

Ví dụ 27: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Ta có các ma trận con tương ứng sau:

$M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; $M_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; $M_{13} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; $M_{14} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; $M_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; $M_{23} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; $M_{24} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; $M_{32} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; $M_{33} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; $M_{34} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

b, Định nghĩa 2(định nghĩa về định thức). *Định thức của ma trận A, ký hiệu là **det(A)** hoặc **|A|** và được định nghĩa dần dần như sau:*

A là ma trận cấp 1: $A = [a_{11}]$ $\Rightarrow$ *det(A)* = $|a_{11}| = a_{11}$

A là ma trận cấp 2: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *thì* *det(A)* = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

A là ma trận cấp 3: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *thì*

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.det(M_{11}) - a_{12}.det(M_{12}) + a_{13}.det(M_{13})$$

$$= a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

....

....

A là ma trận vuông cấp n thì:

det(A) = $a_{11}.\det(M_{11}) - a_{12}.\det(M_{12}) + a_{13}.\det(M_{13}) - \ldots + (-1)^{1+n}.a_{1n}.\det(M_{1n})$

Chú ý: *Định thức cấp 2 bằng tích đường chéo chính trừ đi tích đường chéo phụ.*

Ví dụ 28: Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2.4 - 5.3 = -7$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1).\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 5.\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1).[0-(-3)] - 5.[8-(-12)] + 2.[2-0]$

$= -3 - 100 + 4 = -99$

c) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-2).\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + (-5).\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3.[0-(-3)] + 2.[8-(-12)] - 5.[2-0]$

$= 3.3 + 2.20 - 5.2 = 39$

d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2).\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4.\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3.16 + 2.(-3) + 4.(-11) = -2$

e) $\begin{vmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-3).\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-5).\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4.\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-3).2 + 5.3 + 4.4 = 25$

f) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2).\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-3).\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 5.6 + 2.(-5) - 3.(-8) = 44$$

g) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 3.8 + 2.1 + 4.5 = 46$$

h) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$$= 2.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} -0.\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} -(-3)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2.[2.(-2)- 1.1+ 1.2] + 3. [(-1).2 - 2.(-6) +1.3]$$

$$= 2. (-3) + 3.13 = 33$$

1.2.2. Các tính chất

<u>Tính chất 1</u>:

Định thức của ma trận chuyển vị A^t bằng định thức của ma trận A, tức là:

$$\det(A^t) = \det(A)$$

Ví dụ 29: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$; $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$

<u>Hệ quả</u>: "Một tính chất khi đã phát biểu đúng về hàng của một định thức thì nó vẫn còn đúng khi phát biểu thay hàng bằng cột".

<u>Tính chất 2</u>

Đổi chỗ 2 hàng (hay 2 cột) của một định thức, ta được một định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu.

Ví dụ 30: $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ (Đổi hàng 1 và hàng 3 cho nhau)

Thật vậy, ta có

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-2).\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 5.\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2).\,5 - 5.\,(-3) + 3.\,(-14) = -37$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-2).\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4.(-7) + 2.\,19 + 27 = 37$$

Vậy $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

<u>Tính chất 3</u>: Một định thức có 2 hàng (hay 2 cột) như nhau thì bằng 0.

Ví dụ 31:

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -A$$ (Đổi hàng 1 và hàng 3 cho nhau)

Suy ra: 2 A = 0 $\quad\rightarrow$ A = 0

<u>Tính chất 4</u>: Cho A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Tính det(A)

Tính det(A) bằng cách khai triển theo hàng thứ i:

$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1}.\det(M_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2}.\det(M_{i2}) + \dots\dots + (-1)^{i+n}.a_{in}.\det(M_{in})$

Tính det(A) bằng cách khai triển theo cột thứ j:

$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j}.\det(M_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j}.\det(M_{2j}) + \dots\dots + (-1)^{n+j}.a_{nj}.\det(M_{nj})$

Ví dụ 32: Tính A = $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Khai triển theo hàng thứ 1(theo định nghĩa):

$$\det(A) = (-4).\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} - 3.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} -1.\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (-4).(-2).\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 3.0 + 4.[-(-2)].\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 1.[-(-2)]\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 8.8 + 8.23 - 2.2 = 244$$

Khai triển theo hàng thứ 2: $\det(A) = (-1)^{2+2}.(-2).\begin{vmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$$= (-2).[(-4).\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 4.\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}]$$

$$= (-2).[(-4).8 - 4.23 + 1.2] = 244$$

Khai triển theo cột thứ 3:

$$\det(A) = (-1)^{1+3}.4.\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}.2.\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4.[-(-2)].\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2.\left[(-4)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\right]$$

$$= 8.23 + 2.[32 - 0 - 2] = 244$$

Như vậy khi tính định thức thì ta nên khai triển theo hàng (cột) có số phần tử không nhiều nhất.

<u>Tính chất 5:</u> Một định thức có một hàng (hay một cột) toàn là số không thì bằng không.

Ví dụ 33: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

<u>Tính chất 6</u>: Khi ta nhân các phần tử của một hàng (hay một cột) với cùng một số thực k thì ta được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với k.

<u>Hệ quả</u>: Khi các phần tử của một hàng (hay một cột) có một thừa số chung, ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.

Ví dụ 34 : $\begin{vmatrix} 2.2 & 2.1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

<u>Tính chất 7</u>: Một định thức có 2 hàng (hay 2 cột) tỷ lệ thì bằng không.

Ví dụ 35 : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

Ta có tỷ lệ 1:3 = 2:6

Tính chất 8: Khi tất cả các phần tử của một hàng (hay một cột) có dạng tổng của 2 số hàng thì định thức đó có thể phân tích thành tổng của 2 định thức, chẳng hạn như:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a'_{12} \\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}$$

Tính chất 9: Một định thức có một hàng (hay một cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng khác (hay cột khác) thì định thức ấy bằng không.

Ví dụ 36:
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 2.(-1)+2 & 2.0+(-1) & 2.2+0 & 2.1+1 \end{vmatrix} = 0$$

(hàng 4 là tổ hợp tuyến tính của hàng 1 và hàng 2: hàng 4 = 2 x hàng 1 + hàng 2)

Tính chất 10:

Khi ta cộng bội k của hàng này vào hàng khác (hay bội k của cột này vào cột khác) thì ta được một định thức mới bằng một định thức cũ.

Ví dụ 37:
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Lấy hàng 1 nhân với 2 sau đó cộng kết quả với hàng 2 ta được định thức mới bằng định thức cũ.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Tính chất 11: Định thức của ma trận tam giác trên (dưới)bằng tích các phần tử chéo.

Ví dụ 38:
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1).(-1).4 = 4$$

1.2.3. Cách tính định thức bằng phép biến đổi sơ cấp

Ta sử dụng các tính chất của định thức để biến đổi một định thức về dạng đơn giản như: định thức của ma trận tam giác trên, định thức của ma trận tam giác dưới, sau đó sử dụng tính chất 11 để tính định thức.

Các phép biến đổi về hàng mà ta hay sử dụng:

TT	**Phép biến đổi sơ cấp**	**Tác dụng**	**Lý do**
1	Nhân 1 hàng với một số thực k $\neq$ 0	Định thức nhân với k	Tính chất 6
2	Đổi chỗ 2 hàng	Định thức đổi dấu	Tính chất 2
3	Cộng k lần hàng này vào hàng khác	Định thức không đổi	Tính chất 10

Ví dụ 39: Tính các định thức sau bằng phép biến đổi sơ cấp:

a, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

Giải. Ta có

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ h2+2h1 \\ h3+2h1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 19 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ h3+4h2 \end{matrix}$$

= (-1). (-1). 19 = 19

Vậy $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 19.$

b) $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

Giải. Ta có

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(đổi chỗ hàng 1 và hàng 2)}$$

$$= (-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(đưa thừa số 3 ở hàng 1 ra ngoài)}$$

$$= (-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{(cộng (-2) lần hàng 1 với hàng 3)}$$

$$= = (-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \quad \text{(cộng (-10) lần hàng 2 với hàng 3)}$$

$= -3. 1. 1. (-55)= 165$

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Giải. Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp về hàng ta được

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 1 \\ 0 & -4 & -10 & 8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ h2-2h1 \\ h3-3h1 \\ h4-2h1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & -36 \\ 0 & 0 & 36 & 18 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 5h3-4h2 \\ 5h4-7h2 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 90 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ h4+2h3 \end{matrix}$$

$$= 1.(-5).(-18).90 = 8100$$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

Giải. Ta có

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2h2 - h1 \\ h3 + h1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2h3 + h2 \\ 2h4 + h2 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 3h4 + 5h3 \end{matrix}$$

$$= 2.(-6).3.(-8) = 288$$

1.3. HẠNG CỦA MA TRẬN

1.3.1. Định nghĩa

Xét ma trận cỡ m x n: $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{...} & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{...} & \mathbf{a_{2n}} \\ \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} \\ \mathbf{a_{m1}} & \mathbf{a_{m2}} & \mathbf{...} & \mathbf{a_{mn}} \end{bmatrix}$

Gọi p là một số nguyên dương không lớn hơn $\min\{m, n\}$

a) Định nghĩa 1: *Ma trận vuông cấp p được suy ra từ ma trận A bằng cách bỏ đi m-p hàng, n-p cột và được gọi là ma trận con cấp p của ma trận A. Định thức của ma trận con đó được gọi là định thức con cấp p của ma trận A.*

Ví dụ 40: Xét ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

Ta có: $\min\{3,4\} = 3 \rightarrow p = 1, 2, 3$

- Các định thức con cấp 3 của A là:

Định thức con cấp 3 của A thì phải bỏ đi 1 cột, số hàng giữ nguyên.

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

- Các định thức con cấp 2 của A là:

Định thức con cấp 2 của A thì phải bỏ đi 1 hàng và 2 cột.

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$; $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -7$; $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -14$

b) Định nghĩa 2:

*Hạng của ma trận A là **cấp cao nhất** của các định thức con khác không của A. Hạng của ma trận A, ký hiệu là: r(A) hoặc rank(A) hoặc ρ(A).*

Chú ý: $\rho(A) = \rho(A^t)$

Ví dụ 41: Từ ma trận A trong ví dụ 1 ở trên, ta có hạng của ma trận A là $\rho(A) = 2$

1.3.2. Cách tính hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp về hàng

a) *Ma trận bậc thang* *là ma trận thỏa mãn 2 tính chất sau:*

- ***Tính chất 1** : các hàng bằng không (tức là các phần tử ở hàng đó luôn bằng không) luôn nằm phía dưới các hàng khác không (tức là có ít nhất một phần tử trong hàng khác 0)*
- ***Tính chất 2** : trên 2 hàng khác 0 thì phần tử khác 0 đầu tiên ở hàng dưới* **luôn nằm phía bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên** *của hàng trên.*

Ví dụ 42: Các ma trận nào dưới đây là ma trận bậc thang ? Vì sao ?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trả lời. Ma trận B có hàng 3 là hàng bằng không nhưng lại nằm phía trên hàng 4 là hàng khác không. Vậy ma trận B vi phạm tính chất 1. Do đó B không phải là ma trận bậc thang. Các ma trận A, C, D thỏa mãn tính chất 1.

Ma trận A không thỏa mãn tính chất 2 ở hàng 1 và hàng 2 nên ma trận A không phải là ma trận bậc thang.

Ma trận C không thỏa mãn tính chất 2 ở hàng 2 và hàng 3 nên ma trận B không phải là ma trận bậc thang.

Ma trận D là ma trận bậc thang vì thỏa mãn cả hai tính chất.

b) Cách tính hạng của ma trận: Dùng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận A về dạng ma trận bậc thang.

Khi đó ***số hàng khác 0 của ma trận bậc thang chính là hạng của ma trận A***.

Ví dụ 43: Tính hạng của ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & -7 & -12 \end{bmatrix}$

Giải.

a) Ta có : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ h3-h1 \\ h4-h1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ h3-h2 \\ h4+h2 \end{matrix}$$

Suy ra: ρ (A) = 2

b) $$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & -7 & -12 \end{bmatrix}$$

$$: \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 10 & -8 & 2 \\ 0 & -1 & -13 & -14 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ h2+h1 \\ \\ h4+3h1 \\ h5+2h1 \end{matrix}$$

$$: \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -42 & -42 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3h3+h2 \\ 3h4-10h2 \\ 3h5+h2 \end{matrix}$$

$$: \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ h4+h3 \\ h5+7h3 \end{matrix}$$

Vậy ρ(B) = 3.

1.4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

1.4.1. Định nghĩa

Gọi M_n là tập các ma trận vuông cấp n:

$$M_n = \{A\} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 44: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \in M_3$;

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận đơn vị cấp 3

Khi đó: $I \in M_3$

Chú ý: Nếu I, A $\in M_n$ thì A.I = I.A = A và det(I) = 1

a) <u>Định nghĩa</u>: *Xét $A \in M_n$, nếu tồn tại ma trận $B \in M_n$ sao cho:*

A.B = B.A = I (ma trận đơn vị cấp n)

*thì ta nói A là **ma trận khả đảo** và gọi B là **ma trận nghịch đảo** của ma trận A*

i. Khi ma trận A khả đảo thì ta nói A không suy biến.

ii. Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của ma trận A là A^{-1}, tức là: $\mathbf{A.A^{-1} = A^{-1}.A = I}$

Ví dụ 45: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ thì $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ vì $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$.

Ta có thể tìm A^{-1} bằng cách sau:

Đặt $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Ta có A. A^{-1} = I nên

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2\mathrm{d} = 0 \\ 3\mathrm{a} + 4c = 0 \\ 3b + 4\mathrm{d} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \frac{3}{2} \\ d = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Chú ý:

Ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A nếu tồn tại là duy nhất.

Giả sử A và B $\in M_n$ là 2 ma trận khả đảo. Khi đó tích A.B cũng khả đảo và

$$\mathbf{(A.B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

- ❖ Nếu A và B $\in M_n$ thì: det(A.B) = det(A).det(B)
- ❖ Nếu A $\in M_n$ là ma trận khả đảo, tức là tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1} thì

$$\det(A) \neq 0.$$

1.4.2. Định lý

Nếu det(A) $\neq$ 0 thì ma trận A có nghịch đảo A^{-1} và được tính bởi công thức sau:

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}}$$

với $\mathbf{c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})}$ được gọi là ***phần bù đại số ứng với phần tử a_{ij}*** (M_{ij} là ma trận con ứng với phần tử a_{ij})

Ví dụ 46: Cho A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. Tìm A^{-1}.

Giải.

Ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^t$$

Trong đó

$$\det(A) = -1$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \det(M_{11}) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \det(M_{12}) = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \det(M_{13}) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\det(M_{21}) = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\det(M_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\det(M_{23}) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\det(M_{31}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\det(M_{32}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$c_{33} = (-1)^{3+2}\det(M_{32}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

Vậy $A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Ví dụ 47: Cho A = $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Tính A^{-1}

Giải.

Ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^t$$

Trong đó

det(A)= 19

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\det(M_{11}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 19$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\det(M_{12}) = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\det(M_{13}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 19$$

$$c_{21}=(-1)^{2+1}\det(M_{21})=-\begin{vmatrix}5 & -2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-33$$

$$c_{22}=(-1)^{2+2}\det(M_{22})=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -1 & 5\end{vmatrix}=8$$

$$c_{23}=(-1)^{2+3}\det(M_{23})=-\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-13$$

$$c_{31}=(-1)^{3+1}\det(M_{31})=\begin{vmatrix}5 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$c_{32}=(-1)^{3+2}\det(M_{32})=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-6$$

$$c_{33}=(-1)^{3+2}\det(M_{32})=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-14$$

Vậy $A^{-1}=\frac{1}{19}\begin{bmatrix}19 & -19 & 19\\ -33 & 8 & -13\\ 1 & -6 & -14\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1 & -\frac{33}{19} & \frac{1}{19}\\ -1 & \frac{8}{19} & -\frac{6}{19}\\ 1 & -\frac{2}{19} & -\frac{1}{19}\end{bmatrix}$

Ví dụ 48: Cho ma trận: $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 5\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}$

Tìm ma trận X sao cho X.A = B.

Giải. Sử dụng tính chất $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$ ta được $X=B.A^{-1}$ vì

$$X.A=B.A^{-1}.A=B.I=B$$

Ta có $A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}7 & 1 & 3\\ 4 & 4 & 4\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}$

$$X=B.A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 5\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{8}\begin{bmatrix}7 & 1 & 3\\ 4 & 4 & 4\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 4 & 5\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 1 & 3\\ 4 & 4 & 4\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}34 & 30 & 18\\ 21 & 11 & 17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{17}{4} & \frac{15}{4} & \frac{9}{4}\\ \frac{21}{8} & \frac{11}{8} & \frac{17}{8}\end{bmatrix}$$

Ví dụ 49: Cho ma trận: A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ và B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Tìm ma trận X sao cho A.X = B

Giải. Sử dụng tính chất $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$ ta được $X= A^{-1}.B$ vì

$$A.X=A.\, A^{-1}.B= I.B= B$$

Ta có $X= A^{-1}.B= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -11 & -4 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$

1.4.3. Cách tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi sơ cấp

Muốn tính ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng, ta làm như sau:

- Lập ma trận $\left[\mathbf{A}\ \middle|\mathbf{I}\right]$ bằng cách viết ma trận đơn vị I bên cạnh ma trận A.
- Áp dụng các ***phép biến đổi sơ cấp về hàng*** để biến đổi ma trận $\left[\mathbf{A}\ \middle|\mathbf{I}\right]$ sao

cho phía ma trận A có trong ma trận $\left[\mathbf{A}\ \middle|\mathbf{I}\right]$ về dạng ma trận đơn vị.

Khi đó: phía ma trận đơn vị I có trong ma trận $\left[\mathbf{A}\ \middle|\mathbf{I}\right]$ trở thành ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Ví dụ 50: Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận: A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Giải. Viết ma trận I bên phải ma trận A ta có

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận A về ma trận đơn vị

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$: \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ h2-2h1 \\ h3-h1 \end{array}$$

$$: \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ h3-2h2 \end{array}$$

$$: \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ h2+2h3 \\ \\ \end{array}$$

$$: \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} h1-h2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Vậy $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

1.5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.5.1. Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính là một hệ gồm m phương trình đại số bậc nhất đối với n ẩn:

$$\begin{cases} \mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1} \\ \mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2} \\ \mathbf{..} \\ \mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m} \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

trong đó:

x_1 , x_2 , ... , x_n là các ẩn số.

a_{ij} là hệ số ở phương trình thứ i của ẩn thứ x_j

b_i là vế phải của phương trình thứ i

***Chú ý*:**

+) Nếu m = n thì hệ (I) trở thành *hệ vuông* với n phương trình n ẩn.

+) Nếu $b_j = 0$, $\forall i$ thì hệ (I) gọi là *hệ thuần nhất*.

Đặt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \ldots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \ldots & \mathbf{a_{2n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a_{m1}} & \mathbf{a_{m2}} & \ldots & \mathbf{a_{mn}} \end{bmatrix}$$ - được gọi là ma trận hệ số

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \vdots \\ \mathbf{b_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \ldots & \mathbf{b_m} \end{bmatrix}^t$$ - được gọi là ma trận vế phải

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \ldots & \mathbf{x_n} \end{bmatrix}^t$$ - được gọi là ma trận ẩn

Khi đó hệ (I) có thể viết dưới dạng: **A.x = b** được gọi là *dạng ma trận* của hệ (I).

Như vậy ta có thể tìm ma trận ẩn bởi công thức $x = A^{-1}b$. Phương pháp tìm nghiệm theo công thức này được gọi là *phương pháp ma trận nghịch đảo*.

1.5.2. Hệ Cramer

Xét hệ gồm n phương trình n ẩn:

$$\begin{cases} \mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots. + a_{1n}x_n = b_1} \\ \mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots. + a_{2n}x_n = b_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots. + a_{nn}x_n = b_n} \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Dạng ma trận của hệ phương trình (II) là: **A.x = b**

trong đó:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \ldots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \ldots & \mathbf{a_{2n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \ldots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$ - Ma trận hệ số

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \vdots \\ \mathbf{b_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \mathbf{...} & \mathbf{b_n} \end{bmatrix}^{\mathbf{t}}$$ - Ma trận vế phải

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{...} & \mathbf{x_n} \end{bmatrix}^{\mathbf{t}}$$ - Ma trận ẩn

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & .... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & .... & a_{3,j-1} & b_3 & a_{3,j+1} & .... & b_{3n} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... & .... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & .... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Cột thứ j

Ma trận A_j là ma trận được thành lập từ ma trận A bằng cách từ ma trận A bỏ đi cột thứ j và thay vào đó bằng cột vế phải.

a) Định nghĩa: *Hệ (II) được gọi là hệ Cramer nếu det(A) ≠ 0.*

b) Định lý *(Định lý Cramer): Hệ Cramer có nghiệm duy nhất tính bởi công thức*

$$x = A^{-1}.b \quad \text{tức là:} \quad \mathbf{x_j} = \frac{\mathbf{det(A_j)}}{\mathbf{det(A)}}$$

Chú ý: Từ định lý trên, ta có phương pháp Cramer giải hệ phương trình như sau:

- Tính det(A), det(A_j).
- Tính nghiệm của hệ bởi công thức: $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$

Ví dụ 51: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}; \ b = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Vậy $A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ (thay cột 1 trong ma trận A bởi ma trận b)

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ (thay cột 2 trong ma trận A bởi ma trận b)

$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ (thay cột 3 trong ma trận A bởi ma trận b)

Ta tính được det(A)= 44 $\neq$ 0, det(A_1)= - 40, det(A_2)= 72, det(A_3)= 152.

Ta suy ra các nghiệm của hệ đã cho là

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{10}{11} \\ x_2 = \dfrac{18}{11} \\ x_3 = \dfrac{38}{11} \end{cases}$$

Ví dụ 52: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -2x + y = -1 \\ 2x - y + z = -2 \end{cases}$$

Giải.

Ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \ b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vậy $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (thay cột 1 trong ma trận A bởi ma trận b)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ (thay cột 2 trong ma trận A bởi ma trận b)

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$ (thay cột 3 trong ma trận A bởi ma trận b)

Ta tính được det(A)= 7 $\neq$ 0, det(A_1)= - 8, det(A_2)= 72, det(A_3)= 152.

Ta suy ra các nghiệm của hệ đã cho là

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{8}{7} \\ x_2 = \dfrac{72}{7} \\ x_3 = \dfrac{152}{7} \end{cases}$$

1.5.3. Phương pháp khử Gauss

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Ta lập ***ma trận mở rộng*** $\overline{\mathbf{A}}$ *bằng cách từ ma trận A, ta thêm vào vế phải của ma trận A bởi cột vế phải (ma trận vế phải b), tức là:*

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\mathbf{A}|\mathbf{b}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{...} & \mathbf{a}_{1n} & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{...} & \mathbf{a}_{2n} & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \mathbf{...} & \mathbf{a}_{nn} & \mathbf{b}_n \end{array}\right]$$

Phương pháp khử Gauss: Ta sử dụng các ***phép biến đổi sơ cấp về hàng***, đó là:

+ Đổi chỗ 2 hàng (*đổi vị trí 2 phương trình cho nhau*)

+ Nhân, chia các phần tử của một hàng với số thực k $\neq$ 0 (*Nhân, chia 2 vế của phương trình với số thực k $\neq 0$*)

+ Cộng bội k hàng này vào hàng khác (*Cộng bội k phương trình này vào phương trình khác*) để biến đổi ma trận mở rộng $\overline{\mathbf{A}}$ sao cho ma trận A có trong ma trận $\overline{\mathbf{A}}$ về dạng của ma trận tam giác trên.

Sau đó viết lại hệ phương trình đã cho ứng với ma trận mở rộng sau khi đã biến đổi, rồi giải hệ phương trình bằng cách giải ngược từ dưới lên.

Ví dụ 53 : Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

Giải.

1)Ta có ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, ma trận vế phải $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -9 \end{bmatrix}$.

Do đó ta có ma trận mở rộng $\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & -9 \end{array}\right]$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận A trong ma trận mở rộng $\bar{A}$ về ma trận tam giác, ta có

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

$$: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 8 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ h2 - h1 \\ h3 - h1 \end{array}$$

$$: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ h3 - 3h2 \end{array}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_3 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

2)Ta có ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, ma trận vế phải $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$

Do đó ta có ma trận mở rộng $\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 7 & -7 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right]$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận A trong ma trận mở rộng $\bar{A}$ về ma trận tam giác, ta có

$$\bar{A} : \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ h2 - h1 \\ h3 + h1 \\ h4 - 2h1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ h4 + h3 \end{array}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_3 + 3x_4 = -3 \\ 2x_4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = -1$

1.5.4. Hệ thuần nhất

a) Định nghĩa: *Hệ thuần nhất là hệ có dạng:*

$$\begin{cases} \mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0} \\ \mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0} \\ \mathbf{..} \\ \mathbf{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0} \end{cases} \Leftrightarrow \quad A.x = 0$$

Hệ thuần nhất luôn có nghiệm $x = [0 \quad 0 \quad ..... \quad 0]^t$. Nghiệm này được gọi là *nghiệm tầm thường.*

Khi det(A) $\neq$ 0 hệ thuần nhất có nghiệm duy nhất, nghiệm này chính là nghiệm tầm thường. Do đó ta có định lý sau.

b) Định lý

Hệ thuần nhất có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi det(A)= 0.

Ví dụ 54 : Tìm m để hệ sau có nghiệm không tầm thường

a. $\begin{cases} mx - 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} (1-m)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (4-m)x_2 = 0 \end{cases}$

Giải.

a. Ta có $A = \begin{bmatrix} m & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

det (A)= - 4m – 20.

Để hệ đã cho có nghiệm không tầm thường thì det(A)= 0 hay m = - 5.

b. Ta có $A = \begin{bmatrix} 1-m & 2 \\ 2 & 4-m \end{bmatrix}$

det (A)= (1- m)(4 - m) - 4 = $m^2 - 5m$

Để hệ đã cho có nghiệm không tầm thường thì det(A)= 0 hay m = 0 hoặc m = 5.

1.5.5. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (I)$$

$$\leftrightarrow \qquad A.x = b$$

trong đó:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \dots & \mathbf{a_{1n}}\\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \dots & \mathbf{a_{2n}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{a_{m1}} & \mathbf{a_{m2}} & \dots & \mathbf{a_{mn}}\end{bmatrix}$$ - được gọi là ma trận hệ số

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \dots & \mathbf{b_m}\end{bmatrix}^t$$ - được gọi là ma trận vế phải

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \dots & \mathbf{x_n}\end{bmatrix}^t$$ - được gọi là ma trận ẩn

$$\overline{\mathbf{A}}=\left[\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right]=\left[\begin{array}{cccc|c}\mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \dots & \mathbf{a_{1n}} & \mathbf{b_1}\\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \dots & \mathbf{a_{2n}} & \mathbf{b_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{a_{m1}} & \mathbf{a_{m2}} & \dots & \mathbf{a_{mn}} & \mathbf{b_m}\end{array}\right]$$ - ma trận mở rộng

Định lý: Hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi $\rho(\overline{A}) = \rho(A)$

Chú ý: n là số ẩn của hệ phương trình (I). Khi đó:

- $\rho(\overline{A}) \neq \rho(A)$**:** Hệ vô nghiệm
- $\rho(\overline{A}) = \rho(A) = n$: Hệ có nghiệm duy nhất
- $\rho(\overline{A}) = \rho(A) = r < n$: Hệ vô số nghiệm

Ví dụ 55: Giải và biện luận số nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+2y+mz=3\\ 3x-y-mz=2\\ 2x+y+3z=3\end{cases}$$

Giải.

Ta có

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & m & 3\\ 3 & -1 & -m & 2\\ 2 & 1 & 3 & 3\end{array}\right]$$

$$:\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & m & 3\\ 0 & -7 & -4m & -7\\ 0 & -3 & 3-2m & -3\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ h2-3h1\\ h3-2h1\end{array}$$

$$: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m & 3 \\ 0 & -7 & -4m & -7 \\ 0 & 0 & 3-\frac{2}{7}m & 0 \end{array}\right] h3-\frac{3}{7}h2$$

Qua ma trận bậc thang nhận được ở bước cuối cùng ta có

\+ Nếu $3-\frac{2}{7}m=0 \Leftrightarrow m=\frac{21}{2}$ thì $\rho(\overline{A}) = \rho(A) = 2 < 3$

\+ Nếu $3-\frac{2}{7}m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq\frac{21}{2}$ thì $\rho(\overline{A}) = \rho(A) = 3$

Vậy ta có kết luận sau:

$m\neq\frac{21}{2}$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

$m=\frac{21}{2}$ hệ đã cho có vô số nghiệm.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1.1. Cho hai ma trận A= $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Tính : 1) B^tA 2) $(AB)^t$

1.2. Cho hai ma trận A= $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

1) Viết ma trận A^t và B^t

2) Tìm ma trận B^tA

1.3. Cho A = $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

Tính BA^t

1.4. Cho A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Tính: 1) A.B 2) $B^t.A^t$

1.5. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Tính : 1) $A^t.B^t$ 2) $(A.B)^t$

3) $(A - 2B)^t$ 4) AB – BA

1.6. Tính:

1) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

1.7. Tính:

1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^2$; 2) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^6$

1.8. Hãy tìm f(A) với: $f(x) = x^2 - 3x + 5I$ và $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

1.9. Hãy tìm f(A) với: $f(x) = x^2 + 5x - 4I$ và $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

1.10. Tính các định thức cấp ba sau:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

1.11. Tính định thức sau:

1) $\begin{vmatrix} 14528 & 14628 \\ 25132 & 25232 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$

1.12. Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A.

1) A= $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 2) A= $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

3) A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ 4) A= $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

5) A= $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ 6) A= $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

1.13. Cho hai ma trận: A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

1) Tính $(A.B)^T$

2) Tìm $(A.B)^{-1}$

1.14. Cho hai ma trận: A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

1) Tính $(A.B)^T$

2) Tìm $(A.B)^{-1}$

1.15. Tìm ma trận X sao cho :

1) $X\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ 4) $X\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

1.16. Cho hai ma trận A= $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; B =; B = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

1) Tìm ma trận A^{-1}

2) Tìm ma trận X sao cho: A.X = B

1.17. Cho hai ma trận A= $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

1) Tìm ma trận A^{-1}

2) Tìm ma trận X sao cho: X.A = B

1.18. Cho hai ma trận A= $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

1) Tìm ma trận A^{-1}

2) Tìm ma trận X sao cho: X.A = B

1.19. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

1) Tìm ma trận A^{-1}

2) Tìm ma trận X sao cho: A.X = B

1.20. Giải các bất phương trình

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$; b) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} \geq 0$

1.21. Tìm hạng của ma trận:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

1.22. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -2x + y = 0 \\ 2x - y + z = -2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ -2x + y + z = -4 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - 2y + 2z = -5 \\ -2x - y + z = 4 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x + y - z = 7 \\ x + y - z = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y - z = 2 \\ x - 3y + 2z = 11 \end{cases}$

1.23. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

1) $\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 4 \\ 4x + 3y - z + 2t = 9 \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y + 11z + 5t = 2 \\ x + y + 5z + 2t = 1 \\ 2x + y + 3z + 2t = -3 \\ x + y + 3x + 4t = -3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$

1.24. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

1) $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + my + 3z = 0 \\ 3x + 3y + z = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x + my - z = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x + my + 2z = 4 \end{cases}$

1.25. Tìm m để hệ sau có nghiệm không tầm thường

1) $\begin{cases} mx-3y+z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 3x+2y-2z=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+y-mz=0 \\ -x+y+mz=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+y-mz=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$

1.26. Giải và biện luận:

1) $\begin{cases} 2x-3y+az=5 \\ x+2y-z=-3 \\ x-5y+2z=4 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (m+1)x+y+z=1 \\ x+(m+1)y+z=m \\ x+y+(m+1)z=m^2 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+7z=-1 \\ -x+y+3z=6 \\ 5x+y+2z=m \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y+(1-m)z=m+2 \\ (1+m)x-y+2z=0 \\ 2x-my+3z=m \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x+y+(m+1)z=m^2+3m \\ x+(m+1)y+z=m^3+3m^2 \\ (m+1)x+y+z=m^4+3m^3 \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG 1

1.1.

1) $B^t A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2) $(AB)^t = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 9 \\ -4 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

1.2.

1) $A^t = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $B^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

2) $B^t A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -8 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

1.3.

$BA^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 9 & 6 & -7 \end{bmatrix}$

1.4.

1) $AB = \begin{bmatrix} -2 & 10 & 21 & 21 \\ -6 & 16 & -5 & 15 \end{bmatrix}$

2) Gợi ý: $B^t A^t = (AB)^t$

Vậy $B^t A^t = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 10 & 16 \\ 21 & -5 \\ 21 & 15 \end{bmatrix}$

1.5.

1) $A^t B^t = \begin{bmatrix} -1 & -9 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

2) $(AB)^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 13 \\ -4 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

1.6.

1) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 15 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -17 & 19 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 10 & 25 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ -4 & 12 \\ -2 & 31 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 11 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [\ 11 \quad -5]$

7) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & -2 \\ -3 & 0 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

1.7.

1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 12 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

2) Ta có $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = I \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) Ta có $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^2 = -3I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^6 = (-3I)^3 = -27I$

1.8.

$$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 5I$$

$$= -3I - \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} + 5I = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

1.9.

$$f(A) = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}^2 + 5\begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -18 & 12 \\ 4 & 4 & 6 \\ 8 & 12 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 30 & 0 \\ 0 & 10 & -10 \\ 10 & 0 & 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 12 & 12 \\ 4 & -10 & 16 \\ 18 & 12 & 46 \end{bmatrix}$$

1.10.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -32$

3) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -99$ 4) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -34$

1.11.

1) $\begin{vmatrix} 14528 & 14628 \\ 25132 & 25232 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14528 & 14528+100 \\ 25132 & 25132+100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14528 & 100 \\ 25132 & 100 \end{vmatrix}$

$= 100\,(14528 - 25132) = -1060400$

$$2)\ \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327-427 \\ 1014 & 543 & 443-543 \\ -342 & 721 & 621-721 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 246 & 427 & -100 \\ 1014 & 543 & -100 \\ -342 & 721 & -100 \end{vmatrix}$$

$$= -100 \begin{vmatrix} 246 & 427 & 1 \\ 1014 & 543 & 1 \\ -342 & 721 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ h2-h1 \\ h3-h1 \end{matrix}$$

$$= -100 \begin{vmatrix} 246 & 427 & 1 \\ 768 & 116 & 0 \\ -588 & 294 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -100 \begin{vmatrix} 768 & 116 \\ -588 & 294 \end{vmatrix}$$

$$= -100.294 \begin{vmatrix} 768 & 116 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -29400.1000 = -29400000$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8.4.4.4 = 512$$

$$4)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$5)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1010\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 160$$

6) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 4 & 18 & 48 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 9 & 24 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 12$$

1.12. Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A.

1) det(A)= - 4, $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

2) det(A)= - 14, $A^{-1} = -\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -2 & -8 & -3 \\ -4 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$

3)det(A)= 4, $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 4 & -8 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

4)det(A)= 3, $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5) det(A)= - 8, $A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -6 & 8 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

6) det(A)= - 2, $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

1.13.

1) $(A.B)^T = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 2 \\ 12 & -4 & -3 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ 2) $(A.B)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -18 & 52 \\ 4 & -10 & 29 \\ -1 & 3 & -8 \end{bmatrix}$

1.14.

1) $(A.B)^T = \begin{bmatrix} 13 & 20 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 10 \end{bmatrix}$

2) $(A.B)^{-1} = \frac{1}{43}\begin{bmatrix} -19 & 17 & -10 \\ -165 & 125 & -71 \\ 125 & -96 & 59 \end{bmatrix}$

1.15. Tìm ma trận X sao cho :

1) $$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}(-\frac{1}{2})\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

2) $$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -36 & -8 \\ 51 & 8 \\ 50 & 12 \end{bmatrix}$$

3) $$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -9 & 5 & -8 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -31 & -10 & 26 \\ 6 & -1 & -10 \\ 15 & 8 & -18 \end{bmatrix}$$

4) $$X = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -30 & 15 \\ 13 & -44 & 20 \end{bmatrix}$$

1.16. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

1) Tìm ma trận A^{-1}

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

2) Tìm ma trận X sao cho: A.X = B

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -13 & 13 \\ -15 & 20 \end{bmatrix}$$

1.17. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

1) Tìm ma trận A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -2 & 6 & 5 \\ -2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

2) Tìm ma trận X sao cho: X.A = B

$$X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 16 & 13 \\ -12 & 37 & 33 \end{bmatrix}$$

1.18. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

1) Tìm ma trận A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

2)Tìm ma trận X sao cho: X.A = B

$$X = BA^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 18 & 6 & -9 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

1.19. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

1) Tìm ma trận A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Tìm ma trận X sao cho: A.X = B

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

1.20.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2x + 8 < 0 \Leftrightarrow x > 4$

b) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} = x^2 - 10x - 24 \geq 0 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq -4$

1.21. Tìm hạng của ma trận:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2h2 - h1 \\ \\ h4 - 2h1 \end{matrix}$

$: \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ đổi chỗ h2 và h3

$: \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ h4 - h2 \end{matrix}$

$: \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ h4 - h3 \end{matrix}$

$$:\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\rho(\mathrm{A}) = 3$$

b) $$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$ đổi chỗ h1 và h2

$$:\begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ h3+3h1 \\ \\ h5+2h1 \end{matrix}$$

$$:\begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2h3+11h2 \\ 2h4-5h2 \\ 2h5+5h2 \end{matrix}$$

$$:\begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $\rho(\mathrm{B}) = 2$

1.22. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer

1) $|A| = 49; |A_1| = 98; |A_2| = 49; |A_3| = 49$

Vậy $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$

2) $|A| = 5; |A_1| = 5; |A_2| = 10; |A_3| = -10$

Vậy x = 1, y = 2, z = -2

3) $|A| = -1; |A_1| = -2; |A_2| = 1; |A_3| = -1$

Vậy x = 2, y = - 1, z = 1

4) $|A| = -5; |A_1| = 13; |A_2| = -22; |A_3| = -16$

Vậy $x = -\frac{13}{5}$, $y = \frac{22}{5}$, $z = \frac{16}{5}$

5) $|A| = 2; |A_1| = 4; |A_2| = -2; |A_3| = -4$

Vậy x = 2, y = -1, z = -2

6) $|A| = -20; |A_1| = -40; |A_2| = 20; |A_3| = -60$

Vậy x = 2, y =-1, z = 3

1.23. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

1)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 9 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} h2-2h1 \\ h3-4h1 \\ 2h4-3h1 \end{array}$$

$$: \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ h3-3h2 \\ \\ \end{array}$$

$$: \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ 2h4-h3 \end{array}$$

$$: \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right]$$

Hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} 2x+2y-z+t=4 \\ -y+z=1 \\ -2z=-7 \\ 2t=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{5}{2} \\ z=\dfrac{7}{2} \\ t=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

2)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ 2h2-h1 \\ h3-h1 \\ 2h4-h1 \end{matrix}$$

$$: \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ h3-2h2 \\ h4-h2 \end{matrix}$$

$$: \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 8 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \\ 3h4-2h3 \end{matrix}$$

$$: \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right]$$

Hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} 2x+3y+11z+5t=2 \\ -y-z-t=0 \\ -6z-t=-5 \\ 14t=-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \\ z=1 \\ t=-1 \end{cases}$$

1.24. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

1) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & m & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; det(A) = -5m-4

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi det(A) $\neq 0$ hay m $\neq -\frac{4}{5}$

2) m $\neq$ - 5

3) m$\neq$ 7

1.25. Tìm m để hệ sau có nghiệm không tầm thường

1) det(A)= - 4m -20

Hệ có nghiệm không tầm thường det(A)= 0 hay m = -5

2) m= $\frac{3}{4}$

3) m = 2

1.26. Giải và biện luận:

1)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & m & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 & 4 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ 2h2-h1 \\ 2h3-h1 \end{array}$$

$$:\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & m & 5 \\ 0 & 7 & -2-m & -11 \\ 0 & -7 & 4-m & 3 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ h3+h2 \end{array}$$

$$:\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & m & 5 \\ 0 & 7 & -2-m & -11 \\ 0 & 0 & 2-2m & -8 \end{array}\right]$$

Vậy m = 1 hệ vô nghiệm

m $\neq 1$ hệ có nghiệm duy nhất

2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right] \text{ Đổi chỗ h1 và h3}$$

$$:\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ h2-h1 \\ h3-mh1 \end{array}$$

$$: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^3 \end{array}\right] h3+h2$$

$$: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1+m-m^2-m^3 \end{array}\right]$$

Với m = 1 thì $\rho(A)=\rho(\bar{A})=1$: hệ có vô số nghiệm

m = -2 thì $\rho(A)=2\neq\rho(\bar{A})=3$: hệ vô nghiệm

$m\neq 1; m\neq -2$ thì $\rho(A)=\rho(\bar{A})=3$: hệ có nghiệm duy nhất

3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & m^2 \\ 1 & m+1 & 1 & m \\ m+1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ h2-h1 \\ h3-(m+1)h1 \end{array}$$

$$: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & m^2 \\ 0 & m & -m & m-m^2 \\ 0 & -m & 1-(m+1)^2 & 1-m^2(m+1) \end{array}\right] h3+h2$$

$$: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & m^2 \\ 0 & m & -m & m-m^2 \\ 0 & -m & 1-(m+1)^2-m & 1-m^2(m+1)+m-m^2 \end{array}\right]$$

Với m = 0 thì $\rho(A)=1\neq\rho(\bar{A})=2$: hệ vô nghiệm

m = -3 thì $\rho(A)=2\neq\rho(\bar{A})=3$: hệ vô nghiệm

$m\neq 0; m\neq -3$ thì $\rho(A)=\rho(\bar{A})=3$: hệ có nghiệm duy nhất

4) m = -1 :hệ có vô số nghiệm

m $\neq$ - 1: hệ vô nghiệm

5) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ 1+m & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -m & 3 & m \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ h2-(m+1)h1 \\ h3-2h1 \end{array}$$

$$:\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ 0 & -2-m & 1+m^2 & -(m+1)(m+2) \\ 0 & -m-2 & 1+2m & -m-4 \end{array}\right] h3-h2$$

$$:\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ 0 & -2-m & 1+m^2 & -(m+1)(m+2) \\ 0 & 0 & 2m-m^2 & m^2+2m-2 \end{array}\right]$$

Vậy m= 0 hoặc m=2 : hệ vô nghiệm

$m \neq 0$ và $m \neq 2$: hệ có nghiệm duy nhất

6)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & m^2+3m \\ 1 & m+1 & 1 & m^3+3m^2 \\ m+1 & 1 & 1 & m^4+3m^3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ h2-h1 \\ h3-(m+1)h1 \end{array}$$

$$:\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & m^2+3m \\ 0 & m & -m & m^3+2m^2-3m \\ 0 & -m & -m^2-2m & m^4+2m^3-4m^2-3m \end{array}\right] h3+h2$$

$$:\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & m^2+3m \\ 0 & m & -m & m^3+2m^2-3m \\ 0 & 0 & -m^2-3m & m^4+3m^3-2m^2-6m \end{array}\right]$$

Vậy m= 0 hoặc m= - 3 : hệ có vô số nghiệm

$m \neq 0$ và $m \neq -3$: hệ có nghiệm duy nhất

Chương 2
PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀ TÍCH PHÂN

2.1. ĐẠO HÀM

2.1.1. Định nghĩa đạo hàm:

Cho hàm số y = f(x) xác định trong một lân cận điểm x_0.

Cho x_0 một số gia Δx. Khi đó: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia của hàm số ứng với số gia đối số Δx tại điểm x_0 .

Nếu tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ có giới hạn hữu hạn khi $\Delta x \to 0$ thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm của hàm số f đối với x tại điểm x_0* và được ký hiệu là $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Khi đó: ta nói f(x) **khả vi** tại điểm x_0 .

Ví dụ 1:

1) f(x)= c thì f'(x)= 0 vì $f(x+\Delta x)-f(x) = c-c = 0$.

2) f(x)= x

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

3) $y = f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x$$

4) $y = f(x) = \ln x, \quad x > 0.$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(\frac{x+\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

5) $y = f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos(\frac{x+\Delta x+x}{2})\sin(\frac{x+\Delta x-x}{2})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x$$

6) $y = f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x$$

7) $y = f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \ln e = e^x$$

Chú ý: Nếu hàm y = f(x) có đạo hàm tại mọi điểm x $\in$ (a, b) thì ta nói hàm số y = f(x) có đạo hàm trên (a,b).

2.1.2. Các công thức về tính đạo hàm.

a. Định lý 1: Đạo hàm của một tổng hữu hạn các hàm số khả vi bằng tổng các đạo hàm của từng hàm số: y = f(x) $\pm$ g(x) $\Rightarrow$ y'= f'(x) $\pm$ g'(x).

b. Định lý 2: Nếu hai hàm f(x) và g(x) có đạo hàm tại giá trị x nào đó thì tại đây ta có:

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Hệ quả: Một hằng số có thể đưa ra ngoài dấu đạo hàm: (Cy)'= Cy' (C = const)

Chú ý: Có thể mở rộng định lý cho đạo hàm của một tích nhiều hàm số.

$$(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$$

c. Định lý 3: Nếu f(x), g(x) là hai hàm số có đạo hàm và g(x) $\neq 0$ ta có:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của các hàm số:

1) $f(x) = \tan x$

2) $f(x) = \cot x$

Giải.

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Áp dụng định lý 3 về đạo hàm của thương ta có

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x.\cos x+\sin x.\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

2) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

Áp dụng định lý 3 về đạo hàm của thương ta có

$$f'(x)=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\sin x.\sin x-\cos x.\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $f(x)=2x^2+5\sin x$

2) $f(x)=(2x^2-1)(x+2)$

3) $f(x)=(2x-5)\cos x$

4) $f(x)=\sin x.\cos x$

5) $f(x)=(5x-6)e^x$

6) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

Giải.

1) Áp dụng định lý 1 và 2 ta có

$f'(x)=2(x^2)'+5(\sin x)'=4x+5\cos x$

2) Áp dụng định lý 1 và 2 ta có

$f'(x)=(2x^2-1)'(x+2)+(2x^2-1)(x+2)'$

$=4x(x+2)+2x^2-1$

$=6x^2+8x-1$

3) $f'(x)=(2x-5)'\cos x+(2x-5)(\cos x)'$

$=2\cos x-(2x-5)\sin x$

4) $f'(x)=(\sin x)'.\cos x+\sin x(\cos x)'$

$=\cos x.\cos x-\sin x.\sin x=\cos 2x$

5) $f'(x)=(5x-6)'e^x+(5x-6)(e^x)'$

$=5e^x+(5x-6)e^x$

$=(5x-1)e^x$

6) $f'(x) = \dfrac{(\sin x)'.x - \sin x.(x)'}{x^2} = \dfrac{\cos x.x - \sin x}{x^2}$

d. Định lý 5: (*Đạo hàm hàm hợp*)

❖ ***Định lý:***

Cho hàm y = f(u) với u = φ(x), nếu y có đạo hàm theo u: y' = f'(u), còn u có đạo hàm đối với x: u'_x = φ'(x) thì hàm f(φ(x)) cũng có đạo hàm theo x và:

$$y'(x) = \{f[\varphi(x)]\}' = y'_u.u'_x = f'(u).u'(x)$$

Chứng minh:

Cho x một số gia Δx ta có Δu và Δy. Giả sử $\Delta u \neq 0$, ta có: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u}.\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$

mà u = φ(x) có đạo hàm nên u liên tục , $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$

Vậy khi $\Delta x \to 0$ thì $\Delta u \to 0$ nên $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u}.\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$

hay $y'_x = y'_u.u'_x$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số

1) $f(x) = a^x$

Ta có $a^x = e^{x\ln a}$, $u = x\ln a$

Vậy $(a^x)' = u'_x(e^u)'_u = \ln a.e^{x\ln a} = a^x \ln a$

2) $y = x^\alpha$

Xét trường hợp x> 0, bằng cách lấy lôga cả hai vế ta có

$\ln y = \alpha \ln x$

Đạo hàm hai vế với y là hàm số của x ta được

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow y' = \frac{y\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Trường hợp x<0, bằng phép đổi biến x= -t ta cũng suy ra được $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

Vậy $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ với mọi .

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của các hàm số

1) $f(x) = \sin 5x$

2) $f(x) = \sin(x^2 - 4x + 5)$

3) $f(x) = e^{-4x}$

4) $f(x) = \ln(\cos 3x - 2)$

Giải.

1) $f'(x) = (5x)'\cos 5x = 5\cos 5x$

2) $f'(x) = (x^2 - 4x + 5)'\cos(x^2 - 4x + 5) = (2x - 4)\cos(x^2 - 4x + 5)$

3) $f'(x) = (-4x)'e^{-4x} = -4e^{-4x}$

4) $f'(x) = \dfrac{(\cos 3x - 2)'}{\cos 3x - 2} = \dfrac{-3\sin 3x}{\cos 3x - 2}$

e. Định lý 4: (Đạo hàm hàm ngược): Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm f'(x) $\neq 0$ và hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ liên tục tại điểm y tương ứng thì hàm $f^{-1}(y)$ có đạo hàm và

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Ví dụ 6:

1) Tính đạo hàm của hàm y = $\log_a x$

Ta có y = $\log_a x$ có hàm ngược là x = a^y

mà: x' = $a^y \ln a$ nên ta có:

$$y' = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Vậy: $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$

2) Tính đạo hàm của hàm y = arcsinx.

Ta có: y = arcsinx có hàm ngược là x = siny

mà: x' = cosy nên ta có:

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Vậy: (arcsinx)' = $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

3) Tính đạo hàm của hàm y = arccosx.

Ta có: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ lấy đạo hàm hai vế ta có: $(\arcsin x)' + (\arccos x)' = 0$

nên $(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

4) Tương tự ta có: $(\operatorname{arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Tổng kết các ví dụ đã nêu ở phần trên, ta có **bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản** sau

Đạo hàm của hàm số	**Đạo hàm của hàm hợp**
C' = 0 (C = const)	
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α thực)	$(u^\alpha)' = \alpha\, u^{\alpha-1} u'$ ($\alpha \in R$)
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = u'.\, a^u \ln a$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'\, e^u$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
$(\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\text{arccot}\, u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của các hàm số

1) $f(x) = (3x^2 - 4x + 1)^2$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 3}$

3) $f(x) = \sin 3x . \cos x$

4) $f(x) = (2x - 3)\cos 2x$

5) $f(x) = (4x - 5)e^{-3x}$

Giải.

1) $f'(x) = 2(3x^2 - 4x + 1)'(3x^2 - 4x + 1)$

$= 2(6x - 4)(3x^2 - 4x + 1)$

2) $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x - 3)'}{2\sqrt{x^2 - x - 3}} = \dfrac{(2x - 1)}{2\sqrt{x^2 - x - 3}}$

3) $f'(x) = (\sin 3x)'.\cos x + \sin 3x.(\cos x)'$

$= 3\cos 3x.\cos x - \sin 3x.\sin x$

4) $f'(x) = (2x - 3)'\cos 2x + (2x - 3)(\cos 2x)'$

$= 2\cos 2x - 2(2x - 3)\sin 2x$

5) $f'(x) = (4x - 5)'e^{-3x} + (4x - 5)(e^{-3x})'$

$= 4e^{-3x} - 3(4x - 5)e^{-3x} = (15x - 17)e^{-3x}$

❖***Áp dụng tính đạo hàm của biểu thức luỹ thừa mũ.***

Để tính đạo hàm các dạng: $y=[u(x)]^{V(x)}$ hoặc f(x).g(x)....h(x). Ta thực hiện:

+ Lấy logarit hai vế

+ Đạo hàm hai vế

+ Rút y'.

Ví dụ 8:

1) Tính $(x^x)'$

Đặt $y = x^x$, Logarit hai vế theo cơ số e, ta có: lny = xlnx.

Đạo hàm hai vế ta có: $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$. Vây $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

2) Cho $y = \frac{\sqrt[3]{x^2+5}.\sqrt{\sin x}}{x^2.\cos^6 x}$. Tính y'

Logarit hai vế cơ số e, ta có:

$$\ln y = \ln\frac{\sqrt[3]{x^2+5}.\sqrt{\sin x}}{x^2.\cos^6 x} = \frac{1}{3}\ln(x^2+5) + \frac{1}{2}\ln(\sin x) - 2\ln x - 6\ln\cos x.$$

Đạo hàm 2 vế, ta có: $\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\frac{2x}{x^2+5} + \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2}{x} + \frac{6\sin x}{\cos x}$

Suy ra: $y' = \frac{\sqrt[3]{x^2+5}.\sqrt{\sin x}}{x^2.\cos^6 x}\left[\frac{2x}{3(x^2+5)} + \frac{1}{2}\cot gx - \frac{2}{x} + 6tgx\right]$

2.1.3. Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa

Cho hàm y = f(x). Nếu y' = $f'(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm [f'(x)]' được gọi là đạo hàm cấp hai của đạo hàm y = f(x) ký hiệu $y'' = f''(x) = [f'(x)]'$

Nếu $f''(x)$ tồn tại đạo hàm thì gọi là đạo hàm cấp ba của f(x), ký hiệu:

$$y^{(3)} = f^{(3)}(x) = (y'')' = (f''(x))'$$

Tổng quát ta có nếu đạo hàm cấp n – 1 của hàm f(x) là $f^{(n-1)}(x)$ tồn tại đạo hàm thì gọi là đạo hàm cấp n của hàm f(x), ký hiêu: $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$. Khi đó ta nói hàm f(x) khả vi đến cấp n tại x.

Ví dụ 9:

1) $f(x) = e^x$ ta có : $f^{(n)}(x) = e^x$

2) $f(x) = \cos x$ $\quad f'(x) = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

$$f''(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + 2\frac{\pi}{2})$$

...

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$$

3) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$f''(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$$

...

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

4) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{1.2}{(1+x)^3}$$

...

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

2.2. VI PHÂN

2.2.1. Định nghĩa

a. Phần chính của số gia hàm số

Xét hàm số y = f(x) có đạo hàm tại x, khi đó $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = f'(x). Do đó theo định nghĩa giới hạn ta có: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, trong đó: α là vô cùng bé khi $\Delta x \to 0$

Do đó: Δy = y'. Δx + $\alpha . \Delta x$, trong đó: $\alpha . \Delta x$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$

Biểu thức f'(x)Δx được gọi là *phần chính bậc nhất* (đối với Δx) của số gia Δy

b. Định nghĩa: Cho hàm số y = f(x).

Nếu $\Delta f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng $\Delta f(x)$ = f'(x) Δx+ $\alpha . \Delta x$ (với $\alpha . \Delta x$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$ và f'(x)$\neq 0$) thì phần chính bậc nhất (đối với Δx) f'(x)Δx của số gia Δy được gọi là *vi phân* của hàm số y = f(x).

Ký hiệu : dy hoặc df(x).

Ta có : dy = y' Δx hoặc df(x) = f'(x)Δx

Đặc biệt: Xét hàm y = x $\Rightarrow$ dy = dx = x' Δx $\Rightarrow$ dx= Δx

Vậy : Vi phân của đối số độc lập chính là số gia của đối số ấy. Do đó ta có:

$$dy = y'(x)dx \quad \text{hay} \quad df(x) = f'(x)dx$$

Chú ý

Vi phân của hàm số tại một điểm x_0 được biểu diễn qua f'(x_0) và Δx = dx mà ta chọn nên muốn tính dy tại x_0 phải biết x_0 và số gia dx của nó. Hàm số có vi phân tại x_0 được gọi là hàm số khả vi tại x_0. Hàm y = f(x) khả vi tại mọi điểm $x \in (a , b)$ được gọi là hàm f(x) khả vi trong khoảng (a , b)

Từ công thức trên ta có thể biểu diễn đạo hàm của hàm số như sau:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

Dễ dàng suy ra: Đối với hàm số y = f(x) tại điểm nào hàm số có đạo hàm thì nó khả vi tại điểm dó, và ngược lại. Vậy *đối với hàm một biến số khái niệm đạo hàm và khái niệm khả vi là tương đương nhau***.**

Cho 2 hàm số: y = f(u) và u = g(x) khả vi.

Ta có: dy = f'(u)du

du = g'(x)dx

$\Rightarrow$ dy = f'(u).u'(x)dx

mà f'(x) = f'(u).u'(x)

Suy ra; dy = f'(x)dx

Nghĩa là công thức vi phân cấp một dy là bất biến đối với hàm một biến.

2.2.2. Các công thức tính vi phân

Ta có: dy = f'(x)dx

Từ bảng đạo hàm cơ bản, ta có thể tính vi phân các hàm số và phần lớn các phép tính về đạo hàm vẫn đúng với vi phân. Chẳng hạn:

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad , \quad \text{với } v \neq 0$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

Bảng vi phân của các hàm sơ cấp và bảng vi phân của các hàm hợp sau đây:

Đạo hàm của hàm số	**Đạo hàm của hàm hợp**
d(x^α) = $\alpha x^{\alpha-1}dx$, x$\in$R	d(u^α) = $\alpha u^{\alpha-1}du$
d(lnx) = $\frac{dx}{x}$	d(lnu) = $\frac{du}{u}$
d(a^x) = a^xlnadx	d(a^u) = a^ulnadu
d(sinx) = cosxdx	d(sinu) = cosudu
d(cosx) = -sinxdx	d(cosu) = -sinudu
d(tanx) = $\frac{dx}{\cos^2 x}$	d(tanu) = $\frac{du}{\cos^2 u}$
d(cotx) = $\frac{-dx}{\sin^2 x}$	d(cotu) = $\frac{-du}{\sin^2 u}$
d(arcsinx) = $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	d(arcsinu) = $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
d(arccosx) = $\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$	d(arccosu) = $\frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$
d(arctanx) = $\frac{dx}{1+x^2}$	d(arctanu) = $\frac{du}{1+u^2}$
d(arccotx)=-$\frac{dx}{1+x^2}$	d(arccotu)=-$\frac{du}{1+u^2}$
d(e^x) = e^xdx	d(e^u) = e^udu

Ví dụ 10:

1) d(arctanx) = $\frac{1}{1+x^2}dx$, tại x = 2, Δx=0,01 thì d(arctanx) = $\frac{1}{1+4}.0{,}01 = 0{,}002$

2) $d(\sin(3x+\frac{\pi}{4})) = (3x+\frac{\pi}{4})'\cos(3x+\frac{\pi}{4})dx = 3\cos(3x+\frac{\pi}{4})dx$, tại x = $\frac{\pi}{4}$ và Δx = 0,1

$$\Rightarrow d\sin(3x+\frac{\pi}{4}) = 3\cos(3.\frac{\pi}{4}) = 3\cos(3.\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}).0{,}1 = 3.(-1).0{,}1 = -0{,}3$$

❖ **Áp dụng tính gần đúng**

Ta có: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha.\Delta x$

Nếu hàm số y = f(x) khả vi và khi Δx khá bé thành phần $\alpha.\Delta x$ coi như không đáng kể.

Ta có công thức: $\Delta y \approx dy \Rightarrow \Delta y \approx f'(x)dx$ khi Δx khá nhỏ

Do $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ nên ta có: $f(x+\Delta x) \approx f(x) + df(x)$ khi Δx khá nhỏ.

Khi Δx càng nhỏ, độ chính xác của 2 công thức trên càng cao.

Ví dụ 11:

Một quả cầu kim loại bán kính R = 10cm, khi nung nóng, bán kính R dài thêm một đoạn, r = 0,01cm. Hỏi khi nung thể tích V của quả cầu tăng thêm một lượng Δv là bao nhiêu?

<u>Giải</u>

Ta có thể tích: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ (cm^3)

Tính Δv tại R = 10, $\Delta R = 0{,}01$.

Vì ΔR nhỏ nên ta có thể coi $\Delta v \approx dV = v'dR = (\frac{4}{3}\pi R^3)'$

$\Rightarrow \quad \Delta v \approx dV = 4\pi R^2 dR.$

Thay R = 10, dR = 0,01 ta có lượng tăng thêm của quả cầu là:

$$\Delta v \approx 4 \,.\, 3{,}14 \,.\, 10^2 \,.\, 0{,}01 \approx 12{,}56\ cm^3.$$

Ví dụ 12:

1) Tính gần đúng $\sqrt[6]{64{,}2}$

Xét hàm $f(x) = \sqrt[6]{x}$ tại x = 64 , $\Delta x = 0{,}2$. Do Δx khá nhỏ nên:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + df(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x+\Delta x) \approx \sqrt[6]{x+\Delta x} \approx \sqrt[6]{x} + (\sqrt[6]{x})'dx = \sqrt[6]{x} + (x^{1/6})'dx = \sqrt[6]{x} + \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}dx.$$

Thay x = 64, $\Delta x = 0{,}2$ ta có: $\sqrt[6]{64} + \frac{1}{6(\sqrt[6]{64})^5}.0{,}2 = 2 + \frac{1}{192}.0{,}2 \approx 2{,}0104$

Vậy: $\sqrt[6]{64{,}2} \approx 2{,}0104.$

2.2.3. Vi phân cấp cao

a. Định nghĩa

Vi phân của vi phân hàm số y = f(x) gọi là vi phân cấp 2 của hàm số đó.

Kí hiệu : d^2y hay $d^2f(x)$, ta có: $d^2y=d(dy)$ hay $d^2f(x)=d[d(f(x)]$

Tổng quát:

Vi phân của vi phân cấp n-1 của hàm y = f(x) được gọi là vi phân cấp n của hàm đó.

Kí hiệu: $d^ny = d(d^{n-1}y)$ hay $d^nf(x) = d[d^{n-1}f(x)]$

b. Công thức tính

Ta có: $d^2y = d(dy) = d(y'dx) =(y'dx)'dx = [y''dx+y'd'x]dx$

mà $d'x = 0$

Vậy $d^2y = y''dx^2$.

Tổng quát: $d^ny = y^{(n)}dx^n$ hay $d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n$.

Ví dụ 13: Tính $d^3(\sin^3x)$

Ta có : $d^3(\sin^3x) = \left(\sin^3x\right)^{(3)} dx^3 = [3\sin^2x \cdot \cos x]'' \, dx^3$

$$= [6\sin x.\cos^2x - 3\sin^3x]' \, dx^3$$

$$= [6\cos^3x + 6\sin x \cdot 2\cos x \cdot(-\sin x) - 9\sin^2x \cdot \cos x]dx^3$$

$$= [6\cos^3x - 21\sin^2x \cdot \cos x]dx^3 = 3\cos x.(2\cos^2x-7\sin^2x)dx^3$$

2.3. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

2.3.1. Định lý Lagrange (Lagơrăng)

Nếu hàm f(x) liên tục trong đoạn [a,b] và có đạo hàm giới nội tại mọi điểm trong khoảng (a , b) thì trong khoảng (a , b) sẽ có ít nhất 1 điểm c sao cho:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

2.3.2. Định lý Cauchy (côsi)

Nếu hai hàm f(x) và g(x) liên tục trong đoạn [a,b], có đạo hàm giới nội tại mọi điểm trong khoảng (a , b) và $g'(x) \neq 0$ với $\forall x \in (a , b)$ thì trong khoảng (a , b) có ít nhất một điểm c ($a < c < b$) sao cho: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

2.3.3. Công thức Taylor

Cho hàm số f(x) liên tục trong khoảng đóng [a , b] và khả vi đến cấp (n + 1) trong khoảng mở (a , b). Vấn đề đặt ra là ta tìm một đa thức $P_n(x)$ có bậc không vượt quá n sao cho với một số thực $c \in (a , b)$ sao cho:

$$f(c) = P_n(c) \quad ; \quad f'(c) = P_n'(c) \quad ; \quad \ldots\ldots\ldots \quad ; \quad f^{(n)}(c) = P_n^{(n)}(c)$$

Ta sẽ tìm đa thức $P_n(x)$ dưới dạng :

$$P_n(x) := a_o + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_n(x - c)^n$$

Dễ dàng suy ra: $a_o = f(c)$; $a_1 = \dfrac{f'(c)}{1!}$; $a_2 = \dfrac{f''(c)}{2!}$

. . . . $a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$

Như vậy, đa thức $P_n(x)$ cần tìm là:

$$P_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

Đặt: $R_n(x) := f(x) - P_n(x)$

Người ta đã chứng minh được: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\bar{c})}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}$ với $\bar{c}$ là một số nằm giữa x và c.

Định lý:

Nếu hàm số f(x) xác định có đạo hàm đến cấp n liên tục trong khoảng đóng [a , b] , có đạo hàm đến cấp (n + 1) lần trong khoảng mở (a , b) thì với bất kì $c \in (a , b)$ luôn có:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{c})}{(n+1)!}(x - c)^{n+1} \qquad (*)$$

với $\bar{c}$ là một số nằm giữa x và c.

Khi đó:

+) Công thức (*) được gọi là công thức Taylor

+) Một hàm số f(x) được biểu diễn dưới dạng công thức (*) được gọi là **khai triển Taylor** hữu hạn của hàm số f(x) tại điểm x = c.

Đặc biệt: Khi c = 0 thì công thức (*) được gọi là **khai triển Mac Laurin** của f(x) và nó có dạng:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

với $0 < \theta < 1$

Chú ý: Nếu đặt x := c + h thì công thức (*) có dạng:

$$f(c+h) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}h + \frac{f''(c)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

với $0 < \theta < 1$

2.3.4. Công thức L'Hospital

a) Công thức L'Hospital (Lô pitan)

Nếu hai hàm số f(x) và g(x) thoả mãn :

1) f(a) = g(a) = 0

2) Các đạo hàm f'(x), g'(x) xác định trong lân cận của a và g'(x) $\neq 0$ khi $x \neq a$.

3) Tỷ số $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ có giới hạn là A khi $x \to a$

thì tỷ số $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng có giới hạn và $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Chú ý: Người ta đã chứng minh:

•Qui tắc Lôpitan vẫn đúng khi $x \to \infty$ nghĩa là: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

•Nếu f'(a = g'(a) = 0 và f'(x), g'(x) thoả mãn các giả thiết của qui tắc Lôpitan thì ta cũng có : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$

•Qui tắc Lôpitan vẫn đúng trong trường hợp: f(x) $\to \infty$ và g(x)$\to \infty$ (khi $x \to a$)

Ví dụ 14:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^\alpha - 1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1} = \alpha$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(tgx - x)'}{(x-\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}(1+\cos x) = 2$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x - e^{-x})'}{(\ln(e-x)+x-1)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\frac{-1}{e-x}+1}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}+e^{-x})(e-x)}{-1+e-x} = \frac{2e}{e-1}$$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{tg3x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin 3x}\frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin 3x}.\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin 3x}.\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos 3x)'}{(\cos x)'}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin 3x}.\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x} = (-1).(-3) = 3$$

Chú ý : Khi $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ không có giới hạn khi $x \to a$ ta phải tìm cách khác để đi đến kết luận.

Ví dụ 15: Tính $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$

Ta thấy: f(x) = x + sinx $\Rightarrow$ f'(x) = 1 + cosx

g(x) = x $\Rightarrow$ g'(x) = 1

$\frac{f'(x)}{g'(x)}$ không có giới hạn khi $x \to \infty$, trong trường hợp này ta giải quyết như sau:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x}) = 1$ Vì $|\sin x| \le 1$

b). Các giới hạn thường gặp

- ***Dạng 0.*** ∞

Khi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ ta có: $\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, (dạng 0/0)

Ví dụ 16 : $\lim\limits_{x\to 2}(4 - x^2).tg\frac{\pi x}{4} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\cot g\frac{\pi x}{4}} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{-2x}{\frac{-\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi x}{4}}} = \frac{16}{\pi}$

- ***Dạng*** $\infty - \infty$

Khi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Ta biến đổi để đưa về áp dụng Lôpitan:

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a}\left[\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right] = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x).g(x)}}$$

Ví dụ 17: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\cos x}-tgx\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\frac{1}{tgx}}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{tgx}-\cos x}{\frac{\cos x}{tgx}}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

➢ ***Dạng 0^0, 1^∞, ∞^0:***

Ba dạng này, ta biến đổi theo mẫu sau:

Xét hàm: $y=[f(x)]^{g(x)}$

1) Lôgarit hai vế theo cơ số e: $\ln y = \ln[f(x)]^{g(x)} \Leftrightarrow \ln y = g(x).\ln[f(x)]$

2) Lấy giới hạn hai vế: $\lim\limits_{x\to a}\ln y = \lim\limits_{x\to a}[g(x).\ln f(x)]$

3) Ta áp dụng dạng ***0.***∞ để giải tiếp

Ví dụ 18:

1) Tính $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^2}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0}[x^2.\ln x]}$

mà $\lim\limits_{x\to 0}[x^2.\ln x] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2x}{x^4}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1.x^4}{-x.2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{-2} = 0$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^2} = e^0 = 1$.

2) Tính $\lim\limits_{x\to 0}(\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}(\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln x}\ln(\cot gx)\right]}$

Xét giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(\cot g\, x)]'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{\sin^2 x.\cot g\, x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x}{\sin x.\cos x}\right)'$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(-x)'}{(\sin x.\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} (\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

2.4. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

2.4.1. Định nghĩa

a) Định nghĩa nguyên hàm

Nếu hàm số F(x) có đạo hàm F'(x) = f(x) hoặc dF(x) = f(x)dx trong khoảng (a,b) thì F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm số f(x) trong khoảng (a,b) đó.

Ví dụ 19: Hàm $y = x^2$ có nguyên hàm $F(x) = \frac{x^3}{3}$ vì $(\frac{x^3}{3})' = x^2$

Qua định nghĩa ta thấy, khái niệm nguyên hàm và đạo hàm là ngược nhau.

b) Các định lý về nguyên hàm.

❖ **Định lý 1:** Nếu hàm f(x) có đạo hàm triệt tiêu tại mọi điểm trong [a,b] (tức là f(x) = 0) thì f(x) bằng hằng số trong đoạn đó.

❖ **Định lý 2:** Nếu F(x) và Φ(x) là hai nguyên hàm của f(x) trong [a , b] thì hiệu F(x) - Φ(x) là một hằng số.

Nhận xét:

Nếu f(x) có một nguyên hàm F(x) thì nó có vô số nguyên hàm khác nhau một hằng số và biểu thức F(x) + C (C là một hằng số bất kỳ) bao gồm mọi nguyên hàm ấy .

c) Định nghĩa tích phân bất định: Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì biểu thức F(x) + C (C là hằng số tuỳ ý) được gọi là tích phân bất định của hàm số f(x). Ký hiệu là $\int f(x)\,dx$

Vậy $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ nếu $F'(x) = f(x)$

Dấu ∫ gọi là dấu tích phân, hàm số f(x) gọi là hàm số dưới dấu tích phân, biểu thức f(x)dx gọi là biểu thức dưới dấu tích phân. Biến x (nằm trong dấu dx) gọi là biến tích phân

Ví dụ 20: $\int \cos x dx = \sin x + C$ vì $(\sin x)' = \cos x$

Nhận xét: Từ định nghĩa tích phân ta có :

$$[\int f(x)dx]' = f(x) \quad \text{hay} \quad d\int f(x)dx = f(x)dx$$

và $$\int F'(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{hay} \quad \int d\,F(x) = F(x) + C$$

Như vậy ***phép tính vi phân và tích phân là hai phép tính ngược nhau.***

d) Các tính chất của tích phân bất định

❖**Tính chất 1:** Tích phân bất định của một tổng hữu hạn các hàm số bằng tổng các tích phân bất định của từng hàm số ấy

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx$$

❖**Tính chất 2:** Thừa số không đổi có thể đưa ra ngoài dấu tích phân:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

2.4.2. Bảng tích phân cơ bản

Dựa vào bảng các nguyên hàm cơ bản, ta có bảng các tích phân cơ bản sau:

1, $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$

2, $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

3, $\int \sin xdx = -\cos x + C$

4, $\int \cos xdx = \sin x + C$

5, $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

6, $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

7, $\int \tan xdx = -\ln|\cos x| + C$

8, $\int \cot xdx = \ln|\sin x| + C$

9, $\int \text{sh}xdx = \text{ch}x + C$

10, $\int \text{ch}xdx = \text{sh}x + C$

11, $\int e^x dx = e^x + C$

12, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

13, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

14, $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

15, $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

16, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

17, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

18, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

2.4.3. Các phương pháp tính tích phân bất định

a) Phương pháp phân tích

Để tính tích phân $\int f(x)dx$ ta phân tích hàm số $f(x)$ thành tổng hoặc hiệu của các hàm số cơ bản có trong bảng tích phân.

Ví dụ 21: Tính các tích phân sau

1) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

2) $\int \tan^2 x dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1) dx = \tan x - x + C$

3) $\int (\frac{1-x}{x})^2 dx = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} dx = \int (1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}) dx$

$$= \int dx - 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = x - 2\ln x - \frac{1}{x} + C$$

4) $\int \frac{(1+x)^2}{x+(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2+2x}{x(1+x^2)} dx = \int (\frac{1}{x} + \frac{2}{1+x^2}) dx$

$$= \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} = \ln x + 2\operatorname{arctg} x + C$$

5) $\int \frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}) dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} =$

$$= -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C$$

6) $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2+x^2}.\sqrt{2-x^2}} dx = \int (\frac{1}{\sqrt{2-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}) dx$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln\left| x + \sqrt{2+x^2} \right| + C$$

7) $\int \frac{xdx}{(x+1)^2} = \int (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}) dx = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(1+x)^2} = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

8) $\int \frac{x^2 + 5x\sin x - 1}{2x} dx = \frac{1}{2}\int x dx + \frac{5}{2}\int \sin x - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{4} - \frac{5}{2}\cos x - \frac{1}{2}\ln|x| + C$

9) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx = \int (1 - \frac{2}{x^2+1}) dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} = x - 2\operatorname{arctg} x + C$

10) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos x) dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx = \frac{x + \sin x}{2} + C$

11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 \cos^2 x} dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}) dx = -\cot g x + \operatorname{tg} x + C$

b) Phương pháp đổi biến số

Giả sử tích phân $\int f(x)dx$ không tính được bằng phương pháp phân tích.

Đặt : x := φ(t) , trong đó hàm số φ(t) khả vi có đạo hàm φ'(t) và có hàm ngược t = g(x).

Ta có : $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$ (*công thức đổi biến số*)

Chú ý:

- Tích phân theo t phải đơn giản hơn tích phân theo x
- Sau khi lấy tích phân theo t , cần phải chuyển kết quả về biến x (biến cũ)

Ví dụ 22:

1) Tính $\int \frac{3x-2}{x+1}dx$

Đặt t = x +1 $\Rightarrow$ dt = dx ; x = t -1

Ta có $\int \frac{3x-2}{x+1}dx = \int \frac{3(t-1)-2}{t}dt = \int \frac{3t-5}{t}dt = \int (3-\frac{5}{t})dt$

$$= 3t - 5\ln|t| + C = 3(x+1) - 5\ln|x+1| + C$$

2) $\int \frac{x^2+3}{x-1}dx$

Đặt t = x -1 $\Rightarrow$ dt = dx ; x = t + 1

Ta có $\int \frac{x^2+3}{x-1}dx = \int \frac{(t+1)^2+3}{t}dt = \int \frac{t^2+2t+4}{t}dt = \int (t+2+\frac{4}{t})dt$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + 4\ln|t| + C = \frac{(x-1)^2}{2} + 2(x-1) + 4\ln|x-1| + C$$

3) $\int x(x+1)^3 dx$

Đặt t = x + 1 $\Rightarrow$ dt = dx ; x = t -1

Ta có $\int x(x+1)^3 dx = \int (t-1)t^3 dt = \int (t^4 - t^3)dt$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + C = \frac{(x+1)^5}{5} - \frac{(x+1)^4}{4} + C$$

4) Tính $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x+2}}dx$

Đặt $t = \sqrt{x+2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx = \frac{1}{2t}dx \Rightarrow dx = 2tdt$

Ta có : $t = \sqrt{x+2} \Rightarrow t^2 = x+2 \Rightarrow x = t^2 - 2$

$$\int \frac{2x+5}{\sqrt{x+2}}dx = \int \frac{2(t^2-2)+5}{t}2tdt = 2\int(2t^2+1)dt$$

$$= 2(\frac{2t^3}{3}+t)+C = 2(\frac{2\sqrt{x+2}^3}{3}+\sqrt{x+2})+C$$

5) Tính $\int (2x+5)^{15}dx$

Đặt t = 2x + 5 $\Rightarrow$ dt = 2dx

Ta có: $\int (2x+5)^{15}dx = \int t^{15}.\frac{dt}{2} = \frac{t^{16}}{32} + C = \frac{(2x+5)^{16}}{32} + C$

6) Tính $\int x\sqrt{x+1}dx$

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx = \frac{1}{2t}dx \Rightarrow dx = 2tdt$

Ta có : $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 1$

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \int (t^2-1)t.2tdt = 2\int (t^4-t^2)dt$$

$$= 2(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3})+C = 2(\frac{\sqrt{x+1}^5}{5}-\frac{\sqrt{x+1}^3}{3})+C$$

7)Tính $\int \tan x dx$

Ta có $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

Đặt t = cosx $\Rightarrow$ dt = - sinx dx.

Ta có $\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$

8) Tính $\int \sin^3 x dx$

Ta có $\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x.\sin x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x dx$

Đặt t = cosx $\Rightarrow$ dt = - sinx dx, thay vào ta có

$$\int \sin^3 x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x dx = -\int (1-t^2)dt$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + C$$

9) Tính $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$, thay vào ta có

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C$$

c) Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử u(x) và v(x) là hai hàm số có đạo hàm u'(x) và v'(x) liên tục thì

$$(u.v)' = u'.v + u.v'$$

Theo định nghĩa tích phân bất định :

$$\int (u'v + v'u)dx = uv + C$$

hay $\int u'vdx + \int uv'dx = uv + C \Rightarrow \int vdu + \int udv = u.v + C$ (*)

(vì $u'dx = du$, $v'dx = dv$)

Do hằng số C có chứa trong $\int vdu$, nên từ (*) suy ra :

$\int udv = uv - \int vdu$ (Công thức tính tích phân từng phần)

(Phương pháp tính tích phân từng phần được sử dụng khi các phương pháp trước không có hiệu lực)

Chú ý: Một số dạng quen thuộc thường gặp khi áp dụng công thức tích phân từng phần.

- Dạng $\int P(x)\sin kxdx$ và $\int P(x)\cos kxdx$

P(x) là đa thức nguyên; k là hằng số.

Đặt u = P(x) ; dv = sinkxdx (dv = coskxdx)

- Dạng $\int P(x)e^{kx}dx$

Đặt u = P(x) ; $e^{kx}dx = dv$

- Dạng $\int P(x)\ln kxdx$; Đặt lnkx = u, P(x)dx = dv

Ví dụ 23: Tính $\int x\sin xdx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Ta có

$$\int x\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C$$

Ví dụ 24: Tính $\int (3x+1)e^{-x}dx$

Đặt $\begin{cases} u = 3x+1 \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

Ta có

$$\int (3x+1)e^{-x}dx = -(3x+1)e^{-x} + 3\int e^{-x}dx$$

$$= (-3x+2)e^{x} + C$$

3.1.4. Tích phân các hàm số hữu tỷ

❖ **Hàm số hữu tỷ**

Định nghĩa: Hàm số hữu tỷ là hàm số có thể viết dưới dạng $\frac{P(x)}{Q(x)}$, trong đó P(x), Q(x) là các đa thức nguyên với hệ số thực $(Q(x) \neq 0)$, nghĩa là:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + b_1 x + b_0$$

➢ Nếu bậc của P(x) nhỏ hơn bậc của Q(x) (n < m) thì $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là một phân thức thực sự, trường hợp còn lại là phân thức không thực sự

➢ Phân thức không thực sự bao giờ cũng phân tích được thành tổng của một đa thức và một phânhức thực sự

Ví dụ 25: $\frac{2x^6 - 4x^2 - 6x}{x^3 + 3x^2 + 2x - 1} = 2x^2 - 6x + 14 - \frac{32x^2 + 40x - 14}{x^3 + 3x^2 + 2x - 1}$

❖ **Phân tích một phân thức thực sự thành tổng của các phân thức đơn giản**

➢ ***Phân thức đơn giản có dạng:***

$$\frac{A}{x-a} \;;\quad \frac{A}{(x-a)^k} \;;\quad \frac{mx+n}{x^2+px+q} \;;\quad \frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k} \qquad \textit{với } (p^2 - 4q < 0)$$

trong đó A , m , n , a , p , q là các số thực, k là số nguyên dương

➢ ***Các thuật toán phân tích phân thức thực sự thành phân thức đơn giản***

- **Trường hợp : $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots\ldots\ldots (x - a_k)$**

  trong đó : a_i (i =1, 2 , 3,....., k) là nghiệm thực của Q(x) = 0 thì:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots\dots + \frac{A_k}{x-a_k}$$

Khi đó : A_1, A_2,........,A_k được xác định bằng phương pháp đồng nhất hệ số.

Ví dụ 26 : $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \dfrac{4x^2+16x-8}{x(x+2)(x-2)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x+2} + \dfrac{A_3}{x-2}$

$$= \frac{A_1(x^2-4) + A_2x(x-2) + A_3x(x+2)}{x^3-4x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 + 16x - 8 = A_1(x^2 - 4) + A_2(x^2 - 2x) + A_3(x^2 + 2x)$$

$$= (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + 2(-A_2 + A_3)x - 4A_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 4 \\ 2(-A_2 + A_3) = 16 \\ -4A_1 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = -3 \\ A_3 = -5 \end{cases}$$

Vậy $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{5}{x-2}$

- **Trường hợp Q(x) có chứa các thừa số là luỹ thừa của một nhị thức:**

  Q(x) = (x - a)$^{\mathbf{k}}$, trong đó a là nghiệm thực bội k của Q(x) = 0

  Khi đó : $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_k}{(x-a)^k} + \dfrac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \dots\dots + \dfrac{A_1}{x-a}$

trong đó A_k , A_{k-1} , ... , A_1 được xác định bằng phương pháp hệ số bất định.

Ví dụ 27: Phân tích phân thức sau thành tổng các phân thức đơn giản

$$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} = \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A_1}{(x+2)^2} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{B}{x+1}$$

$$= \frac{A_1(x+1) + A_2(x^2+3x+2) + B(x^2+4x+4)}{(x+2)^2(x+1)}$$

$$= \frac{(A_2+B)x^2 + (A_1+3A_2+4B)x + (A_1+2A_2+4B)}{(x+2)^2(x+1)}$$

$$\begin{cases} A_2 + B = 1 \\ A_1 + 3A_2 + 4B = 0 \\ A_1 + 2A_2 + 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -4 \\ A_2 = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Vậy $\dfrac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} = \dfrac{-4}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{x+1}$

- **Trường hợp Q(x) có chứa thừa số là tam thức bậc hai vô nghiệm**

  $Q(x) = (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2)^k$......

trong đó $\Delta_1 = p_1^2 - 4q_1 < 0$, $\Delta_2 = p_2^2 - 4q_2 < 0$ ....

Khi đó :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{R_1x + S_1}{x^2 + p_2x + q_2} + \frac{R_2x + S_2}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \ldots + \frac{R_Kx + S_k}{(x^2 + p_2x + q_2)^k} + \ldots$$

Ví dụ 28: Phân tích $\dfrac{5}{(x-2)(x^2-2x+5)}$ thành tổng các phân thức đơn giản

Tacó : $\dfrac{5}{(x-2)(x^2-2x+5)} = \dfrac{A_1}{x-2} + \dfrac{Cx+D}{x^2-2x+5} = \dfrac{A_1(x^2-2x+5)+(x-2)(Cx+D)}{(x-2)(x^2-2x+5)}$

$$= \frac{A_1x^2 - 2A_1x + 5A_1 + Cx^2 + Dx - 2Cx - 2D}{(x-2)(x^2-2x+5)}$$

$$= \frac{(A_1 + C)x^2 + (-2A_1 - 2C + D)x + (5A_1 - 2D)}{(x-2).(x^2-2x+5)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + C = 0 \\ -2A_1 - 2C + D = 0 \\ 5A_1 - 2D = 5 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ A_1 = 1 \\ C = -1 \end{cases}$$

Vậy $\dfrac{5}{(x-2)(x^2-2x+5)} = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{-x}{x^2-2x+5}$

❖ **Quy tắc tính tích phân các hàm hữu tỷ**

➢ Đưa $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ về tổng một đa thứcvà phân thức thực sự

➢ Phân tích Q(x) thành tích các nhị thức và tam thức bậc hai có $\Delta < 0$. Phân tích các phân thức thực sự thành tổng các phân thức đơn giản

➢ Tính tích phân của tổng sau khi đã phân tích

Ví dụ 29: $\displaystyle\int \frac{5dx}{(x-2)(x^2-2x+5)} = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{xdx}{x^2-2x+5} = \ln|x-2| - \int \frac{(x-1+1)dx}{(x-1)^2+2^2}$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)dx}{(x-1)^2+2^2} - \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+2^2}$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+5| - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x-1}{2} + C$$

2.5. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

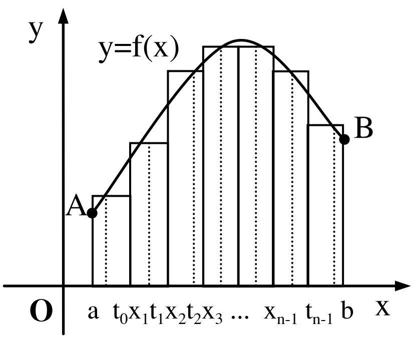
2.5.1. Khái niệm về tích phân xác định

a) Bài toán dẫn đến tích phân xác định

Bài toán: Tìm diện tích hình thang cong aABb giới hạn bởi các đường liên tục:

$y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ $(a < b)$

Ta chia [a , b] thành n đoạn nhỏ bởi các điểm có toạ độ: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b$.



Từ các điểm $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ dựng những đường song song, chia hình thang cong aABb thành nhiều hình thang cong nhỏ có đáy $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ và chiều cao $f(t_i)$, với t_i là một điểm bất kỳ thuộc $[x_i\,;\,x_{i+1}]$

Đặt: $S_n = f(t_o)\Delta x_o + f(t_1)\Delta x_1 + \Lambda + f(t_{n-1})\Delta x_{n-1}$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta x_i$$

Khi đó: $$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta x_i$$

b) Định nghĩa tích phân xác định:

Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và bị chặn trên [a , b] hữu hạn và a < b.

Chia đoạn [a , b] thành n đoạn nhỏ bất kỳ bởi các điểm chia có toạ độ:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b ,$$

trên đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ chọn một điểm t_i tuỳ ý ($x_i < t_i < x_{i+1}$, i = 0, 1, ... , n-1)

Lập tổng:

$I_n = f(t_o)\Delta x_o + f(t_1)\Delta x_1 + \ldots + f(t_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i).\Delta x_i$ - Tổng tích phân.

Khi $n \to \infty$ sao cho $\underset{0\le i\le n-1}{\mathrm{Max}}\, \Delta x_i \to 0$ mà I_n tiến đến một giới hạn I hữu hạn duy nhất không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a , b] và cách lấy điểm t_i thì giới hạn I đó được gọi là tích phân xác định của hàm f(x) trên [a , b]

Kí hiệu: $I = \int_a^b f(x)dx$.

trong đó: F(x) là hàm dưới dấu tích phân

x là biến lấy tích phân

a là cận dưới, b là cận trên.

Khi đó: hàm số f(x) được gọi là khả tích trên đoạn [a, b].

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta x_i$$

c) Điều kiện để hàm f(x) khả tích:

Hàm f(x) liên tục trên [a , b] hoặc f(x) bị chặn trên [a , b] và có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên đó thì khả tích trên [a,b]

Chú ý:

- Tích phân xác định phụ thuộc dạng hàm số và cận lấy tích phân không phụ thuộc biến lấy tích phân $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(v)dv$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (Nếu $a \le b$)

2.5.2. Các tính chất của tích phân xác định

- **Tính chất 1:** Đưa hằng số ra ngoài dấu tích phân:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

- **Tính chất 2:** Tích phân của một tổng hữu hạn các hàm số bằng tổng các tích phân của từng hàm số đó:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(x).dx = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(x).dx$$

- **Tính chất 3:** (Đổi cận lấy tính phân)

Nếu a < c <b thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Chú ý: Tính chất trên vẫn đúng khi $c \notin [a,b]$ với điều kiện tích phân vế phải tồn tại.

- **Tính chất 4:** Nếu trên [a,b] và f (x) ≥ φ(x) thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b \varphi(x)dx$

Hệ quả: Nếu f(x) ≥ 0 , ∀x ∈ [a , b] và a ≥ b thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

- **Tính chất 5:** Nếu m và M là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của f(x) trên [a,b] và a ≤ b thì:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

- **Tính chất 6**: *(Định lý giá trị trung bình)*

Nếu f(x) liên tục trên [a,b] thì sẽ luôn tồn tại điểm $\xi \in [a,b]$ sao cho:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

2.5.3. Công thức Newton-Leibnitz

a) Đạo hàm của tích phân xác định theo cận trên:

Định lý:

Đặt I(x) = $\int_a^x f(t)dt$, x ∈ [a, b], nếu f(x) liên tục thì: I'(x) = $\left[\int_a^x f(t).dt\right]' = f(x)$

(Đạo hàm của tích phân xác định theo cận trên bằng hàm số dưới dấu tích phân với biến được thay bằng giá trị cận trên).

b) Công thức Newton-Leibnitz.

Định lý: Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a, b] thì:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ký hiệu: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

2.5.4. Các phương pháp tính tích phân xác định

a) Phương pháp tổng quát:

1) Tính $\int f(x)dx = F(x) + C$

2) Tính F(b) - F(a)

Ví dụ 30

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

b) Phương pháp đổi biến số

❖ ***Định lý***:

Nếu f(x) liên tục trong đoạn [a , b] và x = φ(t) thoả mãn:

- φ(t) , φ'(t) liên tục [α,β]
- Khi t biến thiên từ α → β thì x biến thiên từ a → b (a ≤ x ≤ b)
- φ(α) = a , φ(β) = b

Thì $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$ (Công thức đổi biến số)

❖ ***Chú ý*** : Khi dùng định lý Newton -Leibnitz : Khi đổi biến ta đồng thời đổi cận nên không cần quay về biến ban đầu.

Ví dụ 31: Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến

1) $\int_0^2 \frac{3x+4}{x+2}dx$

Đặt t = x + 2 ⇒ dt = dx ; x = t -2

Đổi cận x = 0 ⇒ t = 2

x = 2 ⇒ t = 4

Ta có

$$\int_0^2 \frac{3x+4}{x+2}dx = \int_2^4 \frac{3(t-2)+4}{t}dt = \int_2^4 \frac{3t-2}{t}dt = \int_2^4 (3-\frac{2}{t})dt$$

$$= (3t - 2\ln|t|)\Big|_2^4 = 6 - \ln 4$$

2) $\int_{-1}^0 \frac{x^2-3x+1}{x+3}dx$

Đặt t = x + 3 ⇒ dt = dx ; x = t -3

Đổi cận x = -1 ⇒ t = 2

x = 0 ⇒ t = 3

Ta có

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^2-3\mathrm{x}+1}{x+3}d\mathrm{x}=\int_{2}^{3}\frac{(t-3)^2-3(t-3)+1}{t}dt$$

$$=\int_{2}^{3}\frac{t^2-9t+19}{t}dt=\int_{2}^{3}(t-9+\frac{19}{t})dt$$

$$=(\frac{t^2}{2}-9t+19\ln|t|)\Big|_{2}^{3}=-\frac{13}{2}+19\ln\frac{3}{2}$$

3) $\int_{-2}^{1}(2\mathrm{x}-7)(x+1)^3d\mathrm{x}$

Đặt t = x + 1 $\Rightarrow$ dt = dx ; x = t -1

Đổi cận x = -2 $\Rightarrow$ t = -1

x = 1 $\Rightarrow$ t = 2

Ta có

$$\int_{-2}^{1}(2\mathrm{x}-7)(x+1)^3d\mathrm{x}=\int_{-1}^{2}[2(t-1)-7]\mathrm{t}^3dt=\int_{-1}^{2}(2\mathrm{t}^4-9\mathrm{t}^3)dt$$

$$=(\frac{2t^5}{5}-\frac{9t^4}{4})\Big|_{-1}^{2}=-\frac{411}{20}$$

4)Tính $\int_{-1}^{1}\frac{3\mathrm{x}\text{-}5}{x+2}d\mathrm{x}$

Đặt $t=\sqrt{x+2}\Rightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}d\mathrm{x}=\frac{1}{2t}d\mathrm{x}\Rightarrow \mathrm{dx}=2t\mathrm{d}t$

Ta có : $t=\sqrt{x+2}\Rightarrow t^2=x+2\Rightarrow x=t^2-2$

Đổi cận x = -1 $\Rightarrow$ t = 1

x = 1 $\Rightarrow$ t = $\sqrt{3}$

$$\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{3(t^2-2)\text{-}5}{t}2tdt=2\int_{1}^{\sqrt{3}}(3t^2-11)dt$$

$$=2(t^3-11t)\Big|_{1}^{\sqrt{3}}=10-8\sqrt{3}$$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

Đặt t = cosx $\Rightarrow$ dt = - sinx dx.

Đổi cận x = 0 $\Rightarrow$ t = 1

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-dt}{t} dt = -\ln|t| \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \ln\sqrt{2}$$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\sin x dx$

Đặt t = cosx $\Rightarrow$ dt = - sinx dx, thay vào ta có

Đổi cận x = 0 $\Rightarrow$ t = 1

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\sin x dx = \int_1^0 (t^2-1)dt$$

$$= \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_1^0 = \frac{2}{3}$$

c) Phương pháp tích phân từng phần:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Ví dụ 32: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{cases}$

Ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx = -\frac{x\cos 2x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{2} dx$$

$$= -\frac{x\cos 2x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin 2x}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Ví dụ 33: Tính $\int_0^1 (x-2)e^{-2x} dx$

Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = e^{-2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{e^{-2x}}{2} \end{cases}$

Ta có

$$\int_0^1 (x-2)e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}(x-2)e^{-2x}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)e^{-2x}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{4}e^{-2x}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}(e^{-2} - 3)$$

Ví dụ 34: Tính $\int_1^e \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$

Ta có

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Bigg|_1^e - \int_1^e dx = x\ln x\Bigg|_1^e - x\Bigg|_1^e = 1$$

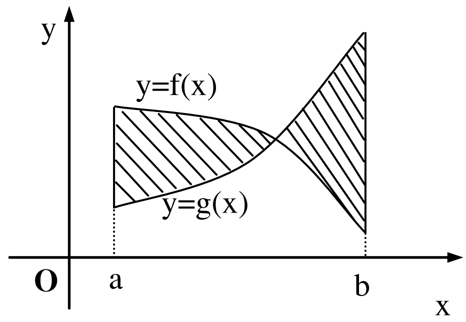
**** Ứng dụng hình học của tích phân xác định***

a) Tính diện tích của hình phẳng

❖ ***Diện tích hình phẳng trong hệ toạ độ Đề các (vuông góc)***

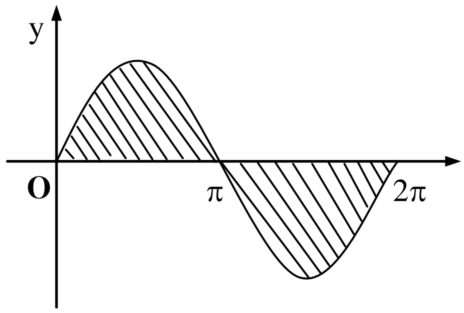
Công thức diện tích hình thang cong giới hạn bởi y = f(x) , y = g(x), x = a và x = b là:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



Ví dụ 35:

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi y = sinx và đoạn trục Ox với $0 \le x \le 2\pi$.

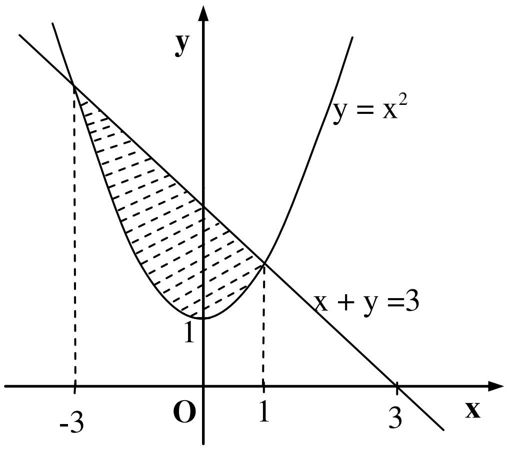


Hàm y = sinx đối xứng qua gốc toạ độ nên diện tích hình phải tìm bằng hai lần diện tích hình giới hạn bởi y = sinx và đoạn trục hoành $0 \le x \le \pi$

$$S = 2\int_0^\pi \sin x dx = -2\cos x \Big|_0^\pi = 2 + 2 = 4 \quad \text{(Đvdt)}$$

Ví dụ 36: Tính diện tích hình giới hạn bởi đường:

$y = x^2 + 1$ và $x + y = 3$



Giải:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad x^2 + 1 = 3 - x$

$\Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

Diện tích hình phải tìm là :

$$S = \int_{-2}^{1} |(3 - x) - (x^2 + 1)| dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2) dx = (\frac{-x}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 2 + 4 = 4{,}5 \quad \text{(ĐVDT)}$$

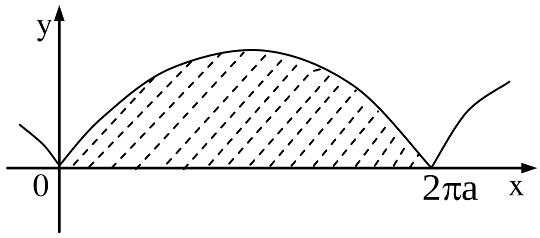
Chú ý *:* Trong trường hợp diện tích hình thang cong mà phương trình đường cong cho dưới dạng tham số : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ với $\alpha \le t \le \beta$ và $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

Khi đó : $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta \psi(t).\varphi'(t)dt$

Ví dụ 37: Tính diện tích của hình giới hạn bởi cung Xyclôit:

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ và trục hoành với $0 \le t \le 2\pi$

Ta có:



$$S = \int_0^{2\pi} |a(1-\cos t).a(1-\cos t)|dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt$$

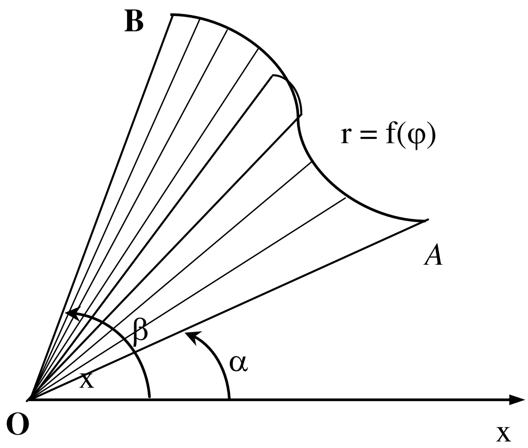
$$= a^2\int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos 2t}{2})dt = a^2(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3}{2}a^2.2\pi = 3a^2\pi \qquad \text{(ĐVDT)}$$

❖ ***Diện tích hình quạt cong trong hệ toạ độ cực.***

Để tính diện tích hình quạt cong OAB giới hạn bởi đường cong $r = f(\varphi)$ và hai tia $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ta có công thức:

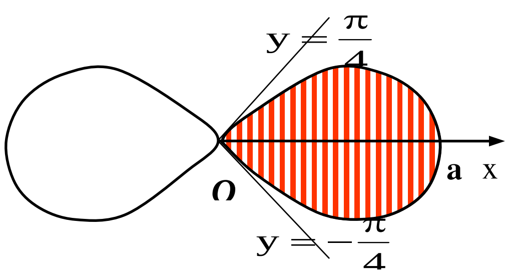
$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\phi)d\phi$$



Ví dụ 38: Tính diện tích hình giới hạn bởi đường Lemniscat $r = a^2\cos 2\varphi$

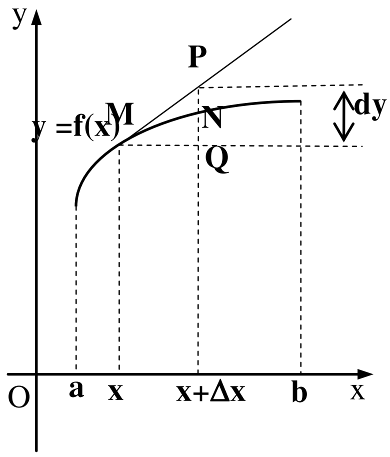
Giải:

Đồ thị đường Lemniscat cho bởi hình vẽ. Vì tích chất đối xứng của hình nên ta chỉ tính 1/4 diện tích và ta có:



$$S = 4.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \quad \text{(ĐVDT)}$$

b) Tính độ dài đường cong:



Giả sử cần tính độ dài l của một đường cong AB có phương trình y = f(x).

Lấy một điểm x ∈ [a , b], cho x một số gia Δx, khi Δx khá bé thì coi cung MN bằng đoạn tiếp tuyến MP

Do đó: $l(x, x+\Delta x) = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ mà dy = f'(x)dx nên:

$$l(x, x+\Delta x) = dl = \sqrt{(dx)^2 + f'^2(x).dx^2}$$

$$\Leftrightarrow dl = \sqrt{(dx)^2 + f'^2(x).dx^2}$$

Vậy $l = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$

Chú ý:

- Trong trường hợp đường cong cho bởi phương trình tham số x = φ(t), y = ψ(t), α ≤ t ≤ β và φ(α) = a, φ(β) = b, ta có:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}}dt$$

Vậy: $$l = \int_\beta^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\varphi(t)]^2}dt$$

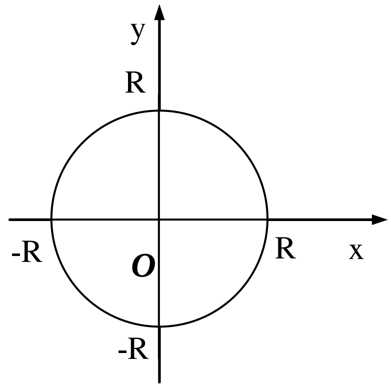
- Nếu đường cong AB cho bởi phương trình trong hệ toạ độ cực r = f(φ) thì

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f(\varphi)\cos\varphi \\ y = f(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

Coi x, y là hàm theo tham số φ ta có: $S = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'\varphi)^2 + y'(\varphi)}.d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2}.d\varphi$

Ví dụ 39: Tính độ dài đường cong: $x^2 + y^2 = R^2$

Chu vi hình tròn $x^2 + y^2 = R^2$ sẽ bằng hai lần độ dài của nửa phía trên đường tròn ứng với y > 0.



$$\Rightarrow \qquad y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

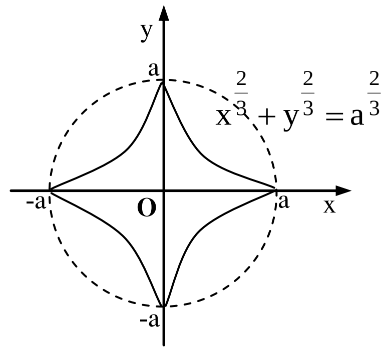
$$\Rightarrow \qquad y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$l = 4\int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = 4\int_0^R \sqrt{\frac{Rdx}{R^2 - x^2}}$$

$$= 4.R.\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = 4.R.\frac{\pi}{2} = 2\pi R$$

Ví dụ 40: Tính độ dài đường hình sao:

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t$$



Ta chỉ cần tính độ dài đường cong trong góc phần tử thứ nhất với $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

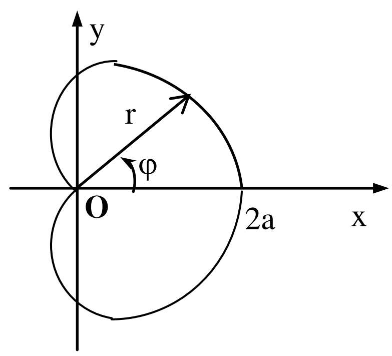
$x'_t = -3a\cos^2 t \sin t$

$y'_t = 3a\sin^2 t \cos t$

Do đó:

$$l = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt$$

$$= 6a\int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 6a(-\cos 2t)\Big|_0^{\Pi/2} = 6a$$



Ví dụ 41: Tìm độ dài đường hình tim:

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$

Do tính đối xứng của đường cong nên chỉ cần xét trong khoảng $0 \le \varphi \le \pi$

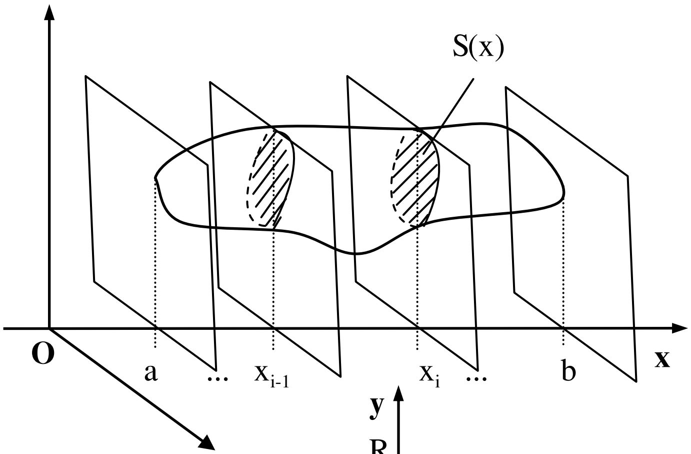
Ta có: $\qquad r' = -a\sin\varphi$

$$S = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}.d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}.d\varphi = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}.d\varphi$$

$$= 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a \qquad \text{(ĐVDT)}$$

c) Tính thể tích vật thể.

❖ ***Tính thể tích vật thể bất kỳ***

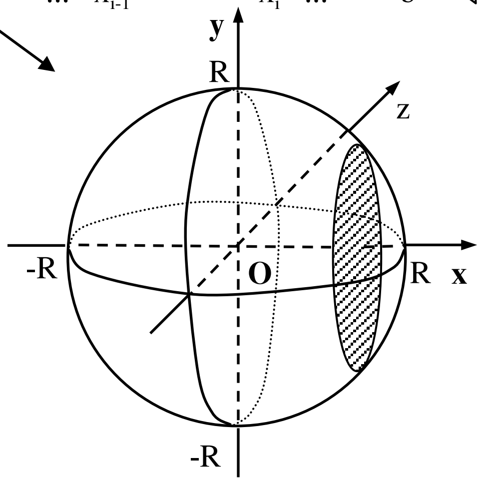


Cho một vật thể giới hạn bởi một mặt cong và hai mặt phẳng x = a và x =b.

Giả sử ta biết diện tích S của thiết diện của vật thể trên một mặt phẳng vuông góc với trục Ox là:

$$S = S(x)$$

trong đó x là giao điểm của mặt phẳng với trục Ox, giả sử S(x) là một hàm liên tục trên [a, b]. Khi đó ta có công thức tính thể tích:



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Ví dụ 42: Tính thể tích khối cầu tâm O bán kính R.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Khi ta cắt khối cầu bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x thì thiết diện nhận được sẽ là hình tròn, tâm nằm trên trục Ox, có bán kính là $\sqrt{R^2 - x^2}$ nên diện tích thiết diện là: $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$ với $-R \le x \le R$ nên ta có thể tích hình cầu là:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi R^3$$

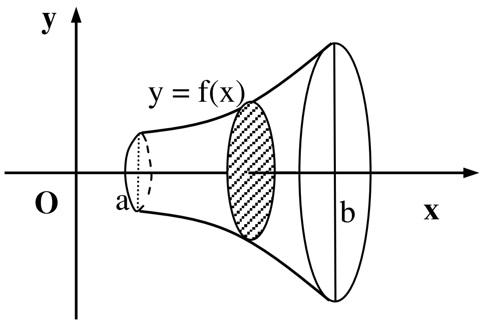
❖ ***Thể tích hình tròn xoay.***

Xét cung AB là đồ thị của hàm số y = f(x), với x∈ [a, b]. Cho cung AB xoay quanh trục Ox và hình nhận được gọi là hình tròn xoay. Khi ta cắt hình tròn xoay nhận được bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox và cắt Ox tại x thì thiết diện nhận được sẽ là hình tròn tâm năm trên trục Ox, bán kính $|f(x)|$ nên diện tích thiết duện sẽ là:

$$S(x) = \pi f^2(x),\ a \le b$$

Do đó, thể tích hình tròn xoay sẽ được tính bởi:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$



Ví dụ 43: Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên bởi đường y = sinx và đoạn trục Ox từ 0 đến 2π quay quanh Ox.

Ta có: $V = \pi \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]\Big|_0^{2\pi} = \pi^2$ (ĐVDT)

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y=(3-4x)\sin 5x$ 2) $y=(5x-1)\cos 7x$

3) $y=(2x-1)(x^2-6x+3)$ 4) $y=(2x+5)\ln x$

5) $y=\sin 3x\cos x$ 6) $y=(2x+3)e^{-3x}$

7) $y=(3-4x)\tan x$ 8) $y=(2x^2-6x+5)^2$

9) $y=\sqrt{3x^2+7x-1}$ 10) $y=\ln(2\cos x-4)$

11) $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$ 12) $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$

13) $y=e^{4x+5}(2x-7)$ 14) $y=7^{x^2}+2x$

15) $y=x^{\frac{1}{x}}$

2.2. Cho $f(x)=3x-2\sqrt{x}$. Tính $f'(1)$, $f''(1)$

2.3. Tính đạo hàm cấp 2 của các hàm số

1) $y=e^{x^2}$ 2) $y=\ln(2x-3)$

2.4. Cho $f(x)=e^x\sin x$. Tính $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$

2.5. Chứng minh hàm $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ thoả mãn phương trình

$$y''+3y'+2y=0$$

2.6. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

1) $y=x\ln x$ 2) $y=xe^x$

2.7. Tính vi phân của các hàm số $y=x^3+2x$ tại $x=-1$, $\Delta x=0{,}02$.

2.8. Tính vi phân các hàm số sau:

1) $y=\sqrt{1+x^2}$

2) $y=x+\ln x$

3) $y=\sin x.\ln x$. Tính d^2y

2.9. Dùng công thức Lôpitan tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x}{3x^2+x^5}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-x-6}\right)$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(tg\frac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}}$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{a}{x}\right)$

2.10. Tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{60}-2x+1}$

2.11. Tính các tích phân sau bằng phương pháp phân tích.

1) $\int(\frac{1+x}{x})^2dx$ 2) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$; 3) $\int\frac{1+3x^2}{x^2(1+2x^2)}dx$

2.12.Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến số.

1) $\int(11x-5)(x-1)^2dx$ 2) $\int\frac{2x+5}{x-1}dx$

3) $\int\frac{3x^2+2}{x+1}dx$ 4) $\int\frac{dx}{5-2x}$;

5) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$ 6) $\int\frac{x^2dx}{5-x^6}$

7) $\int\frac{\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}$; 8) $\int\frac{e^xdx}{3+4e^x}$

9) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$; 10) $\int\frac{dx}{x^2+3x+1}$;

11) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ 12) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

2.13. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần

1) $\int(4x-3)e^{-x}dx$ 2) $\int x\sin 2xdx$

3) $\int(x^2+5x+6)\cos 2xdx$; 4) $\int(x^2+1)e^{-2x}dx$;

5) $\int x^2 \ln(1+x)dx$; 6) $\int x^3 e^{-x^2} dx$;

2.14. Tính các tích phân sau:

1) $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$; 2) $\int \frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$;

3) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$; 4) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$;

5) $\int \frac{(x^2 + \sqrt{1+x})dx}{\sqrt[3]{1+x}}$; 6) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$;

7) $\int_0^1 \cos^2 x dx$

2.15. Dùng công thức Newton Leibnitz, tính các tích phân sau:

1) $\int_1^2 2x\sqrt{x-1}dx$ 2) $\int_0^1 x(x-2)^4 dx$

3) $\int_1^3 \frac{3x^2 + 4}{x+1} dx$ 4) $\int_1^3 \frac{2x + 3}{\sqrt{x+1}} dx$

5) $\int_1^e \ln x dx$ 6) $\int_{-1}^0 (2x+1)e^{-x} dx$

7) $\int_{-1}^1 \frac{y^5 dy}{y + 2}$ 8) $\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6 + 4}}$

9) $\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1 + \ln x}}{x} dx$ 10) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$

11) $\int_0^3 \ln(x+3)dx$ 12) $\int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$

13) $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}} + 3} dx$ 14) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}.dx$

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) y'=(3- 4x)'sin5x+(3- 4x) (sin5x)'

= -4 sin5x – 5 (3 – 4x) cos5x

2) y' = 5 cos7x – 7 (5x-1) sin 7x

3) y' = 2(x^2-6x+3) + (2x-1)(2x- 6)

4) $y' = 2\ln x + \dfrac{2x+5}{x}$

5) y'= 3 cos3x cosx – sin3x sinx

6) $y' = 2e^{-3x} - 3(2x+3)e^{-3x} = -e^{-3x}(6x+7)$

7) $y' = -4\tan x + \dfrac{3-4x}{\cos^2 x}$

8) $y' = 2(4x-6)(2x^2-6x+5)$

9) $y' = \dfrac{6x+7}{2\sqrt{3x^2+7x-1}}$

10) $y' = \dfrac{\sin x}{2-\cos x}$

11) $y' = \dfrac{5}{(x+1)^2}$

12) $y' = \dfrac{2\cos 2x - \sin 2x}{x^2}$

13) $y' = e^{4x+5}(8x\text{-}26)$

14) $y' = 2x.7^{x^2}\ln 7$

15) $\ln y = \dfrac{\ln x}{x}$

$\Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ (đạo hàm hai vế)

$\Rightarrow y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}y = x^{\frac{1}{x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

2.2. Ta có f'(x) = 3 - $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, f''(x) = $-(x^{-\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

Vậy f'(1) = 2, f''(1)= $\frac{1}{2}$

2.3. Tính đạo hàm cấp 2 của các hàm số

1) $y' = 2x\, e^{x^2}$

$y'' = 2e^{x^2}(2x^2+1)$

2) $y' = \frac{2}{2x-3}$, $y'' = -\frac{4}{(2x-3)^2}$

2.4. Ta có $f'(x) = e^x\sin x + \cos x\, e^x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = 2\cos x\, e^x \Rightarrow f''(0) = 2$

$f'''(x) = -2e^x\sin x + 2\cos x\, e^x \Rightarrow f'''(0) = 2$

2.5. Với $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ ta có

$y' = -C_1e^{-x} - 2C_2e^{-2x}$; $y'' = C_1e^{-x} + 4C_2e^{-2x}$

thay vào vế trái phương trình ta được

$y'' + 3y' + 2y = C_1e^{-x} + 4C_2e^{-2x} + 3(-C_1e^{-x} - 2C_2e^{-2x}) + 2(C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}) = 0$

2.6. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

1) y = xlnx

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{(k)}(\ln x)^{(n-k)} = C_n^0 x(\ln x)^{(n)} + C_n^1(\ln x)^{(n-1)}$$

$$= x(\frac{1}{x})^{(n-1)} + n(\frac{1}{x})^{(n-2)}$$

$$= x(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + n(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

2) $y = xe^x$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{(k)}(e^x)^{(n-k)} = C_n^0 x(e^x)^{(n)} + C_n^1(e^x)^{(n-1)}$$

$$= (x+n)e^x$$

2.7. $d(y) = (3x^2 + 2)dx$, tại x = -1, $\Delta x = 0{,}02$ ta có $d(y) = [3(-1)^2 + 2].\ 0{,}02 = 0{,}1$

2.8. Tính vi phân các hàm số sau:

1) dy = $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ dx

2) dy = $(1 + \dfrac{1}{x})$ dx

3) dy = $(\cos x.\ln x + \dfrac{\sin x}{x})$ dx

2.9. Dùng công thức Lôpitan tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x}{3x^2+x^5}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x\sin x - x)'}{(3x^2+x^5)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x(\sin x+\cos x)-1}{6x+5x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{[e^x(\sin x+\cos x)-1]'}{(6x+5x^4)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x}{3+10x^3} = \frac{1}{3}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln\sin 2x)'}{(\ln\sin x)'} = \lim_{x\to 0+0}\frac{2\sin x\cos 2x}{\cos x\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0+0}\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} = 1$$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x^2-x-6}\right) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x^2-x-6} = \infty$

4) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\cos\dfrac{\pi x}{2}\ln(1-x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)}{\dfrac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[\ln(1-x)]'}{\left(\dfrac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}\right)'}$

$$= \lim_{x\to 1}\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x) = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2\frac{\pi x}{2}}{(x-1)\sin\frac{\pi x}{2}}$$

$$\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{(\cos^2\frac{\pi x}{2})'}{[(x-1)\sin\frac{\pi x}{2}]'} = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}(x-1)\cos\frac{\pi x}{2}} = 0$$

Vậy

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}} = e^0 = 1$$

5) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{\tan x} = e^{\lim_{x\to 1}\tan x.\ln\frac{1}{x}}$

Ta có $\lim_{x\to 0}\tan\ln(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{1}{x})}{\cot anx} = \lim_{x\to 0}\frac{[\ln(\frac{1}{x})]'}{(\cot anx)'}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}x = 1.0 = 0$$

$$= \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{(\cos^2\frac{\pi x}{2})'}{[(x-1)\sin\frac{\pi x}{2}]'} = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}(x-1)\cos\frac{\pi x}{2}} = 0$$

Vậy

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{\tan x} = e^0 = 1$$

6) $\lim_{x\to 1}(\tan\frac{\pi x}{4})^{\tan\frac{\pi x}{2}} = e^{\lim_{x\to 1}\tan\frac{\pi x}{2}\ln(\tan\frac{\pi x}{4})}$

Ta có $\lim_{x\to 1}\tan\frac{\pi x}{2}\ln(\tan\frac{\pi x}{4}) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(\tan\frac{\pi x}{4})}{co\tan\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{[\ln(\tan\frac{\pi x}{4})]'}{(co\tan\frac{\pi x}{2})'}$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2})}{\cos^2\frac{\pi x}{4}} = 0$$

Vậy

$$\lim_{x\to 1}(\tan\frac{\pi x}{4})^{\tan\frac{\pi x}{2}} = e^0 = 1$$

7) $\lim_{x\to 0+0}(\cot anx)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x}\ln(\cot anx)}$

Ta có $\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln(\cot anx)}{\ln x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{[\ln(\cot anx)]'}{(\ln x)'}$

$$= \lim_{x\to 0+0}\frac{x}{\sin x\cos x} = -\lim_{x\to 0+0}\frac{2x}{\sin 2x} = -1$$

Vậy

$$\lim_{x\to 0+0}(\cot anx)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$$

8) $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} a\dfrac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{a}{x}} = a.1 = a$

2.10.

1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$

$= \lim_{n\to 1}\frac{(x+x^2+...+x^n-n)'}{(x-1)'}$

$= 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{60}-2x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^{100}-2x+1)'}{(x^{60}-2x+1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{50x^{99}-1}{30x^{59}-1} = \frac{49}{29}$

2.11. Tính các tích phân sau bằng phương pháp phân tích.

1) $\int(\frac{1+x}{x})^2dx = \int\frac{1+2x+x^2}{x^2}dx = \int(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})dx = -\frac{1}{x}+\ln x + x + C$

2) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx = \int\frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int[\frac{2x}{x(1+x^2)}+\frac{1+x^2}{x(1+x^2)}]dx$

$= \int(\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{x})dx = 2\arctan x + \ln|x| + C$

3) $\int\frac{1+3x^2}{x^2(1+2x^2)}dx = \int\frac{1+x^2+2x^2}{x^2(1+2x^2)}dx = \int[\frac{x^2}{x^2(1+2x^2)}+\frac{1+2x^2}{x^2(1+2x^2)}]dx$

$= \int(\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{x^2})dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}x - \frac{1}{x} + C$

2. 12.Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến số.

1) $\int (11x-5)(x-1)^2 dx$

Đặt t = x - 1 $\Rightarrow$ dt = dx ; x = t +1

Ta có $\int (11x-5)(x-1)^2 dx = \int (11t^3 + 6t^2)dt = \frac{11t^4}{4} + 2t^3 + C$

$$= \frac{11(x-1)^4}{4} + 2(x-1)^3 + C$$

2) $\int \frac{2x+5}{x-1} dx$

Đặt t = x - 1 $\Rightarrow$ dt = dx ; x = t +1

Ta có

$$\int \frac{2x+5}{x-1} dx = \int (2 + \frac{7}{t})dt = 2t + 7\ln|t| + C = 2(x-1) + 7\ln|x-1| + C$$

3) $\int \frac{3x^2+2}{x+1} dx$

Đặt t = x + 1 $\Rightarrow$ dt = dx ; x = t - 1

Ta có

$$\int \frac{3x^2+2}{x+1} dx = \int (3t - 6 + \frac{5}{t})dt = \frac{3t^2}{2} - 6t + 5\ln|t| + C = \frac{3(x+1)^2}{2} - 6(x+1) + 5\ln|x+1| + C$$

4) $\int \frac{dx}{5-2x}$;

Đặt t = 5 - 2x $\Rightarrow$ dt = -2dx

Ta có

$$\int \frac{1}{5-2x} dx = -\int \frac{dt}{2t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln|5-2x| + C$$

5) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$

Đặt t = $\sqrt{x^2+1}$ $\Rightarrow$ tdt = xdx ; x = t - 1

Ta có

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} + C$$

6) $\int \frac{x^2 dx}{5-x^6}$

Đặt t = $x^3 \Rightarrow$ dt = 3x^2dx

Ta có

$$\int \frac{x^2 dx}{5-x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{5-t^2} = \frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+t}{\sqrt{5}-t}\right| + C = \frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x^3}{\sqrt{5}-x^3}\right| + C$$

7) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$;

Đặt t = cosx $\Rightarrow$ dt = - sinxdx

Ta có

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}} = \int \frac{\sin^2 x dt}{\sqrt{t}} = \int \frac{(1-t^2)dt}{\sqrt{t}} = \int (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}})dt$$

$$= \frac{2\sqrt{t^5}}{5} - 2\sqrt{t} + C = \frac{2\sqrt{\cos^5 x}}{5} - 2\sqrt{\cos x} + C$$

8) $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$

Đặt t = 3 + 4e^x $\Rightarrow$ dt = 4e^xdx

Ta có

$$\int \frac{e^x dx}{3+4e^x} = \int \frac{dt}{4t} = \frac{1}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\ln|3+4e^x| + C$$

9) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$;

Đặt t = 1 + lnx $\Rightarrow$ dt = $\frac{dx}{x}$

Ta có

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx = \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{3\sqrt[3]{t^4}}{4} + C = \frac{3\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}}{4} + C$$

10)Ta có

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+1}; \quad = \int \frac{dx}{(x+\frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2} - x}{\frac{\sqrt{5}}{2} + x}\right| + C$$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} \quad = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \arcsin\frac{x+2}{3} + C$

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

Đặt t = 1 + $\sqrt{x}$ $\Rightarrow$ 2tdt = dx

Ta có

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \int 2t^{-\frac{1}{2}}dt = 4\sqrt{t} + C = 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$$

2.13. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần

2.13. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần

1) $\int (4x-3)e^{-x}dx$

Đặt $\begin{cases} u = 4x-3 \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

Ta có

$$\int (4x-3)e^{-x}dx = -(4x-3)e^{-x} + 4\int e^{-x}dx$$

$$= -(4x-3)e^{-x} - 4e^{-x} = -(4x+1)e^{-x}$$

2) $\int x\sin 2x\,dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{cases}$

Ta có

$$\int x\sin 2x\,dx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{x\cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

3) $\int (x^2+5x+6)\cos 2x dx;$

Đặt u = x^2+5x+6 => du = (2x+5)dx

dv = cos2xdx => v = $\dfrac{1}{2}\sin 2x$

Ta có: I = $\dfrac{1}{2}(x2+5x+6)\sin 2x + \dfrac{1}{4}\int .(2x+5)d(\cos 2x)$

$$= \frac{1}{2}(x2+5x+6)\sin 2x + \frac{1}{4}(2x+5).\cos 2x - \frac{1}{4}\int \cos 2x.2dx$$

$$= \frac{1}{2}(x2+5x+6)\sin 2x + \frac{1}{4}(2x+5).\cos 2x - \frac{1}{4}\int \cos 2x.d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}(x2 + 5x + 6)\sin 2x + \frac{1}{4}(2x + 5).\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 5x + \frac{11}{2})\sin 2x + \frac{1}{4}(2x + 5)\cos 2x + C$$

4) $\int (x^2 + 1)e^{-2x}dx$

Đặt $u = x^2 + 1$ => $du = 2xdx$

$e^{-2x}dx = dv$ => $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

Ta có: $\int (x^2 + 1)e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}(x^2 + 1).e^{-2x} - \int (-\frac{1}{2})e^{-2x}.2xdx$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 + 1).e^{-2x} + \int e^{-2x}.xdx = -\frac{1}{2}(x^2 + 1).e^{-2x} + \int xd(-\frac{1}{2}e^{-2x})$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 + 1).e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \int (-\frac{1}{2}e^{-2x})dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 + 1).e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}\int e^{-2x}d(-2x)$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 + 1).e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$$

$$= e^{-2x}(\frac{-2x^2 - 2 - 2x - 1}{4}) = e^{-2x}(\frac{-2x^2 - 2x - 3}{4}) + c$$

5) $\int x^2 \ln(1 + x)dx$

Đặt: $u = \ln(1+x)$ → $du = \frac{dx}{1+x}$

$x^2dx = dv$ => $v = \frac{x^3}{3}$

Ta có: $\int x^2 \ln(1 + x)dx = \frac{x^3}{3}.\ln(1 + x) - \int \frac{x^3}{3}.\frac{dx}{1 + x}$

$$= \frac{x^3}{3}.\ln(1 + x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3.dx}{1 + x}$$

$$= \frac{x^3}{3}.\ln(1 + x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3 + 1 - 1}{1 + x}.dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(1 + x) - \frac{1}{3}\int \left[(x^2 - x + 1) - \frac{1}{x + 1}\right]dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(1+x) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + \ln|x+1| + C$$

6) $\int x^3 e^{-x^2} dx;$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow \int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int te^{-t} dt$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = e^{-t}dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -e^{-t} \end{cases}$

Ta có

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}(t+1)\,e^{-t} + C$$

2.15. Dùng công thức Newton Leibnitz, tính các tích phân sau:

1) $\int_1^2 2x\sqrt{x-1}dx$

Đặt $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x-1 \Rightarrow 2tdt = dx$

Đổi cận x = 1 $\Rightarrow$ t = 0,   x = 2 $\Rightarrow$ t = 1

$$\int_1^2 2x\sqrt{x-1}dx = 4\int_0^1 (t^4 + t^2)dt = \frac{32}{15}$$

2) $\int_0^1 x(x-2)^4 dx$

Đặt t= x – 2 $\Rightarrow$ dt= dx , x = t + 2

Đổi cận x = 0 $\Rightarrow$ t = - 2,   x = 1 $\Rightarrow$ t = - 1

$$\int_{-2}^{-1} (t^5 + 2t^4)dt = -2,29$$

3) $\int_1^3 \frac{3x^2+4}{x+1}dx$

Đặt t = x + 1 $\Rightarrow$ dt = dx , x = t – 1

Đổi cận x = 1 $\Rightarrow$ t = 2,   x = 3 $\Rightarrow$ t = 4

$$\int_1^3 \frac{3x^2+4}{x+1}dx = \int_2^4 \frac{3t^2-6t+7}{t}dt = \int_2^4 (3t - 6 + \frac{7}{t})dt = 6 + 7\ln 2$$

4) $\int_0^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x+1}}dx$

Đặt $t=\sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2tdt = dx$

Đổi cận x = 0 ⇒ t = 1,   x = 3 ⇒ t = 2

$$\int_0^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x+1}}dx = \int_1^2 \frac{2(t^2-1)+3}{t}2tdt = \int_1^2 (4t^2+2)dt = \frac{34}{3}$$

5) $\int_1^e \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$

Ta có

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = 1$$

6) $\int_{-1}^0 (2x+1)e^{-x}dx$

Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

Ta có

$$\int_{-1}^0 (2x+1)e^{-x}dx = (2x+1)e^{-x}\Big|_{-1}^0 + 2\int_{-1}^0 e^{-x}dx = e-3$$

7) $\int_{-1}^1 \frac{y^5 dy}{y+2}$

Đặt t = y + 2 ⇒ dt = dy , y= t – 2

$$\int_{-1}^1 \frac{y^5 dy}{y+2} = \int_1^3 \frac{(t-2)^5 dt}{t} = \int_1^3 (t^4 - 10t^3 + 40t^2 - 80t + 80 - \frac{32}{t})dt = \frac{1052}{30} - 32\ln 3$$

8) $\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}}$

Đặt t = y^3 ⇒ dt = 3 $y^2 dy$

$$\int_0^1 \frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+4}} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{3\sqrt{t^2+4}} = \frac{1}{3}\ln|t+\sqrt{t^2+4}|\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}$$

9) $\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}dx$

Đặt t = 1 + lnx $\Rightarrow$ dt = $\frac{dx}{x}$

$$\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}dx = \int_0^1 t^{\frac{1}{4}}dt = \frac{4}{5}$$

10) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

Đặt t = 1 + x^2 $\Rightarrow$ dt = 2xdx

$$\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int_{\frac{25}{16}}^{\frac{25}{9}} \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{5}{12}$$

11) $\int_0^3 \ln(x+3)dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+3) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x+3} \\ v = x \end{cases}$

Ta có $\int_0^3 \ln(x+3)dx = x\ln(x+3)\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{x}{x+3}dx$

$$= x\ln(x+3)\Big|_0^3 - \int_0^3 (1-\frac{3}{x+3})dx$$

= 6ln6 — 3ln3 - 3

12) $\int_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx = \int_2^3 (2x^2-3)\,dx = \frac{2}{3}$

13) $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3}dx$

Đặt $x-2=t^3 \Rightarrow dx=3t^2dt$

$$\int_3^{29}\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3}dx = 3\int_1^3\frac{t^4}{t^2+3}dt = 3\int_1^3\frac{t^4-9+9}{t^2+3}dt = 3\int_1^3(t^2-3+\frac{9}{t^2+3})dt$$

$$=(\frac{t^3}{3}-3t+3\sqrt{3}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}})\Big|_1^3=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}+\frac{8}{3}$$

14) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}.dx$

Đặt $t=\sqrt{e^x-1} \Rightarrow dt=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx=\frac{t^2+1}{2t}dx$

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}.dx = 2\int_0^1\frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int_0^1(1-\frac{1}{t^2+1})dt = 2(t-\arctan t)\Big|_0^1 = 2-\frac{\pi}{2}$$

Chương 3
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

3.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

3.1.1. Một số khái niệm mở đầu.

Định nghĩa: Phương trình vi phân cấp một là phương trình có dạng:

$$F(x , y , y') = 0 \qquad (1)$$

trong đó:
- x là biến số độc lập
- y = f(x) là hàm số phải tìm
- y' là đạo hàm cấp 1 của hàm số y = f(x)

Chú ý: Nếu giải được phương trình (1) đối với y' thì phương trình sẽ có dạng:

$$y' = f(x , y) \qquad (2)$$

Ví dụ 1: 1) $y' + xy = x \sin x$ là phương trình vi phân cấp một

2) $yy' + x^2 + y^2 = 0$ là phương trình vi phân cấp một

Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm số thoả mãn phương trình ấy, tức là mọi hàm số sao cho khi thế nó vào phương trình ta được một đồng nhất thức (= 0)

Giải một phương trình vi phân tức là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp một là hàm số có dạng $y = \varphi(x, C)$ trong đó $C \in \mathbb{R}$.

Nhiều khi ta không tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (2) dưới dạng $y = \varphi(x , C)$ mà tìm được một hệ thức: $\Phi(x , y ,C) = 0$, nó xác định nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn. Hệ thức ấy được gọi là **tích phân tổng quát** của phương trình (2).

Khi thay C bằng một giá trị C_0 xác định ($C = C_0$) thì hàm số $y = \varphi(x , C_0)$ được gọi là **nghiệm riêng** của phương trình (2).

Phương trình (2) có thể có một số nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát, những nghiệm ấy được gọi là **nghiệm kỳ dị.**

Điều kiện y = f(x) lấy giá trị y_0 khi $x = x_0$ được gọi là **điều kiện ban đầu** và được viết là: $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Ví dụ 2: $y' + 3y = 0$ là phương trình vi phân cấp một, có nghiệm là

$$y = Ce^{-3x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Thật vậy, thay $y = Ce^{-3x}$ vào vế trái của phương trình ta có

$$y' + 3y = -3Ce^{-3x} + 3Ce^{-3x} = 0 \text{ (đpcm)}$$

Lưu ý: ứng với một giá trị của C ta được một nghiệm của phương trình vi phân, nghiệm này được gọi là nghiệm riêng của phương trình vi phân ứng với giá trị C.

Ví dụ 3: Giải phương trình vi phân: $y' = \sin x$ (1)

Giải:

Ta có: $y = \int y'dx$

$= \int \sin x\, dx$

$= -\cos x + C$

Cho $y = 2$ khi $x = \frac{\pi}{2}$, ta có:

$$2 = -\cos\frac{\pi}{2} + C$$

$$\Leftrightarrow C = 2$$

Kết luận: $y = -\cos x + 2$ là nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn điều kiện đã cho $y = 2$ khi $x = \frac{\pi}{2}$.

3.1.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm.

Cho phương trình vi phân cấp một $y' = f(x, y)$ (2)

Giả sử $f(x, y)$ liên tục trong một miền D nào đó của mặt phẳng Oxy và giả sử (x_0, y_0) là một điểm nào đó thuộc miền D. Khi đó: trong một lân cận nào đó của điểm $x = x_0$, tồn tại ít nhất một nghiệm $y = f(x)$ của phương trình (2) lấy giá trị y_0 khi $x = x_0$

Ngoài ra, nếu đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ cũng liên tục trong miền D thì nghiệm đó là duy nhất.

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (2) thoả mãn điều kiện ban đầu, còn được gọi là bài toán Cauchy của phương trình (2).

3.2. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

3.2.1. Phương trình với biến số phân ly

Định nghĩa: Phương trình với biến số phân ly là phương trình có dạng :

$$f(x).dx = g(x).dy$$

Cách giải: lấy nguyên hàm 2 vế, ta được:

$\int f(x).dx = \int g(y).dy$ hay $F(x) = G(y) + C$

trong đó: $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$

$G(y)$ là nguyên hàm của $g(y)$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$

$\Leftrightarrow (1+x)ydx = (y-1)xdy$

Nếu $x.y \neq 0 < x \neq 0,\ y \neq 0 >$ thì chia 2 vế của phương trình cho $x.y$ ta được:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = \left(1 - \frac{1}{y}\right)dy$$

$$\Leftrightarrow \int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = \int\left(1 - \frac{1}{y}\right)dy$$

$$\Leftrightarrow x + \ln|x| = y - \ln|y| + C$$

$$\Leftrightarrow \ln|x| + \ln|y| + x - y = C$$

$\Leftrightarrow \ln|x.y| + x - y = C$ là nghiệm tổng quát của phương trình

Nếu $x = 0$ hoặc $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình và là nghiệm kỳ dị

Chú ý: *Phương trình khuyết dạng:* $y' = f(x)$ *hoặc* $y' = f(y)$ *cũng là những nghiệm của phương trình có biến số phân ly.*

3.2.2. Phương trình đẳng cấp cấp một

Định nghĩa: Phương trình đẳng cấp cấp một hay còn gọi là phương trình thuần nhất là phương trình có dạng: $y' = f(\frac{y}{x})$ (4)

Cách giải:

Đặt: $\frac{y}{x} = u(x)$ trong đó u = u(x) là một hàm số biến x

$\Rightarrow y = u.x$, $y' = f(u)$

Lấy đạo hàm hai vế theo x, ta được:

$$y' = y'_x\ u_x + x.u'_x$$

mà $y' = f(u)$

Suy ra : $u + x.u' = f(u)$

$$\Leftrightarrow \quad x.\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

$$\Leftrightarrow \quad x.du = \big(f(u) - u\big)dx$$

Nếu $f(u) - u \neq 0$ thì $\dfrac{du}{f(u)-u} = \dfrac{dx}{x}$

$$\Rightarrow \quad \ln|x| = \int \frac{du}{f(u)-u} = \Phi(u) + \ln|C| \qquad \text{(C \textit{là hằng số khác} 0)}$$

$$\Rightarrow \quad |x| = e^{\Phi(u) + \ln|C|}$$

$$= e^{\ln|C|}.e^{\Phi(u)}$$

$$= |C|.e^{\Phi(u)} \qquad (\Phi(u) \text{ là nguyên hàm của } \frac{1}{f(u)-u})$$

$$\Rightarrow \quad x = C\,e^{\Phi(u)}$$

Suy ra : $y = u.x = C.u.e^{\Phi(u)}$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là : $\begin{cases} x = C.e^{\Phi(u)} \\ y = C.u.e^{\Phi(u)} \end{cases}$

Nếu $f(u) \equiv u$ thì $du = 0$

$$\Rightarrow \quad u = C \quad \text{(C là hằng số)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} = C \quad \Rightarrow \quad y = Cx$$

Nghiệm của phương trình là $y = Cx$

Còn nếu $f(u) = u$ tại một số hữu hạn điểm $u = u_0$ thì ta có thể dễ dàng chứng minh được hàm số $y = u_0 x$ cũng là nghiệm của phương trình.

Chú ý: Phương trình dạng:

$$P(x,y).dx + Q(x,y).dy = 0 \qquad (*)$$

trong đó $P(x,y)$ & $Q(x,y)$ là hai hàm số thuần nhất cùng bậc, thì phương trình (*) cũng là phương trình thuần nhất.

Chẳng hạn: 1) $(2xy - 5y^2)dx + (3y^2 - xy)dy = 0$

2) $(x^2 - 2y^2)dx - (x^3 + 4x^2 y)dy = 0$

Ví dụ 5: Giải phương trình : $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{x-y}{x+y}$$

Đặt $y = u.x$, $u = u(x)$ là một hàm số biến x

Ta có : $\begin{cases} y' = u + x.u' \\ y' = \dfrac{x-ux}{x+ux} = \dfrac{1-u}{1+u} \end{cases} \Rightarrow u + x.u' = \dfrac{1-u}{1+u}$

$$\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u} - u = -\frac{u^2+2u-1}{u+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} + \frac{(u+1)du}{u^2+2u-1} = 0$$

Lấy nguyên hàm 2 vế, ta được: $\ln|x| + \ln\sqrt{|u^2+2u-1|} = \ln|C|$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(|x|\sqrt{|u^2+2u-1|}\right) = \ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \quad |x|\sqrt{|u^2+2u-1|} = |C|$$

$$\Leftrightarrow \quad |x^2u^2 - 2ux^2 - x^2| = C^2$$

mà $y = u.x$

$$\Rightarrow \quad |y^2 - 2xy - x^2| = C^2$$

$\Rightarrow \quad y^2 - 2xy - x^2 = C$ (C là hằng số)

Kết luận: Nghiệm tổng quát của phương trình là: $y^2 - 2xy - x^2 = C$

Ví dụ 6: Giải phương trình: $y' = \dfrac{3y^2 - x^2}{2xy}$

Giải :

Ta có : $y' = \dfrac{3}{2}\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{y}$ (1)

Đặt : $u = \dfrac{y}{x}$

Khi đó y=ux

$y' = u'x + u$ (*)

Theo 1 ta lại có : $y' = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}\frac{1}{u}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra:

$$u'x + u = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}\frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow \quad u'x = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{2}\frac{u^2-1}{u}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}x = \frac{1}{2}\frac{u^2-1}{u}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2udu}{u^2-1} = \int \frac{dx}{x} \int \frac{2udu}{u^2-1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ln|u^2-1| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \quad \ln|(\frac{y}{x})^2 - 1| = \ln|x| + C$$

3.2.3. Phương trình tuyến tính

1) Định nghĩa:

Phương trình tuyến tính là phương trình có dạng:

$$y' + p(x).y = q(x) \qquad (5)$$

trong đó p(x), q(x) là những hàm số liên tục.

Phương trình tuyến tính được gọi là **phương trình tuyến tính thuần nhất** nếu vế phải bằng không hay $q(x) \equiv 0$

Phương trình tuyến tính được gọi là **phương trình tuyến tính không thuần nhất** nếu vế phải khác không hay $q(x) \neq 0$

2) Cách giải:

Để giải phương trình (5), trước hết ta giải phương trình thuần nhất tương ứng

$$y' + p(x).y = 0 \quad (5^0)$$

$y \neq 0 : (5^0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = - p(x).dx$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{d_y}{y} = \int -p(x).dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \int -p(x).dx + \ln|C| \qquad (C \neq 0 \text{ là hằng số})$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x).dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{y}{C}\right| = e^{-\int p(x).dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad |y| = |C|e^{-\int p(x).dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = Ce^{-\int p(x).dx}$$

$$\Rightarrow \quad y = C.e^{-\int p(x).dx} \qquad (6)$$

y = 0 cũng là nghiệm của phương trình (5^0) và là một nghiệm riêng của (6) ứng với giá trị C = 0.

Vậy nghiệm tổng quát của (5^0) là: $y = C.e^{-\int p(x).dx}$

Để tìm nghiệm của phương trình (5), ta coi C ở phương trình (6) là một hàm số đối với biến x (tức là C = C(x)) :

Ta có: $\quad y = C.\ e^{-\int p(x).dx}$

$$\Rightarrow \quad y' = C'.\ e^{-\int p(x).dx} - C.p(x)\ e^{-\int p(x).dx}$$

Thay vào phương trình (5): $\quad y' + p(x).y = q(x)$

$$\Rightarrow \quad C'.\ e^{-\int p(x).dx} - C.p(x).\ e^{-\int p(x).dx} + p(x).C.e^{-\int p(x).dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow \quad C'.\ e^{-\int p(x).dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow \quad C' = q(x).\ e^{\int p(x).dx}$$

$$\Rightarrow \quad C = \int\left(q(x).e^{\int p(x)dx}\right)dx + K \qquad \text{(K là hằng số tuỳ ý)}$$

Thay vào (6), ta được: $y = \left[\int\left(q(x).e^{\int p(x)dx}\right)dx + K\right].e^{-\int p(x).dx}$

$$\Rightarrow \quad y = K.\ e^{-\int p(x).dx} + e^{-\int p(x).dx}.\int\left(q(x).e^{\int p(x)dx}\right)dx$$

Kết luận: Nghiệm tổng quát của phương trình (5) là:

$$y = K.\ e^{-\int p(x).dx} + e^{-\int p(x).dx}.\int\left(q(x).e^{\int p(x)dx}\right)dx \qquad (6')$$

Chú ý: Phương pháp giải trên được gọi là ***phương pháp biến thiên hằng số Lagrange.***

Nhận xét:

Số hạng thứ 2 ($e^{-\int p(x).dx}.\int\left(q(x).e^{\int p(x)dx}\right)dx$) trong vế phải của (6') là nghiệm riêng của phương trình (5) ứng với K = 0.

Số hạng thứ nhất (K. $e^{-\int p(x).dx}$) trong vế phải của (6') là **nghiệm tổng quát** của phương trình thuần nhất tương ứng (5^0)

Tóm lại:

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng cộng với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất.

Để giải phương trình tuyến tính không thuần nhất: y' + p(x).y = q(x) ta làm như sau:

Xét phương trình thuần nhất tương ứng: y' + p(x).y = 0

$\Rightarrow$ Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng :y = C. $e^{-\int p(x).dx}$

Coi C = C(x) là một hàm số biến x:

Ta có: $\quad y = C.\ e^{-\int p(x).dx}$

$\Rightarrow \quad y' = C'.\ e^{-\int p(x).dx} - C.p(x)\ e^{-\int p(x).dx}$

Thay vào phương trình (5): $\quad y' + p(x).y = q(x)$

$\Rightarrow \quad C'.\ e^{-\int p(x).dx} - C.p(x).\ e^{-\int p(x).dx} + p(x).C.e^{-\int p(x).dx} = q(x)$

$\Rightarrow \quad C' = q(x).\ e^{\int p(x).dx}$

$\Rightarrow$ **Tìm được C**

Kết luận: Thay C vừa tìm được vào nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, ta được nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $\quad y' - \dfrac{y}{x-1} = x + 2 \quad (1)$

<u>Giải</u>:

Phương trình thuần nhất tương ứng là :

$$y' - \frac{y}{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-1}$$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1}$

$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x-1}$

$\Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x-1| + \ln|C|$

$\Rightarrow \quad \ln|y| - \ln|x-1| = \ln|C|$

$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{x-1}\right| = \ln|C|$

$\Rightarrow \quad \frac{y}{x-1} = C$

$\Rightarrow \quad y = C(x-1)$

Coi C = C(x) là một hàm số biến x. Ta có y= C(x)(x-1)

Thay vào phương trình (1) ta được

$C'(x) = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow C(x) = \int \frac{(x+2)dx}{x-1} = x + 3\ln|x-1| + K$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$y = (x-1)(x + 3\ln|x-1| + K)$$

Ví dụ 8: Giải phương trình: $y' - \frac{2y}{\ln x} = \ln^2 x \qquad (1)$

Phương trình thuần nhất tương ứng là :

$y' - \frac{2y}{\ln x} = 0$

$\Rightarrow \quad y' = \frac{2y}{\ln x}$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{\ln x}$

$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{\ln x}$

$\Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|\ln^2 x| + \ln|C|$

$\Rightarrow \quad y = C\ln^2 x$

Coi C = C(x) là một hàm số biến x. Ta có $y = C(x)\ln^2 x$

Thay vào phương trình (1) ta được

$C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = \int dx = x + K$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$y = (x + K)\ln^2 x$$

Ví dụ 9: Giải phương trình: $y' - y = x^2 e^x$ (1)

Phương trình thuần nhất tương ứng là :

$$y' - y = 0$$

$$\Rightarrow \quad y' = y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y = Ce^x$$

Coi C = C(x) là một hàm số biến x. Ta có y = C(x)e^x

Thay vào phương trình (1) ta được

$C'(x) = x^2 \Rightarrow C(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + K$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + K\right)e^x$$

Ví dụ 10: Giải phương trình : $(x^2+1).y' + x.y = -x$ (2)

Ta có:

y = -1 là một nhiệm riêng của phương trình (2).

Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$(x^2+1).y' + x.y = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{x}{x^2+1}.dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất.

Kết luận: Nghiệm tổng quát của phương trình (2) là: $\quad y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

Ví dụ 11: Tìm nghiệm của phương trình: $(x^2+1).\ y' + xy = 1$

thoả mãn điều kiện: $y\big|_{x=0} = 2$

<u>*Giải*</u>:

Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$(x^2+1).\ y' + xy = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{x}{x^2+1}.dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{(C là hằng số)}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là : $y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}}$

Coi C = C(x) là một hàm số biến x. Ta có:

$$y = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \quad y' = C'\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

Thay vào phương trình: $(x^2+1).\ y' + xy = 1$

$$\Rightarrow \quad (x^2+1)\left(C'\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - C\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right) + x\frac{C}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad C'\sqrt{x^2+1} - C\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + x\frac{C}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad C'\sqrt{x^2+1} = 1$$

$\Leftrightarrow \quad C' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow \quad C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}\,) + K \quad$ (K: hằng số)

Vậy: Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+K}{\sqrt{x^2+1}}$$

Theo bài ra: $\quad y\big|_{x=0} = 2$ thay vào, ta được:

$$2 = \frac{\ln\left(0+\sqrt{0+1}\right)+K}{\sqrt{0+1}}$$

$$\Rightarrow \quad K = 2$$

Kết luận: Nghiệm cần tìm là: $y = \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+2}{\sqrt{x^2+1}}$

3.2.4. Phương trình Bernoully

Định nghĩa: Phương trình Bernoully là phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)\,y^{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0,1)$$

Chú ý: Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì phương trình trên trở thành phương trình tuyến tính.

Cách giải:

Với $y \neq 0$, chia 2 vế cho y^{α} ta được :

$y^{-\alpha}y' + p(x).y^{1-\alpha} = q(x) \qquad (*)$

Đặt: $\quad z = y^{1-\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}.y'$

Thay vào (*) ta được: $\qquad z' + (1-\alpha)p(x).z = (1-\alpha)q(x)$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đối với z.

Giải phương trình này ta tìm được z, sau đó thay vào tìm y = ?

Với y = 0 cũng là nghiệm của phương trình (*) và là nghiệm kỳ dị của phương trình.

Ví dụ 12: Giải phương trình $\qquad y' + \dfrac{2}{x+1}y + (1+x)^3y^2 = 0$

Với $y \neq 0$, chia 2 vế cho y^2 ta được:

$$y^{-2}y' + \frac{2}{x+1}y.y^{-1} + (1+x)^3 = 0 \qquad (1)$$

Đặt: $z = y^{-1}$ $\Rightarrow$ $z' = -y^{-2}.y'$

Suy ra : (1) $\Rightarrow$ $-z' + \dfrac{2}{x+1}z + (1+x)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad z' - \frac{2}{x+1}z = (1+x)^3 \qquad (1')$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp 1.

Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$z' - \frac{2}{x+1}z = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2}{x+1}.z$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{2}{x+1}dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|z| = 2\ln|x+1| + \ln|C| \qquad \text{(C là hằng số)}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = C.(1+x)^2$$

Coi $C = C(x)$ là hàm số biến x. Ta có:

$z = C.(1+x)^2$

$\Rightarrow$ $z' = C'.(1+x)^2 + 2C.(1+x)$

Thay vào (1') ta được:

$$C'(x+1)^2 + 2C(x+1) - \frac{2}{x+1}C(x+1) = (x+1)^3$$

$$\Rightarrow \quad C' = x+1$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{(x+1)^2}{2} + K \qquad \text{k là hằng số}$$

$$\Rightarrow \quad z = \left(\frac{(x+1)^2}{2} + K\right)(x+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{(x+1)^4 + 2K(x+1)^2}{2}$$

Vậy: Nghiệm tổng quát của phương trình (1') là: $z = \dfrac{(x+1)^4 + 2K(x+1)^2}{2}$

mà $z = y^{-1}$ hay $y = \frac{1}{z}$

Suy ra : $y = \frac{2}{(x+1)^4 + 2K(x+1)^2}$

Với y = 0: cũng là nghiệm của phương trình, đó là nghiệm kỳ dị.

3.3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

3.3.1. Một số khái niệm mở đầu

Định nghĩa: Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng

$F(x, y, y', y'') = 0$ (1)

Nếu giải được phương trình trên đối với y'', thì nó sẽ có dạng:

$y'' = f(x,y, y')$ (2)

Nghiệm tổng quát của phương trình (2) là hàm số $y=\varphi(x, C_1, C_2)$ trong đó C_1, C_2 là những hằng số.

Hệ thức $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ xác định nghiệm tổng quát của phương trình (2) dưới dạng ẩn, và được gọi là **phương trình tổng quát** của nó.

Khi cho $C_1 = a$; $C_2 = b$ thì nghiệm $y=\phi(x,a,b)$ được gọi là một **nghiệm riêng** của phương trình (2)

Ví dụ 13: 1) $y.y'' + y'^2 + y.y' + x^2.y^2 = 0$ là phương trình vi phân cấp 2

2) $y'' - 2\frac{y}{x} = x\cos x$ là phương trình vi phân cấp 2

3.3.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Cho phương trình: $y'' = f(x, y, y')$ (2)

Nếu $f(x, y, y')$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$ và $\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ liên tục trong một miền D nào đó trong R^3 & nếu (x_0, y_0, y'_0) là một điểm thuộc miền D thì trong một lân cận nào đó của điểm $x = x_0$, tồn tại một nghiệm duy nhất y = y(x) của phương trình (2) thoả mãn các điều kiện: $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y'_0$

Ta thừa nhận định lý này.

3.3.3. Phương trình vi phân cấp hai có thể giảm cấp được

1) Phương trình khuyết y và y’: F(x,y”) = 0

Cách giải:

Đặt: p = y’ $\Rightarrow$ F(x,p’) = 0 . Đây là phương trình vi phân cấp một, ta giải tìm được p , sau đó thay vào tìm y .

Ví dụ 14: Giải phương trình: $x = (y'')^2 + y'' + 1$

Đặt: p = y’

$\Rightarrow$ $x = (p')^2 + p' + 1$

Đặt p’= t

Ta có : $\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ \dfrac{dp}{dx} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = (2t+1)dt \\ dp = tdx \end{cases}$

$\Rightarrow$ $dp = (2t^2 + t)dt$

$\Rightarrow$ $p = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1$

mà y’ = p , dx = (2t + 1)dt

$$\Rightarrow \quad y = \int p dx$$

$$= \int (\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1)(2t+1)dt$$

$$= \int (\frac{4}{3}t^4 + \frac{5}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2C_1 t + C_1)dt$$

$$y = \frac{4}{15}t^5 + \frac{5}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + C_1 t^2 + C_1 t + C_2$$

Vậy: Phương trình tham số của tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = \dfrac{4}{15}t^5 + \dfrac{5}{12}t^4 + \dfrac{1}{6}t^3 + C_1 t^2 + C_1 t + C_2 \end{cases}$$

2) Phương trình khuyết y: F(x , y’ , y”) =0

Cách giải:

Đặt y’ = p, ta được: F(x , p , p’) = 0 đây là phương trình vi phân cấp một đối với p. Giải phương trình này tìm p , sau đó thay vào tìm y .

Ví dụ 15: Tìm một nghiệm riêng của phương trình

$$(1-x^2)\,y'' - xy' = 2$$

thỏa mãn các điều kiện: $y\big|_{x=0} = 0$; $y'\big|_{x=0} = 0$

<u>*Giải:*</u>

Đặt : $y' = p \;\rightarrow\; y'' = p'$ ta cóphương trình

$$(1-x^2)p' - xp = 2$$

đây là phương trình tuyến tính cấp một đối với p.

Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$(1-x^2)\,p' - xp = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{xdx}{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|p| = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \ln|K| \qquad \text{(K là hằng số)}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{K}{\sqrt{1-x^2}}$$

Cho K = K(x) là hàm số biến x, ta có:

$$K' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad K = 2\arcsin x + C_1$$

Trong đó: (C_1 là hằng số)

Suy ra : $$p = \frac{2\arcsin x + C_1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Vậy $$y = \int \frac{2\arcsin x + C_1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \text{(}C_1, C_2 \text{ là hằng số)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = (\arcsin x)^2 + C_1.\arcsin x + C_2$$

Theo bài ra:

Với $y\big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$

Với $y'\big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

Kết luận: nghiệm riêng cần tìm là : $y = (\arcsin x)^2$

3) Phương trình khuyết x: **F(y,y',y") = 0**

Cách giải: Đặt $y' = p$

$$\Rightarrow \qquad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = y'.\frac{dp}{dy} \qquad \Rightarrow \qquad y'' = p.\frac{dp}{dy}$$

Thay vào phương trình : $F(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$ đây là phương trình cấp một đối với p.

Ví dụ 16: Giải phương trình $2y.y'' = y'^2 + 1$

Đặt $y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

Thay vào ta được:

$$2.y.p\frac{dp}{dy} = p^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{2pdp}{1+p^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \ln|1+p^2| + \ln|C_1|$$

$$\Leftrightarrow \quad y = C_1(1+p^2)$$

$$\Rightarrow \quad dy = 2C_1 dp$$

mà $p = y' = \frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{p} = \frac{2C_1 p.dp}{p} = 2.C_1.dp$$

$$\Rightarrow \quad dp = \frac{1}{2C_1}dx$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{x}{2C_1} + C_2$$

Vậy: nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$y = C_1\left[\left(\frac{x}{2C_1} + C_2\right)^2 + 1\right] = C_1 + \frac{(x + 2C_1C_2)^2}{4C_1}$$

Đặt: $2C_1C_2 = -a$, $2C_1 = p$

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình có dạng:

$$2p(y - \frac{p}{2}) = (x - a)^2$$

Chú ý: Những phương trình cấp 2 khuyết còn được gọi là những ***phương trình giảm cấp được***, vì có thể dễ dàng đưa chúng về những phương trình cấp 1.

3.3.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất là phương trình có dạng:

$$y'' + p(x).\ y' + q(x).\ y = 0 \qquad (2)$$

Định lý 1: Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là 2 nghiệm của phương trình (2) thì $C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình đó, trong đó C_1 và C_2 là 2 hằng số.

Chứng minh:

Vì $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là nghiệm của phương trình (2) nên:

$$y''_1 + p(x).y'_1 + q(x).\ y_1 = 0$$

$$y''_2 + p(x).y'_2 + q(x).\ y_2 = 0$$

Nhân dòng trên với C_1 và dòng dưới với C_2, rồi cộng 2 vế của chúng lại, ta được :

$\Rightarrow \quad (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$

$\Rightarrow \quad C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (2).

Định nghĩa 1: Hai hàm số $y_1(x)$, $y_2(x)$ được gọi là **độc lập tuyến tính** trên đoạn [a,b] nếu tỉ số $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq k$ – hằng số trên đoạn đó. Ngược lại, hai hàm đó gọi là **phụ thuộc tuyến tính**.

Ví dụ 17

- Hai hàm số y = sinx và y = cosx độc lập tuyến tính trên R

vì $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \text{tgx} \neq$ hằng số.

- Hai hàm số $y = 2.e^x$ và $y = 5.\ e^x$ là phụ thuộc tuyến tính

vì $\dfrac{2.e^x}{5.e^x} = \dfrac{2}{5}$ hằng số.

Định nghĩa 2: Cho hàm số $y_1(x)$, $y_2(x)$. Định thức:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

được gọi là ***định thức Wronsky*** của y_1, y_2 và được kí hiệu là $W(y_1, y_2)$ hay vắn tắt là W nếu không sợ nhầm lẫn.

Định lí 2: Nếu hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên [a, b] thì

$$W(y_1, y_2) \equiv 0 \text{ trên đoạn đó.}$$

Thật vậy, vì $y_2 = ky_1$ với k là hằng số nên $y'_2 = ky'_1$, do đó

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & ky_1 \\ y'_1 & ky'_1 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y'_1 & y'_1 \end{vmatrix} = 0$$

Định lí 3: Cho y_1, y_2 là 2 nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất (2). Nếu định thức Wronsky $W(y_1,y_1)$ khác không tại một giá trị $x = x_0$ nào đó trên đoạn [a;b] (trên đó các hệ số p(x), q(x) là liên tục) thì nó khác không với mọi x trên đoạn đó.

Chứng minh:

Vì $y_1(x)$, $y_2(x)$ là nghiệm của phương trình (2) nên :

$$y_1'' + p(x).y_1' + q(x).y_1 = 0$$

$$y_2'' + p(x).y_2'' + q(x).y_2 = 0$$

Nhân dòng trên với $(- y_2)$ và dòng dưới với (y_1) , rồi cộng 2 vế lại với nhau, ta được :

$$(y_1.y''_2 - y_2.y''_1) + p(x).(y_1y'_2 - y_2y'_1) = 0 \qquad (*)$$

mà $W = y_1y'_2 - y_2y'_1$

$$\Rightarrow \quad W' = \left(y_1y'_2 - y_2y'_1\right)' = y'_1y'_2 + y_1y''_2 - (y'_2y'_1 + y_2y''_1) = y_1y''_2 - y_2y''_1$$

Suy ra : (*) $\Leftrightarrow$ $W' + p(x).W = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dW}{W} = -p(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|W| = -\int_{x_0}^{x} p(x)dx + \ln|C|$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{W}{C}\right| = -\int_{x_0}^{x} p(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} \qquad (**)$$

Thay $x = x_0$, ta được : $C = W(x_0)$

Suy ra: $W = W(x_0).e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$

Theo giả thiết: $W(x_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; W(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$ *(đpcm)*

<u>**Hệ quả**</u> : Nếu $W(y_1,y_2) = 0$ tại $x = x_0 \in [a,b]$ thì $W(y_1,y_2) \equiv 0$ tại $\forall x \in [a,b]$

Định lí 4: Nếu các nghiệm y_1 , y_2 của phương trình (2) là độc lập tuyến tính trên [a,b] thì định thức Wconsky $W(y_1,y_2)$ khác không tại mọi điểm của đoạn ấy.

<u>*Chứng minh*</u>:

Giả sử W = 0 tại một điểm nào đó của đoạn [a,b] theo định lý 3 thì:

$$W \equiv 0 \quad \text{trên đoạn ấy}$$

$$\Rightarrow \qquad y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0 \quad , \forall x \in [a,b]$$

Tại những điểm của đoạn [a,b] ở đó $y_1 \neq 0$, ta có:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{0}{y_1^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_2}{y_1} = k \qquad \text{, k là hằng số, tại những điểm ấy}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết y_1 & y_2 độc lập tuyến tính.

Vậy: $W \neq 0 \quad , \quad \forall x \in [a,b]$

Chú ý: tại những điểm của đoạn [a,b] ở đó $y_1 = 0$, người ta đã chứng minh được $\frac{y_2}{y_1}$ cũng là hằng số.

Định lí 5: Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là 2 nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (2) thì nghiệm tổng quát của phương trình (2) là:

$$y = C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x) \qquad (2')$$

trong đó: C_1, C_2 là những hằng số tuỳ ý.

<u>*Chứng minh*</u>.

Theo định lí 1, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ cũng là nghiệm của phương trình (2)

Ta cần chứng minh rằng với mọi điều kiện ban đầu $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ có thể tìm được những hằng số C_1 , C_2 để nghiệm $C_1y_1 + C_2y_2$ tương ứng thoả mãn các điều kiện ấy.

Thế các điều kiện ban đầu vào (2'), ta được:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) \end{cases} \qquad (2.1)$$

đây là một hệ hai phương trình đại số tuyến tính đối với C_1, C_2

Ta có: Định thức của ma trận hệ số là:

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

đó chính là giá trị của định thức Wronsky $W(y_1 , y_2)$ tại $x = x_0$, nó khác không vì y_1, y_2 độc lập tuyến tính.

Suy ra: $D \neq 0 \Rightarrow$ Hệ (2.1) có nghiệm duy nhất C_1 , C_2

Vậy: có thể xác định được C_1 , C_2 để $C_1y_1 + C_2y_2$ thoã mãn các điều kiện ban đầu cho trước. Do đó (2’) là nghiệm tổng quát của phương trình (2).

Ví dụ 18 : Phương trình y” + y = 0 có 2 nghiệm riêng là $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, hai nghiệm ấy độc lập tuyến tính.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, C_1 và C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Chú thích 1. Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm phụ thuộc tuyến tính của phương trình (2), tức là $y_1(x) = K y_2(x)$ với K là một hằng số nào đó. Do đó, biểu thức $y = (C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, C_1 và C_2 là hằng số tuỳ ý, có thể viết là $y = (C_1K + C_2)y_2(x)$, nó thự sự chỉ phụ thuộc một hằng số tuỳ ý nên không là nghiệm tổng quát của phương trình (2).

Chú thích 2. Định lí 5 cho thấy muốn tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (2), chỉ cần tìm 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó. Như chúng ta sẽ thấy ở phần dưới, có phương pháp để tìm được 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình trình tuyến tính thuần nhất với hệ số không đổi. Nhưng đối với phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số biến thiên, không có phương pháp tổng quát để giải quyết vấn đề đó. Tuy nhiên, định lí sau đây cho ta cách tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số biến thiên nếu ta biết trước một nghiệm riêng khác 0 của nó.

Định lí 6: Nếu đã biết một nghiệm riêng $y_1(x) \neq 0$ của phương trình (2), ta có thể tìm được một nghiệm riêng $y_2(x)$ của phương trình đó, độc lập tuyến tính với $y_1(x)$, có dạng: $y_2(x) = y_1(x). u(x)$

Chứng minh.

Đặt $y = y_1(x). u(x)$.

Ta cần tìm $u(x)$ sao cho $y = y_1(x). u(x)$. thoã mãn phương trình (2).

Ta có

$$y' = y_1'u + y_1u' \quad ; \quad y'' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''.$$

Thế vào phương trình (2), ta được:

$$y''+p.y'+q.y=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(y_1''u+2y_1'u'+y_1u''\right)+p\left(y_1'u+y_1u'\right)+qy_1u=0$$

$$\Rightarrow \quad y_1u''+(2y_1'+py_1)u'+(y_1''u+py_1'+qy_1)u=0.$$

mà $\quad y_1''+py_1'+qy_1=0$, vì y_1 là một nghiệm của phương trình (2).

Suy ra :

$y_1u''+(2y_1'+py_1u)u'=0$ đây là phương trình cấp 2 đối với u, khuyết u

Đặt u’ = v, ta được phương trình cấp 1 đối với v:

$$y_1v'+(2y_1'+py_1)v=0$$

hay

$$\frac{dv`}{v}=-(\frac{2y_1'}{y_1}+p)\,dx.$$

Lấy tích phân hai vế:

$$\ln|v|=-2\ln|y_1|-\int p(x)dx=-2\ln|y_1|+\phi(x)+\ln|C_1|$$

$\varphi(x)$ là một nguyên hàm nào đó của –p(x)

Vậy: $\quad v=C_1\dfrac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2}=C_1g(x), \quad$ với $\; g(x)=\dfrac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2}.$

Do đó

$$u=C_1\int g(x)dx=C_1G(x)+C_2 \qquad \text{(vì u' = v)}$$

trong đó G(x) là một nguyên hàm của g(x).

Ta được:

$$y=[C_1G(x)+C_2]y_1=C_1y_1G(x)+C_2y_1.$$

Chọn $\; C_2=0,\; C_1=1,\;$ ta được $\; y_2=y_1G(x),\;$ đó là một nghiệm của (2), độc lập tuyến tính với y_1, vì $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)'=G'(x)=g(x)=\dfrac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2}\neq 0$

Ví dụ 19: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$(1-x^2)y''+2xy'-2y=0. \qquad (3)$$

Dễ thấy rằng $y_1 = x$ là một nghiệm riêng. Tìm một nghiệm riêng khác, có dạng $y_2=x.u(x).$ Thế vào phương trình đã cho, ta được:

$$u''x(1-x^2)+2u'=0.$$

Đặt u' = v, ta có

$$v'x(1-x^2)+2v=0$$

hay

$$\frac{dv}{v}=-\frac{2dx}{x(1-x^2)}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$v=K_1\frac{1-x^2}{x^2}=K_1\left(\frac{1}{x^2}-1\right).$$

K_1 là hằng số tuỳ ý. Chọn K_1 = -1 ta được $v=1-\frac{1}{x^2}$, do đó $u=x+\frac{1}{x}+K_2$.

Chọn K_2 = 0, ta được $u=x+\frac{1}{x}\ \Rightarrow\ y_2=x.u=x^2+1.$

Hai nghiệm $y_1=x$, $y_2=x^2+1$ là độc lập tuyến tính, nên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y=C_1x+C_2(x^2+1),$$

C_1, C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Chú thích. Cũng có thể tìm y_2 từ công thức (**). Chia hai vế của công thức ấy cho y_1^2, ta được:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}=\frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int p(x)dx}.$$

$$\Rightarrow\quad \frac{y_2}{y_1}=\int\frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int p(x)dx}dx+K.$$

mà $\frac{y_2}{y_1}=u(x)$

$$\Rightarrow\quad u(x)=\int\frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int p(x)dx}dx+K$$

Chọn C = 1, K = 0, ta được

$$y_2 = y_1 u = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} . e^{-\int p(x)dx} dx \qquad (2.2)$$

Như vậy nếu phương trình (2) có một nghiệm riêng là $y_1(x)$ thì nghiệm tổng quát của nó là :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} . e^{-\int p(x)dx} dx. \qquad (2.3)$$

Ví dụ 20: Trở lại ví dụ trên. Phương trình $(1 - x^2)y'' + 2y = 0$, có một nghiệm riêng là $y_1 = x$. Chia hai vế của phương trình cho $(1 - x^2)$, ta thấy $p(x) = \frac{2x}{1-x^2}$, do đó

$$-\int p(x)dx = \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \ln(x^2 - 1).$$

$$\Rightarrow \qquad y_2 = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{\ln(x^2-1)} dx = \int \frac{x^2 - 1}{x^2} dx = x + \frac{1}{x}$$

Theo công thức (2.3) ta được:

$$y = C_1 x + C_2 x(x + \frac{1}{x}) = C_1 x + C_2 (x^2 + 1).$$

3.3.5. Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính không thuần nhất.

1) Định nghĩa: Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính không thuần nhất là phương trình có dạng:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Định lí 7: Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (1) bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (2) với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất (1).

<u>*Chứng minh*</u>

Gọi $\overline{y}$ là một nghiệm tổng quát của phương trình (2), tức là:

$$\overline{y}'' + p(x)\overline{y}' + q(x)\overline{y} = 0$$

Y là một nghiệm riêng nào đó c`ủa phương trình (1) , tức là:

$$Y'' + p(x)Y' + q(x)Y = f(x)$$

Đặt $y = \overline{y} + Y$.

Ta có $y' = \overline{y'} + Y'$; $y'' = \overline{y''} + Y''$

Thế vào vế trái phương trình (1), ta được :

$$\begin{aligned} VT &= y'' + p(x)y' + q(x)y \\ &= \overline{y''} + Y'' + p(x)\left(\overline{y'} + Y'\right) + q(x)\left(\overline{y} + Y\right) \\ &= \left[\overline{y''} + p(x)\overline{y'} + q(x)\overline{y}\right] + \left[Y'' + p(x)Y' + q(x)Y\right]. \end{aligned}$$

Theo giả thiết:

$$\overline{y''} + p(x)\overline{y'} + q(x)\overline{y} = 0$$

$$Y'' + p(x)Y' + q(x)Y = f(x)$$

Suy ra: VT = f(x) $\Rightarrow$ $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

Vậy: $y = \overline{y} + Y$ cũng là nghiệm của phương trình (1).

Vì $\overline{y}$ phụ thuộc hai hằng số tuỳ ý nên $y = \overline{y} + Y$ cũng phụ thuộc hai hằng số tuỳ ý. Do đó, có thể chứng minh nó là nghiệm tổng quát của phương trình (1) như trong chứng minh định lí 5.

Định lí 8: **(Nguyên lí chồng nghiệm)**

Nếu $y_1(x)$ **là một nghiệm riêng của phương trình:**

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$ **và** $y_2(x)$ **là một nghiệm riêng của phương trình** $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$ **thì** $y = y_1(x) + y_2(x)$ **là một nghiệm riêng của phương trình** $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$

Chứng minh

Ta có:

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (y_1 + y_2)'' + p(x)(y_1 + y_2)' + q(x)(y_1 + y_2) \\ &= \left[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right] + \left[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right] \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

Vậy: $y = y_1(x) + y_2(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

2) Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Giả sử đã biết nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (2) là

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \qquad (2.1)$$

trong đó C_1 , C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Bây giờ, ta muốn tìm nghiệm của phương trình tuyến tính không thuần nhất (1), ta coi $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ là hai hàm số biến x. Ta tìm C_1 , C_2 để cho (2.1) là một nghiệm của phương trình không thuần nhất (1).

Ta có:

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_1'y_1 + C_2'y_2.$$

Chọn C_1 , C_2 sao cho: $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$

Khi đó: $\quad y' = C_1y_1' + C_2y_2'$

$$\Rightarrow \quad y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2'.$$

Thế vào phương trình (1), ta được:

$$C_1\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) + C_2\left(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Vì y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình thuần nhất (2) nên các biểu thức trong dấu ngoặc của vế trái bằng không, ta được:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Vậy: hàm số $y = C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm của phương trình (1) nếu C_1 , C_1 thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases} \qquad (*)$$

Định thức của hệ phương trình (*) chính là định thức Wronsky của hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (1), nó luôn khác 0. Vì vậy hệ phương trình trên có một nghiệm duy nhất.

Giả sử $C_1' = \varphi_1(x)$, $C_2' = \varphi_2(x)$.

Lấy tích phân, ta được

$$C_1 = \Phi_1(x) + K_1 \quad , \quad C_2 = \Phi_2(x) + K_2$$

trong đó: $\Phi_1(x)$ là một nguyên hàm của $\varphi_1(x)$

$\Phi_2(x)$ là một nguyên hàm của $\varphi_2(x)$

K_1 , K_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Vậy: nghiệm tổng quát của phương trình (1) là:

$$y = K_1y_1 + K_2y_2 + \Phi_1(x).y_1 + \Phi_2(x).y_2$$

Ví dụ 21*:* Giải phương trình

$$\left(1 - x^2\right)y'' + 2xy' - 2y = 1 - x^2$$

Nếu $x \neq \pm 1$, phương trình có thể viết là

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 1.$$

Ta đã biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1x + C_2(x^2 + 1)$$

trong đó C_1 , C_2 là các hằng số tuỳ ý (xem ví dụ trang 99 - 100).

Biểu thức ấy là nghiệm của phương trình không thuần nhất đã cho.

Coi $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ là những hàm số biến x thoã mãn hệ (*), tức là:

$$\begin{cases} C_1'x + C_2'(x^2 + 1) = 0 \\ C_1' + C_2'\,2x = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được

$$C_1' = -\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\left(1 + \frac{2}{x^2 - 2}\right)$$

$$C_2' = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Suy ra: $$C_1 = -\left(x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + K_1$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right| + K_2$$

trong đó K_1 , K_2 là những hằng số tuỳ ý.

Vậy: nghiệm tổng quát phải tìm là:

$$y = -x\left(x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + \frac{1}{2}(x^2 + 1)\ln\left|x^2 - 1\right| + K_1x + K_2(x^2 + 1)$$

3.3.6. Phương trình vi phân cấp 2 với hệ số là hằng số

Phương trình thuần nhất:

Cho phương trình: $y'' + py' + qy = 0$ (1)

trong đó p, q là hai hằng số. Ta biết rằng muốn tìm nghiệm tổng quát của nó, chỉ cần tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính. Ta sẽ tìm nghiệm riêng của nó dưới dạng:

$$y = e^{kx} \quad (1.1)$$

trong đó: k là một hằng số nào đó mà ta sẽ tìm.

Ta có $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2e^{kx}$.

Thế vào phương trình (1), ta được :

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

Vì $e^{kx} \neq 0$ nên ta có:

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (1.2)$$

Suy ra: nếu k thoã mãn phương trình (1.2) thì hàm số $y = e^{kx}$ là một nghiệm của phương trình (1).

Phương trình (1.2) được gọi là **phương trình đặc trưng** của phương trình vi phân (1). Đó là một phương trình bậc hai, nó có hai nghiệm k_1, k_2 thực hay phức. Có thể xảy ra ba trường hợp :

Hai số k_1 , k_2 thực và khác nhau:

Khi ấy phương trình (1) có hai nghiệm:

$$y_1 = e^{k_1x} \quad ; \quad y_2 = e^{k_2x}$$

$\Rightarrow$ Hai nghiệm ấy độc lập tuyến tính vì $\dfrac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq$ hằng số.

Suy ra: nghiệm tổng quát của phương trình (1) là:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

C_1 , C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Ví dụ 22*:* Tìm nghiệm của phương trình

$$y'' + y' - 2y = 0$$

thoã mãn các điều kiện

$$y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1$$

Phương trình đặc trưng của phương trình đã cho là $k^2 + k - 2 = 0$, phương trình này có hai nghiệm phân biệt $k_1 = 1$; $k_2 = -2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Suy ra:

$$y' = C_1e^x - 2C_2e^{-2x}.$$

Từ các điều kiện ban đầu ta được:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - 2C_2 = 1 \end{cases}$$

Do đó $C_1 = \dfrac{1}{3}$; $C_2 = -\dfrac{1}{3}$

Vậy: nghiệm riêng phải tìm là

$$y = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}$$

$k_1 = k_2$ là hai số thực trùng nhau $k_1 = k_2$:

Ta đã có một nghiệm riêng của phương trình (1) là $y_1 = e^{k_1x}$.

Ta sẽ tìm một nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1 dưới dạng:

$$y_2 = y_1.u(x) = u(x)e^{k_1x}$$

Ta có:

$$y_2' = u'.e^{k_1x} + k_1u.e^{k_1x}$$

$$y_2'' = u''e^{k_1x} + 2k_1u'e^{k_1x} + k_1^2ue^{k_1x}$$

Thế vào phương trình (1), ta được

$$e^{k_1x}\left[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u\right] = 0$$

Vì k_1 là nghiệm kép của phương trình đặc trưng: $k_1^2 + pk_1 + q = 0$

nên ta có:

$$k_1 = -\frac{p}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2k_1 + q = 0$$

Suy ra: $e^{k_1x}u'' = 0 \quad \Rightarrow \quad u'' = 0$

$$\Rightarrow \quad u = Ax + B \quad ,$$

trong đó A, B là những hằng số tuỳ ý.

Chọn A = 1, B = 0 ta được : u = x $\Rightarrow$ $y_2(x) = xe^{k_1 x}$

Như vậy hai nghiệm độc lập tuyến tính của (1) là $y_1(x) = e^{k_1 x}$ và $y_2(x) = x e^{k_1 x}$.

Kết luận: nghiệm tổng quát của phương trình (1) là:

$$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

Ví dụ 23: Giải phương trình

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Phương trình đặc trưng của là $k^2 + 6k + 9 = 0$, phương trình này có nghiệm kép k = 3

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = e^{3x}(C_1 x + C_2).$$

k_1 và k_2 là hai số phức liên hợp: $k_1 = \alpha + i\beta$; $k_2 = \alpha - i\beta$

Hai nghiệm riêng của phương trình (1) là:

$$\overline{y_1} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x}$$

$$\overline{y_2} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x}$$

Theo công thức Euler: $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$

$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$$

Suy ra: $\overline{y_1} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$

$$\overline{y_2} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Nếu $\overline{y_1}, \overline{y_2}$ là hai nghiệm của phương trình (1) thì:

$$y_1 = \frac{\overline{y_1} + \overline{y_2}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$y_2 = \frac{\overline{y_1} - \overline{y_2}}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

cũng là nghiệm của phương trình (1).

mà $\frac{y_1}{y} = cotan\beta x$ khác hằng số

$\Rightarrow$ Hai nghiệm y1 và y2 độc lập tuyến tính.

Kết luận: nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

Ví dụ 24: Giải phương trình

$$y'' - 2y' + 5 = 0$$

Phương trình đặc trưng của là $k^2 - 2k + 5 = 0$, phương trình này có nghiệm phức là

$k_1 = 1 + 2i$ và $k_2 = 1 - 2i \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = e^x(C_1\sin 2x + C_2\cos 2x)$$

Chú thích : Đối với phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số không đổi cấp cao hơn hai, phương pháp giải cũng tương tự như đối với phương trình cấp hai.

Ví dụ 25*:* Giải phương trình $y''' - 4y' = 0$.

Phương trình đặc trưng của là $k^3 - 4k = 0$, phương trình này có ba nghiệm là k = 0, k = 2, k = -2. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}$$

Ví dụ 26*:* Giải phương trình $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Phương trình đặc trưng $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ hay $(k^2 + 1)^2 = 0$

có hai nghiệm kép k = i và k = -1.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x.$$

Phương trình không thuần nhất:

Cho phương trình: $y'' + py' + qy = f(x)$ (2)

trong đó p, q là những hằng số.

Ở trên, ta đã tìm được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (1). Vậy chỉ việc áp dụng phương pháp biến thiên hằng số để tìm nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (2). Nhưng đối với một số dạng đặc biệt của vế phải f(x), ta có thể tìm được một nghiệm riêng của phương trình (2) mà không cần một phép tính tích phân nào. Chỉ cần cộng nghiệm riêng ấy vào nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (1), ta sẽ được nghiệm tổng quát của (2).

Ta sẽ tìm nghiệm riêng của (2) trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x}.P_n(x)$

trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n, α là một hằng số.

Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của (2), ta tìm một nghiệm riêng của (2) có dạng:

$$Y = e^{\alpha x} Q_n(x) \qquad (2.1)$$

trong đó $Q_n(x)$ là một đa thức bậc n.

Muốn xác định $Q_n(x)$ ta phải xác định (n + 1) hệ số của nó và được xác định như sau:

Ta có

$$Y' = \alpha Q_n(x)e^{\alpha x} + Q_n'(x)e^{\alpha x}$$

$$Y'' = \alpha^2 Q_n(x)e^{\alpha x} + 2\alpha Q_n'(x)e^{\alpha x} + Q_n'(x)e^{\alpha x}.$$

Thế vào (2), ta được

$$e^{\alpha x}\left[Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x)\right] = e^{\alpha x}P_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x) \qquad (*)$$

Vì α không là nghiệm của phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất (1), nên $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$, do đó vế phải của đẳng thức (*) cũng là một đa thức bậc n, cùng bậc với đa thức ở vế phải $P_n(x)$.

Bằng cách đồng nhất hệ số của các số hạng cùng bậc ở hai vế của đẳng thức (*), ta được (n + 1) phương trình bậc nhất của (n + 1) ẩn, với ẩn là các hệ số của $Q_n(x)$. Phương pháp tìm các hệ số của $Q_n(x)$ nêu trên được gọi là ***phương pháp hệ số bất định***.

Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0$$

$$(2\alpha + p) \neq 0$$

Khi đó vế trái của đẳng thức (*) là một đa thức bậc (n – 1). Ta nâng bậc của nó lên một đơn vị mà không tăng số các hệ số của nó, muốn vậy chỉ việc thay $Q_n(x)$ bởi $x.Q_n(x)$.

Trong trường hợp này, ta sẽ tìm một nghiệm riêng của (2) có dạng:

$$Y = xe^{\alpha x}Q_n(x) \qquad (2.2)$$

Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0$$

$$(2\alpha + p) = 0$$

Vế trái của đẳng thức (*) là một đa thức bậc (n-2). Ta nâng bậc của nó lên 2 đơn vị mà không tăng số các hệ số của nó, muốn vậy chỉ việc thay $Q_n(x)$ bởi $x^2.Q_n(x)$.

Trong trường hợp này, ta tìm một nghiệm riêng của (2) có dạng:

$$Y = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x) \qquad (2.3)$$

Ví dụ 27: Giải phương tình $y'' + 3y' - 4y = x$

Phương trình đặc trưng $k^2 + 3k - 4 = 0$ có hai nghiệm đơn $k_1 = 1$ và $k_2 = -4$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$$

Vế phải của phương trình có dạng $e^{\alpha x} P_1(x)$ trong đó $\alpha = 0$, $P_1(x) = x$.

Vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, vậy ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$$Y = Ax + B.$$

Thế vào phương trình trên, ta được

$$-4Ax + 3A - 4B = x.$$

Suy ra : $\qquad -4A = 1 \ , \ 3A - 4B = 0$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}, \ B = -\frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow \quad Y = -\frac{x}{4} - \frac{3}{16}$$

Nghiệm tổng quát phải tìm là: $\quad y = \overline{y} + Y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{x}{4} - \frac{3}{16}$

Ví dụ 28: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $y'' - y' = e^x(x+1)$.

Phương trình đặc trưng $k^2 - k = 0$ có hai nghiệm $k_1 = 0$, $k_2 = 1$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$\overline{y} = C_1 + C_2e^x$. Vế phải của phương trình đã cho có dạng $e^{\alpha x}P_1(x)$

Vì $\alpha = 1$ là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$Y = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx)$.

Ta có :

$$Y' = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(Ax + B)$$

$$Y'' = e^x(Ax^2 + Bx) + 2e^x(Ax + B) + e^x.2A$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được :

$$e^x(2Ax + B + 2A) = e^x(x + 1).$$

Suy ra : $2A = 1 \quad , \quad B + 2A = 1$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad , \quad B = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y = \frac{1}{2}x^2e^x$$

Nghiệm tổng quát phải tìm là :

$$y = \overline{y} + Y = C_1 + C_2e^x + \frac{1}{2}x^2e^x$$

Ví dụ 29: Giải phương trình $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

Phương trình đặc trưng có nghiệm kép $k_1 = k_2 = 3$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = (C_1x + C_2)e^{3x}$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $e^{\alpha x} P_1(x)$

Vì $\alpha = 3$ là một nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$Y = x^2e^{3x}(Ax + B) = e^{3x}(Ax^3 + Bx^2)$

Ta có :

$Y' = 3e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + e^{3x}(Ax^2 + Bx),$

$Y'' = 9e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + 6\, e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx) + e^{3x}(6Ax + 2Bx).$

Thế vào phương trình đã cho, ta được:

$e^{3x}[(6A - 10B)\, x + 2B] = xe^{3x}$

Suy ra: $6A - 10B = 1 \quad , \quad B = 0$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{6} \quad , \quad B = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y = \frac{x^3}{6}e^{3x}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là :

$$y = \overline{y} + Y = (C_1x + C_2)e^{3x} + \frac{x3}{6}e^{3x}$$

Trường hợp 2: $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$, trong đó $P_m(x)$, $P_n(x)$ là những đa thức bậc m, n ; β là hằng số.

Người ta chứng minh được rằng:

Nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì ta có thể tìm một nghiệm riêng của phương trình (2) có dạng:

$Y = Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x$ (2.4)

trong đó $Q_l(x)$, $R_l(x)$ là những đa thức bậc $l = \max(m, n)$

Nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì ta có thể tìm một nghiệm riêng của phương trình (2) có dạng:

$Y = x[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x]$ (2.5)

Ví dụ 30: Giải phương trình y'' + y' = - sinx.

Phương trình đặc trưng $k^2 + k = 0$ có nghiệm $k_1 = 0$, $k_2 = -1 \Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1 + C_2 e^{-x}$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $R_1(x)\sin\beta x$, trong đó $R_1(x) = -1$, $\beta = 1$, nhưng

$\pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$Y = A\cos x + A_1\sin x$

Tính Y', Y" rồi thế vào phương trình đã cho ta được:

$[4A_1x + 2(A + B_1)]\cos x + [-4Ax + 2(A_1 - B)]\sin x = x\sin x$

Suy ra: $4A_1 = 0$, $A + B_1 = 0$, $-4A = 1$, $A_1 - B = 0$

$\Rightarrow \quad A = -\frac{1}{4}$, $B_1 = \frac{1}{4}$, $A_1 = 0$, $B = 0$

$\Rightarrow \quad Y = \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x)$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là :

$y = \overline{y} + Y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x)$

Ví dụ 31: Giải phương trình y" + y = x.sinx.

Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$ có nghiệm $k_{1,2} = \pm i \Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $R_1(x)$ sinβx, trong đó $R_1(x) = x$, $\beta = 1$, nhưng $\pm i\beta = \pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$Y = x[(Ax + B)\cos x + (A_1x + B_1)\sin x]$

Tính Y’, Y” rồi thế vào phương trình đã cho ta được:

$[4A_1x + 2(A + B_1)]\cos x + [-4Ax + 2(A_1 - B)]\sin x = x\sin x$

Suy ra: $4A_1 = 0$, $A + B_1 = 0$, $-4A = 1$, $A_1 - B = 0$

$\Rightarrow \quad A = -\frac{1}{4}$, $B_1 = \frac{1}{4}$, $A_1 = 0$, $B = 0$

$\Rightarrow \quad Y = \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x)$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là :

$y = \overline{y} + Y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x)$

Ví dụ 32: Giải phương trình $y'' - y' = 2\cos^2 x$

Giải

Phương trình đặc trưng $k^2 - k = 0$ có hai nghiệm $k_1 = 0$, $k_2 = 1$

$\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1 + C_2e^x$

Vế phải của phương trình đã cho là $f(x) = 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$.

Theo nguyên lý chồng nghiệm, ta tìm được một nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng tổng $Y_1 + Y_2$

trong đó: Y_1 nghiệm riêng của phương trình với vế phải $f_1(x) = 1$

Y_2 là nghiệm riêng của phương trình với vế phải $f_2(x) = \cos 2x$.

Vì $f_1(x) = 1 = e^{\alpha x}$ với $\alpha = 0$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên Y_1 có dạng $Y_1 = Ax$. Thế vào phương trình ta được: $A = -1 \Rightarrow Y_1 = -x$

Vì $f_2(x) = \cos 2x$ mà $\pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $Y_2 = B\cos 2x + C\sin 2x$. Thế vào phương trình ta được : $B = -\frac{2}{10}$, $C = -\frac{1}{10} \Rightarrow Y_2 = -\frac{2}{10}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x$.

Kết luận: Nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = \overline{y} + Y_1 + Y_2 = C_1 + C_2e^x - x - \frac{2}{10}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x$$

Chú thích 1: Nếu $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$, ta có thể đưa về phương trình với vế phải có dạng đã xét ở trên bằng cách đặt $y = e^{\alpha x}z$.

Ví dụ 33: Giải phương trình $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}\sin x$

Đặt: $y = e^{-x}z$

Ta có: $y' = e^{-x}z' - e^{-x}z$

$y'' = e^{-x}z'' - 2e^{-x}z' + e^{-x}z$

Thế vào phương trình, ta được :

$$z'' + z = x\sin x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là :

$z = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{x}{4}(\sin x - x\cos x)$ *(xem ví dụ 1)*

Vậy : nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^{-x}\left[C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x)\right]$$

Chú thích 2: Đối với phương trình tuyến tính thần nhất, có hệ số không đổi, cấp cao hơn hai, cũng có thể tìm nghiệm riêng tương tự đối với phương trình cấp hai.

Ví dụ 34: Giải phương trình $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x$

Ở ví dụ trên, ta thấy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$\overline{y} = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$$

Vì phương trình đặc trưng $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm kép $k_1 = i$ và $k_2 = -i$. Vế phải của phương trình đã cho là cosx, do đó ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng : $Y = x^2(A\cos x + B\sin x)$

Thay vào phương trình đã cho ta tìm được:

$A = -\dfrac{1}{8}$, $B = 0$

$$\Rightarrow \quad Y = -\frac{1}{8}x^2\cos x$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = \overline{y} + Y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x - \frac{1}{8}x^2\cos x$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

3.1. Giải các phương trình vi phân sau:

1) $\frac{dy}{dx} = 2xy$

2) $\frac{dy}{dx} = 3x^2e^{-y}$

3) $\frac{dy}{dx} = 2x(y^2+1)$

4) $(1+x)dy - ydx = 0$

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

6) $\frac{dy}{dt} + 4y = y(e^{-t}+4)$

7) $\frac{dx}{dr} = r^2(1+x^2)$

8) $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

3.2. Giải các phương trình đẳng cấp cấp một sau:

1) $y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$

2) $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$

3) $y' = \frac{xy - y^2}{x^2}$

4) $y' = \frac{x^2 + 2y^2}{4xy}$

5) $y' = \frac{2xy - y^2}{3x^2}$

6) $y' = \frac{x - 3y}{x}$

7) $y' = -\frac{x + 4y}{x}$

3.3. Giải các phương trình tuyến tính cấp một sau:

1) $y' - \frac{y}{x} = \ln x$

2) $y' - \frac{y}{x+1} = x^2 + x$

3) $y' - y = 2x^2e^x$

4) $y' - 2y = (x^2+1)e^{2x}$

5) $y' + y = 5e^x$

6) $y' + 2y = (2x-1)e^{-2x}$

7) $y' - \frac{2y}{x} = x^2 + x - 1$

8) $y' - \frac{2y}{x-1} = x^2 - 2x + 3$

9) $y' + \frac{y}{x+2} = x - 1$

10) $y' + \frac{y}{x+4} = x + 3$

11) $y' + \frac{y}{2x} = 2x + 1$

12) $y' - \frac{y}{x+3} = x$

13) $y' + \frac{y}{2(x-1)} = x$

14) $(xy' - 1)\ln x = 2y$

15) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^x$

16) $(1+x^2)y' - 2xy = 1 + x^2$

17) $x^2 y' - (2x-1)y = x^2$

3.4. Tìm nghiệm của các phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện cho trước:

1) $(e^{2y} - y)\cos x \dfrac{dy}{dx} = e^y \sin 2x,\ \ y(0) = 0$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2+\sin x}{3(y-1)^2};\ \ y(0) = 2$

3) $y' = \dfrac{x^3 y - y}{y^4 - y^2 + 1};\ \ y(0) = 1$

4) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x\ ;\ \ y|_{x=e} = \dfrac{e^2}{2}$

5) $x^2 \dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0;\ y(1) = 3$

6) $y' = y + x^2;\ y(0) = 1$

3.5. Giải các phương trình vi phân cấp 2 với hệ số hằng sau:

1) $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x}$

2) $y'' - 2y' + 2y = 2e^{3x}$

3) $y'' - 4y' = 5e^{x}$

4) $y'' + 7y' = 4x - 3$

5) $y'' - 4y' + 3y = e^x(x-1)$

6) $y'' - 5y' + 6y = e^x(x+2)$

7) $y'' - 4y' + 4y = e^x(x-2)$

8) $y'' + 4y' + 4y = e^x(2x-1)$

9) $y'' + 6y' + 9y = e^x(3x+1)$

10) $y'' - 4y' = x^2 + 1$

11) $y'' + 3y' = x^2 - 2x$

12) $y'' - y' - 2y = -4x^2 + 4x + 10$

13) $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 3$

14) $y'' - 6y' + 9y = 2x + 1$

15) $y''-2y'+y=2x-1$

16) $3y''-2y'-y=5e^{x}$

17) $4y''-3y'-y=7e^{x}$

18) $y''-6y'=3x+2$

19) y’’ + y’ – 2y = cosx

20) y’’ + 2y’ – 3y = sinx

3.6. Hãy đưa về dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 và tìm nghiệm:

1) y’(x + siny) = 1

2) $(x^3+x)y'+3\mathrm{x}^2y=\sqrt{\mathrm{x}^2+1}$

3) $\dfrac{dy}{dx}-y=x^2+2$

4) $x\dfrac{dy}{dx}-4y=x^4e^x$

5) $(x^2-9)\dfrac{dy}{dx}-xy=0$

6) $x^2y'-+xy=1$

7) $x\dfrac{dy}{dx}-y=x^2\,\mathrm{sinx}$

8) $x^2y'+\mathrm{x(x+2)\,y}=e^x$

9) $ydx-4(x+y^6)dy=0$

10) $xy'+\mathrm{y}=e^x;\ y(1)=2$

11) $y'+\dfrac{1}{2\mathrm{x}-y^2}=0$

3.7. Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân sau nếu có dạng phương trình vi phân đẳng cấp:

1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x+y}$

2) $x^2\dfrac{dy}{dx}=y^2-xy+x^2; y(1)=2$

3) $y^2=(xy-x^2)\dfrac{dx}{dy}$

4) $x\dfrac{dx}{dy} = 2y\dfrac{dx}{dy} + x - 3$

5) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\cos(xy) - 1}{xy}$

6) $(x^2 + y^2)dy + 2xydx = 0$

7) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - 6x}{2x - y}; \mathrm{y}(0) = 1$

3.8. Giải các phương trình Bernoully:

1) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \mathrm{x}^2\mathrm{y}^2$

2) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$

3) $\dfrac{dy}{dx} = y(\mathrm{xy}^3 - 1)$

4) $x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4; y(1) = \dfrac{1}{2}$

5) $y' + y = xy^4$

6) $x^2y' + y^2 = xy$

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1) $\frac{dy}{dx}=2xy \Rightarrow \int \frac{dy}{y}=\int 2xdx$

Đáp số : $y=ke^{x^2}$

2) $\frac{dy}{dx}=3x^2e^{-y} \Rightarrow \int e^y dy=\int 3x^2 dx$

Đáp số : $y=\ln(x^3+e^2)$

3) $\frac{dy}{dx}=2x(y^2+1) \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1}=\int 2xdx$

Đáp số : $y=\mathrm{tg}(\mathrm{x}^2+C)$

4) $(1+\mathrm{x})\mathrm{dy}-\mathrm{ydx}=0 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y}=\int \frac{dx}{x+1}$

Đáp số : $y=C(1+x)$

5) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \Rightarrow \int ydy=-\int xdx$

Đáp số : $x^2+y\ \ =C^2$

6) $\frac{dy}{dt}+4y=y(e^{-t}+4) \Rightarrow \int ydy=\int e^{-t}dt$

Đáp số : $y=ce^{-(\mathrm{e}^{-t})}$

7) $\frac{dx}{dr}=r^2(1+x^2) \Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2}=\int r^2 dr$

Đáp số : $x=tg(\frac{r^3}{3}+C)$

8) $\frac{dy}{dx}=e^{3x+2y} \Leftrightarrow \int e^{-2y}dy=\int e^{3x}dx$

Đáp số : $-3e^{-2y}=2e^{3x}+C$

3.2. Giải các phương trình đẳng cấp cấp 1 sau:

1) Đặt $u=\frac{y}{x}$. Thay vào phương trình ta được :

$$u'\,x=\frac{u^2-1}{2u}$$

Biến đổi về phương trình với biến số phân ly:

$$\frac{2udu}{u^2-1}=\frac{dx}{x}$$

Giải phương trình với biến số phân ly ta được:

$$\ln|u^2-1|-\ln|x|+C=0$$

Thay $u = \frac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$\ln|(\frac{y}{x})^2-1|-\ln|x|+C=0$$

2) Đặt $u=\frac{y}{x}$. Thay vào phương trình ta được :

$$u'x = \frac{u^2}{1-2u}$$

Biến đổi về phương trình với biến số phân ly:

$$\frac{(1-2u)du}{u^2}=\frac{dx}{x}$$

Giải phương trình với biến số phân ly ta được:

$$-\frac{1}{u}-2\ln|u|-\ln|x|+C=0$$

Thay $u = \frac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$-\frac{x}{y}-2\ln|\frac{y}{x}|-\ln|x|+C=0$$

3) Đặt $u=\frac{y}{x}$. Thay vào phương trình ta được :

$$u'x = -u^2$$

Biến đổi về phương trình với biến số phân ly:

$$-\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x}$$

Giải phương trình với biến số phân ly ta được:

$$\frac{1}{u}-\ln|x|+C=0$$

Thay $u = \frac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$\frac{x}{y} - \ln|x| + C = 0$$

4) Đặt $u = \frac{y}{x}$. Thay vào phương trình ta được :

$$u'x = \frac{1-2u^2}{4u}$$

Biến đổi về phương trình với biến số phân ly:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{4udu}{1-2u^2}$$

Giải phương trình với biến số phân ly ta được:

$$\ln|x| + \ln|1-2u^2| + C = 0$$

Thay $u = \frac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$\ln|x| + \ln|1-2(\frac{y}{x})^2| + C = 0$$

5) Đặt $u = \frac{y}{x}$. Thay vào phương trình ta được :

$$u'x = \frac{-3}{u^2+u}$$

Biến đổi về phương trình với biến số phân ly:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{3du}{u^2+u} = 3\int (\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u})du$$

Giải phương trình với biến số phân ly ta được:

$$\ln|x| + \ln|\frac{u}{1+u}| + C = 0$$

Thay $u = \frac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$\ln|x| + \ln|\frac{y}{x+y}| + C = 0$$

6)Đặt $u = \frac{y}{x}$. Thay vào phương trình ta được :

$$u'x = 1 - 4u$$

Biến đổi về phương trình với biến số phân ly:

$$\frac{du}{1-4u}=\frac{dx}{x}$$

Giải phương trình với biến số phân ly ta được:

$$-\frac{1}{4}\ln|1-4u|-\ln|x|+C=0$$

Thay $u=\frac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$-\frac{1}{4}\ln|1-4\frac{y}{x}|-\ln|x|+C=0$$

7) Đặt $u=\frac{y}{x}$. Thay vào phương trình ta được :

u' x = - (1+ 5u)

Biến đổi về phương trình với biến số phân ly:

$$-\frac{du}{1+5u}=\frac{dx}{x}$$

Giải phương trình với biến số phân ly ta được:

$$-\frac{1}{5}\ln|1+5u|-\ln|x|+C=0$$

Thay $u=\frac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$-\frac{1}{5}\ln|1+5\frac{y}{x}|-\ln|x|+C=0$$

3.3. Giải các phương trình tuyến tính cấp 1 sau:

1) Giải phương trình: $y'-\frac{y}{x}=0$ ta được y = Cx

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được:

$$C'(x)=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow C(x)=\frac{\ln^2 x}{2}+K$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y=(\frac{\ln^2 x}{2}+K)x$

2) Giải phương trình: $y'-\frac{y}{x+1}=0$ ta được y = C (x+ 1)

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được: $C'(x)=x\Rightarrow C(x)=\frac{x^2}{2}+K$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = (\frac{x^2}{2} + K)(\mathrm{x}+1)$

3) Giải phương trình: $y' - y = 0$ ta được $y = Ce^x$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được: $C'(\mathrm{x}) = 2x^2 \Rightarrow C(\mathrm{x}) = \frac{2x^3}{3} + K$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = (\frac{2x^3}{3} + K)e^x$

4) Giải phương trình: $y' - 2y = 0$ ta được $y = Ce^{2x}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được: $C'(\mathrm{x}) = x^2 + 1 \Rightarrow C(\mathrm{x}) = \frac{x^3}{3} + x + K$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = (\frac{x^3}{3} + x + K)e^{2x}$

5) Giải phương trình: $y' + y = 0$ ta được $y = Ce^{-x}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được: $C'(x) = 5e^{2x} \Rightarrow C(x) = 5\frac{e^{2\mathrm{x}}}{2} + K$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = (\frac{5e^{2\mathrm{x}}}{2} + K)e^{-x}$

6) Giải phương trình: $y' + 2y = 0$ ta được $y = Ce^{-2x}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được: $C'(x) = 2\mathrm{x} + 1 \Rightarrow C(x) = x^2 + x + K$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = (x^2 + x + K)e^{-2\mathrm{x}}$

7) Giải phương trình: $y' - \frac{2y}{x} = 0$ ta được $y = C\mathrm{x}^2$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được

$$C'(x) = \frac{\mathrm{x}^2 + x - 1}{\mathrm{x}^2} \Rightarrow C(x) = x + \ln|x| + \frac{1}{x} + K$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = (x + \ln|x| + \frac{1}{x} + K)x^2$$

8) Giải phương trình: $y' - \frac{2y}{x-1} = 0$ ta được $y = C(\mathrm{x}\text{-}1)^2$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được

$$C'(x)=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}\Rightarrow C(x)=x-\frac{3}{x-1}+K$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y=(x-1)^2(x-\frac{3}{x-1}+K)$$

9) Giải phương trình: $y'+\frac{y}{x+2}=0$ ta được y = $\frac{C}{x+2}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được:

$C'(x)=(x-1)(x+2)\Rightarrow C(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x+K$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y=\dfrac{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x+K}{x+2}$

10) Giải phương trình: $y'+\frac{y}{x+4}=0$ ta được y = $\frac{C}{x+4}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được:

$C'(x)=(x+3)(x+4)\Rightarrow C(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+12x+K$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y=\dfrac{\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+12x+K}{x+4}$

11) Giải phương trình: $y'-\frac{2y}{x}=0$ ta được $y=\frac{C}{\sqrt{x}}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được

$$C'(x)=(2x+1)\sqrt{x}\Rightarrow C(x)=\frac{4\sqrt{x}^5}{5}+\frac{2\sqrt{x}^3}{3}+K$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y=\frac{\frac{4\sqrt{x}^5}{5}+\frac{2\sqrt{x}^3}{3}+K}{\sqrt{x}}$$

12) Giải phương trình: $y'-\frac{y}{x+3}=0$ ta được $y=C(x+3)$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được: $C'(x)=\dfrac{x}{x+3}\ \Rightarrow C(x)=x-3\ln|x+3|+C$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y=(x+3)(x-3\ln|x+3|+C)$

13) Giải phương trình: $y'+\dfrac{y}{2(x-1)}=0$ ta được $y=\dfrac{C}{\sqrt{x-1}}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được

$$C'(x)=x\sqrt{x-1}\Rightarrow C(x)=\frac{2\sqrt{x-1}^5}{5}+\frac{2\sqrt{x-1}^3}{3}+K$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y=\frac{\dfrac{2\sqrt{x-1}^5}{5}+\dfrac{2\sqrt{x-1}^3}{3}+K}{\sqrt{x-1}}$$

14) $(xy'-1)\ln x=2y\Leftrightarrow y'-\dfrac{2y}{x\ln x}=\dfrac{1}{x}$

Giải phương trình: $y'-\dfrac{2y}{x\ln x}=0$ ta được $y=C(\ln x)^2$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được $C'(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}\Rightarrow C(x)=-\dfrac{1}{\ln x}+K$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y=(-\dfrac{1}{\ln x}+K)(\ln x)^2$

15) $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$

Giải phương trình: $xy'+(x+1)y=0$ ta được $y=C\dfrac{e^{-x}}{x}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được $C'(x)=3x^2\Rightarrow C(x)=x^3+K$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y=(x^3+K)\dfrac{e^{-x}}{x}$

16) $(1+x^2)y'-2xy=1+x^2$

Giải phương trình: $(1+x^2)y'-2xy=0$ ta được $y=C(1+x^2)$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được $C'(x)=1\Rightarrow C(x)=x+K$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y=(K+x)(1+x^2)$

17) $x^2y'-(2x-1)y=x^2$

Giải phương trình: $x^2y' - (2x-1)y = 0$ ta được $y = Kx^2e^{\frac{1}{x}}$

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được $C'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow C(x) = e^{-\frac{1}{x}} + K$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = (e^{-\frac{1}{x}} + K)x^2e^{\frac{1}{x}}$

3.4. Tìm nghiệm của các phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện cho trước:

1) $(e^{2y} - y)\cos x\dfrac{dy}{dx} = e^y\sin 2x,\ \ y(0) = 0$

Đáp số : $e^y + ye^{-y} + e^{-y} = 4 - 2\cos x$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 + \sin x}{3(y-1)^2};\ \ y(0) = 2$

Đáp số : $y = 1 + (2x - \cos x + 2)^{\frac{1}{3}}$

3) $y' = \dfrac{x^3y - y}{y^4 - y^2 + 1};\ \ y(0) = 1$

Đáp số : $y^4 - 2y^2 + 4\ln|y| = x^4 - 4x - 1$

4) Giải phương trình: $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = 0$ ta được y= C lnx

Coi C là C(x) thay vào phương trình thu được $C(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = (\dfrac{x^2}{2} + C)\ln x$

Kết hợp với điều kiện $y|^{x=e} = \dfrac{e^2}{2} \Rightarrow (\dfrac{e^2}{2} + C)\ln e = \dfrac{e^2}{2} \Rightarrow C = 0$

Vậy $y = \dfrac{x^2}{2}\ln x$

5) $x^2\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0;\ y(1) = 3$

Đáp số : $y = \dfrac{3x}{4x-3}$

6) $y' = y + x^2;\ y(0) = 1$

Đáp số $y = 3e^x - x^2 - 2x - 2$

3.5. Giải các phương trình vi phân cấp 2 với hệ số hằng sau:

1) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng : $y^* = axe^{2x}$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được : a = 4

Nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 4xe^{2x}$

2) Nghiệm của phương trình thuần nhất $\bar{y} = e^x(C_1\sin x + C_2\cos x)$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng : $y^* = ae^{3x}$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được : $a = \frac{5}{2}$

Nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = e^x(C_1\sin x + C_2\cos x) + \frac{5}{2}e^{3x}$

3) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 + C_2e^{4x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng : $y^* = ae^x$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được : $a = -\frac{5}{3}$

Nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = C_1 + C_2e^{4x} - \frac{5}{3}e^x$

4) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 + C_2e^{-7x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = x(ax + b)$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = x(\frac{2}{7}x - \frac{25}{49})$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 + C_2e^{-7x} + x(\frac{2}{7}x - \frac{25}{49})$

5) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{3x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = x(ax + b)e^x$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = x(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4})e^x$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + x(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4})e^x$

6) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = (\text{ax} + b)e^x$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = (\frac{1}{2}\text{x} + \frac{7}{4})e^x$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + (\frac{1}{2}\text{x} + \frac{7}{4})e^x$

7) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = (\text{ax} + b)e^x$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = \text{x}e^x$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \text{x}e^x$

8) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = (\text{ax} + b)e^x$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = (\frac{2}{9}x - \frac{7}{27})e^x$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + (\frac{2}{9}x - \frac{7}{27})e^x$

9) Nghiệm của phương trình thuần nhất $\bar{y} = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = (\text{ax} + b)e^x$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = (\frac{3}{16}\text{x} - \frac{1}{32})e^x$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + (\frac{3}{16}\text{x} - \frac{1}{32})e^x$

10) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 + C_2e^{4x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = x(\text{ax}^2 + bx + c)$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = x(-\frac{1}{12}\text{x}^2 - \frac{1}{16}x - \frac{9}{32})$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 + C_2e^{4x} + x(-\frac{1}{12}\text{x}^2 - \frac{1}{16}x - \frac{9}{32})$

11) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 + C_2e^{-3x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng : $y^* = x(ax^2 + bx + c)$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = x(\frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{8}{27})$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 + C_2e^{-3x} +\ x(\frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{8}{27})$

12) Phương trình đặc trưng : $k^2 - k - 2 = 0$

Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = ax^2 + bx + c$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = 2x^2 - 4x - 1$

Vậy phương trình có nghiệm là $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} +\ 2x^2 - 4x - 1$

13)Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = ax^2 + bx + c$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$

Vậy phương trình có nghiệm là $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} +\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$

14) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = ax + b$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = \frac{2}{9}x + \frac{7}{27}$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} +\ \frac{2}{9}x + \frac{7}{27}$

15) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^{x} + C_2xe^{x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = ax + b$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = 2x + 3$

Vậy phương trình có nghiệm là $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x} +\ 2x + 3$

16) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^{-\frac{1}{3}x} + C_2e^{x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = axe^{x}$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = \frac{5}{4}xe^x$

Vậy phương trình có nghiệm là $y = C_1e^{-\frac{1}{3}x} + C_2e^x + \frac{5}{4}xe^x$

17) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{-\frac{1}{4}x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = \text{a}xe^x$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = \frac{7}{5}xe^x$

Vậy phương trình có nghiệm là $y = C_1e^{-\frac{1}{4}x} + C_2e^x + \frac{7}{5}xe^x$

18) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 + C_2e^{6x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = x(\text{a}x + b)$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = x(-\frac{1}{4}\text{x} - \frac{5}{12})$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 + C_2e^{6x} + x(-\frac{1}{4}\text{x} - \frac{5}{12})$

19) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 + C_2e^{6x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = x(\text{a}x + b)$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = x(-\frac{1}{4}\text{x} - \frac{5}{12})$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 + C_2e^{6x} + x(-\frac{1}{4}\text{x} - \frac{5}{12})$

20) Nghiệm của phương trình thuần nhất : $\bar{y} = C_1 + C_2e^{6x}$

Dạng tổng quát của nghiệm riêng $y^* = x(\text{a}x + b)$

Thay y^* vào phương trình ta tìm được $y^* = x(-\frac{1}{4}\text{x} - \frac{5}{12})$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 + C_2e^{6x} + x(-\frac{1}{4}\text{x} - \frac{5}{12})$

3.6. Hãy đưa về dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 và tìm nghiệm:

1) y’(x + siny) = 1

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{dx}{dy} = x + \sin y \Leftrightarrow x' - x = \sin y$, đây là phương trình tuyến tính.

Xét phương trình thuần nhất tương ứng $x' - x = 0 \Leftrightarrow x = Ce^{y}$

Coi C là hàm số biến y ta được $C(x) = \frac{-e^{-y}(\sin y + \cos y)}{2} + C$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{-(\sin y + \cos y)}{2} + Ce^{y}$

2) Xét phương trình thuần nhất tương ứng $(x^3 + x)y' + 3x^2 y = 0$ ta được $y = \frac{C}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$

Coi C là hàm số biến y ta được $C(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $y = \frac{\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$

3) $y' = y + x^2;\ y(0) = 1$

Đáp án: $y = 3e^{x} - (x^2 + 2x + 2)$

4) $\frac{dy}{dx} - y = x^2 + 2$

Đáp án: $y = Ce^{x} - x^2 - 2x - 4$

5) $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^4 e^{x}$

Đáp án: $y = x^5 e^{x} - x^4 e^{x} + cx^4$

6) $(x^2 - 9)\frac{dy}{dx} - xy = 0$

Đáp án: $y = \frac{C}{\sqrt{x^2 - 9}}$

8) $x^2 y' - + xy = 1$

Đáp án: $y = x^{-1}\ln x + c^{-1}; x > 0$

9) $x\frac{dy}{dx} - y = x^2 \sin x$

Đáp án: $y = cx - x\cos x; x > 0$

10) $x^2y'+x(x+2)y=e^x$

Đáp án: $y=\dfrac{1}{2x^2}e^x+\dfrac{C}{x^2}e^{-x}; x>0$

11) $ydx-4(x+y^6)dy=0$

Đáp án: $x=2y^2+cy^2; y>0$

13) $xy'+y=e^x;\ y(1)=2$

Đáp án: $y=\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{2-e}{x};\ 0<x$

14)

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{dx}{dy}=y^2-2x \Leftrightarrow x'+2x=y^2$, đây là phương trình tuyến tính.

Xét phương trình thuần nhất tương ứng $x'+2x=0 \Leftrightarrow x=Ce^{-2y}$

Coi C là hàm số biến y ta được $C(x)=e^{2y}(\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{4})+C$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{4}+Ce^{-2y}$

3.7. Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân sau nếu có dạng phương trình vi phân đẳng cấp:

1) Đáp án: $x^2-2xy-y^2=C$

2) Đáp án: $y=x\left(1-\dfrac{1}{\ln|x|-1}\right)$

3) Đáp án: $\dfrac{y}{x}-\ln|y|=C$

4) Đáp án: Không có dạng đẳng cấp

5) Đáp án: Không có dạng đẳng cấp

6) Đáp án: $y^3+3yx^2=C$

7) Đáp án: $(y-3x)^{\frac{1}{5}}(y+2x)^{\frac{4}{5}}=1$

3.8. Giải các phương trình Bernoully:

1) Đáp án: $y=\dfrac{1}{-x^2+cx}$

2) Đáp án: $y^3 = 1 + cx^{-3}$

3) Đáp án: $y^{-3} = x + \frac{1}{3} + ce^{3x}$

4) Đáp án: $y^{-3} = -\frac{9}{5}x^y + \frac{49}{5}x^{-6}$

5) Đáp án: $\mathrm{x} + \frac{1}{3} + Ce^x = y^{-3}$

6) Đáp án: $C\mathrm{x} = e^{\frac{x}{y}}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Toán học cao cấp (ba tập), NXB Giáo dục, 2010.

2. Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Bài tập toán cao cấp (ba tập), NXB Giáo dục, 2010.

3. Nguyễn Thế Hoàn - Phạm Phu, Cơ sở ph- ơng trình vi phân và lý thuyết ổn định, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 1995.

4. Trần Trọng Huệ, Đại số tuyến tính và hình học giải tích (tập một), NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.

5. Trần Đức Long- Nguyễn Đình Sang- Hoàng Quốc Toàn, Giáo trình giải tích (tập hai), NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2004.