

# Chương 3.5. : Kênh

# Kênh thông tin (nhắc lại)

- Môi trường vật lý truyền thông tin từ máy phát đến máy thu
- Kênh có nhiễu cộng làm thay đổi thông tin
- Các loại kênh khác nhau:
  - Kênh rời rạc
    - Kênh rời rạc không nhớ
    - Kênh có nhớ
    - Kênh nhị phân
  - Kênh liên tục
- Nguồn vào, nguồn nhiễu cộng và đầu ra của kênh được mô hình là các biến ngẫu nhiên
  - Đầu ra = nguồn vào + nhiễu

## 3.5.1. Mô hình kênh

- Kênh rời rạc: Nguồn tin vào rời rạc và đầu ra rời rạc
  - Mô hình kênh:
    - Biến ngẫu nhiên rời rạc biểu diễn đầu vào rời rạc
      - $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
      - $P(X) = \{P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)\}$
    - Tập tin ở đầu ra rời rạc
      - $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 
        - $Y_i = x_j$  (Bảng chữ của tập tin ra hoàn toàn trùng với bảng chữ của nguồn vào)
      - Tổng quát thì số tin vào ( $r$ ) có thể khác số tin ra ( $s$ ).
      - Môn học của chúng ta chỉ quan tâm:  $r = s = n$

## 3.5.1. Mô hình kênh(Cont.)

- Kênh rời rạc:

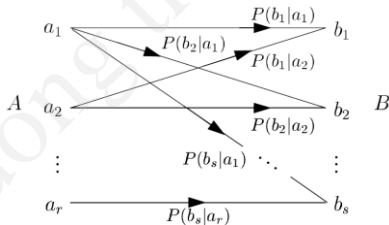
- Môn học này chỉ tập trung vào kênh không nhớ
- Ma trận kênh của kênh không nhớ bao gồm các xác suất truyền hay các xác suất xuất hiện một tin ở đầu ra khi xuất hiện một tin xác định ở đầu vào
  - $P(Y|X) = \{P(y_j|x_i)\}$

$$\begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & P(y_2|x_1) & \dots & P(y_n|x_1) \\ P(y_1|x_2) & P(y_2|x_2) & \dots & P(y_n|x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(y_1|x_n) & P(y_2|x_n) & \dots & P(y_n|x_n) \end{bmatrix}$$

- Các phần tử thuộc đường chéo chính là xác suất truyền đúng
- Các phần tử ngoài đường chéo chính là xác suất truyền sai
- Nếu các xác suất truyền đúng bằng nhau, mọi xác suất truyền sai bằng nhau:: kênh phân bố đều
- Tổng các phần tử trong mỗi hàng = 1
- Ma trận kênh là ma trận đơn vị thì kênh là kênh truyền không sai
- Nếu tất cả các phần tử bằng nhau thì kênh sai hoàn toàn (đầu ra độc lập đầu vào)
- Nếu các phần tử là đối xứng qua đường chéo chính thì kênh là kênh đối xứng

## 3.5.1. Mô hình kênh (Cont.)

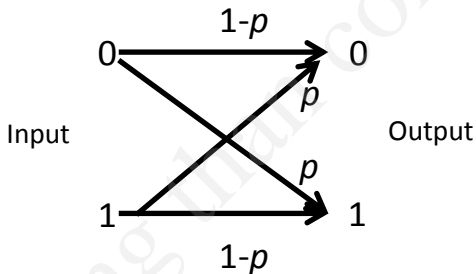
- Đồ hình truyền của kênh rời rạc:
  - $r$  điểm vào biểu diễn  $r$  tín vào
  - $s$  điểm ra biểu diễn các tín ra
  - Đường nối có hướng từ một điểm vào đến một điểm ra có trọng số là xác suất truyền biểu diễn xác suất truyền từ 1 tín hiệu vào thành 1 tín hiệu ra





### 3.5.1. Mô hình kênh (Cont.)

Đồ thị truyền



$$P[Y = 0|X = 1] = P[Y = 1|X = 0] = p$$

$$P[Y = 1|X = 1] = P[Y = 0|X = 0] = 1 - p$$

## 3.5.1. Mô hình kênh (Cont.)

- Kênh liên tục: nguồn vào liên tục và nguồn ra liên tục
  - Mô hình kênh:
    - Biến ngẫu nhiên liên tục biểu diễn nguồn vào liên tục
      - $X = \{x\}$        $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$
      - $P_X(x)$       hàm mật độ xác suất mô tả xác suất xuất hiện của từng tin  $x$  của nguồn vào  $X$
    - Đầu ra:
      - $Y = \{y\}$        $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$
      - $P(y|x)$       Hàm mật độ xác suất có điều kiện mô tả xác suất xuất hiện tin  $y$  ở đầu ra khi đầu vào là  $x$



## 3.5.2. Lượng tin tương hỗ của kênh rời rạc (Cont.)

- Theo phần các đại lượng thông tin, Lượng tin tương hỗ giữa 2 biến ngẫu nhiên  $X, Y$  là:

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \sum \sum P(x,y) \log \frac{P(x,y)}{P(x)P(y)} \\ &= H(X) + H(Y) - H(X,Y) \end{aligned}$$

- Vì:  $\frac{P(x,y)}{P(y)} = P(x|y)$

$$\begin{aligned} \text{nên} \quad : I(X; Y) &= \sum \sum P(x,y) \log \frac{P(x|y)}{P(x)} \\ &= H(X) - H(X|Y) \end{aligned}$$

- Hệ quả:
  - Lượng tin tương hỗ là lượng tin trung bình một tin có thể chuyển qua kênh khi nó được truyền qua kênh
  - Lượng tin tương hỗ bằng lượng tin trung bình đưa vào kênh ( $H(X)$ ) trừ đi lượng tin trung bình mất mát khi tin được truyền qua kênh ( $H(X|Y)$ ).
  - Lượng tin mất mát được sinh ra bởi nhiễu nên có thể coi lượng tin mất mát là lượng tin của nguồn nhiễu:  $H(X|Y) = H(N)_X$ . Với  $N$  là ký hiệu của nguồn nhiễu.

## 3.5.2. Lượng tin tương hỗ của nguồn rời rạc (Cont.)

• Vì :  $\frac{P(x,y)}{P(x)} = P(y|x)$

nên :  $I(X; Y) = \sum \sum P(x,y) \log \frac{P(y|x)}{P(y)}$   
 $= H(Y) - H(Y|X)$

• Hệ quả:

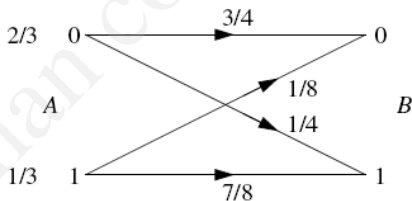
- Lượng tin tương hỗ của hai chiều truyền là bằng nhau
- Lượng tin tương hỗ bằng lượng tin trung bình đưa vào ( $H(Y)$ ) trừ đi lượng tin mất mát khi truyền ( $H(Y|X)$ ).
- Lượng tin mất mát gây ra bởi nhiễu theo chiều truyền từ Y về X:  $H(Y|X) = H(N)_Y$ . Với N là nguồn nhiễu và Y là nguồn vào

## 3.5.2. Lượng tin tương hỗ của kênh rời rạc (Cont.)

- Lượng tin tương hỗ luôn bằng lượng tin đưa vào trừ đi lượng tin mất mát
- Lượng tin bị mất là do nhiễu và bằng lượng tin của nguồn nhiễu đưa vào kênh
- Lượng tin truyền được qua kênh theo hai chiều bằng nhau
- $0 \leq I(X;Y) \leq H(X)$  . Khi không nhiễu thì  $X = Y$

### 3.5.2. Lượng tin tương hỗ của kênh rời rạc không nhiễu (Cont.)

- $H(A)$ ,  $H(A|B)$ ?
- Lượng tin tương hỗ?



### 3.5.3. Lượng tin tương hỗ của kênh liên tục

- Như trình bày ở phần các đại lượng thông tin, entropy của các nguồn được tính theo tích phân với các hàm mật độ xác suất của nguồn

- Vì vậy, lượng tin tương hỗ tính theo các công thức sau:

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \iint_{x,y} P_{X,Y}(x,y) \log \frac{P_{x,y}(x,y)}{P_x(x)P_y(y)} d_x d_y \\ &= H(X) + H(Y) - H(X,Y) \\ &= \iint_{x,y} P_{X,Y}(x,y) \log \frac{P_{x|y}(x|y)}{P_x(x)} d_x d_y \\ &= H(X) - H(X|Y) \\ &= \iint_{x,y} P_{X,Y}(x,y) \log \frac{P_{y|x}(y|x)}{P_y(y)} d_x d_y \\ &= H(Y) - H(Y|X) \end{aligned}$$

- Các tính chất của lượng tin tương hỗ của kênh liên tục giống của kênh rời rạc

## 3.5.4. Thông lượng của kênh

- Lượng tin trung bình lớn nhất kênh có thể truyền trong một đơn vị thời gian mà không gây sai
- Ký hiệu  $C$
- Được tính bằng số ký hiệu kênh truyền được trong một đơn vị thời gian  $n_o$  nhân với lượng tin trung bình lớn nhất một tin có thể truyền qua kênh (lượng tin tương hỗ max)
  - $C = n_o \times I(X;Y)_{\max}$
- Chú ý : Trong lý thuyết thông tin,  $n_o$  là tham số vật lý nên có thể coi  $n_o$  có giá trị đơn vị
  - $C = I(X;Y)_{\max}$

## 3.5.4. Thông lượng của kênh (Cont.)

- Kênh rời rạc:
  - Số tin truyền được qua kênh trong một đơn vị thời gian ( $n_o$ ) bằng dải thông của kênh ( $\Delta f$ )
    - So,  $C = \Delta f \times I(X;Y)_{\max}$
  - $C = \Delta f \times (H(X) - H(X|Y))_{\max} = \Delta f \times (H(X) - H(N)_X)_{\max}$
  - Khi không nhiễu:  $H(N)_X = 0$ 
    - Vậy:  $C = \Delta f \times H(X)_{\max} = \Delta f \times \log |X| = \Delta f \times \log L$  ( $L$  là số tin của tập tin  $X$ )

## 3.5.4. Thông lượng của kênh (Cont.)

- Kênh liên tục:
  - $n_o$  được tính bằng số mẫu của nguồn rời rạc tương đương của nguồn
  - Theo định lý lấy mẫu:
    - $n_o = 2 F_{\max}$  ( $F_{\max}$  là tần số lớn nhất của nguồn)
    - $F_{\max} = \Delta f$  (dài thông của kênh)
  - $C = 2 \Delta f \times I(X;Y)_{\max}$   
 $= 2 \Delta f \times (H(Y) - H(Y|X))_{\max}$



## 3.5.4. Thông lượng của kênh(Cont.)

Kênh liên tục:

- Thông thường nguồn nhiễu có phân bố Gaussian và thường thì các tín hiệu được tạo ra bởi các nguồn liên tục hiện nay có phân bố Gaussian:

- $H(Y|X) = H(N)_Y = \log\sqrt{2\pi e P_N}$ 
  - $P_N$ : Công suất trung bình của nhiễu

- $H(Y) = \log\sqrt{2\pi e P_Y}$ 
  - $P_Y$ : Công suất trung bình ở đầu ra

- $P_Y = P_X + P_N$ 
  - $P_X$ : Công suất trung bình của nguồn vào
  - Phương sai (công suất trung bình) của tổng các biến ngẫu nhiên Gaussian bằng tổng các phương sai của từng biến

- $C = 2 \Delta f \times (\log\sqrt{2\pi e P_Y} - \log\sqrt{2\pi e P_N})$   
 $= 2 \Delta f \times \log \sqrt{\frac{P_Y}{P_N}}$   
 $= \Delta f \times \log \frac{P_Y}{P_N} = \Delta f \times \log \frac{P_X + P_N}{P_N} = \Delta f \times \log \left(1 + \frac{P_X}{P_N}\right)$

$$\rightarrow C = \Delta f \times \log \left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

$\frac{S}{N}$ : Tỷ số tín hiệu trên nhiễu. Là tỷ số của công suất trung bình của tín hiệu vào chia cho công suất trung bình của nhiễu đo được ở đầu ra kênh (nhiều trong kênh)

## 3.6. Phối hợp nguồn - kênh

- Khi xây dựng hệ thống truyền thông phải nối nguồn có tốc độ lập tin  $R$  vào kênh có thông lượng  $C$ . Vấn đề đặt ra là:
  - Khi  $R = C$ . Kênh vừa đủ để truyền lượng thông tin nguồn tạo ra nên chi phí truyền là tối thiểu. Lượng tin tạo ra được truyền hết qua kênh mà không mất mát nên việc truyền không gây sai. Trường hợp này được gọi là kênh phối hợp với nguồn và  $R = C$  là điều kiện phối hợp nguồn – kênh
  - Khi  $R < C$ . Khả năng truyền của kênh lớn hơn lượng tin được tạo ra của nguồn nên việc truyền tin không gây sai. Kênh được xây dựng có khả năng truyền lớn hơn yêu cầu nên chi phí truyền tăng hay truyền không hiệu quả. Cần phải tiến hành thực hiện phối hợp nguồn kênh để tăng hiệu quả truyền
    - Do  $R < C$  nên thông lượng thực tế đạt được là  $R$  nên để tăng tốc độ truyền cần tăng tốc độ lập tin  $R$  của nguồn. Giải pháp của lý thuyết thông tin là mã hóa nguồn để Entropy của nguồn đạt cực đại và tăng tốc độ lập tin
  - Khi  $R > C$ . Khả năng truyền của kênh nhỏ hơn lượng tin nguồn tạo ra nên kênh không thể truyền hết thông tin dẫn đến thông tin bị mất mát hay việc truyền bị sai. Cần phải tiến hành thực hiện phối hợp nguồn kênh để chống mất mát thông tin
    - Giải pháp là tăng tỷ số tín hiệu trên nhiễu của hệ thống. Giải pháp riêng của lý thuyết thông tin là tiến hành mã chống nhiễu để giảm tốc độ lập

## Bài tập 2

- Cho một kênh có nguồn vào nhị phân  $X = (a, b)$  có phân bố xác suất  $P = (p_0, p_1)$ .  $p_0$  là chữ số cuối của mã số sinh viên của bạn chia cho 10. Nếu chữ số cuối này bằng 0 thì lấy bằng 3 chia cho 10.  $p_1 = 1 - p_0$ . Tập tin ở đầu ra  $Y = (a, b)$

$$\text{Ma trận kênh } P(X/Y) = \begin{vmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{vmatrix}$$

$P$  được tính bằng chữ số trước cuối trong mã số sinh viên của bạn chia cho 10. Nếu chữ số này bằng 0 thì  $p = 1/10$ .

Hãy tính lượng tin tương hỗ  $I(X;Y)$

## Bài tập 3

- Giả sử hệ thống truyền tin có bản tin vào là nhị phân có lượng tin bằng lượng tin có trong bản tin của bài tập 1. Kênh có mô hình ở bài tập 2. Hãy tính thời gian truyền hết bản tin qua kênh.
- Giả sử mỗi giây kênh chỉ truyền 1 tin nhị phân