

Chương 7: Cấu trúc thu tối ưu

7.1. Tổng quan về cấu trúc thu tối ưu

7.2. Luật quyết định thu

7.3. Biểu diễn hình học của tín hiệu

7.4. Cấu trúc thu tối ưu cho tín hiệu nhị phân

7.5. Hiệu năng của cấu trúc thu tối ưu tín hiệu nhị phân

7.1. Tổng quan

• Tín hiệu sẽ bị thay đổi khi truyền qua kênh có nhiễu -> Máy thu cần phải phát hiện (detection) hay đưa ra quyết định (decision making) tín hiệu nào đã được truyền khi nó nhận được 1 tín hiệu. Việc phát hiện tín hiệu hay đưa ra quyết định về tín hiệu được truyền của máy thu được gọi là quyết định thu.

• Quyết định thu là chính xác khi tín hiệu được máy thu quyết định (hay chọn là được truyền) đúng là tín hiệu đã được truyền. Quyết định sai nếu tín hiệu được máy thu quyết định là tín hiệu được truyền nhưng nó không phải tín hiệu đã được truyền -> Sai số quyết định là xác suất xảy ra quyết định sai.

• Rất tự nhiên là không thể có quyết định chính xác tuyệt đối trong kênh có nhiễu → Yêu cầu máy thu quyết định với xác suất sai bé nhất có thể.

• Máy thu cho quyết định thu có xác suất sai tối thiểu được gọi là máy thu tối ưu hay cấu trúc thu tối ưu (optimum receiver).

7.1. Tổng quan

- Bài toán quyết định thu của máy thu tối ưu sẽ là như sau:
 - Cho tập tín hiệu có thể sẽ được phát là tập m tín hiệu $\{s_i(t)\}$. Khi máy phát truyền tín hiệu $s_i(t)$, máy thu sẽ nhận được tín hiệu $r(t) = s_i(t) + n(t)$. Máy thu phải quyết định tín hiệu $s_i(t)$ nào đã được phát từ tín hiệu $r(t)$ nó nhận được sao cho xác suất quyết định thu là tối thiểu.
 - Giả thiết kênh là kênh chỉ có nhiễu cộng và chúng ta cũng giả thiết nhiễu trong kênh $n(t)$ là nhiễu chuẩn Gaussian có trị trung bình bằng 0 và công suất trung bình (phương sai) của nhiễu là $N/2$.
- Xét trong hệ thống truyền thông tin số: mỗi tín hiệu mang một thông tin số (coi mỗi thông tin số có giá trị từ 0 đến $(m-1)$ và trong trường hợp cơ số $m=2$ thì ta có hệ truyền thông nhị phân).

7.2. Luật quyết định thu

- Hệ thống truyền thông số có tập tín hiệu $\{s_i(t)\}$; $i = 1, \dots, m$ mang các thông tin số có giá trị từ $0, \dots, (m-1)$.
- Máy phát truyền tín hiệu $S_i(t)$ mang thông tin $i-1$. Máy thu nhận tín hiệu $r(t) = s_i(t) + n(t)$.
- Mô hình của kênh truyền là nguồn vào gồm tập các tín hiệu vào (biểu diễn các tín hiệu vào) $\{s_i(t)\}$ giả thiết có xác suất $\{p_i\}$ $i=1, \dots, m$. Tín hiệu ra $r(t) = s_i(t) + n(t)$, $i=1, \dots, m$. Hàm truyền của kênh là tập các xác suất $\{p(r(t)/s_i(t))\}$.
- Máy thu sẽ có quyết định đúng khi nó quyết định (chọn ra) tín hiệu được truyền là $s_i(t)$. Máy thu sẽ có quyết định sai khi nó chọn tín hiệu được phát là một tín hiệu $s_j(t)$ khác $s_i(t)$ hay chọn tín hiệu $s_j(t)$ với j khác i là tín hiệu được phát.
- Một hệ thống truyền thông có thể được sử dụng để truyền thông tin thì phải có nhiễu không quá lớn để tín hiệu nhận được giống với tín hiệu được truyền chủ yếu. (trường hợp thường gặp là nhiễu có phân bố chuẩn Gaussian)

7.2. Luật quyết định thu

- Do tín hiệu được phát là $s_i(t)$ và nhiễu trong kênh sẽ tạo ra tín hiệu $r(t)$ thường giống hơn với $r(t)$ hay $p(s_i(t)/r(t))$ sẽ lớn nhất. Vậy quyết định thu cho xác suất quyết định sai bé nhất là quyết định tín hiệu được phát là tín hiệu có xác suất có điều kiện khi nhận được tín hiệu $r(t)$ đạt giá trị lớn nhất.
- Bài toán quyết định thu sẽ chuyển thành bài toán: quyết định (chọn) $s_i(t)$ được phát nếu $p(s_i(t)/r(t)) \geq p(s_j(t)/r(t))$ với mọi j khác i .
 - Luật quyết định này còn gọi là luật quyết định cho xác suất thu sai cực tiểu
- Theo công thức bayes: $p(s_i(t)/r(t)) = \{p(r(t)/s_i(t)) \cdot p(s_i(t))\} / p(r(t))$
- Bài toán quyết định thu cho xác suất thu theo hợp lý cực đại hay quyết định theo cực đại sự tương đồng ML (Maximun Likelihood) là:
 - Chọn $s_i(t)$ là được truyền nếu $p(r(t)/s_i(t)) / p(r(t)) \geq p(r(t)/s_j(t)) / p(r(t))$ với mọi j khác i

7.2. Luật quyết định thu

- Vì $p(r(t))$ là chung ở cả hai vế của bất phương trình quyết định nên bài toán quyết định theo hợp lý cực đại ML (cực đại tương đồng) là
 - Quyết định $s_i(t)$ được truyền nếu $p(r(t)/s_i(t)).p(s_i(t)) \geq p(r(t)/s_j(t)).p(s_j(t))$ với mọi j khác i .
- Trong các hệ thống truyền thông số thì tín hiệu mang thông tin số có xác suất xuất hiện $p_i = p = 1/m$ (thường sau mã hóa nguồn) nên thường bài toán quyết định thu hay luật quyết định thu chuyển thành
 - Quyết định $s_i(t)$ được truyền nếu $p(r(t)/s_i(t)) \geq p(r(t)/p_{sj}(t))$ với mọi j khác i .
 - Luật quyết định thu này được gọi là luật quyết định thu theo cực đại hóa xác suất hậu nghiệm MAP (Maximum Apriori Probability).

7.2. Luật quyết định thu

- Trường hợp hệ thống truyền thông nhị phân ($m=2$) chỉ có 2 tín hiệu $s_1(t)$, biểu diễn tin 0, và $s_2(t)$, biểu diễn tin 1, các luật quyết định thu sẽ là:
- Luật ML:
 - Quyết định $s_i(t)$ được truyền nếu $p(r(t)/s_i(t)) \cdot p_i \geq p(r(t)/s_j(t)) \cdot p_j$ với j khác i ; $i, j = 1/2$
 - Hay nếu $\{p(r(t)/s_i(t)) / p(r(t)/s_j(t))\} \geq p_j / p_i$ thì quyết định $s_i(t)$ được truyền, ngược lại quyết định $s_j(t)$ được truyền.
 - Tỷ số bên trái được gọi là tỷ số tương đồng (Likelihood rate).

7.2. Luật quyết định thu

- Luật MAP: Nếu $p(r(t)/s_i(t)) \geq p(r(t)/s_j(t))$ thì quyết định $s_i(t)$ được truyền, nếu ngược lại quyết định $s_j(t)$ được truyền.
- → Các quyết định trên là quyết định hai mức hay 1 ngưỡng, nó sẽ cho sai số khi dấu bằng xảy ra
- → Để loại sai số này, quyết định 3 mức được đưa ra: Nếu vế trái lớn hơn vế phải $s_i(t)$ được truyền, nếu vế trái nhỏ hơn vế phải $s_j(t)$ được truyền, nếu hai vế bằng nhau thì không quyết định được (sai số quyết định xuất hiện).

7.3. Biểu diễn hình học tín hiệu

- Các luật quyết định đã cho nguyên tắc hoạt động của các máy thu (hay cấu trúc thu). Tuy nhiên việc phải thực hiện tính các xác suất là khá khó khăn → sử dụng công cụ biểu diễn hình học tín hiệu để xây dựng các cấu trúc thu.
- Trong biểu diễn hình học tín hiệu, mỗi tín hiệu sẽ là một vector hay một điểm trong không gian chiều. Mỗi chiều là một vector độc lập tuyến tính của không gian và mỗi tín hiệu sẽ được khai triển theo các vector (tín hiệu) độc lập tuyến tính này. Các hệ số khai triển là một tọa độ của vector.
- Tập n tín hiệu (vector) độc lập tuyến tính của tập m tín hiệu cho trước (được truyền) sẽ được tìm theo thuật toán Gram-schmidt.

7.3. Biểu diễn hình học tín hiệu

- Thủ tục Gram-Schmidt cho tập M tín hiệu

$$\{s_i(t)\}_{i=1}^M$$

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt}},$$

$$\phi_i(t) = \frac{\phi'_i(t)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [\phi'_i(t)]^2 dt}}, \quad i = 2, 3, \dots, N,$$

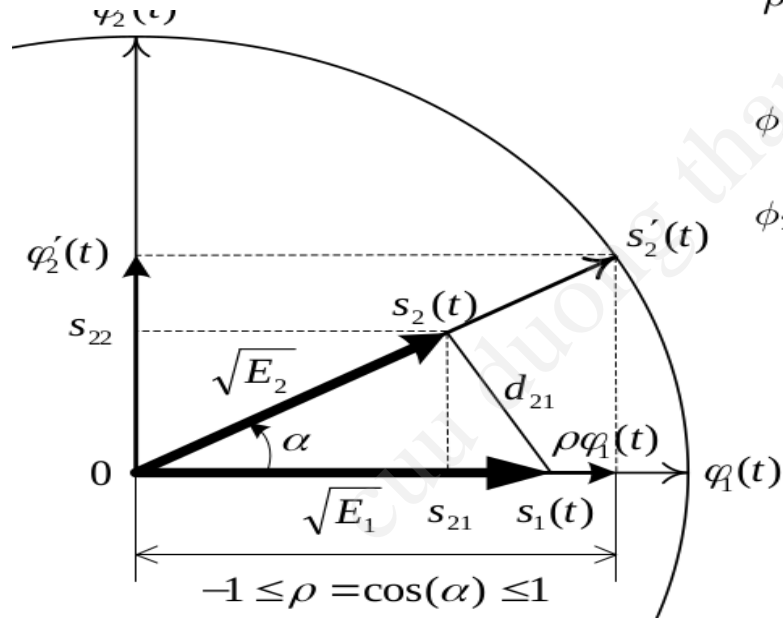
$$\phi'_i(t) = \frac{s_i(t)}{\sqrt{E_i}} - \sum_{j=1}^{i-1} \rho_{ij} \phi_j(t),$$

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_i(t)}{\sqrt{E_i}} \phi_j(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, i-1.$$

- Nếu tập M tín hiệu là độc lập tuyến tính thì $N = M$, Nếu tập tín hiệu là phụ thuộc tuyến tính thì $N < M$

7.3. Biểu diễn hình học tín hiệu

- Thủ tục Gram-Schmidt cho tín hiệu nhị phân:



$$\rho = \int_0^{T_b} \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}} \phi_1(t) dt = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \int_0^{T_b} s_1(t) s_2(t) dt.$$

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}},$$

$$\phi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left[\frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}} - \frac{\rho s_1(t)}{\sqrt{E_1}} \right]$$

$$s_{21} = \int_0^{T_b} s_2(t) \phi_1(t) dt = \rho \sqrt{E_2},$$

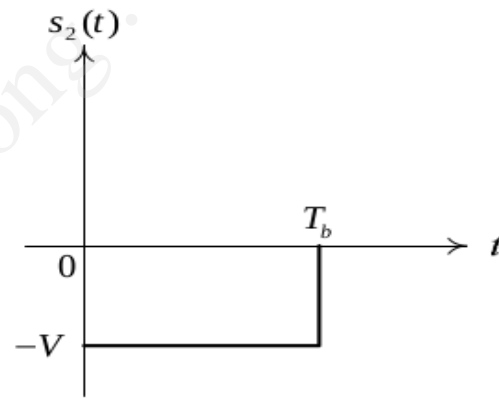
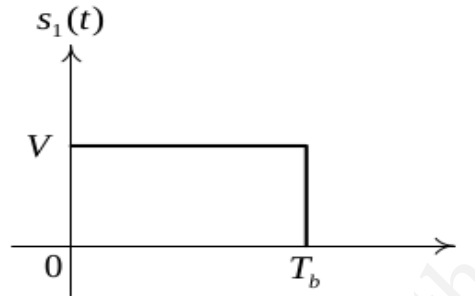
$$s_{22} = \left(\sqrt{1 - \rho^2} \right) \sqrt{E_2},$$

$$d_{21} = \sqrt{\int_0^{T_b} [s_2(t) - s_1(t)]^2 dt}$$

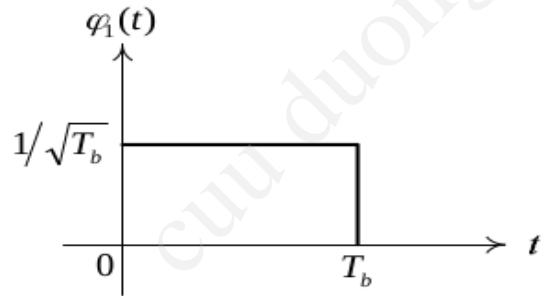
$$= E_1 - 2\rho\sqrt{E_1 E_2} + E_2.$$

7.3. Biểu diễn hình học tín hiệu

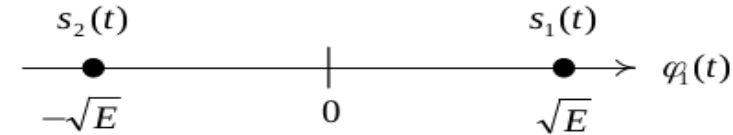
- Ví dụ:



(a)



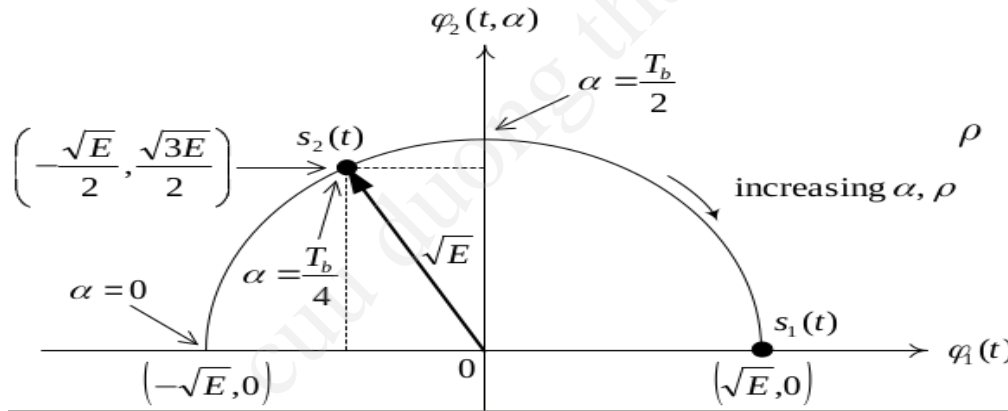
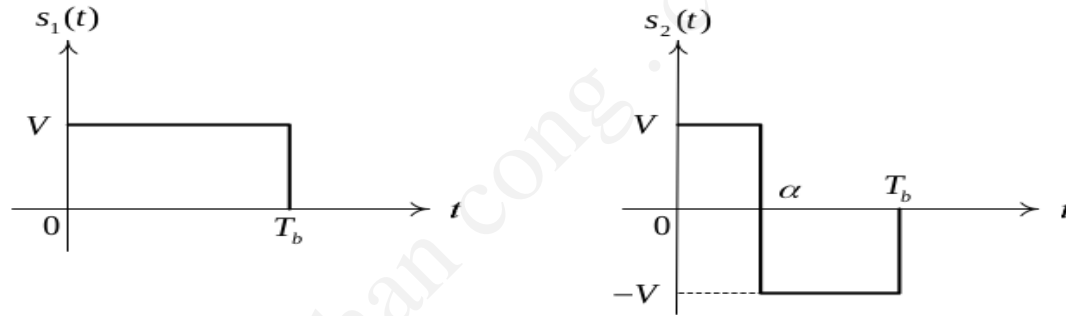
(b)



(c)

7.3. Biểu diễn hình học tín hiệu

- Ví dụ:



$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{E} \int_0^{T_b} s_2(t) s_1(t) dt \\ &= \frac{1}{V^2 T_b} [V^2 \alpha - V^2 (T_b - \alpha)] \\ &= \frac{2\alpha}{T_b} - 1 \end{aligned}$$

7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Những dữ liệu cho xây dựng cấu trúc thu tối ưu là:
- Hệ thống truyền thông sử dụng tập M tín hiệu $\{s_i(t)\}$ để biểu diễn M tri thông tin.
- Các tín hiệu này được khai triển trực giao theo N hàm cơ sở trực giao với các hệ số khai triển $s_i(t)$ theo hàm cơ sở thứ j là S_{ij}
- Nhiễu trong kênh $w(t)$ là nhiễu cộng có phân bố gaussian (còn gọi nhiễu trắng) có giá trị trung bình bằng 0 và công suất trung bình $N_0/2$.

7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Nhiễu được khai triển trực giao:

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{w}_i \phi_i(t), \quad \text{where} \quad \mathbf{w}_i = \int_0^{T_b} \mathbf{w}(t) \phi_i(t) dt.$$

- Quyết định thu cho tín hiệu M, sẽ có quyết định đúng khi quyết định chọn tín hiệu được phát chính là tín hiệu đã được truyền và quyết định sai khi chọn các tín hiệu còn lại. Vậy có thể đơn giản hóa việc quyết định thu sẽ là M bộ quyết định nhị phân. Thêm nữa các hệ thống truyền thông thường gặp là nhị phân nên, trong học phần này, chúng ta sẽ chỉ xét cấu trúc thu tối ưu cho tín hiệu nhị phân

7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Giả thiết hệ thống sử dụng hai tín hiệu $s_1(t)$ biểu diễn bit 0, $s_2(t)$ biểu diễn bit 1. Xác suất suất hiện của hai tín hiệu cũng là của xác suất xuất hiện của hai giá trị của bit thứ k là

$$P[\mathbf{b}_k = 0] = P_1, P[\mathbf{b}_k = 1] = P_2.$$

- Hai tín hiệu tồn tại trong một chu kỳ bit và năng lượng của chúng là

$$E_1 = \int_0^{T_b} s_1^2(t) dt, E_2 = \int_0^{T_b} s_2^2(t) dt.$$

- Nhiều trong kênh $w(t)$ là nhiễu cộng trắng có trị trung bình bằng 0 và công suất trung bình $N_0/2$:

- $$E\{\mathbf{w}(t)\} = 0, E\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t+\tau)\} = \frac{N_0}{2}\delta(\tau), \mathbf{w}(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$

7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Hai tín hiệu sẽ được khai triển trực chuẩn theo hai hàm cơ sở trực chuẩn:

$$\int_0^{T_b} \phi_1(t)\phi_2(t)dt = 0 \text{ (orthogonality),}$$
$$\int_0^{T_b} \phi_1^2(t)dt = \int_0^{T_b} \phi_2^2(t)dt = 1 \text{ (normalized to have unit energy)}$$

- The representations are

$$s_1(t) = s_{11}\phi_1(t) + s_{12}\phi_2(t),$$

$$s_2(t) = s_{21}\phi_1(t) + s_{22}\phi_2(t).$$

$$\text{where } s_{ij} = \int_0^{T_b} s_i(t)\phi_j(t)dt, \quad i, j \in \{1, 2\},$$

7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Tín hiệu nhận được $r(t)$ được khai triển thành:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= s_i(t) + \mathbf{w}(t), \quad 0 \leq t \leq T_b \\ &= \begin{cases} s_1(t) + \mathbf{w}(t), & \text{if a "0" is transmitted} \\ s_2(t) + \mathbf{w}(t), & \text{if a "1" is transmitted} \end{cases} \\ &= \underbrace{[s_{i1}\phi_1(t) + s_{i2}\phi_2(t)]}_{s_i(t)} \\ &\quad + \underbrace{[\mathbf{w}_1\phi_1(t) + \mathbf{w}_2\phi_2(t) + \mathbf{w}_3\phi_3(t) + \mathbf{w}_4\phi_4(t) + \dots]}_{\mathbf{w}(t)} \\ &= (s_{i1} + \mathbf{w}_1)\phi_1(t) + (s_{i2} + \mathbf{w}_2)\phi_2(t) + \mathbf{w}_3\phi_3(t) + \mathbf{w}_4\phi_4(t) + \dots \\ &= \mathbf{r}_1\phi_1(t) + \mathbf{r}_2\phi_2(t) + \mathbf{r}_3\phi_3(t) + \mathbf{r}_4\phi_4(t) + \dots \end{aligned}$$

7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- mỗi thành phần r_j được tính theo:

$$\mathbf{r}_j = \int_0^{T_b} \mathbf{r}(t) \phi_j(t) dt, \text{ and}$$

$$\mathbf{r}_1 = s_{i1} + \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{r}_2 = s_{i2} + \mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{w}_3$$

$$\mathbf{r}_4 = \mathbf{w}_4$$

$$\vdots$$

- Các thành phần r_j từ $j=3,4,..$ không mang thông tin mà chỉ có nhiễu.

7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Áp dụng luật quyết định thu cho tín hiệu nhị phân theo cực đại hóa sự tương đồng ML, chúng ta có:

$$\frac{f(\vec{r}|1_T)}{f(\vec{r}|0_T)} \underset{0_D}{\overset{1_D}{>}} \frac{P_1}{P_2}.$$

- Trong đó tỷ số tương đồng là

$$\frac{f(\vec{r}|1_T)}{f(\vec{r}|0_T)}$$

- Lưu ý $\vec{r}(t)$ nhận được sẽ là vector nhận được với các thành phần r_j mà trong đó chỉ r_1, r_2 mang thông tin và $\vec{r}(t) = s_i(t) + w(t)$. 1_T là tín hiệu truyền bit 1 hay $s_2(t)$, 0_T là tín hiệu truyền bit 0 hay $s_1(t)$. Hàm truyền $f(\vec{r}(t)/s_i(t))$ là hàm mật độ xác suất để nhận được $\vec{r}(t)$ khi truyền $s_1(t)$ hay $s_2(t)$

7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Hàm $f(r(t)/s_i(t)) = f\{(s_i(t)+w(t))/s_i(t)\}$ và với kênh có nhiễu có công suất trắng:
 - $f(r(t)/s_1(t)) = \{1/[\sqrt{\pi N_0}]\} \exp\{-\sqrt{r(t)-s_1(t)}/N_0\}$
 - $f(r(t)/s_2(t)) = \{1/[\sqrt{\pi N_0}]\} \exp\{-\sqrt{r(t)-s_2(t)}/N_0\}$
- Luật quyết định thu chuyển thành:
 - $\exp\{-\sqrt{r(t)-s_2(t)}/N_0\} / \exp\{-\sqrt{r(t)-s_1(t)}/N_0\} \geq P_1/P_2$ quyết định 1 được phát, ngược lại 0 được phát
 - Hay $\sqrt{r(t)-s_1(t)} - \sqrt{r(t)-s_2(t)} \geq N_0 \cdot \ln P_1/P_2$ quyết định 1 được truyền, ngược lại 0 được truyền. Luật quyết định theo quãng cách tối thiểu.
- Khai triển về trái có:
 - $\{\sqrt{r(t)} - 2r(t).s_1(t) + \sqrt{s_1(t)}\} - \{\sqrt{r(t)} - 2r(t).s_2(t) + \sqrt{s_2(t)}\} \geq N_0 \cdot \ln P_1/P_2$
- Hay $\{r(t).s_2(t) + E_2\} - \{r(t).s_1(t) + E_1\} \geq N_0 \cdot \ln P_1/P_2$ thì quyết định 1 được truyền, ngược lại 0 được truyền. Quyết định theo cực đại hàm tương quan.

7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Khi sử dụng khai triển các tín hiệu, luật quyết định thu chuyển thành:

$$(r_1 - s_{11})^2 + (r_2 - s_{12})^2 \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} (r_1 - s_{21})^2 + (r_2 - s_{22})^2 + N_0 \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

- Khi $p_1 = p_2$ (các tín hiệu đẳng xác suất):

$$(r_1 - s_{11})^2 + (r_2 - s_{12})^2 \underset{0_D}{\overset{1_D}{\gtrless}} (r_1 - s_{21})^2 + (r_2 - s_{22})^2.$$

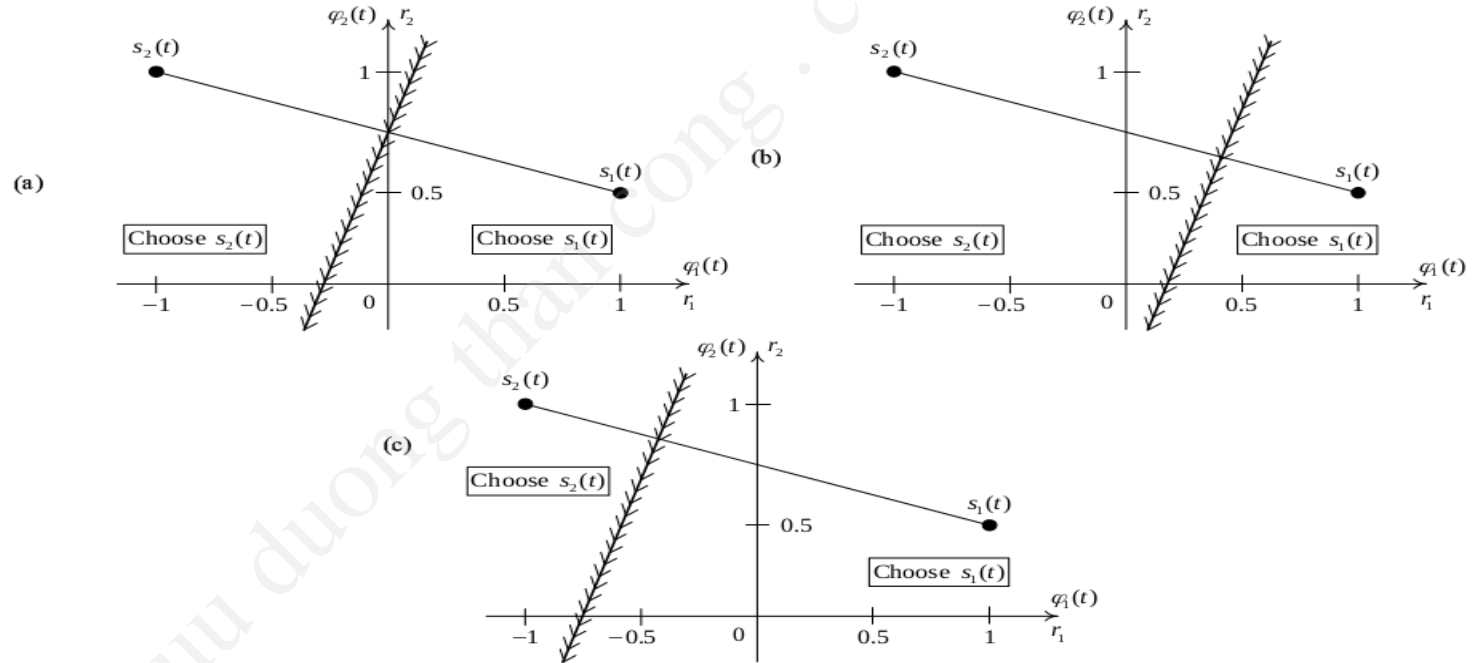
- Luật quyết định thu này là luật quyết định theo quãng cách tối thiểu. Máy thu xây dựng theo luật này sẽ gọi là cấu trúc thu tối thiểu hóa quãng cách.

7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Khi tín hiệu $s_i(t)$ được truyền, tín hiệu $r(t) = s_i(t) + w(t)$ sẽ có biểu diễn hình học là các điểm tín hiệu nằm trong 1 hình cầu. Hình cầu này có tâm là $s_i(t)$ và bán kính là biên độ lớn nhất của $w(t)$.
- Hai tín hiệu $s_1(t)$ và $s_2(t)$ sẽ tạo ra các tín hiệu thu được của chúng tạo thành hai hình cầu cách nhau 1 khoảng cách là khoảng cách của 2 tín hiệu d_{21} .
- Luật quyết định thu tối thiểu hóa quãng cách sẽ tạo ra mặt phẳng phân cách chia hai vùng không gian cho tín hiệu $s_1(t)$ và $s_2(t)$ là mặt phẳng vuông góc với đường nối hai điểm tín hiệu $s_1(t)$ và $s_2(t)$.
- Khi $P_1 = P_2$, mặt phẳng này là mặt phẳng trực giao đi qua điểm giữa đường nối 2 điểm tín hiệu. Khi P_1 khác P_2 thì mặt phẳng này dịch về $s_1(t)$ khi $P_1 < P_2$ và dịch về phía $s_2(t)$ khi $P_1 > P_2$.

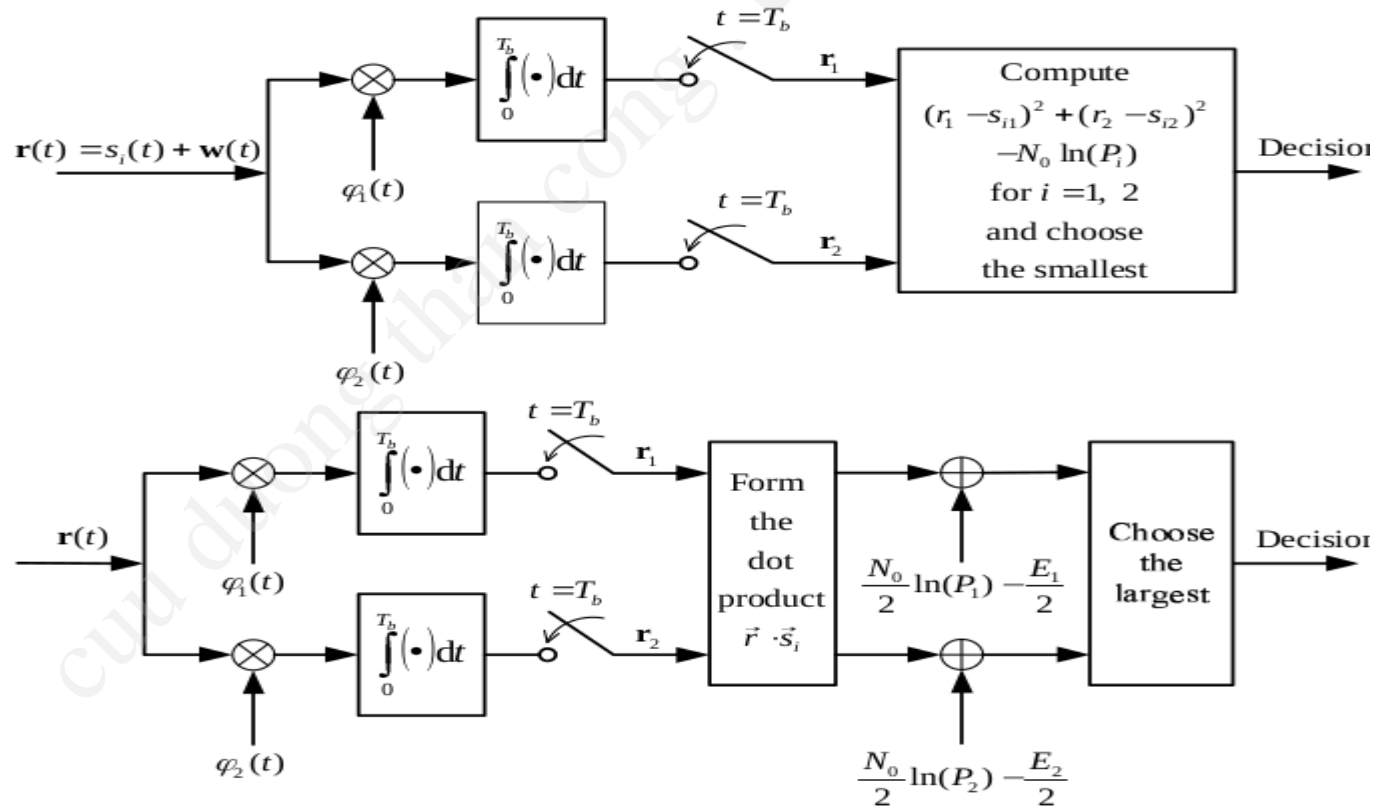
7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Ví dụ:



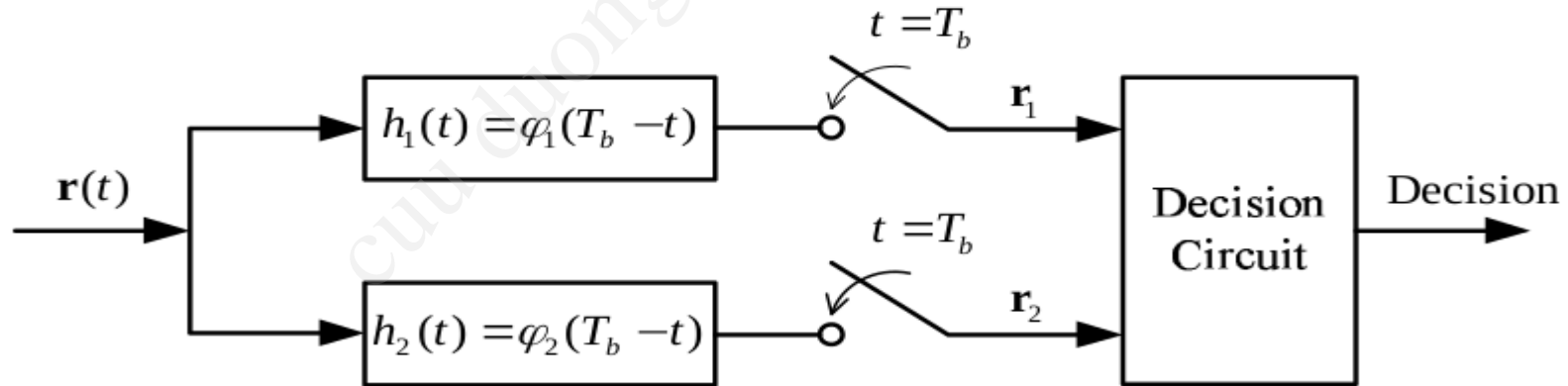
7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Triển khai:



7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Triển khai cấu trúc thu tối ưu trên bộ lọc phối hợp.
- Bộ lọc phối hợp là bộ lọc có hàm truyền là liên hợp phức của tín hiệu vào, tín hiệu ra là biên độ của tín hiệu vào.
- Để khai triển các hệ số khai triển của $r(t)$ ta có thể sử dụng phép chiếu (hay còn gọi khai triển tương quan là hàm tương quan của $r(t)$ và các hàm cơ sở), ta có thể sử dụng các mạch lọc phối hợp với các hàm cơ sở.



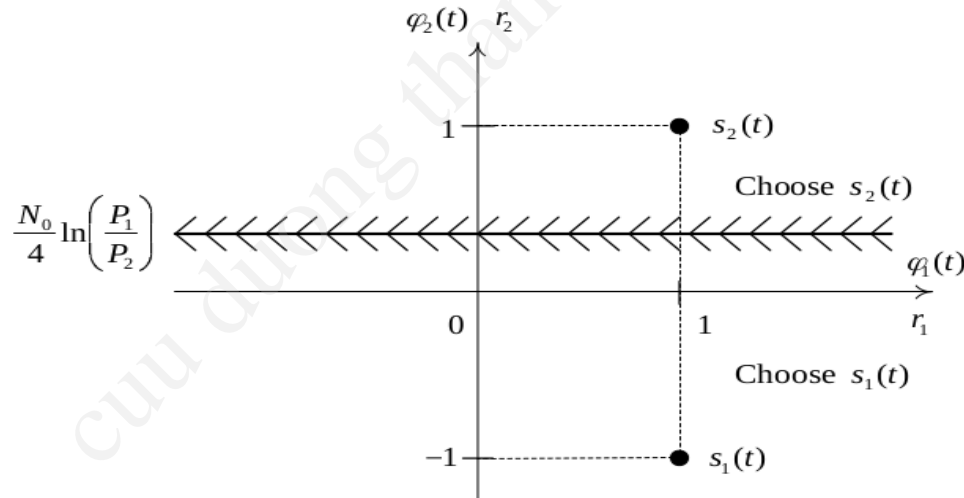
7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Trường hợp đặc biệt, hai tín hiệu có khai triển

$$s_2(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t),$$

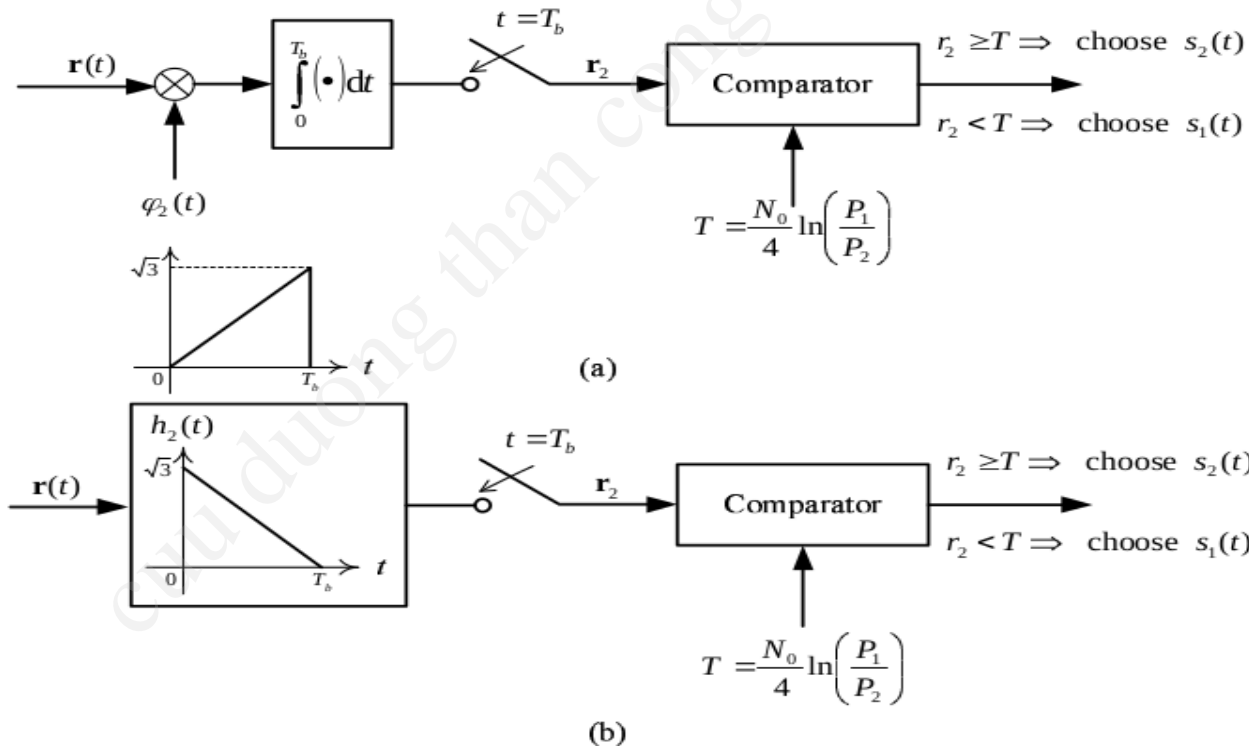
$$s_1(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t).$$

- Biểu diễn hình học của nó:



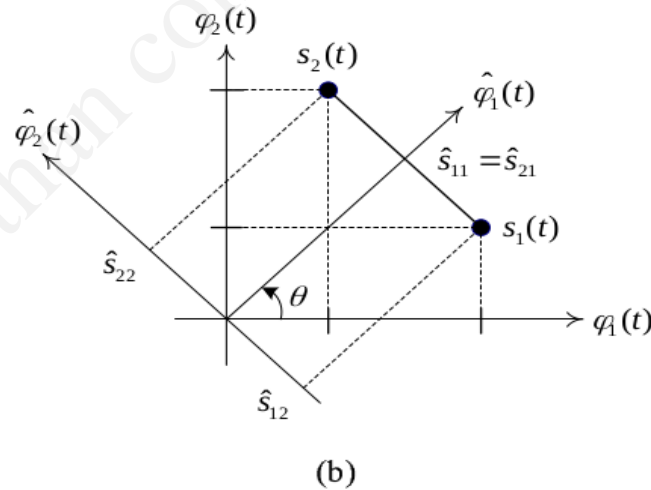
7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Triển khai cấu trúc thu tối ưu:



7.4. Cấu trúc thu tối ưu

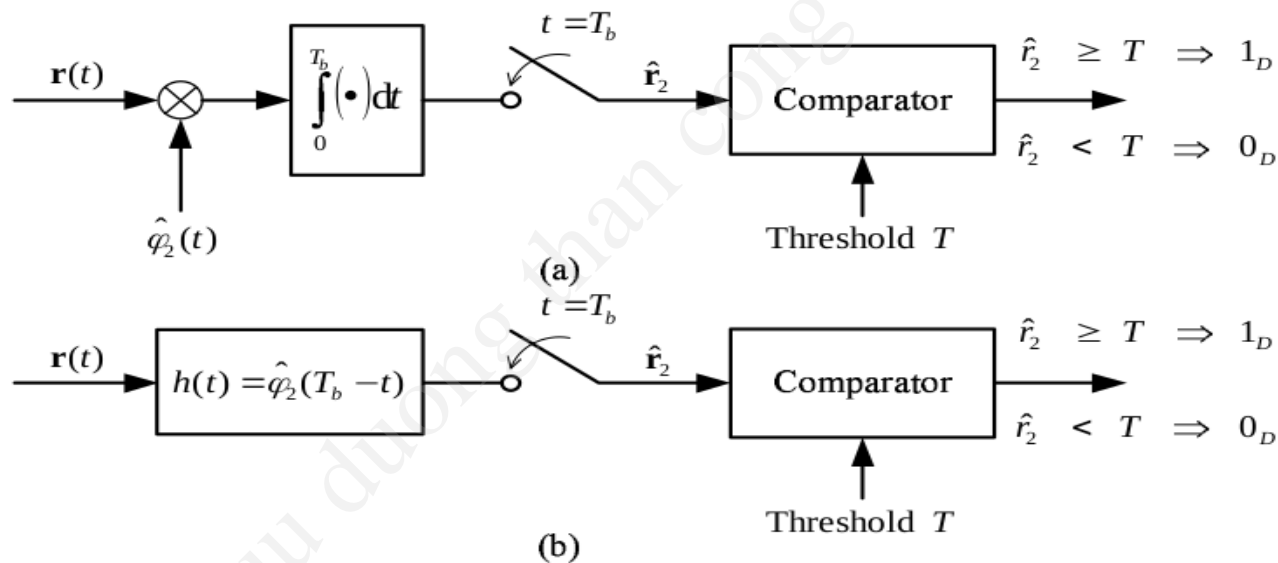
- Bằng cách chọn hợp lý các hàm cơ sở, các tín hiệu $s_1(t)$, $s_2(t)$ đều có thể chuyển về dạng đặc biệt trên, ví dụ:



$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1(t) \\ \hat{\phi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix}.$$

7.4. Cấu trúc thu tối ưu

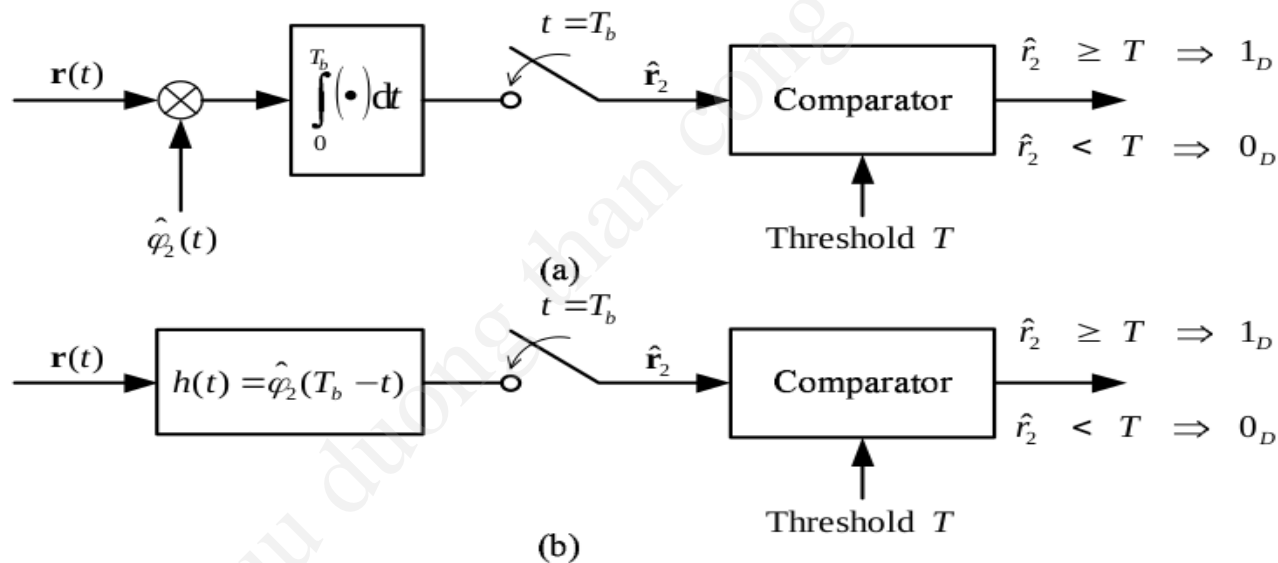
- Triển khai cấu trúc thu tối ưu mới:



$$\hat{\phi}_2(t) = \frac{s_2(t) - s_1(t)}{(E_2 - 2\rho\sqrt{E_1 E_2} + E_1)^{\frac{1}{2}}}, \quad T \equiv \frac{\hat{s}_{22} + \hat{s}_{12}}{2} + \left(\frac{N_0/2}{\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12}} \right) \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

7.4. Cấu trúc thu tối ưu

- Triển khai cấu trúc thu tối ưu mới:



$$\hat{\phi}_2(t) = \frac{s_2(t) - s_1(t)}{(E_2 - 2\rho\sqrt{E_1 E_2} + E_1)^{\frac{1}{2}}}, \quad T \equiv \frac{\hat{s}_{22} + \hat{s}_{12}}{2} + \left(\frac{N_0/2}{\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12}} \right) \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

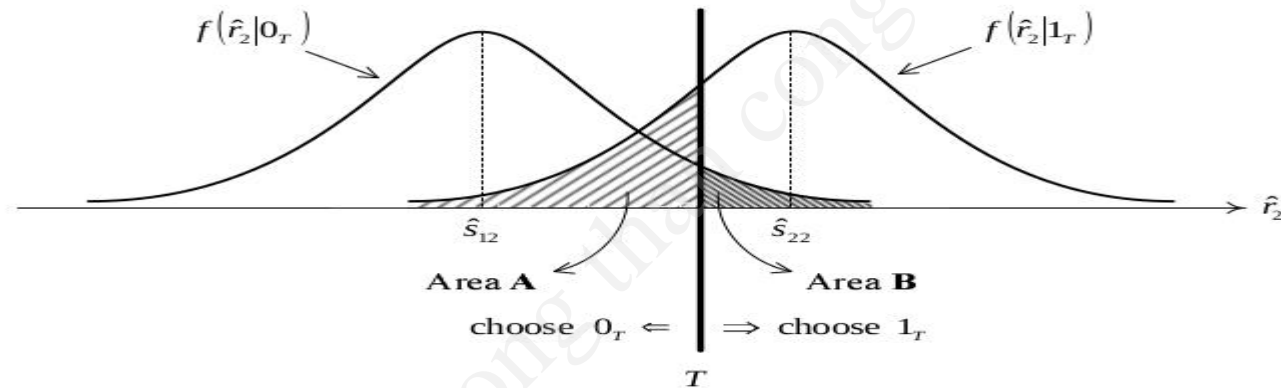
7.5. Hiệu năng của cấu trúc thu tối ưu cho tín hiệu nhị phân

- Hiệu năng của cấu trúc thu tối ưu được đo bằng xác suất quyết định sai P_e của nó. Xác suất P_e càng nhỏ thì hiệu năng của cấu trúc thu càng lớn.
- Để quyết định bit được phát, so sánh \hat{r}_2 với ngưỡng T

$$\hat{r}_2 = \int_{(k-1)T_b}^{kT_b} \mathbf{r}(t) \hat{\phi}_2(t) dt \quad T = \frac{\hat{s}_{12} + \hat{s}_{22}}{2} + \frac{N_0}{2(\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12})} \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right).$$

7.5. Hiệu năng của cấu trúc thu tối ưu

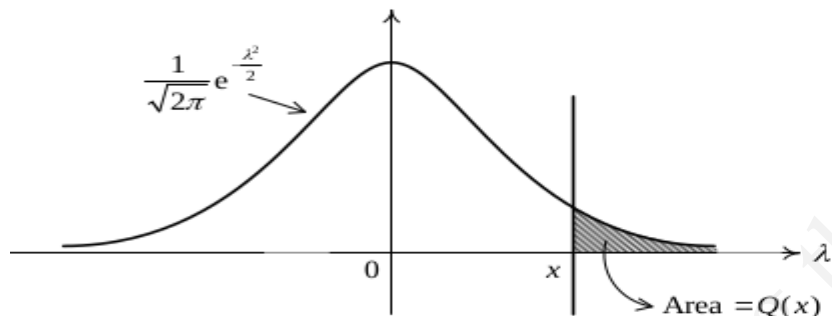
- Để tính xác suất quyết định sai, sử dụng mô hình:



$$\begin{aligned}
 P[\text{error}] &= P[0_T, 1_D] + P[1_T, 0_D] = P[1_D|0_T]P[0_T] + P[0_D|1_T]P[1_T] \\
 &= P_1 \underbrace{\int_T^\infty f(\hat{r}_2|0_T)d\hat{r}_2}_{\text{Area B}} + P_2 \underbrace{\int_{-\infty}^T f(\hat{r}_2|1_T)d\hat{r}_2}_{\text{Area A}} \\
 &= P_1 Q\left(\frac{T - \hat{s}_{12}}{\sqrt{N_0/2}}\right) + P_2 \left[1 - Q\left(\frac{T - \hat{s}_{22}}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right].
 \end{aligned}$$

7.5. Hiệu năng của cấu trúc thu tối ưu

- Hàm $Q(x)$ tính xác suất sai khi loại phần gách chéo khỏi vùng giá trị của biến:

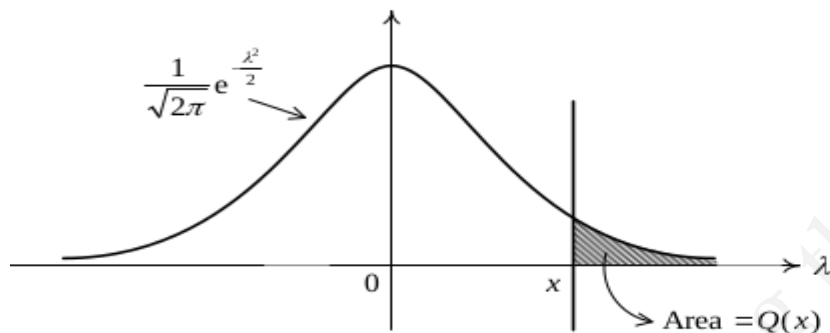


$$Q(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda.$$

- Hàm $Q(x)$ được tính với phân bố chuẩn có trị trung bình bằng 0 và phương sai bằng 1. Khi trị trung bình bằng S_i^2 , phương sai bằng $N_0/2$ thì giá trị x sẽ chuyển thành $(T-s_i^2)/N_0$:

7.5. Hiệu năng của cấu trúc thu tối ưu

- Hàm $Q(x)$ tính xác suất sai khi loại phần gách chéo khỏi vùng giá trị của biến:



$$Q(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda.$$

- Hàm $Q(x)$ được tính với phân bố chuẩn có trị trung bình bằng 0 và phương sai bằng 1. Khi trị trung bình bằng S_i^2 , phương sai bằng $N_0/2$ và vùng giá trị bị loại bỏ tính tử T thì giá trị x sẽ chuyển thành $(T - S_i^2) / (\sqrt{N_0/2})$

7.5. Hiệu năng của cấu trúc thu tối ưu

- Xác suất quyết định sai khi $P_1 = P_2$:

$$P[\text{error}] = Q \left(\frac{\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12}}{2\sqrt{N_0/2}} \right) = Q \left(\frac{\text{distance between the signals}}{2 \times \text{noise RMS value}} \right)$$

- Vậy: Xác suất quyết định sai (hay sai số quyết định) tỷ lệ nghịch với quãng cách giữa hai tín hiệu và tỷ lệ thuận với công suất nhiễu trong kênh.
 - Để tăng hiệu năng (độ chính xác quyết định) cần tăng quãng cách giữa các tín hiệu và/hoặc giảm nhiễu trong kênh
 - Các biện pháp tăng hiệu năng sẽ là tạo ra (thiết kế) các tín hiệu có quãng cách giữa chúng càng lớn càng tốt và/hoặc chống nhiễu trong kênh