NGƯT. ThS. LÊ HOÀNH PHÒ

2 trong 1

Các chuyên đề

BÁM SÁT ĐỀ THI

THPT QUỐC GIA

HÀM SỐ & PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LÔGARIT

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.S NHÀ GIÁO ƯU TÚ
LÊ HOÀNH PHÒ

CÁC CHUYÊN ĐỀ
BÁM SÁT ĐỀ THI THPT QUỐC GIA

HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH MŨ LÔGARIT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: *Biên tập – Chế bản:* (04) 39714896;
Quản lý xuất bản: (04) 39728806; Tổng biên tập: (04) 39715011
Fax: (04) 39729436

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc - Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: NGUYỄN CẢNH BA
Chế bản: NGUYỄN KHỞI MINH
Trình bày bìa: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Đối tác liên kết xuất bản:

NHÀ SÁCH HỒNG ÂN
20C Nguyễn Thị Minh Khai - Q1 - TP. Hồ Chí Minh

SÁCH LIÊN KẾT

CÁC CHUYÊN ĐỀ BÁM SÁT ĐỀ THI THPT QUỐC GIA
HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH MŨ LÔGARIT

Mã số: 1L-269ĐH2015
In 1.000 cuốn, khổ 17 × 24cm tại Công ti Cổ phần Văn hóa Văn Lang.
Địa chỉ: Số 6 Nguyễn Trung Trực - P5 - Q. Bình Thạnh - TP. Hồ Chí Minh
Số xuất bản: 1121- 2015/CXBIPH/48–189/ĐHQGHN, ngày 12/5/2015.
Quyết định xuất bản số: 287LK-TN/QĐ-NXBĐHQGHN, ngày 19/5/2015
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2015.

LỜI NÓI ĐẦU

Các Em học sinh thân mến!

Nhằm mục đích giúp các bạn học sinh lớp 12 chuẩn bị thật tốt cho **KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA** đạt điểm khá, điểm cao để trúng tuyển vào các trường Cao đẳng, Đại học mà mình đã xác định nghề nghiệp cho tương lai, theo định hướng mới.

Bộ sách này gồm 8 cuốn cho 8 chuyên đề, để các em tiện dùng trong ôn luyện theo chương trình học và trước kỳ thi:

- **KHẢO SÁT HÀM SỐ**

- **HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH MŨ LÔGARIT**

- **NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN**

- **SỐ PHỨC VÀ TỔ HỢP**

- **HÌNH HỌC KHÔNG GIAN**

- **TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN**

- **LƯỢNG GIÁC VÀ TỌA ĐỘ PHẲNG**

- **PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT ĐẲNG THỨC**

Cuốn **HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH MŨ LÔGARIT** gồm có 15 phần nhỏ để tiện luyện tập theo chủ đề. Từ các kiến thức và phương pháp giải Toán căn bản và nâng cao dần dần, kết hợp ôn tập Toán lớp 10 và 11, bổ sung và mở rộng kiến thức và phương pháp giải khác nhau, luyện tập thêm Toán khó, Toán tổng hợp, các bạn rèn luyện kỹ năng làm bài và từng bước giải đúng, giải gọn các bài tập, các bài toán trong kiểm tra, thi cử.

Dù đã cố gắng kiểm tra trong quá trình biên tập song cũng không tránh khỏi những sai sót mà tác giả chưa thấy hết, mong đón nhận các góp ý của quý bạn đọc, học sinh để lần in sau hoàn thiện hơn.

Tác giả

LÊ HOÀNH PHÒ

MỤC LỤC

§1 BIẾN ĐỔI LUỸ THỪA VÀ MŨ

Luỹ thừa với các loại số mũ

- Luỹ thừa với số mũ nguyên dương:

$a^n = a.a...a$, *n thừa số a (với mọi a và* $n \in \mathbf{N}^*$*)*

- Luỹ thừa với số mũ 0 và nguyên âm:

$$a^0 = 1 \text{ và } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ (với } a \neq 0 \text{ và } n \in \mathbf{N}^*)$$

- Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ;

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ a (với } a > 0 \text{ và } r = \frac{m}{n}, n \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^*)$$

- Luỹ thừa với số mũ thực:

$a^\alpha = \lim a^{r_n}$ *(với* $a > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $r_n \in \mathbf{Q}$ *và* $\lim r_n = \alpha$*).*

- Biến đổi luỹ thừa:

Với các số $a > 0$, $b > 0$, α *và* β *tuỳ ý, ta có:*

$a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$; $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$

$(a.b)^\alpha = a^\alpha.b^\alpha$; $(a: b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha$

Quan hệ so sánh

Nếu $\alpha > 1$ *thì:* $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

Nếu $0 < a < 1$ *thì:* $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

Nếu $0 < a < b$ *thì:* $a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0$; $a^\alpha > b^\alpha \Leftrightarrow \alpha < 0$.

Căn bậc cao

- Căn bậc n:

Khi n lẻ, $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$ *(với mọi a)*

Khi n chẵn, $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases}$ *(với* $a \geq 0$*).*

- Biến đổi căn bậc cao:

Với hai số không âm a, b, hai số nguyên dương m, n và hai số nguyên p, q tuỳ ý, ta có: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$;

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b > 0) \ ,\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p \ ; \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ *thì* $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$. *Đặc biệt* $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$.

Công thức lãi kép, tăng trưởng mũ

Gửi tiền vào ngân hàng theo thể thức lãi kép theo định kỳ: nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp. Nếu một người gửi số tiền A với lãi suất r mỗi kì thì sau N kì số tiền người ấy thu được cả vốn lẫn lãi là: $C = A(1 + r)^N$.

Giả sử ta chia mỗi kì thành m đợt để tính lãi và giữ nguyên lãi suất mỗi kì là r thì lãi suất mỗi đợt là $\frac{r}{m}$ *và số tiền thu được sau N kì (hay sau Nm đợt) là*

$A\left(1+\frac{2}{m}\right)^{Nm}$. *Thể thức tính lãi khi* $m \to +\infty$ *gọi là thể thức lãi kép liên tục.*

Như vậy với số vốn ban đầu là A, theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất mỗi kì là r thì sau N kì số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là:

$S = Ae^{Nr}$, *được gọi là công thức lãi kép liên tục hay tăng trưởng mũ*

Chú ý:

1) 0^0 *vô nghĩa.*

2) $\sqrt[3]{x} \neq x^{\frac{1}{3}}$ *(do điều kiện xác định khác nhau).*

3) Với A, B không âm:

$$\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}, \sqrt{A}.\sqrt{B} = \sqrt{A.B} \text{ và } \sqrt{M.N} = \sqrt{-M}.\sqrt{-N}, M \le 0, N \le 0.$$

Với A không âm và B dương:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}, \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \text{ và } \sqrt{\frac{P}{Q}} = \frac{\sqrt{-P}}{\sqrt{-Q}}, P \le 0, Q < 0.$$

4) Các hằng đẳng thức

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5, \ldots.$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n), \ldots$

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-1} + b^n)$ *với n lẻ.*

5) Nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Số hạng tổng quát thứ k + 1 là: $T_{k+1} = C_n^k . a^{n-k} . b^k$.

Đặc biệt: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = C_n^0 . x^0 + C_n^1 . x + \ldots + C_n^n . x^n$.

Bài toán 1.1: Thực hiện phép tính:

$$A = 81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}};\ B = 0{,}001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2}.64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2.$$

Giải

$$A = 81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}} = \left((3)^4\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^{-\frac{3}{5}}$$

$$= (3)^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{27} + 5 - 8 = \frac{1}{27} - 3 = -\frac{80}{27}.$$

$$B = 0{,}001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2}.64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2 = \left(10^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2}.\left(2^6\right)^{\frac{2}{3}} - \left(2^3\right)^{-\frac{4}{3}} + 1$$

$$= 10 - 2^2 - 2^{-4} + 1 = 7 - \frac{1}{16} = \frac{111}{16}.$$

Bài toán 1.2: Thực hiện phép tính:

$$A = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5};\ B = (-0{,}5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2 + \frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3}.$$

Giải

$$A = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} + \left(2^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}} - \left(5^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3^2 + 2^3 - 5 = 12.$$

$$B = (-0{,}5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2 + \frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3} = \left((-2)^{-1}\right)^{-4} - \left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} - \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{19}{-27}$$

$$= 2^4 - 5 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} - \frac{19}{27} = 11 - \frac{8}{27} - \frac{19}{27} = 10.$$

Bài toán 1.3: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$E = \left(0{,}5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}};\ F = 2^{2-3\sqrt{5}}.8^{\sqrt{5}}.$$

Giải

$$E = \left(0,5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} = 0,5^{\sqrt{16}} = 0,5^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$F = 2^{2-3\sqrt{5}}.8^{\sqrt{5}} = 2^{2-3\sqrt{5}}.2^{3\sqrt{5}} = 2^{2-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}} = 2^2 = 4\,;$$

Bài toán 1.4: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$E = 3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}}\,;\; F = \left(4^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right)2^{-2\sqrt{3}}.$$

Giải

$$E = 3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}} = 3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 3^{2\sqrt[3]{2}} = 3^{1+2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}} = 3^1 = 3$$

$$F = \left(4^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right)2^{-2\sqrt{3}} = 2^{4\sqrt{2}}.2^{-2\sqrt{3}} - 2^{2\sqrt{3}-2}.2^{-2\sqrt{3}} = 2^{2\sqrt{3}} - \frac{1}{4}.$$

Bài toán 1.5: Viết các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa của một số với số mũ hữu tỉ:

$$I = \sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}\ (x > 0);\; J = \sqrt[5]{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}\ (a > 0,\ b > 0).$$

Giải

$$I = \sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}} = \left(x^2 x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(x^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}}$$

$$J = \sqrt[5]{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}} = \left(\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{2}{15}}.$$

Bài toán 1.6: Viết các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa của một số với số mũ hữu tỉ:

$$I = \sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}\,;\; J = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}}\ (a > 0).$$

Giải

$$I = \sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}} = \left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$J = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}} = \left(a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{8}}.a^{\frac{1}{16}}\right) : a^{\frac{11}{16}} = a^{\frac{15}{16}} : a^{\frac{11}{16}} = a^{\frac{1}{4}}.$$

Bài toán 1.7: Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{18-8\sqrt{2}}.$

b) $B = \dfrac{\sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{7-3\sqrt{5}} - \sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{14-5\sqrt{3}}}$.

Giải

a) Ta có $3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2$ và $18-8\sqrt{2} = (4-\sqrt{2})^2$

Nên $A = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} + \sqrt{(4-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}+1+4-\sqrt{2} = 5$.

b) Ta có: $\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = 3-\sqrt{2}$

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{7-3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{(1+\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Biểu thức trên tử của B là: $3 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3$

Và $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{14-5\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(5-\sqrt{3})^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3}+5-\sqrt{3}\right) = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Vậy $B = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 1.8: Rút gọn các biểu thức:

a) $Q = \dfrac{x-14+2\sqrt{x+1}}{x+1-3\sqrt{x+1}}$

b) $P = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}\left[\sqrt{(2+x)^3} - \sqrt{(2-x)^3}\right]}{4+\sqrt{4-x^2}}$.

Giải

a) Điều kiện $x+1 \geq 0, x+1 \neq 3\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x \geq -1, x \neq 8$.

$$Q = \frac{x-14+2\sqrt{x+1}}{x+1-3\sqrt{x+1}} = \frac{(\sqrt{x+1}+1)^2 - 4^2}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1}+5)(\sqrt{x+1}-3)}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-3)} = \frac{\sqrt{x+1}+5}{\sqrt{x+1}} \quad (\text{ do } x \neq 8)$$

Vậy $Q = \dfrac{\sqrt{x+1}+5}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq -1, x \neq 8$.

b) Điều kiện $-2 \le x \le 2$.

Đặt $a = \sqrt{2+x}$; $b = \sqrt{2-x}$ $(a, b \ge 0)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4; a^2 - b^2 = 2x$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{2+ab}(a^3 - b^3)}{4+ab} = \frac{\sqrt{2+ab}(a-b)(a^2+b^2+ab)}{4+ab}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{2+ab}(a-b)(4+ab)}{4+ab} = \sqrt{2+ab}(a-b) \Rightarrow P\sqrt{2} = \sqrt{4+2ab}(a-b)$$

$$\Rightarrow P\sqrt{2} = \sqrt{(a^2+b^2+2ab)}(a-b) = (a+b)(a-b) \Rightarrow P\sqrt{2} = a^2 - b^2 = 2x.$$

Vậy $P = x\sqrt{2}$.

Bài toán 1.9: Tính giá trị của các biểu thức

a) $P = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$ với $x = \frac{7+\sqrt{45}}{2}$, $y = \frac{7-\sqrt{45}}{2}$.

b) $Q = \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ với $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, trong đó $a > 0, b > 0$.

Giải

a) Điều kiện $x > 0; y > 0$.

$$P = (\sqrt{x} - \sqrt{y})\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} = \frac{x-y}{\sqrt{xy}}$$

Với $x = \frac{7+\sqrt{45}}{2}$, $y = \frac{7-\sqrt{45}}{2}$ nên $x - y = \sqrt{45}$ và $\sqrt{xy} = \sqrt{\frac{49-45}{4}} = 1$

Do đó $P = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

b) Ta có $x^2 - 1 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 - 1 = \frac{(a-b)^2}{4ab}$

$$\Rightarrow Q = \frac{\frac{2|a-b|}{2\sqrt{ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} - \frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2|a-b|}{a+b-|a-b|}$$

Nếu $a \ge b \Rightarrow Q = \frac{2(a-b)}{a+b-(a-b)} = \frac{2(a-b)}{2b} = \frac{a-b}{b}$.

Nếu $a < b \Rightarrow Q = \frac{-2(a-b)}{a+b+a-b} = \frac{-2(a-b)}{2a} = \frac{b-a}{a}$.

Bài toán 1.10: Cho hàm số $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2021}$.

Tính f(a) tại $a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$.

Giải

Ta có: $a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

$\Rightarrow a^3 = 32 + 3\sqrt[3]{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})}.(\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}})$

$\Rightarrow a^3 = 32 + 3(-4)a \Rightarrow a^3 = 32 - 12a$

$\Rightarrow a^3 + 12a - 32 = 0 \Rightarrow a^3 + 12a - 31 = 1$

Vậy $f(a) = (a^3 + 12a - 31)^{2021} = 1^{2021} = 1$.

Bài toán 1.11: Cho $A = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$ và $B = \dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+1}}$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho $C = \dfrac{2A+B}{3}$ là một số nguyên.

Giải

Điều kiện xác định: $x \neq 1$ (do x nguyên)

Ta có $A = \dfrac{1}{|2x+1|}$; $B = \dfrac{2(x-1)}{|x-1|}$. Suy ra: $C = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{|2x+1|} + \dfrac{x-1}{|x-1|}\right)$

-Nếu x > 1. Khi đó:

$$C = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2x+1} + 1\right) = \frac{4(x+1)}{3(2x+1)} > 0 \Rightarrow C - 1 = \frac{4(x+1)}{3(2x+1)} - 1 = \frac{1-2x}{3(2x+1)} < 0$$

Suy ra $0 < C < 1$: C không thể là số nguyên.

- Nếu $-\dfrac{1}{2} < x < 1$ thì x = 0 (vì x nguyên) và C = 0.

Vậy x = 0 là một giá trị cần tìm

- Nếu $x < -\dfrac{1}{2}$ thì $x \leq -1$ (do x nguyên). Ta có:

$$C = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2x+1} - 1\right) = \frac{4(x+1)}{3(2x+1)} \leq 0 \text{ và } C + 1 = \frac{4(x+1)}{3(2x+1)} + 1 = \frac{2x-1}{3(2x+1)} > 0$$

Suy ra $-1 < C \leq 0$ hay C = 0 và x = -1

Vậy các giá trị tìm được thoả mãn yêu cầu là: x = 0, x = -1.

Bài toán 1.12: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}.$$

Giải

Điều kiện xác định $x \geq 0,\ x \neq 9$

$$A = \frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{2(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}-3-2x+12\sqrt{x}-18-x-4\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{x-1+9}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{9}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \sqrt{x}-1+\frac{9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1+\frac{9}{\sqrt{x}+1}-2 \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1).\frac{9}{\sqrt{x}+1}}-2 = 6-2=4.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \dfrac{9}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = 4$.

Bài toán 1.13: Đơn giản biểu thức trong điều kiện xác định:

$$M = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}};\ N = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}.$$

Giải

$$M = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b}$$

$$N = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}-(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) = 2\sqrt[3]{ab}.$$

Bài toán 1.14: Đơn giản biểu thức trong điều kiện xác định:

$$M = \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}.\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}.a^{\frac{1}{4}}+1;\ N = \frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}.$$

Giải

$$M = \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}.\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}.a^{\frac{1}{4}}+1$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}(\sqrt[4]{a}+1)}.\frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)}.\sqrt[4]{a}+1 = \sqrt{a}-1+1 = \sqrt{a}.$$

$$N = \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(a+1)} = (1+a) - (1-a) = 2a.$$

Bài toán 1.15: Rút gọn các biểu thức:

a) $R = \left(\frac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}.\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}}$ với a>0, x>0, a $\neq$x.

b) $S = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, với a, b > 0, $a^2 \geq b$.

Giải

a) Ta có $\frac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} = \frac{-\sqrt[4]{ax}(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}$

$$= -\sqrt[4]{ax} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} = \frac{-\sqrt{ax}+1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} = \frac{1}{\sqrt[4]{ax}}$$

và $\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}} = \sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2} = 1+\sqrt{\frac{a}{x}}$

Do đó $R = \left(\frac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}.\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}}$

$$= \sqrt{ax}\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right) = \sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{a}).$$

b) Đặt $u = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$, $v = \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ $(u \geq v \geq 0)$

thì $u^2 + v^2 = a$; $u^2v^2 = \frac{b}{4}$ nên $b = 4u^2v^2$ nên

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{u^2+v^2+2uv} = u+v = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Tương tự: $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{u^2+v^2-2uv} = u-v$

$$= \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Vậy $S = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.

Bài toán 1.16: Chứng minh

a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$ b) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$.

Giải

a) Vì $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} > 0$ nên $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow 4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2\sqrt{16-12} = 4$: đúng.

Cách khác: Ta có $4 \pm 2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 \pm 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} \pm 1)^2$

b) Đặt $x = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$. Ta có:

$x^3 = 9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}})$

$= 18 + 3\sqrt[3]{81-80}\,x = 18 + 3x$.

Do đó có phương trình: $x^3 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 6) \Leftrightarrow x = 3$: đpcm.

Cách khác: $\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{72 \pm 32\sqrt{5}}{8} = 9 \pm 4\sqrt{5} = 9 \pm \sqrt{80}$

nên $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3$.

Chú ý: Có thể dùng $S = 3$, $P = 1$ để tìm nghiệm của $X^2 - 3X + 1 = 0$.

Bài toán 1.17: Không dùng máy, tính giá trị đúng:

a) $\sqrt{15+6\sqrt{6}} + \sqrt{15-6\sqrt{6}}$ b) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

Giải

a) Ta có $(3\sqrt{2} \pm 2\sqrt{3})^2 = 18 + 12 \pm 12\sqrt{6} = 30 \pm 12\sqrt{6}$

nên $\sqrt{15+6\sqrt{6}} + \sqrt{15-6\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 6$

Cách khác: Đặt $\sqrt{15+6\sqrt{6}} + \sqrt{15-6\sqrt{6}} = x$, $x > 0$.

Ta có $x^2 = 30 + 2\sqrt{225-216} = 36$ nên chọn $x = 6$.

b) Ta có: $7 + 5\sqrt{2} = 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3$

Tương tự $7 - 5\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^3$

Do đó $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

Cách khác: Đặt $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. Ta có:

$x^3 = 7+5\sqrt{2} - (7-5\sqrt{2})-3(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}).(\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})})$

$\quad = 10\sqrt{2}+3(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}})=10\sqrt{2}+3x$.

Ta có phương trình:

$x^3 - 3x - 10\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (x - 2\sqrt{2})(x^2 + 2\sqrt{2}x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 1.18: Cho $x > 0$, $y > 0$, hãy biểu thị x qua y biết rằng:

$$y = x^{\frac{2}{3}},\ y = 2x^{-\frac{1}{4}},\ y = x^{-\frac{3}{2}}-1.$$

Giải

Ta có $x > 0$, $y > 0$ nên: $y = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = y^{\frac{3}{2}}$; $y = 2x^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow x = \left(\frac{y}{2}\right)^{-4}$

$$y = x^{-\frac{3}{2}}-1 \Rightarrow x^{-\frac{3}{2}} = y+1 \Rightarrow x = (y+1)^{-\frac{2}{3}}$$

Bài toán 1.19: Trục căn thức ở mẫu:

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}};\ B=\frac{1}{\sqrt[6]{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}.$$

Giải

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9}-2}=\frac{(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4)}{1}.$$

Vì $5-\sqrt{13+\sqrt{48}}=5-\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$

nên $B=\dfrac{1}{\sqrt[6]{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}=\dfrac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1).\sqrt[3]{4-2\sqrt{3}}}{2}$.

Bài toán 1.20: Cho $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Chứng minh:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=z^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow (x^2+y^2-z^2)^3+27x^2y^2z^2=0.$$

Giải

Ta có $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ nên: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=z^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^3=z^2$

$$\Leftrightarrow x^2+3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}+y^2=z^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - z^2 = -3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = -3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}$$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - z^2)^3 = -27x^2y^2z^2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - z^2)^3 + 27x^2y^2z^2 = 0$: đpcm.

Bài toán 1.21: Cho số tự nhiên n lẻ, chứng minh:

Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ thì $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$.

Giải

Từ giả thiết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c}$

$\Rightarrow (a + b).(a + b + c)c = abc - ab(a + b + c)$

$\Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0 \Rightarrow$ có 2 số đối nhau

Vì n lẻ nên $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$: đpcm.

Bài toán 1.22: Cho số tự nhiên n lẻ, chứng minh:

Nếu $ax^n = by^n = cz^n$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì: $\sqrt[n]{ax^{n-1} + by^{n-1} + cz^{n-1}} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}$.

Giải

Ta có $\sqrt[n]{ax^{n-1} + by^{n-1} + cz^{n-1}} = \sqrt[n]{\frac{ax^n}{x} + \frac{by^n}{y} + \frac{cz^n}{z}} = \sqrt[n]{ax^n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)}$

$= \sqrt[n]{ax^n} = x\sqrt[n]{a}$ (vì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, n lẻ)

Tương tự: $\sqrt[n]{ax^{n-1} + by^{n-1} + cz^{n-1}} = y\sqrt[n]{b} = z\sqrt[n]{c}$

$\Rightarrow VT\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 1.23: Trong khai triển nhị thức: $P(x) = \left(x^{-\frac{2}{3}} + x\sqrt{x}\right)^{13}$, $x > 0$.

a) Tìm hệ số của x^{13}

b) Tìm số hạng không chứa x.

Giải

Số hạng tổng quát của $P(x) = \left(x^{-\frac{2}{3}} + x\sqrt{x}\right)^{13}$ là:

$$T_{k+1} = C_{13}^k\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{13-k}\left(x\sqrt{x}\right)^k = C_{13}^k.x^{\frac{13k-52}{6}}.$$

a) Hệ số của x^{13} ứng với $\dfrac{13k-52}{6} = 13 \Leftrightarrow k = 10$ là: $T_{11} = C_{13}^{10} = 286$.

b) Số hạng không chứa x ứng với $13k - 52 = 0 \Leftrightarrow k = 4$ là $T_5 = C_{13}^{4} = 715$.

Bài toán 1.24: Trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\dfrac{b}{\sqrt[3]{b}}}\right)^{21}$, tìm hệ số của số hạng chứa a và b có số mũ bằng nhau.

Giải

Ta có $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\dfrac{b}{\sqrt[3]{b}}}\right)^{21} = \left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}} + \dfrac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right) = \sum\limits_{k=0}^{21} C_{21}^{k}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}}\right)^{21-k}\left(\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right)^{k}$

$= \sum\limits_{k=0}^{21} C_{21}^{k} a^{\frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}} . b^{\frac{k}{2}-\frac{21-k}{6}} = \sum\limits_{k=0}^{21} C_{21}^{k} a^{\frac{42-3k}{6}} b^{\frac{4k-21}{6}}$

Số mũ của a và b bằng nhau $\Leftrightarrow 42 - 3k = 4k - 21 \Leftrightarrow 7k = 63 \Leftrightarrow k = 9$.

Vậy hệ số của số hạng chứa a và b có số mũ bằng nhau trong khai triển là:

$$C_{21}^{9} = \frac{21!}{9!12!} = 293\ 930.$$

Bài toán 1.25: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^{n}$, $x > 0$ biết rằng tổng các hệ số của khai triển $(a + b)^n$ bằng 4096, $n \in \mathbf{N}^*$.

Giải

Ta có: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

Do vậy tổng các hệ số khai triển của $(a + b)^n$ là

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

Theo giả thiết, ta có: $2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$.

Với n = 12 ta có:

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^{12} = \left(x^{\frac{1}{2}} + 2^{-1}.x^{-\frac{1}{4}}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{12-k}\left(2^{-1}.x^{\frac{1}{4}}\right)^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k} 2^{-k} x^{\frac{24-3k}{4}}$$

Số hạng tổng quát của khai triển là:

$C_{12}^{k} 2^{-k} x^{\frac{24-3k}{4}}$ $(k \in \mathbf{N}$ và $k \leq 12)$

Suy ra số hạng không chứa x tương ứng với số hạng có k thỏa mãn:

$$\frac{24-3k}{4} = 0 \Leftrightarrow k = 8 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số hạng không chứa x là: $C_{12}^{8}.2^{-8}$.

Bài toán 1.26: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, hỏi số tiền người đó thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 5 năm là bao nhiêu triệu đồng?

Giải

Áp dụng công thức tính lãi kép: $C = A(1+r)^N$ nên sau 5 năm người gửi thu được một số tiền cả vốn lẫn lãi là: $C = 15(1+0{,}0756)^5 \approx 21{,}59$ (triệu đồng).

BÀI TẬP

Bài tập 1.1: Tính gọn:

a) $S = \dfrac{2:4^{-2} + (3^{-2})^3.(\frac{1}{9})^{-3}}{5^{-3}.25^2 + (0{,}7)^0.(\frac{1}{2})^{-2}}$ b) $T = \dfrac{3\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \sqrt{3}$.

HD-ĐS

a) $S = 11/3$. b) $T = 4$.

Bài tập 1.2: Tính gọn:

a) $T = (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1), x \geq 0$.

b) $S = \dfrac{2\sqrt{4 - \sqrt{5 + \sqrt{21 + \sqrt{80}}}}}{\sqrt{10} - \sqrt{2}}$.

HD-ĐS

a) Dùng hằng đẳng thức $T = x^2 + x + 1$.

b) $\sqrt{21 + \sqrt{80}} = \sqrt{1 + 4\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2} = 1 + 2\sqrt{5}$, $S = 1$.

Bài tập 1.3: Tính gọn:

a) $A = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$

b) $B = (\sqrt[6]{25 + 4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}})\sqrt[3]{1 - 2\sqrt{6}}$.

HD-ĐS

a) $A = 4$ b) Dùng hằng đẳng thức, $B = 0$.

Bài tập 1.4: Chứng minh:

Nếu $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c}$ thì $\dfrac{1}{a^7} + \dfrac{1}{b^7} + \dfrac{1}{c^7} = \dfrac{1}{a^7 + b^7 + c^7}$.

HD-ĐS

Từ giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c}$.

Bài tập 1.5: Chứng minh:

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}=\sqrt{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^3}.$$

HD-ĐS

Bình phương tương đương.

Bài tập 1.6: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$.Tìm hệ số của x^8 trong khai triển:

$$P(x)=\left(\frac{2}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n, \text{ với } x>0.$$

HD-ĐS

$C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3) \Leftrightarrow n=12.$

$$P(x)=\left(\frac{2}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k2^kx^{-3k}x^{\frac{5(2-k)}{2}}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k2^kx^{\frac{60-11k}{2}}$$

Hệ số của x^8 là $C_{12}^4 2^4=7920$.

Bài tập 1.7: Tính hệ số của x^9 trong khai triển $\left(2-\sqrt[3]{3}x\right)^{2n}$ biết rằng số tự nhiên n thỏa mãn hệ thức:

$$C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+C_{2n+1}^5+...+C_{2n+1}^{2n+1}=4096.$$

HD-ĐS

$$2^{2n+1}=(1+1)^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^3+...+C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$0^{2n+1}=(1-1)^{2n+1}=C_{2n+1}^0-C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2-C_{2n+1}^3+...-C_{2n+1}^{2n+1}$$

Suy ra $2^{2n+1}=2\left(C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+...+C_{2n+1}^{2n+1}\right)$ nên n = 6.

Do đó $(2-\sqrt[3]{3}x)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k2^{12-k}(-\sqrt[3]{3})^kx^k$.

Hệ số của x^9 ứng với k = 9 là $C_{12}^9 2^{12-9}(-\sqrt[3]{3})^9=-47520$.

Bài tập 1.8: Cho $x=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$. Không dùng máy tính, hãy tính giá trị của biểu thức $B=x^5-6x^4+12x^3-4x^2-13x+2023$.

HD-ĐS

$$x=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})^2}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, B=2018.$$

Bài tập 1.9: Cho $sh(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$; $ch(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Chứng minh:

a) $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

b) $ch^2(x) - sh^2(x) = \left(\dfrac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2$.

HD-ĐS

Dùng giả thiết và hằng đẳng thức.

2 BIẾN ĐỔI LÔGARIT

Định nghĩa và tính chất

- *Lôgarit cơ số a:* $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$ *(*$0 < a \neq 1$ *và* $b > 0$*)*
- *Lôgarit cơ số 10:* $\log_{10} b = \lg b$ *hay* $\log b$
- *Lôgarit cơ số e:* $\log_e b = \ln b$ *(*$e \approx 2,7183$*)*
- *Tính chất:* $\log_a 1 = 0$ *và* $\log_a a^b = b$ *với* $a > 0, a \neq 1$.

  $a^{\log_a b} = b$ *với* $a > 0, b > 0, a \neq 1$.

Biến đổi lôgarit

Trong điều kiện xác định thì:

$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $\log_a\left(\dfrac{1}{c}\right) = -\log_a c$

$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ *(với mọi* α*)*, $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$ *(*$n \in N^*$*)*

Các loại cơ số

Lôgarit cơ số 10: $\log_{10} b = \lg b$ *hay* $\log b$

Lôgarit cơ số e: $\log_e b = \ln b$ *(*$e \approx 2,7183$*)*

Đổi cơ số

Trong điều kiện xác định:

$\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ *hay* $\log_a b . \log_b x = \log_a x$

$\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ *hay* $\log_a b . \log_b a = 1$; $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$

Quan hệ so sánh

Với $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$:

Nếu $a > 1$ thì: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

Nếu $0 < a < 1$ thì: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

Nếu $a > 1$ thì: $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$.

Nếu $0 < a < 1$ thì: $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$.

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c.$$

Bài toán 2.1: Tính:

$$A = \log_{\frac{1}{5}} 125\ ; \quad B = \log_{0,5}\frac{1}{2}; \quad C = \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{64}; \quad D = \log_{\frac{1}{6}} 36.$$

Giải

$$A = \log_{\frac{1}{5}} 125 = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = -3; \qquad B = \log_{0,5}\frac{1}{2} = \log_{0,5} 0,5 = 1$$

$$C = \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{64} = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{3} = 3; \qquad D = \log_{\frac{1}{6}} 36 = \log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = -2.$$

Bài toán 2.2: Tính:

$$A = 3^{\log_3 18}\ ; \quad B = 3^{5\log_3 2}\ ; \quad C = \left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5}; \quad D = \left(\frac{1}{32}\right)^{\log_{0.5} 2}.$$

Giải

$$A = 3^{\log_3 18} = 18\ ;$$

$$B = 3^{5\log_3 2} = 3^{\log_3 2^5} = 2^5 = 32$$

$$C = \left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5} = (2^{-3})^{\log_2 5} = 2^{(-3)\log_2 5} = 2^{\log_2 5^{-3}} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$$

$$D = \left(\frac{1}{32}\right)^{\log_{0.5} 2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 2} = 2^5 = 32.$$

Bài toán 2.3: Tính:

a) $M = \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$ b) $N = \frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7\sqrt[3]{21}$.

Giải

a) $M = \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20 = \log_8\left(\frac{12}{15}.20\right) = \log_8 4^2 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}$

b) $N = \frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7\sqrt[3]{21} = \log 7\left(\frac{6}{1421}\right) = \log_7 7^{-2} = -2.$

Bài toán 2.4: Tính:

a) $M = \dfrac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$ b) $N = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 8^{\log_2 3}$.

Giải

a) $M = \dfrac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9} = \dfrac{\log_5 3}{2\log_5 3} = \dfrac{1}{2}$

b) $N = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 8\log_2 3 = 6^{\log_6 5^2} + 10^{\log_{10} 5} - 2^{\log_2 3^3} = 5^2 + 5 - 3^3 = 3.$

Bài toán 2.5: Tính gọn:

a) $M = \log_a\left(\dfrac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}\right)$ b) $N = \log_5\log_5 \sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{...\sqrt[5]{5}}}}$, n dấu căn.

Giải

a) Ta có $\dfrac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} = a^{2+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{173}{60}}$. Do đó: $M = \log_a\left(\dfrac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}\right) = \dfrac{173}{60}$

b) Vì có n dấu căn nên $\sqrt[5]{\sqrt[5]{...\sqrt[5]{5}}} = 5^{\left(\frac{1}{5}\right)^n}$. Do đó: $N = \log_5\log_5 \sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{...\sqrt[5]{5}}}} = -n$.

Bài toán 2.6: Tính gọn:

a) $M = \log 72 - 2\log\dfrac{27}{256} + \log\sqrt{108}$ b) $N = \log\dfrac{1}{8} - \log 0{,}375 + 2\log\sqrt{0{,}5625}$.

Giải

a) $M = \log 72 - 2\log\dfrac{27}{256} + \log\sqrt{108} = \log(2^3.3^2) - \log\dfrac{3^6}{2^{16}} + \log\sqrt{2^2.3^3}$

$= \log\left(2^3.3^2.\dfrac{2^{16}}{3^6}.2.3^{\frac{3}{2}}\right) = \log\left(2^{20}.3^{\frac{5}{2}}\right) = 20\log 2 - \dfrac{5}{2}\log 3$

b) $N = \log\dfrac{1}{8} - \log 0{,}375 + 2\log\sqrt{0{,}5625} = \log 2^{-3} - \log(0{,}5^3.3) + 2\log\sqrt{0{,}5^4.3^2}$

$= \log 2^{-3} - \log 2^{-3} - \log 3 + 2\log 2^{-2} + 2\log 3 = \log 2^{-4} + \log 3 = \log\dfrac{3}{16}$.

Bài toán 2.7: Rút gọn các biểu thức:

$A = \log_3 6.\ \log_8 9.\ \log_6 2$; $B = \log_3 2.\ \log_4 3.\ \log_6 5.\ \log_7 6.\ \log_8 7$.

Giải

$A = \log_3 6.\log_6 2.\log_8 9 = \log_3 2.\ \dfrac{1}{3}\log_2 9 = \dfrac{1}{3}\log_3 9 = \dfrac{2}{3}$

$B = \log_3 2.\log_4 3.\ \log_5 4.\ \log_6 5.\ \log_7 6.\ \log_8 7$

$= \frac{\log 2}{\log 3}.\frac{\log 3}{\log 4}.\frac{\log 4}{\log 5}.\frac{\log 5}{\log 6}.\frac{\log 6}{\log 7}.\frac{\log 7}{\log 8} = \frac{\log 2}{\log 8} = \log_8 2 = \frac{1}{3}\log_2 2 = \frac{1}{3}$.

Bài toán 2.8: Rút gọn các biểu thức:

$A = \log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$; $\qquad B = a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$.

Giải

Ta có: $A = \log_a b^2 + \log_{a^2} b^4 = \log_a b^2 + \frac{1}{2}\log_a b^4 = \log_a b^2 + \log_a b^2 = 2\log_a b^2$.

Đặt $x = \sqrt{\log_a b} \Rightarrow \log_a b = x^2 \Rightarrow b = a^{x^2}$

Mặt khác $\log_b a = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \sqrt{\log_b a} = \frac{1}{x}$.

Do đó: $B = a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = a^x - a^{x^2 \cdot \frac{1}{x}} = 0$.

Bài toán 2.9: Tính $\log_a x$, biết $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$ với:

a) $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$ $\qquad$ b) $x = \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$.

Giải

a) $\log_a x = \log_a(a^3 b^2 \sqrt{c}) = 3 + 2\log_a b + \frac{1}{2}\log_a c = 3 + 2.3 + \frac{1}{2}(-2) = 8$

b) $\log_a x = \log_a\left(\frac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}\right) = 4 + \frac{1}{3}\log_a b - 3\log_a c = 4 + \frac{1}{3}.3 - 3(-2) = 11$.

Bài toán 2.10: Tìm cơ số x biết rằng:

a) $\log_x \frac{1}{7} = -1$ $\qquad$ b) $\log_x \sqrt{5} = -4$.

Giải

Điều kiện cơ số $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) $\log_x \frac{1}{7} = -1 \Leftrightarrow x^{-1} = \frac{1}{7} = 7^{-1} \Leftrightarrow x = 7$.

b) $\log_x \sqrt{5} = -4 \Leftrightarrow x^{-4} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{5}\right)^{-\frac{1}{4}} = 5^{-\frac{1}{8}}$

Bài toán 2.11: Tìm x biết:

a) $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$ $\qquad$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a + \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$.

Giải

a) Điều kiện $x > 0$.

$$\log_5 x = \log_5 a^2 - \log_5 b^3 = \log_5 \frac{a^2}{b^3} \Rightarrow x = \frac{a^2}{b^3}$$

b) Điều kiện x > 0.

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} a^{\frac{2}{3}} + \log_{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{5}} = \log_{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{1}{5}}\right) \Rightarrow x = a^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{1}{5}}.$$

Bài toán 2.12:

a) Tính $\log_{25}15$ theo $a = \log_{15}3$. b) Tính $\log_4 1250$ theo $b = \log_2 5$.

Giải

a) $\log_{25}15 = \dfrac{1}{\log_{15}25} = \dfrac{1}{2\log_{15}5} = \dfrac{1}{2(\log_{15}15 - \log_{15}3)} = \dfrac{1}{2(1-a)}$

b) $\log_4 1250 = \dfrac{1}{2}\log_2(5^4.2) = 2\log_2 5 + \dfrac{1}{2} = 2b + \dfrac{1}{2}$.

Bài toán 2.13:

a) Tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo $\log_3 15 = a$, $\log_3 10 = b$.

b) Tính ln6,25 theo c = ln2, d = ln5.

Giải

a) $\log_{\sqrt{3}} 50 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 50 = 2\log_3 50 = 2\log_3 10 + 2\log_3 5$

$= 2\log_3 10 + 2\log_3 \dfrac{15}{3} = 2\log_3 10 + 2(\log_3 15 - 1)$

$= 2b + 2(a - 1) = 2a + 2b - 2.$

b) $\ln 6{,}25 = \ln(5^2.0{,}5^2) = 2\ln 5 + 2\ln 0{,}5 = 2\ln 5 - 2\ln 2 = 2d - 2c$.

Bài toán 2.14:

a) Cho $\log_6 15 = x$, $\log_{12}18 = y$, tính $\log_{25}24$ theo x, y.

b) Cho $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$, $c = \log_7 2$, tính $\log_{140}63$ theo a, b, c.

Giải

a) Ta có $x = \dfrac{\log_2 3.5}{\log_2 2.3} = \dfrac{\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3}$ và $y = \dfrac{\log_2 2.3^2}{\log_2 2^2.3} = \dfrac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}$

Suy ra $\log_2 3 = \dfrac{2y-1}{2-y}$; $\log_2 5 = \dfrac{x+1-2y+xy}{2-y}$

Do đó $\log_{25}24 = \dfrac{\log_2 2^3.3}{\log_2 5^2} = \dfrac{5-y}{2(x+1-2y+xy)}$.

b) $\log_{140}63 = \log_{140}(3^2.7) = 2\log_{140}3 + \log_{140}7$

$$= \frac{2}{\log_3 140} + \frac{1}{\log_7 140} = \frac{2}{\log_3(2^2.5.7)} + \frac{1}{\log_7(2^2.5.7)}$$

$$= \frac{2}{2\log_3 2 + \log_3 5 + \log_3 7} + \frac{1}{2\log_7 2 + \log_7 5 + 1}$$

Ta có $\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{a}$, $\log_7 5 = \log_7 2.\log_2 3.\log_3 5 = cab$;

$$\log_3 7 = \frac{1}{\log_7 3} = \frac{1}{\log_7 2.\log_2 3} = \frac{1}{ca}$$

Vậy $\log_{140} 63 = \dfrac{2}{\frac{2}{a} + b + \frac{1}{ca}} + \dfrac{1}{2c + cab + 1} = \dfrac{2ac + 1}{abc + 2c + 1}$.

Bài toán 2.15: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

a) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ b) $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

Giải

a) $a^{\log_c b} = b^{\log_b a^{\log_c b}} = b^{\log_c b.\log_b a} = b^{\log_c a}$

b) $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \dfrac{\log_a x}{\dfrac{\log_a x}{\log_a ab}} = \log_a ab = \log_a a + \log_a b = 1 + \log_a b$

Bài toán 2.16: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + ... + \frac{1}{\log_{a^n} b} = \frac{n(n+1)}{2\log_a b}.$$

Giải

Ta có $\dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{1}{\log_{a^2} b} + \dfrac{1}{\log_{a^3} b} + ... + \dfrac{1}{\log_{a^n} b}$

$$= \frac{1}{\log_a b} + \frac{2}{\log_a b} + \frac{3}{\log_a b} + ... + \frac{n}{\log_a b}$$

$$= (1 + 2 + 3 + ... + n).\frac{1}{\log_a b} = \frac{n(n+1)}{2\log_a b}.$$

Bài toán 2.17: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

a) Nếu $a^2 + b^2 = 7ab$ thì $\log_7 \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}(\log_7 a + \log_7 b)$

b) Nếu $\log_{12} 18 = a$, $\log_{24} 54 = b$, thì $ab + 5(a - b) = 1$.

Giải

a) $a^2 + b^2 = 7ab \Rightarrow (a+b)^2 = 9ab \Rightarrow \dfrac{a+b}{3} = \sqrt{ab} \Rightarrow$ đpcm.

b) $a = \log_{12}18 = \dfrac{\log_2 2.3^2}{\log_2 2^2.3} = \dfrac{1+2\log_2 3}{2+\log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \dfrac{2a-1}{2-a}$

$b = \log_{24}54 = \dfrac{\log_2 54}{\log_2 24} = \dfrac{1+3\log_2 3}{3+\log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \dfrac{3b-1}{3-b}$

Do đó $\dfrac{2a-1}{2-a} = \dfrac{3b-1}{3-b} \Rightarrow 6a - 2ab - 3 + b = 6b - 3ab - 2 + a \Rightarrow ab + 5(a-b) = 1$.

Bài toán 2.18: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

a) Nếu $a^2 + c^2 = b^2$ thì $\log_{b+c}a + \log_{b-c}a = 2\log_{b+c}a.\log_{b-c}a$.

b) Nếu a, b, c lập cấp số nhân thì $\dfrac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} = \dfrac{\log_a d}{\log_c d}$.

Giải

a) Theo giả thiết: $a^2 + c^2 = b^2$ nên $a^2 = (b-c)(b+c)$.

Xét $a = 1$: đúng.

Xét $a \neq 1$ thì $\log_a(b-c) + \log_a(b+c) = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\log_{b-c}a} + \dfrac{1}{\log_{b+c}a} = 2$

nên $\log_{b+c}a + \log_{b-c}a = 2\log_{b+c}a.\log_{b-c}a$

b) Ta có $\log_a d - \log_b d = \dfrac{1}{\log_d a} - \dfrac{1}{\log_d b} = \dfrac{\log_d\left(\dfrac{c}{b}\right)}{(\log_d a)(\log_d b)}$

Tương tự: $\log_b d - \log_c d = \dfrac{1}{\log_d b} - \dfrac{1}{\log_d c} = \dfrac{\log_d\left(\dfrac{c}{a}\right)}{(\log_d b)(\log_d c)}$

Vì a, b, c lập thành cấp số nhân nên $\dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \log_d\left(\dfrac{c}{b}\right) = \log_d\left(\dfrac{b}{a}\right)$

Do đó $\dfrac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} = \dfrac{\log_d c}{\log_d a} = \dfrac{\log_a d}{\log_c d}$.

Bài toán 2.19: Trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt{x^{\frac{1}{\lg x+1}}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$, biết số hạng thứ tư bằng 200. Tìm x?

Giải

ĐK: $x > 0, x \neq \frac{1}{10}$. Ta có:

$$\left(\sqrt{x^{\frac{1}{\lg x+1}}}+\sqrt[12]{x}\right)^6=\left(x^{\frac{1}{2(\lg x+1)}}+x^{\frac{1}{12}}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}C_6^k x^{\frac{6-k}{2(\lg x+1)}}.x^{\frac{k}{12}}$$

Số hạng thứ 4 ứng với k = 3, theo giả thiết bằng 200 nên:

$$C_6^3 x^{\frac{3}{2(\lg x+1)}+\frac{1}{4}}=200 \Leftrightarrow x^{\frac{7+\lg x}{4\lg x+4}}=10 \Leftrightarrow \frac{7+\lg x}{4\lg x+4}\lg x=1$$

$$\Leftrightarrow \lg^2 x+3\lg x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x=1\\ \lg x=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10\\ x=10^{-4}\end{array}\right. \text{ (Chọn).}$$

Vậy giá trị cần tìm là $x = 10, x = 10^{-4}$.

Bài toán 2.20: Tìm các giá trị x sao cho số hạng thứ ba trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(3^{-\frac{1}{3}(\log x^3+1)}+3^{\log^2 x^2}\right)^8$ bằng 28.

Giải

Điều kiện $x > 0$.

Số hạng thứ ba trong khai triển nhị thức Niu-tơn trên là:

$$C_8^2\left(3^{\log^2 x^2}\right)\left(3^{-\frac{1}{3}(\log^3+1)}\right)^8=28.3^{8\log^2 x}3^{-2(\log x^3+1)}=28.3^{8\log^2 x-2(\log x^3+1)}.$$

Theo giả thiết ta có:

$$28.3^{2\log^2 x^2-2(\log x^3+1)}=28 \Leftrightarrow 3^{2\log^2 x^2-2(\log x^3+1)}=1$$

$\Leftrightarrow 2\log^2 x^2 - 2(\log x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow 4\log^2 x - 3\log x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log x=1\\ \log x=-\frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10\\ x=\frac{1}{\sqrt[4]{10}}\end{array}\right.$$

Vậy x cần tìm là $x = 10$ hoặc $x = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$.

Bài toán 2.21: Cho khai triển Niu-tơn $\left(2^{\log_2\sqrt[3]{9^{x-1}+7}}+2^{-\frac{1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)}\right)^8$. Hãy tìm các giá trị của x, biết rằng số hạng thứ 6 từ trái sang phải trong khai triển này là 224.

Giải

Ta có: $(a+b)^8 = \sum_{k=0}^{k=8} C_8^k a^{8-k} b^k$.

Với $a = 2^{\log_2 \sqrt[3]{9^{x-1}+7}} = \left(9^{x-1}+7\right)^{\frac{1}{3}}$; $b = 2^{-\frac{1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)} = \left(3^{x-1}+1\right)^{-\frac{1}{5}}$

Theo thứ tự trong khai triển trên, số hạng thứ sáu tính theo chiều từ trái sang phải của khai triển là:

$$T_6 = C_8^5\left(\left(9^{x-1}+7\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3 . \left(\left(3^{x-1}+1\right)^{-\frac{1}{5}}\right)^5 = 56\left(9^{x-1}+7\right)\left(3^{x-1}+1\right)^{-1}$$

Theo giả thiết ta có:

$$56\left(9^{x-1}+7\right)\left(3^{x-1}+1\right)^{-1} = 224 \Leftrightarrow \frac{9^{x-1}+7}{3^{x-1}+1} = 4 \Leftrightarrow 9^{x-1} + 7 = 4(3^{x-1}+1)$$

$$\Leftrightarrow \left(3^{x-1}\right)^2 - 4\left(3^{x-1}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x-1} = 1 \\ 3^{x-1} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy x = 1 hoặc x = 2 là giá trị cần tìm.

Bài toán 2.22: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng cả vốn lẫn lãi từ số vốn ban đầu?

Giải

Số tiền cả vốn lẫn lãi người gửi sẽ có sau n quý là:

$S = 15(1 + 0{,}0165)^n = 15.1{,}0165^n$ (triệu đồng).

nên $\log S = \log 15 + n\log 1{,}0165 \Rightarrow n = \dfrac{\log S - \log 15}{\log 1{,}0165}$

Để có được số tiền 20 triệu đồng thì phải sau một thời gian là:

$n = \dfrac{\log 20 - \log 15}{\log 1{,}0165} \approx 18$ (quý) = 4 năm 6 tháng.

Bài toán 2.23: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7% và sự tăng dân số được ước tính theo công thức tăng trưởng mũ. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 100 triệu người?

Giải

Theo bài ra, ta có: $S = Ae^{Nr} \Rightarrow 100 = 78{,}6858.e^{0{,}017N}$, do đó:

$$\ln 100 = \ln\left(78{,}6858.e^{0{,}017N}\right) \Rightarrow N = \frac{\ln 100 - \ln 78{,}6858}{0{,}017} \approx 14.$$

Vậy đến năm 2015 dân số nước ta sẽ ở mức 100 triệu người.

Bài toán 2.24: Số 2^{2012}; $2^{1398269}$ -1 khi viết trong hệ thập phân thì có bao nhiêu chữ số?

Giải

Lấy giá trị gần đúng của log2 là 0,3010 thì được:

$[2012.\log 2] + 1 = [2012.0,3010] + 1 = [605,692] + 1 = 606$

Vậy số 2^{2012} có 606 chữ số.

Và $[1398269.\log 2] + 1 = [420920,911] + 1 = 420921$

Vậy số $2^{1398269}$ - 1 có 420921 chữ số.

BÀI TẬP

Bài tập 2.1: Tìm cơ số x, biết:

a) $\log_x 243 = 5$ b) $\log_x \sqrt[10]{3} = -0,1$

HD-ĐS

a) x = 3   b) x = 1/3.

Bài tập 2.2: Tính gọn:

a) $A = \log_3 6.\log_8 9.\log_6 2$ b) $B = \sqrt{\log_{0,5}^2 4}$.

HD-ĐS

a) A = 2/3   b) B =2.

Bài tập 2.3: Tính gọn:

a) $M = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2}$

b) $N = \log_3 2.\log_4 3.\log_5 4.\log_6 5.\log_7 6.\log_8 7$

HD-DS

a) M = 30   b) N = 1/3.

Bài tập 2.4: Tính:

a) A $=\log_a(a^3.\sqrt[5]{a})$ b) B = $\log_a \dfrac{a^2.\sqrt[5]{a^2}.\sqrt[3]{a^4}}{a^3.\sqrt{a}}$.

HD-ĐS

a) A = $\dfrac{16}{5}$ b) B = $\dfrac{16}{15}$.

Bài tập 2.5: Tính $\log_{25}24$ theo a = $\log_6 15$ và b = $\log_{12}18$.

HD-ĐS

$$\log_{25}24 = \frac{5-b}{2(a+17ab-2b)}$$

Bài tập 2.6: Tính $\log_a 2$ theo x = $\log_a 5$; y = $\log_a 60$ và z = $\log_a 108$.

HD-ĐS

$\log_a 2 = \dfrac{1}{4}(3y - 3x - z)$.

Bài tập 2.7: Chứng minh nếu $\log_x a, \log_y b, \log_z c$ tạo thành một cấp số cộng theo thứ tự đó thì: $\log_b y = \dfrac{2\log_a x \log_c z}{\log_a x + \log_c z} (0 < x, y, z, a, b, c \neq 1)$

HD-ĐS

$\log_x a, \log_y b, \log_z c$ tạo thành một cấp số cộng theo thứ tự đó thì:

$\log_x a + \log_z c = 2\log_y b$.

3 HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LUỸ THỪA

Hàm số luỹ thừa

Hàm số $y = x^\alpha$ với a thuộc ***R****.*

Liên tục trên tập xác định của nó.

Đạo hàm $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$;

$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ *(x > 0)*, $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$, *với $u = u(x) > 0$.*

Hàm số $y = x^\alpha$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $\alpha > 0$; nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $\alpha < 0$.

Chú ý: *Tập xác định:*

$y = x^n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$: $D = \mathbf{R}$

$y = x^m$ $(m \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}^*)$: $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})$: $D = (0; +\infty)$.

Hàm số mũ

Hàm số $y = a^x$ với cơ số $a > 0$, $a \neq 1$.

Liên tục trên tập xác định ***R****, nhận mọi giá trị thuộc $(0; +\infty)$.*

$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a > 1 \\ 0 & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{khi } a > 1 \\ +\infty & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$

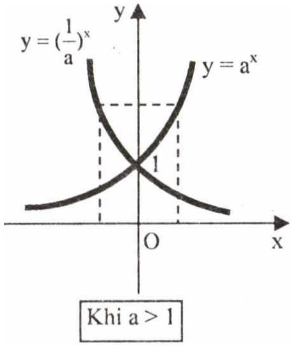
Đạo hàm: $(a^x)' = a^x \ln a$; $(e^x)' = e^x$;

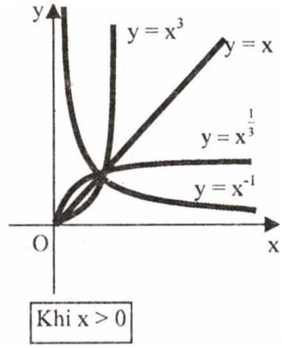
$(a^u)' = a^u u' \ln a$; $(e^u)' = e^u u'$ với $u = u(x)$.

Đồng biến trên ***R*** *nếu $a > 1$, nghịch biến trên* ***R*** *nếu $0 < a < 1$.*

Đồ thị luôn cắt trục tung tại điểm (0; 1), nằm ở phía trên trục hoành và nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

Đồ thị và quan hệ đối xứng





Các dạng vô định

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Chú ý: quan hệ so sánh

Nếu $\alpha > 1$ thì: $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

Nếu $0 < a < 1$ thì: $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

Nếu $0 < a < b$ thì: $a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0$,; $a^\alpha > b^\alpha \Leftrightarrow \alpha < 0$.

Bài toán 3.1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 - 4x + 3)^{-5}$ b) $y = (x^2 - 4x + 3)^{\sqrt{2}}$.

Giải

a) Hàm số xác định khi: $x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq 3$.

Vậy D = **R** \ {1; 3}.

b) Hàm số xác định khi: $x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ hoặc $x > 3$.

Vậy D = $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

Bài toán 3.2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{-1}{3}}$ b) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x}$.

Giải

a) Hàm số xác định khi: $x^3 - 3x^2 + 2x > 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ hoặc $x > 2$.

Vậy D = $(0; 1) \cup (2; +\infty)$

b) Hàm số căn bậc 3 xác định với mọi x nên D = **R**.

Bài toán 3.3: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{\frac{5-3^x}{3^x-1}}$ b) $y = \sqrt{4^x + 2^x - 12}$.

Giải

a) ĐK: $\dfrac{5-3^x}{3^x-1} > 0 \Leftrightarrow (5 - 3^x)(3^x - 1) \geq 0,\ 3^x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow 1 < 3^x \leq 5 \Leftrightarrow 0 < x \leq \log_3 5.$

Vậy D = $(0; \log_3 5]$

b) ĐK: $4^x + 2^x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 2^x \leq -4$ hoặc $2^x \geq 3$.

$\Leftrightarrow 2^x \geq 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3.$

Vậy D = $[\log_2 3; +\infty)$

Bài toán 3.4: Chứng minh các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\ln a^x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}.\ln a = \ln a$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a = e^a$.

Bài toán 3.5: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-e^{3x+2}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-e^{3x+2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2(1-e^{3x})}{x} = -3e^2.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x} = -3e^2$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{x}-\dfrac{e^{5x}-1}{x}\right) = 2-5=-3$

Bài toán 3.6: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+5^x-2}{3^x+5^x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{e^{3x}-7^x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+5^x-2}{3^x+5^x-2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2^x-1}{x}+\dfrac{5^x-1}{x}}{\dfrac{3^x-1}{x}+\dfrac{5^x-1}{x}} = \dfrac{\ln 2+\ln 5}{\ln 3+\ln 5} = \dfrac{\ln 10}{\ln 15}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{e^{3x}-7^x}=\lim_{x\to 0}\frac{4.\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{e^{3x}-1}{x}-\frac{7^x-1}{x}}=\frac{4}{3-\ln 7}$.

Bài toán 3.7: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^x$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x$.

Giải:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{x-3}\right]^{\frac{x}{x-3}}=e^1=e$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x+1}}=e^2$.

Bài toán 3.8: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+x}}{\tan x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$.

Giải:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+x}}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}-\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}\right):\frac{\sin x}{x\cos x}=(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}):1=\frac{5}{12}$.

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+ax+1}{x(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+1)}=\frac{a}{n}$.

Vậy $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\frac{a}{n}$.

Bài toán 3.9: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-e^x}{3x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{3x+8}-2.e^x}{5x}$.

Giải

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-e^x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1+1-e^x}{3x}$

Ta có $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+1-1}{3x(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{3x(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{3(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \frac{1}{6} \text{ và } \lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{3x} = -\frac{1}{3}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1+1-e^x}{3x} = \dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{6}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-2.e^x}{5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-2+2-2.e^x}{5x}$

Ta có: $\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-2}{5x} = \dfrac{3x+8-8}{5x\left[(\sqrt[3]{x+8})^2+2.\sqrt[3]{x+8}+4\right]}$

$$= \frac{3}{5\left[(\sqrt[3]{x+8})^2+2\sqrt[3]{x+8}+4\right]}$$

nên $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-2}{5x} = \dfrac{3}{5(4+4+4)} = \dfrac{1}{20}$.

Và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2.e^x}{5x} = -\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = -\dfrac{2}{5}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-2.e^x}{5x} = \dfrac{1}{20}-\dfrac{2}{5} = \dfrac{-7}{20}$.

Bài toán 3.10: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\sqrt[3]{2x-1}-3^{x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+e^{x-1}}{x^2-4x+3}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\sqrt[3]{2x-1}-3^{x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}+1-3^{x-1}}{\sqrt{x}-1}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\left[\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}.\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right]}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\,.\,\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2}{3}.$$

Và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-3^{x-1}}{\sqrt{x}-1} = -\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{x-1}-1}{x-1}.(\sqrt{x}+1) = -2.\ln 3$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\sqrt[3]{2x-1}-3^{x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{2}{3}-2.\ln 3$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+e^{x-1}}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1+e^{x-1}-1}{x^2-4x+3}$

Ta có: $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}{x^2-4x+3}=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+1+x^2-x}{x^2-4x+3}$

$$=\frac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x^2-4x+3}+\frac{x^2-x}{x^2-4x+3}$$

$$=\frac{x-1}{(x-1)(x-3)\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right]}+\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{1}{(x-3)\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right]}+\frac{x}{x-3}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{-6}+\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{2}{3}$ và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{(x-1)(x-3)}=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+e^{x-1}}{x^2-4x+3}=\dfrac{-2}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-7}{6}$.

Bài toán 3.11: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^4}.\ln(8x+1)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^4}.\ln(8x+1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}.\dfrac{\ln(8x+1)}{x}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(8x+1)}{x}=8$

Và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin x}{x}\right)\frac{1}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cos x}=\frac{1}{4}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^4}.\ln(8x+1)=\dfrac{1}{4}.8=2.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1+1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{x-1}:\dfrac{\sqrt{3x+4}-2-x}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{x-1}:\dfrac{-1-x}{\sqrt{3x+4}+2+x}=\ln 5.\dfrac{-1}{4}=-\dfrac{1}{4}\ln 5.$

Và $\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\left(\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right):\dfrac{\sqrt{3x+4}-2-x}{x}$

$=\left(\dfrac{-2}{1+\sqrt{2x+1}}+\dfrac{\sin x}{x}\right):\dfrac{-1-x}{\sqrt{3x+4}+2+x}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\left(\dfrac{-2}{2}+1\right):\dfrac{-1}{4}=0.$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=-\dfrac{1}{4}.\ln 5+0=-\dfrac{1}{4}.\ln 5.$

Bài toán 3.12: Tìm đạo hàm của hàm số sau:

a) $y=(x-1).e^{2x}$ b) $y=x^2\sqrt{e^{4x}+1}$.

Giải

a) Tập xác định D = **R**.

$y'=e^{2x}+(x-1).2e^{2x}=(2x-1)e^{2x}$

b) Tập xác định D = **R**.

$$y'=2x\sqrt{e^{4x}+1}+\dfrac{2x^2e^{4x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}=\dfrac{2x\left[(x+1)e^{4x}+1\right]}{\sqrt{e^{4x}+1}}.$$

Bài toán 3.13: Tìm đạo hàm của hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ b) $y=x^5-5^x+x^x$.

Giải

a) Tập xác định D = **R**.

$$y'=\dfrac{(2^x\ln 2+2^{-x}\ln 2)(2^x+2^{-x})-(2^x-2^{-x})(2^x\ln 2-2^{-x}\ln 2)}{(2^x+2^{-x})^2}$$

$$= \frac{(2^x+2^{-x})^2-(2^x-2^{-x})^2}{(2^x+2^{-x})^2}\ln^2 2 = \frac{4\ln^2 2}{(2^x+2^{-x})^2}$$

b) Tập xác định D = $(0;+\infty)$.

Ta có $y = x^5 - 5^x + x^x = x^5 - 5^x + e^{x\ln x}$ nên

$$y' = 5x^4 - 5^x\ln 5 + e^{x\ln x}(\ln x + 1) = 5x^4 - 5^x\ln 5 + x^x(\ln x + 1).$$

Bài toán 3.14: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^x$ b) $y = \cos x.e^{2\tan x}$

Giải

a) Tập xác định D = $(0;+\infty)$.

Ta có $y = x^x = e^{x\ln x}$ nên $y' = e^{x\ln x}(\ln x + 1)$.

Cách khác: lấy ln 2 vế $\ln y = x.\ln x$ rồi mới tính đạo hàm.

b) $y' = -\sin x.e^{2\tan x} + \frac{2}{\cos x}.e^{2\tan x} = e^{2\tan x}\left(\frac{2}{\cos x} - \sin x\right)$.

Bài toán 3.15: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x + 1)^\pi - \tan e^x$ b) $y = \sqrt[5]{x^3 - 5x}$.

Giải

a) $y' = 2\pi(2x + 1)^{\pi-1} - (1 + \tan^2 e^x)e^x$

b) $y' = \frac{(x^3-5x)'}{5\sqrt[5]{(x^3-5x)^4}} = \frac{3x^2-5}{5\sqrt[5]{(x^3-5x)^4}}$.

Bài toán 3.16: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ b) $y = \left(\frac{x}{b}\right)^a\left(\frac{a}{x}\right)^b$ với $a > 0, b > 0$

Giải

a) Đặt $u = \frac{1+x^3}{1-x^3}$ thì $y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$ và $u' = -\frac{6x^2}{(1-x^3)^2}$

nên $y' = \frac{u'\sqrt[3]{u}}{3u} = \frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$

b) $y' = \left[\left(\frac{x}{b}\right)^a\right]'\left(\frac{a}{x}\right)^b + \left(\frac{x}{b}\right)^a\left[\left(\frac{a}{x}\right)^b\right]'$

$$= \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1}\left(\frac{a}{x}\right)^b + \left(\frac{x}{b}\right)^a b\left(\frac{a}{x}\right)^{b-1}\left(-\frac{a}{x^2}\right) = \left(\frac{x}{b}\right)^a\left(\frac{a}{x}\right)^b\frac{a-b}{x}.$$

Bài toán 3.17: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số:

a) $y = 3^x$ b) $y = 5^{kx}$.

Giải

a) Ta chứng minh quy nạp: $y^{(n)} = (\ln 3)^n.3^x$

Khi n = 1 thì $y' = (\ln 3).3^x$.

Giả sử công thức đúng khi n = k: $y^{(k)} = (\ln 3)^k.3^x$

Ta chứng minh công thức đúng khi n = k +1: $y^{(k+1)} = (\ln 3)^{k+1}.3^x$

Thật vậy: $y^{(k+1)} = (\ln 3)^k.3^x.\ln 3 = (\ln 3)^{k+1}.3^x$: đpcm.

Vậy $y^{(n)} = (\ln 3)^n.3^x$.

b) $y' = (k\ln 5).5^{kx}$, $y'' = (k\ln 5)^2.5^{kx}$

Ta chứng minh quy nạp: $y^{(n)} = (k\ln 5)^n.\ 5^{kx}$

Bài toán 3.18: Chứng minh:

a) Nếu $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ thì: $y''' - 13y' - 12y = 0$.

b) Nếu $y = \dfrac{\cos x}{e^x}$ thì $y^{(4)} + 4y = 0$.

Giải

a) Tập xác định D = **R**.

$y' = 4e^{4x} - 2e^{-x}$, $y'' = 16e^{4x} + 2e^{-x}$, $y''' = 64e^{4x} - 2e^{-x}$ nên:

$y''' - 13y' - 12y = (64e^{4x} - 2e^{-x}) - 13(4e^{4x} - 2e^{-x}) - 12(e^{4x} + 2e^{-x}) = 0$.

b) Ta có $y = \dfrac{\cos x}{e^x} = e^{-x}.\cos x \Rightarrow y' = e^{-x}(-\sin x - \cos x)$

$y'' = e^{-x}.(2\sin x)$, $y''' = 2e^{-x}(\cos x - \sin x)$, $y^{(4)} = -4e^{-x}.\cos x$

Do đó $y^{(4)} = -4y \Rightarrow y^{(4)} + 4y = 0$.

Bài toán 3.19: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$. Tính tổng:

$$S = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Giải

Để ý nếu a + b = 1 thì:

$$f(a) + f(b) = \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{4^b}{4^b + 2} = \frac{4^a(4^b + 2) + 4^b(4^a + 2)}{(4^a + 2)(4^b + 2)}$$

$$= \frac{4^{a+b} + 2.4^a + 4^{a+b} + 2.4^b}{4^{a+b} + 2.4^a + 2.4^b + 4} = \frac{2.4^a + 2.4^b + 8}{2.4^a + 2.4^b + 8} = 1$$

Ta có: $S = f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$

hay $S = f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n-2}{n}\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}\right)$

Áp dụng thì $2S = n - 1 \Rightarrow S = \frac{n-1}{2}$.

Bài toán 3.20: Tìm khoảng đơn điệu và cực trị hàm số:

a) $y = \frac{e^x}{x}$ b) $y = x^2.e^{-x}$.

Giải

a) Tập xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

BBT

x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
y'		-	||		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$		↘	e	↗	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; 1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$, đạt CT(1; e)

b) Tập xác định $D = \mathbf{R}$,

$y' = (2x - x^2)e^{-x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

BBT

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng (0; 2), nghịch biến trong các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, đạt CĐ$(2; 4e^{-2})$, CT(0; 0).

Bài toán 3.21: Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ b) $y = \left(\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$.

Giải

a) Vì cơ số $\frac{\pi}{3} > 1$ nên hàm số đồng biến trên $D = \mathbf{R}$.

b) Vì cơ số $\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} < \frac{3}{1,4+1,7} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên tập xác định $D = \mathbf{R}$.

Bài toán 3.22: Cho hàm số: $y = f(x) = 2^x$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số cho f(x) .

b) Suy ra đồ thị các hàm số: $y = 2^x - 1$, $y = 4.2^x$, $y = -2^x$, $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = 2^{|x|}$.

Giải

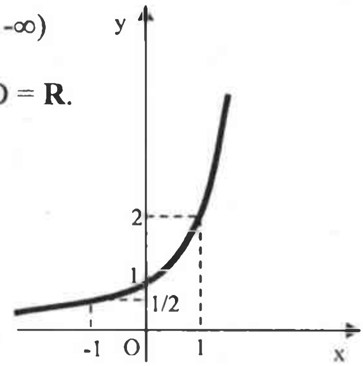
a) $y = f(x) = 2^x$, tập xác định D = **R**.

$\lim\limits_{x\to\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0 \Rightarrow$ TCN: y = 0 (khi $x \to -\infty$)

$y' = 2^x.\ln 2 > 0$, $\forall x$ nên hàm số đồng biến trên D = **R**.

BBT

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
y'	+
y	0 $\nearrow$ $+\infty$



Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 2$

$x = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

b) Suy ra đồ thị các hàm số:

$y = 2^x - 1 = f(x) - 1$: Tịnh tiến xuống dưới 1 đơn vị.

$y = 4.2^x = 2^{x+2} = f(x + 2)$: Tịnh tiến sang trái 2 đơn vị.

$y = -2^x = -f(x)$: Lấy đối xứng qua Ox.

$y = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x} = f(-x)$: Lấy đối xứng qua Oy.

$y = 2^{|x|} = f(|x|)$ hàm số chẵn, khi $x \geq 0$ thì y = f(x) nên lấy phần này và lấy đối xứng của nó qua Oy.

Bài toán 3.23: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^{-3}$.

Giải

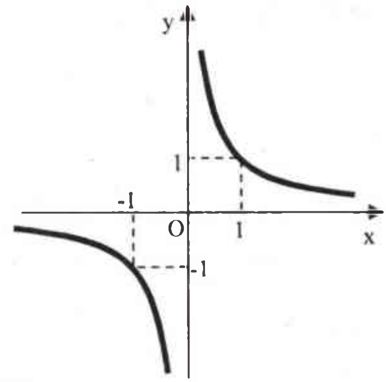
Tập xác định D = **R** \ {0}, hàm số lẻ.

$y' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4} < 0$, $\forall x \neq 0$ nên hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} y = -\infty$ nên tiệm cận ngang là trục hoành, tiệm cận đứng là trục tung.

BBT

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	‖	-	
y	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	0



Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là gốc toạ độ.

Bài toán 3.24: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = x^{-\frac{1}{2}}$ b) $y = x^{\frac{1}{3}}$.

Giải

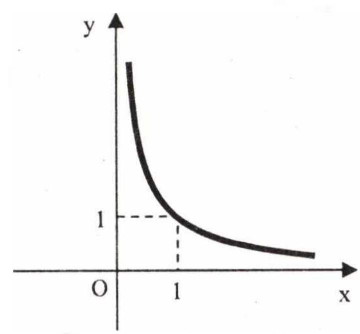
a) Tập xác định D = (0; $+\infty$),

$y' = -\frac{1}{2}.x^{-\frac{3}{2}} < 0, \forall x > 0$ nên hàm số nghịch biến trên (0; $+\infty$).

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$ nên tiệm cận đứng là trục tung, tiệm cận ngang là trục hoành.

BBT:

x	0	$+\infty$
y'	-	
y	$+\infty$ $\searrow$	0



Cho $x = 1 \Rightarrow y = 1$.

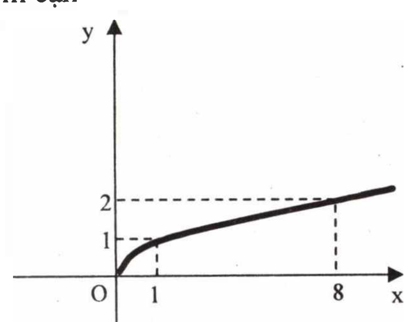
b) Tập xác định D = (0; $+\infty$),

$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0, \forall x > 0$ nên hàm số đồng biến trên (0; $+\infty$).

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} y = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$: không có tiệm cận

BBT:

x	0	$+\infty$
y'	+	
y	0 $\nearrow$	$+\infty$



Cho $x = 1 \Rightarrow y = 1$,

$x = 8 \Rightarrow y = 2$.

Bài toán 3.25: Chứng minh hai đồ thị (G_1), (G_2) của hai hàm số:

$y = a^x$ và $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ đối xứng với nhau qua trục tung.

Giải

Gọi $M(x_o; y_o)$ là một điểm bất kì. Khi đó điểm đối xứng với M qua lần lượt:
Trục tung là $M'(-x_o; y_o)$.

Ta có: $M \in (G_1) \Leftrightarrow y_o = a^{x_o} \Leftrightarrow y_o = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x_o} \Leftrightarrow M' \in (G_2)$

Điều đó chứng tỏ (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục tung.

Bài toán 3.26: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b) Tìm m để phương trình: $x^3 - 3x^2 + 3^m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Giải

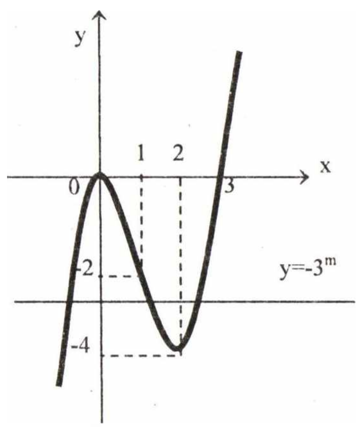
a) • Tập xác định: **R**

• Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

$y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$



Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$, $(2, +\infty)$,

nghịch biến trên (0,2) và có điểm CĐ(0; 0), CT(2; -4)

•Đồ thị: $y'' = 6x - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Điểm uốn I(1; -2) là tâm đối xứng.

b) Phương trình: $x^3 - 3x^2 + 3^m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = -3^m$.

Phương trình: $x^3 - 3x^2 + 3^m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y = -3^m$ cắt đồ thị $y = x^3 - 3x^2$ tại 3 điểm phân biệt.

Dựa vào đồ thị đã vẽ, ta có:

$-4 < -3^m < 0 \Leftrightarrow 3^m < 4 \Leftrightarrow m < \log_3 4$.

Vậy giá trị cần tìm là $m < \log_3 4$.

BÀI TẬP

Bài tập 3.1: Tính:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-\cos 2x}{x^2.2^x}$

HD-ĐS

a) a – b b) 7/2

Bài tập 3.2: Tính:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{\sqrt{x+1}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^x$

HD-ĐS

a) 2ln3 b) e^3

Bài tập 3.3: Tính:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+8x)^{\frac{1}{x}}$

HD-ĐS

a) e^2 b) lấy ln trước.

Bài tập 3.4: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1+x}-e^x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x}+\sqrt{3+x}-4.2^{x-1}}{x^3-1}$

HD-ĐS

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1+x}-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1+x}-1+1-e^x}{x}$

$$\frac{\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1-x}-1}{x}=\frac{\sqrt{1+4x}\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$$

$$=\sqrt[3]{1+x}.\frac{\sqrt{1+4x}-1}{x}+\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$$ nên có $\dfrac{7}{3}-1=\dfrac{4}{3}$.

b) $\dfrac{1}{9}+4\ln 2$.

Bài tập 3.5: Tính đạo hàm cấp n của hàm số:

a) $y = x.\ e^x$. b) $y=e^x\sin x$

HD-ĐS

a) $y^{(n)} = (x+n)\,e^x$. b) $(e^x\sin x)^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin(x+n\dfrac{\pi}{4})$.

Bài tập 3.6: Xét tính đơn điệu của hàm số:

a) $y = \dfrac{3^x - 5^{-x}}{2}$. b) $y = 2^{\lg x}$.

HD-ĐS

a) Đồng biến trên D = **R.**

b) Đồng biến trong các khoảng $(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi)$ với $k \in Z$.

Bài tập 3.7: Tìm khoảng đơn điệu của hàm số:

a) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$. b) $y = x - e^x$

HD-ĐS

a) Đồng biến trên (0; 2) và nghịch biến trên (-∞; 0), (2; +∞).

b) Nghịch biến trên khoảng (0; +∞), đồng biến trên (-∞; 0).

Bài tập 3.8: Chứng minh hàm số: $y = (1 + \dfrac{1}{x})^x$ đồng biến trên khoảng $(0, +\infty)$.

HD-ĐS

Lấy ln trước khi tính đạo hàm.

Bài tập 3.9: Cho hàm số: $y = f(x) = 3^x$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số cho.

b) Suy ra các đồ thị của các hàm số sau: $y = (\dfrac{1}{3})^x$; $y = -3^x$; $y = 3^{|x|}$.

HD-ĐS

b) $y = (\dfrac{1}{3})^x$ = f(-x); $y = -3^x$ = - f(x); $y = 3^{|x|}$ = f(|x|).

Bài tập 3.10: Cho hàm số $y = x^4 - x^2$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b) Tìm m để phương trình: $x^4 - x^2 + 2^m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

HD-ĐS

a) BBT:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	$-1/4$	↗	0	↘	$-1/4$	↗	$+\infty$

b) phương trình có 4 nghiệm phân biệt khi m > -2.

4

HÀM SỐ LÔGARIT

Hàm số lôgarit

Hàm số $y = \log_a x$ với cơ số $a > 0$ và $a \neq 1$.

*Liên tục trên tập xác định $(0; +\infty)$, nhận mọi giá trị thuộc **R**.*

Giới hạn

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty \text{ khi } a > 1 \\ -\infty \text{ khi } 0 < a < 1 \end{cases},$$

$$\lim_{x \to +0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty \text{ khi } a > 1 \\ +\infty \text{ khi } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Đạo hàm

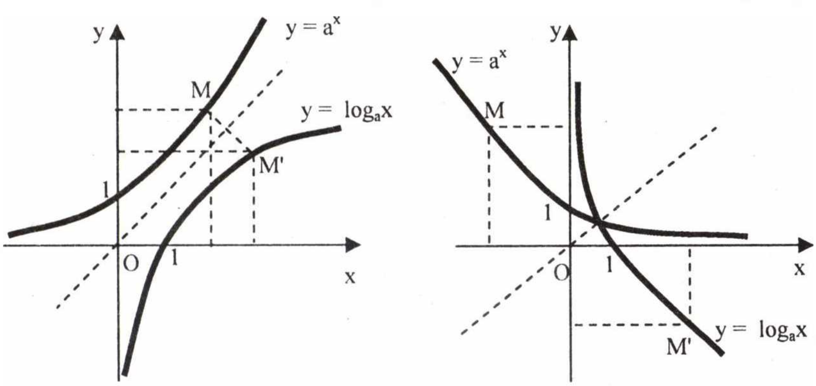
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};\ (\ln x)' = \frac{1}{x};\ (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a};\ (\ln u)' = \frac{u'}{u};\ (\ln|u|)' = \frac{u'}{u} \text{ với } u = u(x).$$

Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nếu $a > 1$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nếu $0 < a < 1$.

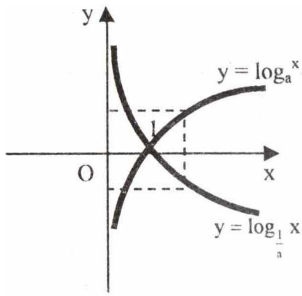
Đồ thị luôn cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$, nằm ở bên phải trục tung và nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

Đồ thị và quan hệ đối xứng

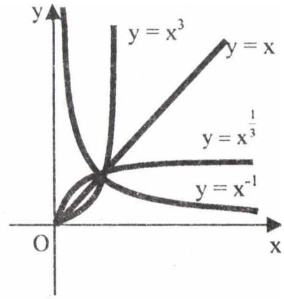


Khi a > 1

Khi 0 < a < 1



Khi a < 1



Khi x > 0

Các dạng vô định

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \ \lim_{x \to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1; \ \lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Chú ý: quan hệ so sánh

Với $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$:

Nếu $a > 1$ thì: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

Nếu $0 < a < 1$ thì: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

Nếu $a > 1$ thì: $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$.

Nếu $0 < a < 1$ thì: $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$.

Bài toán 4.1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \lg(x^2 - 4)$ b) $y = \lg(x + 2) + \lg(x - 2)$.

Giải

a) ĐK: $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x > 2$.

Vậy tập xác định $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

b) ĐK: $\begin{cases} x+2>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy tập xác định $D = (2; +\infty)$.

Bài toán 4.2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(4x-1) - 1}$ b) $y = \sqrt{\log_{\sqrt{5}}(x^2 - \sqrt{5}.x + 2)}$.

Giải

a) ĐK: $\begin{cases} 4x-1>0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(4x-1) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-1>0 \\ 4x-1 \leq \frac{1}{3} \end{cases}$ (hàm nghịch biến)

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}$. Vậy tập xác định $D = (\frac{1}{4}; \frac{1}{3}]$.

b) ĐK: $\begin{cases} x^2 - \sqrt{5}x + 2 > 0 \\ \log_{\sqrt{5}}(x^2 - \sqrt{5}x + 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}x + 2 \geq 1$ (hàm nghịch biến)

$\Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ hoặc $x \geq \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Vậy tập xác định $D = \left(-\infty; \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}; +\infty\right)$.

Bài toán 4.3: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt[4]{\log x + \log(x+2)}$

b) $y = \sqrt{4\log_2 x - \log_2^2 x - 3} + \sqrt{x^2 - 7x + 6}$.

Giải

a) ĐK: $\log x + \log(x + 2) \geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log[x(x+2)] \geq \log 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 1 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 - \sqrt{2} \text{ hay } x \geq -1 + \sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1 + \sqrt{2}$

Vậy tập xác định $D = [-1 + \sqrt{2}; +\infty)$

b) ĐK: $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 7x + 6 \geq 0 \\ 4\log_2 x - \log_2^2 x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 1 \text{ hay } x \geq 6 \\ 1 \leq \log_2 x \leq 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \text{ hay } x \geq 6 \\ 2 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 6 \leq x \leq 8.$

Vậy tập xác định $D = [6; 8]$.

Bài toán 4.4: Chứng minh giới hạn: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$.

Giải

Ta có $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \log_a e \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$.

Bài toán 4.5: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x^2)}{1 - \cos 2x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x} = 3.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3x} = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{1-\cos 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{2\sin^2 x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{3\ln(1+3x^2)}{3x^2} : \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\right] = \dfrac{3}{2}$.

Bài toán 4.6: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\log_3(1+5x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x - 3^x}{\ln(1+6x)-\ln(1+3x)}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\log_3(1+5x)} = \dfrac{4}{5\log_3 e}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\ln(1+5x)} = \dfrac{4}{5}\ln 3$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-3^x}{\ln(1+6x)-\ln(1+3x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{6^x-1}{x}-\dfrac{3^x-1}{x}\right):\left(\dfrac{\ln(1+6x)}{x}-\dfrac{\ln(1+3x)}{x}\right)\right]$

$= (\ln 6 - \ln 3) : (6 - 3) = \dfrac{1}{3}\ln 2$.

Bài toán 4.7: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+x}}{\ln(1+3x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$.

Giải:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+x}}{\ln(1+3x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}\right).\dfrac{3x}{\ln(1+3x)}.\dfrac{1}{3}$

$= (\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}).\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{36}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{-2x^2}-1}{x^2}-\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}\right):\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(-2\dfrac{e^{-2x^2}-1}{-2x^2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}\right):\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right] = -\dfrac{7}{3}$.

Bài toán 4.8: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1+\ln x}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1+\lg x}{x^2-4x+3}$.

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1+\ln x}{x^2-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{x^2-1}+\dfrac{\ln x}{x^2-1}\right)$

Vì $\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{x^2-1}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-1+x^2-3x+2}{x^2-1}$

$=\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1}+\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\dfrac{2(x-1)}{(x^2-1)(\sqrt{2x-1}+1)}+\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{2}{(x+1)(\sqrt{2x-1}+1)}+\dfrac{x-2}{x+1}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{x^2-1}=\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{2}=0$.

Và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+(x-1))}{x-1}.\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1+\ln x}{x^2-1}=0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1+\lg x}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}{x^2-4x+3}+\dfrac{\lg x}{x^2-4x+3}\right)$

Với $x \neq 1$, $x \neq 3$, ta có:

$f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}{x^2-4x+3}=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+1+x^2-x}{x^2-4x+3}=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x^2-4x+3}+\dfrac{x^2-x}{x^2-4x+3}$

$=\dfrac{x-1}{(x-1)(x-3)\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right]}+\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)}$

$=\dfrac{1}{(x-3)\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right]}+\dfrac{x}{x-3}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{-6}+\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{2}{3}$.

Và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lg x}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lg e.\ln(1+(x-1))}{x-1}.\dfrac{1}{x-3}=-\dfrac{1}{2}.\lg e$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1-\lg x}{x^2-4x+3}=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\lg e.$

Bài toán 4.9: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}.\ln(x+e)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{\ln(1+3x)}$.

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}.\ln(x+e)\ =\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

Vì 1 - cosx.cos2x.cos3x = 1 - cosx + cosx - cosxcos2xcos3x

= 1 - cosx + cosx(1 - cos2x.cos3x)

= 1 - cosx + cosx [1 - cos2x + cos2x(1 - cos3x)]

= 1 - cosx + cosx(1 - cos2x) + cosxcos2x (1 - cos3x)

Và $\dfrac{1-\cos kx}{1-\cos x}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{kx}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\left(\dfrac{\sin\dfrac{kx}{2}}{\dfrac{kx}{2}}\right)^2.\left(\dfrac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)^2.k^2$

nên $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\cos x.\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos x}+\cos x.\cos 2x.\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos x}\right)$ = 1 + 1.4 + 1.9 = 14.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}.\ln(x+e)=14$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{\ln(1+3x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}:\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$

$\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a=-\dfrac{1}{2}[\cos(2a+3x)-\cos x]-\dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

$=-\dfrac{1}{2}[\cos(2a+3x)+\cos 2a]-\dfrac{1}{2}[1-\cos x]=-\sin(2a+\dfrac{3}{2}x)\sin\dfrac{3x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\sin\left(2a+\frac{3}{2}x\right).\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=\frac{3}{2}\sin 2a$$

Và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}=3$. Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{\ln(1+3x)}=\dfrac{1}{2}\sin 2a$.

Bài toán 4.10: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\ln(1+x^2)-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(e+\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}\right)$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\ln(1+x^2)-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos 2x}$

Ta có $\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}=\dfrac{-2x^2}{2\sin^2 x(1+\sqrt{2x^2+1})}=-\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2.\dfrac{1}{1+\sqrt{2x^2+1}}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}=-1.\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

Và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}:\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\ln(1+x^2)-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}=0$.

b) $\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\left(\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right):\dfrac{\sqrt{3x+4}-2-x}{x}$

$$=\left(\frac{-2}{1+\sqrt{2x+1}}+\frac{\sin x}{x}\right):\frac{-1-x}{\sqrt{3x+4}+2+x}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\left(\dfrac{-2}{2}+1\right):\dfrac{-1}{4}=0$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(e+\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}\right)=\ln(e+0)=1$.

Bài toán 4.11: Tính giới hạn:

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(2e^3-e^3\cos 2x)-\sqrt[3]{27+8x^2}}{8\sin^2 x}\right).$$

Giải

Ta có $L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(2e^3 - e^3\cos 2x\right) - \sqrt[3]{27+8x^2}}{8\sin^2 x}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln e^3\left(2-\cos 2x\right) - \sqrt[3]{27+8x^2}}{8\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(2-\cos 2x\right)+3-\sqrt[3]{27+8x^2}}{8\sin^2 x}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+1-\cos 2x)+3-\sqrt[3]{27+8x^2}}{8\sin^2 x}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+2\sin^2 x\right)+3-\sqrt[3]{27+8x^2}}{8\sin^2 x}\right)$

$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2\sin^2 x)}{2\sin^2 x}\right) + \lim_{x\to 0}\left(\frac{3-\sqrt[3]{27+8x^2}}{8x^2}.\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$

$= \frac{1}{4} + \lim_{x\to 0}\left(\frac{-8x^2}{8x^2\left(9+3\sqrt[3]{(27+8x^2)}+\sqrt[3]{(27+8x^2)^2}\right)}\right)$

$= \frac{1}{4} + \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{\left(9+3\sqrt[3]{(27+8x^2)}+\sqrt[3]{(27+8x^2)^2}\right)}\right)$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{9+3.3+9} = \frac{1}{4} - \frac{1}{27} = \frac{23}{108}$.

Bài toán 4.12: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (3x - 2)\ln^2 x$ b) $y = \sqrt{x^2+1}\log_3 x^2$.

Giải

a) Tập xác định $D = (0;+\infty)$.

Ta có $y = (3x - 2)\ln^2 x$ nên $y' = 3\ln^2 x + \frac{2(3x-2)\ln x}{x}$

b) Tập xác định $D = (0;+\infty)$.

Ta có $y = \sqrt{x^2+1}\log_3 x^2$ nên $y' = \frac{x\log_3 x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2\sqrt{x^2+1}}{x.\ln 3}$.

Bài toán 4.13: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$ b) $y = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$.

Giải

a) Tập xác định D = **R**.

Ta có $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ nên $y' = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

b) Tập xác định D = **R** \ {0}.

Ta có $y = \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x}$ nên $y' = \dfrac{2}{x^2 + 1} - \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}$.

Bài toán 4.14: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \log_{\sqrt{3}}(-x^2 + 5x + 6)$ b) $y = \sqrt[5]{\ln^3 5x}$.

Giải

a) Tập xác định D = (-1;6).

b) Ta có $y = \log_{\sqrt{3}}(-x^2 + 5x + 6)$

nên $y' = \dfrac{-2x + 5}{(-x^2 + 5x + 6)\ln\sqrt{3}} = \dfrac{-4x + 10}{(-x^2 + 5x + 6)\ln 3}$

Tập xác định D = (0;+∞).

Ta có $y = \sqrt[5]{\ln^3 5x}$ nên $y' = \dfrac{(\ln^3 5x)'}{5\sqrt[5]{(\ln^3 5x)^4}} = \dfrac{3\ln^2 5x}{5\sqrt[5]{\ln^{12} 5x}} = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{\ln^2 5x}}$.

Bài toán 4.15: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số:

a) $y = \ln(x - 5)$ b) $y = \ln(6x^2 - x - 1)$.

Giải

a) Với x > 5:

Ta có $y = \ln(x - 5)$

nên $y' = \dfrac{1}{x - 5}$; $y'' = \dfrac{-1}{(x-5)^2}$; $y''' = \dfrac{1.2}{(x-5)^3}$

Ta chứng minh quy nạp: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-5)^n}$.

b) Với $x < -\dfrac{1}{3}$ hoặc $x > \dfrac{1}{2}$:

Ta có $y = \ln(6x^2 - x - 1) = \ln((2x - 1)(3x + 1)) = \ln|2x - 1| + \ln|3x+1|$

Nên $y' = \dfrac{2}{2x - 1} + \dfrac{3}{3x + 1}$. Ta chứng minh quy nạp $\left(\dfrac{1}{ax + b}\right)^{(m)} = \dfrac{(-1)^m m! a^m}{(ax + b)^{m+1}}$

Suy ra $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!2^{n-1}}{(2x-1)^n} + \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!3^{n-1}}{(3x+1)^n}$.

Bài toán 4.16: Chứng minh: Nếu $y = \ln\dfrac{1}{1+x}$ thì $xy' + 1 = e^y$.

Giải

Tập xác định D = (-1; + ∞)

Ta có $y' = -\dfrac{1}{x+1}$. Suy ra $xy' + 1 = \dfrac{-x}{x+1} + 1 = \dfrac{1}{x+1} = e^y$.

Cách khác: biến đổi: $y = \ln\dfrac{1}{1+x} = -\ln(x+1)$.

Bài toán 4.17: Tìm khoảng đơn điệu và cực trị hàm số:

a) $y = \ln(x^2 - 1)$ b) $y = x - \ln(1 + x)$

Giải

a) $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$

Khi $x < -1$ thì $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$

Khi $x > 1$ thì $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$

Hàm số không có cực trị.

b) $D = (-1; +\infty)$, $y' = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$y' > 0, \forall x \in (0; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

$y' < 0, \forall x \in (-1; 0)$ nên hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$.

Ta có $y'' = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$ nên đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 0$.

Bài toán 4.18: Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) $y = \log_{\frac{2}{e}} x$ b) $y = \log_a x$ với $a = \dfrac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$.

Giải

a) Vì cơ số $\dfrac{2}{e} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $D = (0; +\infty)$

b) Vì cơ số $\dfrac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3} > 1$ nên hàm số đồng biến trên $D = (0; +\infty)$.

Bài toán 4.19: Cho hàm số $y = f(x) = \log_2 x$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b) Suy ra các đồ thị hàm số: $y = \log_2 2x$, $y = \lg_2(x - 3)$, $y = \log_2(-x)$,

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_2 |x|$.

Giải

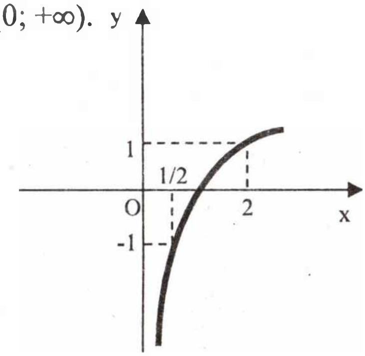
a) $y = f(x) = \log_2 x$, $D = (0; +\infty)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} y = -\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x = 0$ (khi $x \to 0^+$)

$y' = \dfrac{1}{x\ln 2} > 0, \forall x > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

BBT

x	0	$+\infty$
y'	+	
y	$-\infty$ ↗	$+\infty$



Cho $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = -1$

$x = 1 \Rightarrow y = 0$, $x = 2 \Rightarrow y = 1$

b) Suy ra các đồ thị hàm số:

$y = \log_2 2x = f(x) + 1$: Tịnh tiến lên trên 1 đơn vị.

$y = \log_2(x - 3) = f(x - 3)$: Tịnh tiến sang phải 3 đơn vị.

$y = \log_2(-x) = f(-x)$: Lấy đối xứng qua Oy.

$y = \log_{\frac{1}{2}} x = -f(x)$: Lấy đối xứng qua Ox.

$y = \log_2 |x| = f(|x|)$ là hàm số chẵn, khi $x > 0$ thì $y = f(x)$ nên lấy phần này và lấy đối xứng của nó qua Oy.

Bài toán 4.20: Chứng minh hai đồ thị (G_1), (G_2) của hai hàm số:

a) $y = \log_a x$ và $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ đối xứng nhau qua trục hoành.

b) $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng với nhau qua phân giác 1.

Giải

Gọi $M(x_o; y_o)$ là một điểm bất kì. Khi đó điểm đối xứng với M qua lần lượt:

a) Trục hoành là $M''(x_o; -y_o)$. Ta có:

$M \in (G_1) \Leftrightarrow y_o = \log_a x_o \Leftrightarrow -y_o = \log_{\frac{1}{a}} x_o \Leftrightarrow M'' \in (G_2)$

b) Phân giác 1 là $M'''(y_o; x_o)$. Ta có:

$M \in (G_1) \Leftrightarrow y_o = a^{x_o} \Leftrightarrow x_o = \log_a y_o \Leftrightarrow M''' \in (G_2)$.

Bài toán 4.21: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \ln x$ và d là một tiếp tuyến bất kì của (C). Chứng minh rằng trên khoảng $(0; +\infty)$, đồ thị (C) nằm ở phía dưới của đường thẳng d.

Giải

Gọi x_o là hoành độ của điểm M tuỳ ý thuộc (C). Tiếp tuyến d của (C) tại M có phương trình $y = \frac{1}{x_o}(x - x_o) + \ln x_o$.

Khẳng định cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau: $\forall x \in (0; +\infty)$.

$$\left[\frac{1}{x_o}(x - x_o) + \ln x_o\right] - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x_o} - \ln\frac{x}{x_o} \geq 1$$

Xét $g(t) = t - \ln t$ với $t > 0$,

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t},\ g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

BBT

t	$-\infty$		1		$+\infty$
g'		-	0	+	
g		↘	1	↗	

Ta có $g(t) \geq 1, \forall t > 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 4.22: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm m để phương trình: $x^4 - 6x^2 + \lg m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Giải

a) • Tập xác định: D = **R**. Hàm số chẵn

• Sự biến thiên:

$$\lim_{x\to-\infty} y = +\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y = +\infty$$

$$y' = 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3),\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	5/2	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; +\infty)$ nghịch biến $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(0; \sqrt{3})$ và có CĐ $(0; \frac{5}{2})$; CT$(\pm\sqrt{3}; -2)$

• Đồ thị đối xứng nhau qua trục tung:

$y'' = 6x^2 - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Điểm uốn $I(\pm 1; 0)$

b) Phương trình: $x^4 - 6x^2 + \lg m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 5 = 5 - \lg m$

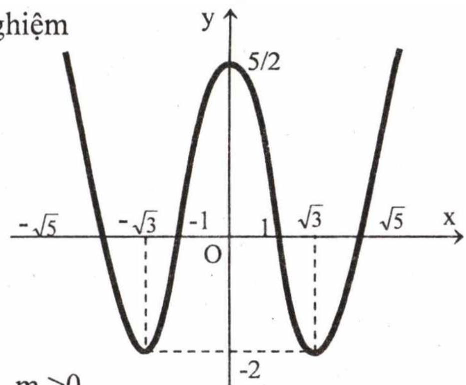
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(5 - \lg m),\ m > 0$$

Phương trình: $x^4 - 6x^2 + \lg m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khi đường thẳng

$y = \frac{1}{2}(5 - \lg m)$ cắt đồ thị

$$y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$$

tại 2 điểm phân biệt.



Dựa vào đồ thị đã vẽ, ta có:

$$\frac{1}{2}(5 - \lg m) > \frac{5}{2} \text{ hay } \frac{1}{2}(5 - \lg m) = -2,\ m > 0$$

$\Leftrightarrow$ $5 - \lg m > 5$ hay $5 - \lg m = -4$

$\Leftrightarrow$ $\lg m < 0$ hay $\lg m = 9 \Leftrightarrow 0 < m < 1$ hay $m = 10^9$.

Vậy giá trị cần tìm là $0 < m < 1$ hay $m = 10^9$.

BÀI TẬP

Bài tập 4.1: Tìm miền xác định hàm số:

a) $y = \lg(4 - 3x)$ b) $y = \log_3|x - 2|$.

HD-ĐS

a) $x < \frac{4}{3}$ b) $x \neq 2$.

Bài tập 4.2: Tìm miền xác định hàm số:

a) $y = \sqrt{\log_2 x}$ b) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+5}}$.

HD-ĐS

a) $x \geq 1$ b) $x > 1$.

Bài tập 4.3: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(6x+1) - \ln(2x+1)}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x.\ln(7x+e)}$.

HD-DS

a) 4 b) 13/12

Bài tập 4.4: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x}+\sqrt{3+x}-4+\ln(8-7x)}{x^3-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

HD-ĐS

a) Thêm bớt 1 đại lương căn, $\dfrac{7}{3}$. b) 28.

Bài tập 4.5: Tính đạo hàm cấp n của hàm số:

a) $y = \ln(x^2 - 4)$ b) $y = x^3.\ln x$

HD-ĐS

a) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-2)^n}+\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n}$ b) Tính y', y'', y''' rồi tìm quy luật.

Bài tập 4.6: Tìm khoảng đơn điệu của hàm số:

a) $y = \dfrac{x}{\ln x}$. b) $y = \ln(x+\sqrt{4+x^2})$.

HD-DS

a) Đồng biến trên $(e; +\infty)$ và nghịch biến trên $(0; 1)$, $(1; e)$.

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}} > 0$, $\forall x$, hàm số đồng biến trên tập xác định **R**.

Bài tập 4.7: Vẽ đồ thị:

a) $y = \log_2(x+1)+\log_2(x-1)$ b) $y = \log_2(x^2-1)$

HD-ĐS

a) $D = (1;+\infty)$ b) $D = (-\infty; -1) \cup (1;+\infty)$.

Bài tập 4.8: Cho hàm số: $y = f(x) = \log_3 x$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số cho.

b) Suy ra các đồ thị của các hàm số sau: $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; $y = |\log_3 x|$ và $y = \log_3|x|$.

HD-ĐS

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x = -f(x)$; $y = |\log_3 x| = |f(x)|$; $y = \log_3|x| = f(|x|)$.

Bài tập 4.9: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $-x^3 + 3x - 2 = \log_3 m$.

HD-ĐS

b) Nếu $m \le 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $0 < m < \dfrac{1}{81}$, $m > 1$ thì phương trình có một nghiệm.

Nếu $m = \frac{1}{81}$, m = 1 thì phương trình có hai nghiệm.

Nếu $1 > m > \frac{1}{81}$ thì phương trình có ba nghiệm.

5 SO SÁNH BIỂU THỨC MŨ VÀ LOGARIT

So sánh cùng cơ số của mũ: $a > 0, a \neq 1$.

Nếu $a > 1$ thì: $a^M > a^N \Leftrightarrow M > N$.

Nếu $0 < a < 1$ thì: $a^M > a^N \Leftrightarrow M < N$.

So sánh cùng lũy thừa của mũ: $0 < a < b$

$a^x < b^x \Leftrightarrow x > 0$; $a^x > b^x \Leftrightarrow x < 0$.

So sánh cùng cơ số của logarit: $a > 0, a \neq 1$

Nếu $a > 1$ thì: $\log_a E > \log_a F \Leftrightarrow E > F > 0$

Nếu $0 < a < 1$ thì: $\log_a E > \log_a F \Leftrightarrow 0 < E < F$.

***Chú ý**: So sánh cùng chỉ số bậc căn, so sánh bình phương, so sánh tính gọn, so sánh trục căn thức, so sánh tương đương sau khi đánh giá, đặt ẩn phụ, so trung gian số khác, tách phần nguyên, dùng bất đẳng thức* Côsi, ...

Bài toán 5.1: So sánh các số:

a) $\sqrt{2}$ và $\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[4]{13}$ và $\sqrt[5]{23}$.

Giải

a) Ta có $(\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$; $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = 3^2 = 9$.

Do 9 > 8 nên ta có $(\sqrt{2})^6 < \left(\sqrt[3]{3}\right)^6$, suy ra $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[4]{13} = \sqrt[20]{13^5} = \sqrt[20]{371293}$; $\sqrt[5]{23} = \sqrt[20]{23^4} = \sqrt[20]{279841}$

Ta có 371293 > 279841 nên $\sqrt[4]{13} > \sqrt[5]{23}$

Bài toán 5.2: So sánh các số:

a) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30}$ và $\sqrt[3]{63}$ b) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15}$ và $\sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

Giải

a) Ta có $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30} > 1 + \sqrt[3]{27} = 4 = \sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{63}$

b) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15} < 2 + 4 = 3 + 3 < \sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

Bài toán 5.3: So sánh các số:

a) $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{7}{6}}$ và $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$ b) 3^{600} và 5^{400}.

Giải

a) $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{7}{6}} = 3^{-\frac{7}{12}}$ và $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{3^{-1}\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}} = \sqrt[3]{3^{-\frac{5}{4}}} = 3^{-\frac{5}{12}}$

Vì cơ số 3 > 1 nên $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{7}{6}} < \sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$.

b) Ta có: $3^{600} = \left(3^3\right)^{200} = 27^{200}$; $5^{400} = \left(5^2\right)^{200} = 25^{200}$. Vậy $3^{600} > 5^{400}$.

Bài toán 5.4: So sánh các số:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ và $\sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}}$.

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4\sqrt{5}}$ và $3^{-3\sqrt{2}}$.

Giải

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}} = 2^{\frac{5}{7}}$; $\sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}} = 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{3}{14}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}} = 2^{\frac{5}{7}}$.

Vậy $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}} = \sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}}$.

b) Ta có $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}}$ và $3^{-3\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}$.

Ta có $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (3\sqrt{2})^2 < \left(2\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 18 < 20$: đúng

Vì cơ số $0 < \frac{1}{3} < 1$ nên $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4\sqrt{5}} < 3^{-3\sqrt{2}}$.

Bài toán 5.5: So sánh p và q biết:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{p} > \left(\frac{3}{2}\right)^{-q}$

b) $\left(\frac{8}{3}\right)^{-p} > \left(\frac{3}{8}\right)^{q}$.

Giải:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{p} > \left(\frac{3}{2}\right)^{-q} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{p} > \left(\frac{2}{3}\right)^{q}$, $\frac{2}{3} < 1 \Rightarrow p < q$.

b) $\left(\frac{8}{3}\right)^{-p} > \left(\frac{3}{8}\right)^{q} \Rightarrow \left(\frac{8}{3}\right)^{-p} > \left(\frac{8}{3}\right)^{-q}$, $\frac{8}{3} > 1 \Rightarrow -p > -q \Rightarrow p < q$.

Bài toán 5.6: So sánh p và q biết:

a) $0{,}25^{p} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2q}$

b) $\left(\frac{7}{2}\right)^{p} > \left(\frac{2}{7}\right)^{p-2q}$.

***Giải*:**

a) $0,25^p < \left(\frac{1}{2}\right)^{2q} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^p < \left(\frac{1}{4}\right)^q, \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow p > q$

b) $\left(\frac{7}{2}\right)^p > \left(\frac{2}{7}\right)^{p-2q} \Rightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^p < \left(\frac{7}{2}\right)^{2q-p}, \frac{7}{2} > 1 \Rightarrow p < 2q - p \Rightarrow p < q$.

Bài toán 5.7: Hãy so sánh:

a) $\log_3 4$ và $\log_4 \frac{1}{3}$ b) $3^{\log_6 1,1}$ và $7^{\log_6 0,99}$.

Giải

a) Ta có $\log_3 4 > 1$ và $\log_4 \frac{1}{3} < 0$, suy ra $\log_3 4 > \log_4 \frac{1}{3}$

b) Ta có $\log_6 1,1 > 0$ nên $3^{\log_6 1,1} > 3^0 = 1$ (vì $3 > 1$)

và $\log_6 0,99 < 0$ nên $7^{\log_6 0,99} < 7^0 = 1$ (vì $7 > 1$).

Suy ra $3^{\log_6 1,1} > 7^{\log_6 0,99}$.

Bài toán 5.8: Hãy so sánh:

a) $\log_8 27$ và $\log_9 25$ b) $\log_4 9$ và $\log_9 25$.

Giải

a) Ta có $\log_8 27 > \log_8 25$ vì $8 > 1$

và $\log_8 25 > \log_9 25$ vì $8 < 9$ nên $\log_8 27 > \log_9 25$.

b) Ta có $\log_4 9 = \log_2 3 = \log_8 27 > \log_9 25$.

Bài toán 5.9: Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh:

a) $\log 2 + \log 3$ với $\log 5$ b) $\log 12 - \log 5$ với $\log 7$.

Giải

a) $\log 2 + \log 3 = \log 6 > \log 5$. b) $\log 12 - \log 5 = \log \frac{12}{5} = \log 2,4 < \log 7$

Bài toán 5.10: Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh:

a) $3\log 2 + \log 3$ với $2\ln 5$ b) $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3}$ và $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5}$.

Giải

a) $3\log 2 + \log 3 = \log(2^3.\ 3) = \log 24 < \log 25 = 2\log 5 < 2\ln 5$.

b) Vì $\frac{3}{5} < 1$ và $\frac{2}{3} < 1$ nên $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3} > \log_{\frac{3}{4}} 1 = 0$

Vì $\frac{3}{2} > 1$ và $\frac{3}{5} < 1$ nên $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5} < \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$. Từ đó suy ra $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3} > \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5}$.

Bài toán 5.11: Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh:

a) $\log_2 3$ và $\log_6 5$ b) $\log \dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$ và $\dfrac{\log 5 + \log\sqrt{7}}{2}$.

Giải

a) Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_6 5$ thì: $3 = 2^a$ nên $a > 1$ và $5 = 6^b$ nên $b < 1$.
Vậy $\log_2 3 > \log_6 5$.

b) Ta có $\dfrac{\log 5 + \log\sqrt{7}}{2} = \dfrac{1}{2}\log(5\sqrt{7}) = \log\sqrt{5\sqrt{7}}$.

Đặt $a = \log\sqrt{5\sqrt{7}}$ thì $\sqrt{5\sqrt{7}} = 10^a$.

$b = \log \dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$ thì $\dfrac{5+\sqrt{7}}{2} = 10^b$.

Ta có $(\dfrac{5+\sqrt{7}}{2})^2 - (\sqrt{5\sqrt{7}})^2 = 8 + \dfrac{5}{2}\sqrt{7} - 5\sqrt{7} > 0$

Nên $\dfrac{5+\sqrt{7}}{2} > \sqrt{5\sqrt{7}}$ do đó $10^a < 10^b$.

Vậy $a < b$ hay $\log \dfrac{5+\sqrt{7}}{2} > \dfrac{\log 5 + \log\sqrt{7}}{2}$.

Bài toán 5.12: Chứng minh:

a) $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 2$ b) $\log_2 3 > \log_3 4$.

Giải

a) Ta có: $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 5 + \log_\pi 2 = \log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2$

b) $\log_2 3 > \log_3 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_3 2} > \log_3 4 \Leftrightarrow \log_3 2.\log_3 4 < 1$: Đúng

Vì theo bất đẳng thức Côsi:

$\sqrt{\log_3 2.\log_3 4} < \dfrac{1}{2}(\log_3 2 + \log_3 4) = \dfrac{1}{2}\log_3(2.4) < \dfrac{1}{2}\log_3 9 = 1$

Bài toán 5.13: Chứng minh:

$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$ với mọi số nguyên $n > 1$.

Giải

Ta tách phần nguyên:

$A = \log_n(n+1) = \log_n n(1 + \dfrac{1}{n}) = 1 + \log_n(1 + \dfrac{1}{n})$

$B = \log_{n+1}(n+2) = \log_{n+1}(n+1)(1 + \frac{1}{n+1}) = 1 + \log_{n+1}(1 + \frac{1}{n+1})$

Ta có $1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \log_n(1 + \frac{1}{n}) > \log_n(1 + \frac{1}{n+1})$

và $\log_n(1 + \frac{1}{n+1}) > \log_{n+1}(1 + \frac{1}{n+1})$

$\Rightarrow \log_n(1 + \frac{1}{n}) > \log_{n+1}(1 + \frac{1}{n+1})$.

Vậy A > B.

Bài toán 5.14: Cho m > 1, a + b = c với a > 0, b > 0.

Chứng minh: $a^m + b^m < c^m$.

Giải

Ta có $a^m + b^m < c^m \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m < 1$

Mà a + b = c, a > 0, b > 0 nên $0 < \frac{a}{c} < 1$, $0 < \frac{b}{c} < 1$

Suy ra với m > 1 thì $\left(\frac{a}{c}\right)^m < \left(\frac{a}{c}\right)^1; \left(\frac{b}{c}\right)^m < \left(\frac{b}{c}\right)^1$

Từ đó ta có: $\left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m < \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$.

BÀI TẬP

Bài tập 5.1: So sánh các số sau đây:

a) $\sqrt[3]{4}$ và $\sqrt[4]{5}$ b) 2 và $\sqrt[20]{2} + \sqrt[30]{3}$

HD-ĐS

a) $\sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5}$ b) $2 < \sqrt[20]{2} + \sqrt[30]{3}$

Bài tập 5.2: So sánh các số sau đây:

a) $\sqrt{11} + \sqrt{14}$; $\sqrt{12} + \sqrt{13}$ b) $\frac{1}{\sqrt{59} - \sqrt{58}}$; $\frac{1}{\sqrt{58} - \sqrt{57}}$

HD-ĐS

a) So sánh bình phương b) Trục căn thức

Bài tập 5.3: So sánh các số sau đây:

$A = \sqrt{10 + 8\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$ và $B = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}}$.

HD-ĐS

Tính gọn trước rồi so sánh tương đương.

Bài tập 5.4: Các lôgarit sau dương hay âm?

a) $\log_2 5$ b) $\log_5 2$ c) $\log_{0,2} 0,8$ d) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{7}$.

HD-ĐS

a) Dương b) Dương c) Dương d) Âm

Bài tập 5.5: So sánh các số sau đây:

a) $\log_3 4$; $\log_4 \frac{1}{3}$ b) $\log_{0,1} \sqrt[3]{2}$; $\log_{0,2} 0,34$.

HD-ĐS

a) $\log_3 4 > \log_4 \frac{1}{3}$ b) $\log_{0,1} \sqrt[3]{2} < \log_{0,2} 0,34$.

Bài tập 5.6: So sánh các số sau đây:

a) $\log_4 5$; $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{25}$ b) $\log_5 7$; $\log_8 7$.

HD-ĐS

a) $\log_4 5 = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{25}$ b) $\log_5 7 > \log_8 7$.

Bài tập 5.7: So sánh các số sau đây:

a) $\log_8 27$; $\log_9 25$ b) $\log_{135} 675$; $\log_{45} 75$

HD-ĐS

a) Lần lượt đưa về so sánh cùng cơ số, cùng mũ, $\log_8 27 > \log_9 25$

b) Đặt $\log_{135} 675 = x$; $\log_{45} 75 = y$ thì $1 < x,y < 2$ và $675 = 135^x$,

$75 = 45^y$, $\log_{135} 675 > \log_{45} 75$.

Bài tập 5.8: So sánh các số sau đây:

a) 205^{204} và 204^{205}. b) $\frac{1}{2} + \lg 3$ và $\lg 19 - \lg 2$.

HD-ĐS

a) Lấy ln hai vế, $205^{204} < 204^{205}$. b) $\frac{1}{2} + \lg 3 < \lg 19 - \lg 2$.

6

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT

Đạo hàm trong điều kiện xác định

$(e^x)' = e^x$, $(e^u)' = e^u.u'$, $(a^x)' = a^x\ln a$, $(a^u)' = a^u.\ln a.u'$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},\ \left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x};\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a};\ \left(\ln|u|\right)' = \frac{u'}{u}.$$

Các giới hạn

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ (với $a > 1$); $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ (với $a > 1$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ (với $a > 1$); $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = -\infty$ (với $a > 1$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ (với $0 < a < 1$); $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ (với $0 < a < 1$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ (với $0 < a < 1$); $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = +\infty$ (với $0 < a < 1$)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^x = e;\ \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1;\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Tính đơn điệu

Khi $a > 1$: hàm số $y = a^x$, $y = \log_a x$ đồng biến trên D.

Khi $0 < a < 1$: Hàm số $y = a^x$, $y = \log_a x$ nghịch biến trên D.

Chứng minh bất đẳng thức và tìm GTLNNN

Có thể dùng một bất đẳng thức hay phải phối hợp nhiều cách khác nhau để giải quyết bài toán.

- Phương pháp biến đổi tương đương: về một bất đẳng thức đúng, dạng tổng các bình phương, tổng các đại lượng không âm, tích các đại lượng có dấu xác định,....

- Phương pháp so sánh: Dùng các tính chất cơ bản của bất đẳng thức để biến đổi so sánh hai vế của một bất đẳng thức, các bất đẳng thức trung gian, so sánh tử mẫu, so sánh theo cơ số hơn 1, thua 1, so sánh sai phân,...

- Phương pháp dùng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Côsi) cho 2 số không âm; 3 số không âm:

$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$. *Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.*

$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$. *Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.*

- *Phương pháp dùng bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối:*

$|a+b| \le |a| + |b|$ *với mọi a, b. Dấu đẳng thức xảy ra* $\Leftrightarrow ab \ge 0$.

$|a-b| \le |a| + |b|$ *với mọi a, b. Dấu đẳng thức xảy ra* $\Leftrightarrow ab \le 0$.

- *Phương pháp đạo hàm: Nếu y = f(x) có y' > 0 thì f(x) đồng biến:*

$x > a \Rightarrow f(x) > f(a);\ x < b \Rightarrow f(x) < f(b)$

Đối với y' < 0 thì ta có bất đẳng thức ngược lại.

Việc xét dấu y' đôi khi phải cần đến y'', y''',... hoặc xét dấu bộ phận, chẳng hạn tử số của một phân số có mẫu dương,....

Nếu y'' > 0 thì y' đồng biến từ đó ta có đánh giá f '(x) rồi f(x),...

Lập bảng biến thiên từ đó có kết luận về GTLN, GTNN. Nếu cần thì đặt ẩn phụ t = g(x) với điều kiện đầy đủ của t.

Nếu y = f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì ta chỉ cần tìm các nghiệm x_i *của đạo hàm f '(0)= 0 rồi so sánh kết luận:*

$\min f(x) = \min \{ f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(b) \}$

$\max f(x) = \max \{ f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(b) \}$.

Chú ý: *Mũ hóa và logarit hóa.*

Bài toán 6.1: Chứng minh bất đẳng thức: $n^{n+1} > (n+1)^n$, với mọi $n \in \mathbf{N}$, $n > 3$.

Giải

Với $n \in \mathbf{N}$, $n > 3$, bất đẳng thức tương đương

$$(n+1)\ln n > n\ln(n+1) \Leftrightarrow \frac{n+1}{\ln(n+1)} > \frac{n}{\ln n}$$

Xét $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ trên $(3; +\infty)$ thì $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0$.

Do đó f đồng biến trên $(3; +\infty)$ nên:

$$n+1 > n > 3 \Rightarrow f(n+1) > f(n) \Rightarrow \frac{n+1}{\ln(n+1)} > \frac{n}{\ln n}: \text{đpcm.}$$

Bài toán 6.2: Cho 4 số x, y, z, t $\in (\frac{1}{4}; 1)$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\log_x\left(y-\frac{1}{4}\right) + \log_y\left(z-\frac{1}{4}\right) + \log_z\left(t-\frac{1}{4}\right) + \log_t\left(x-\frac{1}{4}\right) \ge 8.$$

Giải

Ta có: $\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow a - \dfrac{1}{4} \le a^2$ với mọi a.

Và vì $\dfrac{1}{4} < x, y, z, t < 1$ nên hàm nghịch biến, do đó:

$VT \ge \log_x y^2 + \log_y z^2 + \log_z t^2 + \log_t x^2 = 2(\log_x y + \log_y z + \log_z t + \log_t x)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương:

$$2(\log_x y + \log_y z + \log_z t + \log_t x) \geq 2(2.\sqrt{\log_x y.\log_y z.} + 2\sqrt{\log_z t.\log_t x})$$

$$\geq 8.\sqrt[4]{\log_x y.\log_y z.\log_z t.\log_t x} = 8\sqrt[4]{1} = 8$$

Vậy: $\log_x\left(y-\frac{1}{4}\right)+\log_y\left(z-\frac{1}{4}\right)+\log_z\left(t-\frac{1}{4}\right)+\log_t\left(x-\frac{1}{4}\right)\geq 8$.

Bài toán 6.3: Chứng minh các bất đẳng thức sau với mọi $x > 0$:

a) $e^x > x + 1$ b) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Giải

a) Xét hàm số $f(x) = e^x - x - 1$, $x \geq 0$ thì $f'(x) = e^x - 1 > 0$, $\forall x > 0$ nên f đồng biến trên $(0; +\infty)$ vì f liên tục trên $[0; +\infty)$

nên f đồng biến trên $[0; +\infty)$: $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm.

b) Xét $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$, $x \geq 0$ thì $f'(x) = e^x - x - 1$.

Theo câu a) thì $f'(x) > 0$ nên f đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm.

Bài toán 6.4: Chứng minh bất đẳng thức:

$$4^{\sin x} + 2^{\tan x} > \sqrt{2^{3x+2}}, \text{ với mọi } x \in (0; \frac{\pi}{2}).$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $4^{\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2\sqrt{4^{\sin x}.2^{\tan x}} = \sqrt{2^{2\sin x+\tan x+2}}$

Ta cần chứng minh: $2^{2\sin x + \tan x + 2} > 2^{3x+2} \Leftrightarrow 2\sin x + \tan x > 3x$

Xét $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$, $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 > 2\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \geq 2\sqrt{2} - 3 > 0$$

nên f đồng biến trên $[0; \frac{\pi}{2})$: $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm

Bài toán 6.5: Chứng minh bất đẳng thức: $e^x > \frac{x}{x^2 - 2x + 2}$ với mọi x.

Giải

Nếu $x \leq 0$ thì BĐT đúng.

Nếu $x > 0$, vì $x^2 - 2x + 2 > 0$, $\forall x$ nên BĐT $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 > \frac{x}{e^x}$.

Xét $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x > 0$, $f'(x) = 2x - 2$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Lập BBT thì $\min f(x) = f(1) = 1$

Xét $g(x) = \dfrac{x}{e^x}$, $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \dfrac{1-x}{e^x}$;

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Lập BBT thì $\max g(x) = g(x) = \dfrac{1}{e}$.

Vì $\min f(x) > \max g(x) \Rightarrow$ đpcm

Bài toán 6.6: Chứng minh bất đẳng thức: $e^x + \cos x \geq 2 + x - \dfrac{x^2}{2}$, với mọi x.

Giải

Xét hàm số $f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \dfrac{x^2}{2}$, $D = \mathbf{R}$.

$f'(x) = e^x - \sin x - 1 + x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$f''(x) = e^x + 1 - \cos x > 0$, $\forall x$ nên $f'(x)$ đồng biến trên **R**, ta có:

$f'(x) < f'(0) = 0, \forall x < 0$; $f'(x) > f'(0) = 0, \forall x > 0$.

BBT:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$\searrow$	0	$\nearrow$

Vậy $f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \dfrac{x^2}{2} \geq 0, \forall x$.

Bài toán 6.7: Chứng minh bất đẳng thức: $\ln(1 + x) > x - \dfrac{x^2}{2}$ với mọi $x > 0$.

Giải

BĐT: $\ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2} > 0, \forall x > 0$

Xét $f(x) = \ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2}$, $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{x^2}{1+x} \geq 0$

và f liên tục trên $[0; +\infty)$ nên f đồng biến trên $[0; +\infty)$

Do đó: $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow \ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2} > 0$: đpcm.

Bài toán 6.8: Chứng minh bất đẳng thức:

$e^x - e^{-x} \geq 2\ln(x + \sqrt{1+x^2})$, với mọi $x \geq 0$.

Giải

Xét hàm số $f(x) = e^x - e^{-x} - 2\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, $D = [0; +\infty)$

$f'(x) = e^x + e^{-x} - \dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

vì $e^x + e^{-x} > 2$ và $\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}} < 2$ nên $f'(x) > 0, \forall x > 0$.

Do đó f(x) đồng biến trên $[0;+\infty)$ nên $f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.9: Cho $0 < x < 1$; $0 < y < 1$ và $x \neq y$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{1-y} - \ln\frac{x}{1-x}\right) > 4$$

Giải

Do $x \neq y$, không giảm tổng quát, giả sử $y > x$.

Xét hàm số $f(t) = \ln\dfrac{t}{1-t} - 4t$, với $0 < t < 1$

$\Rightarrow f'(t) = \dfrac{(2t-1)^2}{t(1-t))} \geq 0$ nên f(t) là hàm đồng biến trên (0; 1)

Vì $y > x$ nên ta có $f(y) > f(x)$ hay $\ln\dfrac{y}{1-y} - 4y > \ln\dfrac{x}{1-x} - 4x$

và do $y - x > 0$ nên suy ra $\dfrac{1}{y-x}\left(\ln\dfrac{y}{1-y} - \ln\dfrac{x}{1-x}\right) > 4 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.10: Cho $a > b > 0$.

Chứng minh bất đẳng thức: $\left(2^a + \dfrac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \dfrac{1}{2^b}\right)^a$.

Giải

Với $a > b > 0$, bất đẳng thức tương đương:

$$\left(\frac{4^a+1}{2^a}\right)^b \leq \left(\frac{4^b+1}{2^b}\right)^a \leq (4^a+1)^b \leq (4^b+1)^a$$

$\Leftrightarrow b.\ln(4^a + 1) \leq a.\ln(4^b + 1) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(1+4^a)}{a} \leq \ln\dfrac{(1+4^b)}{b}$

Xét $f(x) = \dfrac{\ln(1+4^x)}{x}$, $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{4^x\ln 4}{1+4^x}.x - \ln(1+4^x)\right) = \frac{1}{x^2(1+4^x)}(4^x.\ln 4^x - (1+4^x).\ln(1+4^x)) < 0$$

nên f nghịch biến: $a > b > 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$: đpcm

Bài toán 6.11: Cho các số nguyên n ($n \geq 2$) và hai số thực không âm x, y. Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt[n]{x^n + y^n} \geq \sqrt[n+1]{x^{n+1} + y^{n+1}}$.

Giải

Với x = 0 hoặc y = 0, bất đẳng thức đúng.

Với xy > 0, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt[n]{1+\left(\frac{x}{y}\right)^n} \geq \sqrt[n+1]{1+\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\sqrt[n]{1+t^n}}{\sqrt[n+1]{1+t^{n+1}}}$ với $t \in (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^{n-1}(1-t)}{\sqrt[n+1]{\left(1+t^{n+1}\right)^{n+2}}\sqrt[n]{\left(1+t^n\right)^{n-1}}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

BBT

t	0		1		$+\infty$
f'(t)	0	+	0	-	
f(t)	1	↗		↘	1

Suy ra $f(t) \geq 1$ với mọi $t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.12: Cho a, b > 0 và a + b = 1.

Chứng minh bất đẳng thức: $e^{ax+by} \leq a.e^x + b.e^y$, với mọi x, với mọi y.

Giải

Ta có a, b > 0 và a + b = 1 nên b = 1 - a do đó 0 < a < 1

BĐT: $e^{ax+(1-a)y} \leq a.e^x + (1-a)e^y$

$\Leftrightarrow e^y.\, e^{a(x-y)} \leq e^y + a(e^{x-y} - 1)\ e^{a(x-y)} - a.e^{x-y} + a - 1 \leq 0.$

Xét $f(t) = e^{at} - a.e^t + a - 1$, $t \in \mathbf{R}$.

$f'(t) = a(e^{at} - e^t)$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

BBT

t	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		+	0	-	
f		↗	0	↘	

Suy ra $f(t) \leq 0$, $\forall t \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.13: Cho p > 1, q > 1 thoả p + q = pq và a, b > 0

Chứng minh bất đẳng thức: $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

Giải

Xét hàm số $f(a) = \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} - ab$ với a > 0.

$f'(a) = a^{p-1} - b$, $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a^{p-1} = b \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{p-1}}$

Mà $p + q = pq \Rightarrow (p-1)(q-1) = 1$ nên $a = b^{q-1}$

Lập BBT thì $\min f = f(b^{q-1}) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.14: Cho a, b, c > 0. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $a^a.b^b.c^c \ge a^b.b^c.c^a$

b) $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \le a^a.b^b.c^c$

Giải

a) Giả sử a = max{a, b, c}. Xét $a \ge b \ge c$:

BĐT $\Leftrightarrow a^{a-b}.b^{b-c} \ge c^{a-c}$

Vì $a \ge b \ge c > 0$ nên $a^{a-b}.b^{b-c} \ge c^{a-b}.b^{b-c} = c^{a-c}$

Xét $a \ge c \ge b$: BĐT $\Leftrightarrow a^{a-b} \ge b^{c-b}.c^{a-c}$

Vì $a \ge c \ge b > 0$ nên $b^{c-b}.c^{a-c} \le a^{c-b}.a^{a-c} = a^{a-b}$

b) BĐT $\Leftrightarrow \log(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \le \log(a^a.b^b.c^c)$

$\Leftrightarrow (a + b + c)\log(abc) \le 3(\log a^a + \log b^b + \log c^c)$

$\Leftrightarrow (a + b + c)(\log a + \log b + \log c) \le 3(a\log a + b\log b + c\log c)$

$\Leftrightarrow (a-b)(\log a-\log b) + (b-c)(\log b-\log c) + (c-a)(\log c-\log a) \ge 0$.

BĐT này đúng vì cơ số 10 > 1 nên $x \ge y > 0 \Rightarrow \log x \ge \log y$ hoặc $0 < x \le y$

$\Rightarrow \log x \le \log y$ nên $(x - y)(\log x - \log y) \ge 0, \forall x > 0, \forall y > 0$.

Bài toán 6.15: Cho a, b, c > 0. Chứng minh

a) $a^b + b^a > 1$

b) $(a + b)^c + (b + c)^a + (c + a)^b > 2$.

Giải

a) Nếu $a \ge 1$ hoặc $b \ge 1$ thì $a^b + b^a > 1$

Nếu 0 < a, b < 1. Xét $f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$, $x > 0$, $0 < \alpha < 1$.

$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha\left(\dfrac{1}{(1+x)^{1-\alpha}} - 1\right) < 0$.

nên $x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow (1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x$ (*)

Áp dụng $a = \dfrac{1}{1+x}, x > 0 \Rightarrow a^b > \dfrac{1}{1+xb} = \dfrac{a}{a+b-ab}$.

Tương tự: $b^a > \dfrac{1}{1+ya} = \dfrac{b}{a+b-ab} \Rightarrow a^b + b^a > 1$.

b) Trong 3 số a + b, b + c, c + a nếu có một số, chẳng hạn

$a + b \geq 1$ thì $(a+b)^c \geq 1$ và $(b+c)^a + (c+a)^b > b^a + a^b > 1$ suy ra đpcm.

Còn nếu cả 3 số đó bé hơn 1 thì dùng bất đẳng thức (*).

Bài toán 6.16: Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x \text{ với mọi x.}$$

Dấu bằng khi nào ?

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các cặp số dương:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x\left(\frac{15}{4}\right)^x} = 2.3^x$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x.\left(\frac{20}{3}\right)^x} = 2.5^x$$

$$\left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^x.\left(\frac{12}{5}\right)^x} = 2.4^x$$

Cộng lại 3 bất đẳng thức vế theo vế thì có

$$2\left(\frac{12}{5}\right)^x + 2\left(\frac{15}{4}\right)^x + 2\left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2(3^x + 4^x + 5^x)$$

Rút gọn cho 2 thì có $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left(\dfrac{12}{5}\right)^x = \left(\dfrac{15}{4}\right)^x = \left(\dfrac{20}{3}\right)^x \Leftrightarrow x = 0$.

Bài toán 6.17: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $f(x) = x - e^{2x}$ nên đoạn [-1; 0] b) $f(x) = 3^{|x|}$ trên đoạn [-1; 1].

Giải

a) Ta có: $f'(x) = 1 - 2e^{2x}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln\sqrt{2} \in (-1; 0)$.

$$f(-1) = -1-e^{-2},\ f(-\ln\sqrt{2}) = -\frac{1+\ln 2}{2},\ f(0) = -1.$$

So sánh thì $\max\limits_{x\in[-1;0]} f(x) = f(-\ln\sqrt{2}) = -\ln\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}$, $\min\limits_{x\in[-1;0]} f(x) = f(-1) = -1-e^{-2}$

b) f(x) là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn [-1; 1].

Xét $0 \leq x \leq 1$ thì $f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x.\ln 3 > 0$ nên f đồng biến trên [0; 1].

Vậy $\min\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(0) = 1$; $\max\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(\pm1) = 3$.

Bài toán 6.18: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $f(x) = x - \ln x + 3$ trên khoảng $(0; +\infty)$

b) $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ trên đoạn $[3; 6]$.

Giải

a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Lập BBT thì $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x) = f(1) = 4$, không có giá trị lớn nhất.

b) Ta có $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ nên

$f'(x) > 0, \forall x \in [3; 6]$ do đó trên đoạn $[3; 6]$ hàm số $f(x)$ đồng biến.

Vậy $\min\limits_{x\in[3,6]} f(x) = f(3) = \ln 10$; $\max\limits_{x\in[3,6]} f(6) = \ln 40$.

Bài toán 6.19: Tìm GTLN, GTNN của $y = 4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}$.

Giải

Đặt $t = 4^{\sin^2 x}$, $1 \le t \le 4$ thì $y = f(t) = t + \dfrac{4}{t}$, $f'(t) = 1 - \dfrac{4}{t^2} = \dfrac{t^2-4}{t^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 2$. Chọn $t = 2$.

Ta có $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(4) = 5$

Vậy max $y = 5$ khi $\sin^2 x = 0$ hoặc $\sin^2 x = 1$, min $y = 4$ khi $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}$.

Bài toán 6.20: Tìm GTLN, GTNN của $y = 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|}$.

Giải

Đặt $t = |\sin x|$, $0 \le t \le 1$, thì $y = f(t) = 2^t + 2^{\sqrt{1-t^2}}$, $0 \le t \le 1$.

$$f'(t) = 2^t.\ln 2 + 2^{\sqrt{1-t^2}}.\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}.\ln 2 = t.\ln 2\left(\frac{2^t}{t} - \frac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

Xét $g(u) = \dfrac{2^u}{u}$, $0 < u < 1$ thì $g'(u) = 2^u.\dfrac{u\ln 2 - 1}{u^2}$

Vì $0 < u < 1$, $0 < \ln 2 < 1$ nên $g'(u) < 0$, $\forall u \in (0; 1)$

Do đó $g(u)$ nghịch biến trên $(0; 1)$. Nên: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2^t}{t} = \dfrac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}} \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có $f(0) = 3$, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2.2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $f(1) = 3$. Vậy max $y = 2.2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, min $y = 3$.

BÀI TẬP

Bài tập 6.1: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\log_6 7 > \log_7 6$ b) $2 < \log_2 3 + \log_3 2 < \frac{5}{2}$

HD-ĐS

a) Dùng bất đẳng thức Côsi b) Xét hàm với biến $t = \log_2 3$.

Bài tập 6.2: Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{\lg a + \lg b}{2} \le \lg\frac{a+b}{2}, \quad \forall a, b > 0$

HD-ĐS

Dùng bất đẳng thức Côsi

Bài tập 6.3: Cho x, y, z là ba số thoả mãn $x + y + z = 0$.

Chứng minh: $\sqrt{3+4^x} + \sqrt{3+4^y} + \sqrt{3+4^z} \ge 6$.

HD-ĐS

Dùng bất đẳng thức Côsi

Bài tập 6.4: Chứng minh: $\log_2(x^2 + 1) - \log_2 x \ge 3x^2 - 2x^3, \forall x > 0$

HD-ĐS

Dùng đạo hàm

Bài tập 6.5: Chứng minh $\frac{3\ln x}{x^3 - 1} < \frac{x+1}{x^3 + x}, \forall x > 0, x \ne 1$

HD-ĐS

Đưa về hàm phân thức riêng biệt, hàm lôgarit một bên.

Bài tập 6.6: Chứng minh bất đẳng thức $3^x > x + 1, \ \forall x > 0$.

HD-ĐS

Dùng đạo hàm và lập BBT

Bài tập 6.7: Chứng minh bất đẳng thức với n nguyên dương

$$x^n.\sqrt{1-x} < \frac{1}{\sqrt{2ne}}, \ \forall x \in (0,1)$$

HD-ĐS

Lấy lôgarit Nêpe 2 vế.

Bài tập 6.8: Tìm GTNN, GTLN của hàm số:

a) $y = 3^{1+2\cos x}$ b) $y = 5^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x}$

HD-ĐS

a) 1/3 và 27 b) $2\sqrt{5}$ và 6