TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

HUỲNH HỮU DINH

BÀI GIẢNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

TPHCM - Ngày 17 tháng 12 năm 2012

Mục lục

Chương 1

Ma trận và định thức

1.1 Ma trận

1.1.1 Các khái niệm về ma trận

Các ví dụ về ma trận

- Bảng số $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & \sqrt{6} \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$ được gọi là một ma trận cấp 2×3.

- Bảng số $B = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 9 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix}$ được gọi là một ma trận cấp 3×3.

- Bảng số $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ được gọi là một ma trận cột cấp 3×1.

- Bảng số $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ được gọi là một ma trận dòng cấp 1×3.

Các khái niệm về ma trận

1. *Một bảng hình chữ nhật gồm $m \times n$ số thực được sắp thành m dòng và n cột được gọi là ma trận cấp $m \times n$.*

Ký hiệu: $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

i được gọi là chỉ số dòng.

j được gọi là chỉ số cột.

a_{ij} là phần tử nằm ở dòng i và cột j của ma trận A.

Tập hợp tất cả các ma trận cấp $m \times n$ được ký hiệu là $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

2. *Ma trận có số dòng bằng số cột ($m = n$) được gọi là ma trận vuông cấp n, ký hiệu $A = \left(a_{ij}\right)_n$.*

$a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ được gọi là các phần tử nằm trên đường chéo chính.

$a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$ được gọi là các phần tử nằm trên đường chéo phụ.

Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu là $M_n(\mathbb{R})$.

Ví dụ 1.1. Các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ là các ma trận vuông.

3. *Ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_n$ được gọi là ma trận chéo nếu $a_{ij} = 0; \forall i \neq j$, ký hiệu $A = \text{dig}\left(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\right)$.*

Ví dụ 1.2. Các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ là các ma trận chéo.

4. *Ma trận chéo cấp n có tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng một được gọi là ma trận đơn vị cấp n, ký hiệu I_n.*

Từ định nghĩa trên ta nhận được

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

5. *Ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_n$ được gọi là ma trận tam giác trên nếu $a_{ij} = 0; \forall i > j$.*

Dựa vào định nghĩa, ta suy ra được dạng của ma trận A như sau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6. *Ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_n$ được gọi là ma trận tam giác dưới nếu $a_{ij} = 0; \forall i < j$.*

Rõ ràng nếu A là ma trận tam giác dưới thì A có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

7. *Ma trận cấp $m \times n$ có tất cả các phần tử bằng không, ký hiệu $O_{m\times n}$ (đôi khi là O), được gọi là ma trận không.*

Từ định nghĩa ta suy ra ma trận $O_{m\times n}$ có dạng

$$O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

8. *Ma trận bậc thang*

Trước khi đi vào khái niệm ma trận bậc thang chúng ta cần tìm hiểu một số khái niệm liên quan.

Dòng không: *Một dòng của ma trận có tất cả các phần tử đều bằng không được gọi là dòng không.*

Phần tử cơ sở của dòng: *Phần tử khác không đầu tiên của dòng tính từ trái sang được gọi là phần tử cơ sở của dòng.*

Ma trận bậc thang: Ma trận bậc thang là một ma trận khác không thỏa hai điều kiện sau:

- *Dòng không (nếu có) nằm dưới dòng khác không.*
- *Phần tử cơ sở của dòng dưới nằm bên phải phần tử cơ sở của dòng trên.*

Ví dụ 1.3. Các ma trận bậc thang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Các ma trận không là ma trận bậc thang:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & -9 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. *Ma trận bậc thang có các phần tử cơ sở của dòng bằng một, các phần tử còn lại bằng không được gọi là ma trận bậc thang rút gọn.*

Ví dụ 1.4. Các ma trận bậc thang rút gọn:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Các phép toán trên ma trận

Hai ma trận bằng nhau

Định nghĩa 1.1. *Hai ma trận được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng cỡ và có tất cả các phần tử tương ứng vị trí bằng nhau.*

Cho hai ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$. Khi đó,

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}; i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}}$$

Ví dụ 1.5. Tìm x, y, z, t để hai ma trận $A = \begin{pmatrix} x+y & x+z \\ t+y & t+2z \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ bằng nhau.

Giải. Theo định nghĩa, hai ma trận A, B bằng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \\ t + y = 3 \\ t + 2z = 4 \end{cases}$$

Từ các đẳng thức trên ta giải ra được $x = 2, y = -1, z = 0, t = 4$. ∎

Nhân một số với một ma trận

Định nghĩa 1.2. *Nhân một số với một ma trận là nhân số đó với tất cả các phần tử của ma trận.*

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ thì với mọi $k \in \mathbb{R}$ ta có $\boxed{kA = (ka_{ij})_{m\times n}.}$

Đặc biệt $(-1)\,A = (-a_{ij})_{m\times n}$ được gọi là ma trận đối của ma trận A, ký hiệu $-A$.

Ví dụ 1.6. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, khi đó $3A = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Cộng hai ma trận

Định nghĩa 1.3. *Cộng hai ma trận cùng cấp là cộng các phần tử tương ứng vị trí.*

Nếu $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$ thì $\boxed{A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.}$

Ví dụ 1.7. Thực hiện các phép tính trên ma trận

1. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Tính $A + B$.

2. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 2 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Tính $5A - 2B$.

Giải. Ta có

1. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 4+3 \\ 5+1 & 2+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

2. $5A - 2B = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 20 & 0 \\ -10 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ 4 & 16 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ 16 & -16 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}.$

■

Ma trận chuyển vị

Định nghĩa 1.4. *Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$, ma trận có cấp $n \times m$ nhận được từ ma trận A bằng cách đổi dòng thành cột hoặc đổi cột thành dòng được gọi là ma trận chuyển vị của A, ký hiệu A^T.*

Ví dụ 1.8. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, khi đó $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

Nhận xét 1.1. Một số kết quả quan trọng ta có thể suy ra từ định nghĩa

1. $(A+B)^T = A^T + B^T; \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
2. $(cA)^T = cA^T; \forall c \in \mathbb{R}, A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
3. $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Ví dụ 1.9. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $X + A = 3(A + I_2)^T$.

Giải. Đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & X + A && = 3(A + I_2)^T \\ \Leftrightarrow\ & X + A && = 3\left(A^T + I_2^T\right) \\ \Leftrightarrow\ & X && = 3\left(A^T + I_2^T\right) - A \\ \Leftrightarrow\ & X && = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & X && = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Phép nhân hai ma trận

Định nghĩa 1.5. *Cho hai ma trận* $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ *và* $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times p}$. *Khi đó, tích của ma trận* A *với ma trận* B, *ký hiệu là* AB, *là một ma trận có cấp* $m \times p$ *và nếu* $AB = \left(c_{ij}\right)_{m\times p}$ *thì* c_{ij} *được xác định bởi công thức* $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$.

Nhận xét 1.2. Tích hai ma trận tồn tại khi số cột của ma trận đứng trước bằng với số dòng của ma trận đứng sau.

Ma trận tích có số dòng bằng số dòng của ma trận đứng trước và có số cột bằng số cột của ma trận đứng sau.

Phép nhân hai ma trận, nói chung, không có tính giao hoán.

Ví dụ 1.10. Tính AB và BA với

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 1 & -9 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = A^T$

Giải. 1. Ta có

- $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & -8 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

- $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Các câu 2 và 3 bạn đọc xem như bài tập. ■

Nhận xét 1.3. Nếu $A \in M_n(\mathbb{R})$ thì AA luôn luôn tồn tại và khi đó ta định nghĩa $A^2 = AA$. Tương tự, ta định nghĩa $A^{k+1} = A^k A$ với $k \geq 0$ và qui ước $A^0 = I_n$.

Ví dụ 1.11. Cho A là ma trận vuông cấp 2011 mà phần tử dòng thứ i là i. Tìm phần tử ở dòng thứ 2 cột 3 của ma trận A^2.

Giải. Từ giả thiết đề bài ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2011 & 2011 & 2011 & \dots & 2011 \end{pmatrix}$$

Ta suy ra

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2011 & 2011 & 2011 & \dots & 2011 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2011 & 2011 & 2011 & \dots & 2011 \end{pmatrix}$$

Từ biểu thức của A^2 ta tính được phần tử ở dòng 2 cột 3 là:

$$2(1 + 2 + 3 + ... + 2011) = 2011.2012 = 4046132$$

■

Ví dụ 1.12. Cho A là ma trận vuông cấp 2011 mà phần tử dòng thứ i là 3^{i-1}. Tìm phần tử ở dòng thứ 3 cột 2011 của ma trận A^2.

Giải. Ta xác định ma trận A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 9 & 9 & 9 & \dots & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3^{2010} & 3^{2010} & 3^{2010} & \dots & 3^{2010} \end{pmatrix}$$

Ta suy ra

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 9 & 9 & 9 & \dots & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3^{2010} & 3^{2010} & 3^{2010} & \dots & 3^{2010} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 9 & 9 & 9 & \dots & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3^{2010} & 3^{2010} & 3^{2010} & \dots & 3^{2010} \end{pmatrix}$$

Biểu thức của A^2 cho ta tính được phần tử ở dòng 3 cột 2011 của A^2 là:

$$9\left(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2010}\right) = 9\frac{3^{3011} - 1}{3 - 1} = \frac{9}{2}\left(3^{2011} - 1\right)$$

■

Ví dụ 1.13. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^2, A^3 và từ đó suy ra A^n.

Giải. Ta có

- $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Từ đây ta suy ra $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ■

Ví dụ 1.14. Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tính $(I_2 - A)^{2011}$.

Giải. Đặt $B = I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ta có

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
- $B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Bằng qui nạp ta tính được $B^{2011} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2011 & 1 \end{pmatrix}$. ■

Ví dụ 1.15. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Tính $\sum\limits_{i=0}^{2011} 2^n A^n$.
2. Tính B^{2011} với $B = A + I_4$.

Giải. 1. Ta có

- $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{4\times 4}$

Ta suy ra $A^n = O_{4\times 4}$ với mọi $n \geq 4$.

Do đó $\sum\limits_{i=0}^{2011} 2^n A^n = I_4 + 2A + 4A^2 + 8A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta nhận được

$$\begin{aligned} B^{2011} &= (A + I_4)^{2011} \\ &= \sum_{i=0}^{2011} C_{2011}^i A^i = I_4 + C_{2011}^1 A + C_{2011}^2 A^2 + C_{2011}^3 A^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2011 & \dfrac{2011.2010}{2} & \dfrac{2011.2010.2009}{6} \\ 0 & 1 & 2011 & \dfrac{2011.2010}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

1.1.3 Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Chúng ta có ba phép biến đổi sơ cấp trên ma trận. Cụ thể như sau:

- *Đổi chỗ hai dòng (cột) bất kì của ma trận.*
- *Nhân một dòng (cột) với một số khác không.*
- *Cộng vào một dòng (cột) một dòng (cột) khác.*

Các phép biến đổi sơ cấp chiếm một vị trí quan trọng trong biến đổi ma trận vì nó "ít" làm thay đổi "bản chất" của ma trận. Do đó, ta thường hay dùng các phép biến đổi này để chuyển một ma trận phức tạp về dạng đơn giản hơn, xem xét các đặc điểm của ma trận đơn giản rồi rút ra các tính chất của ma trận ban đầu. Vấn đề phát sinh là biến đổi tới đâu thì được xem là "đơn giản"? Kết quả sau đây sẽ cho ta lời giải đáp:

Định lý 1.1. *Mọi ma trận bất kỳ đều có thể chuyển về dạng bậc thang rút gọn thông qua các phép biến đổi sơ cấp.*

Ví dụ 1.16. Dùng các phép biến đổi sơ cấp chuyển ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

về dạng bậc thang rút gọn.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 2d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_1 \to d_1 - d_3]{d_2 \to d_2 - 3d_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{d_1 \to 2d_1 - d_2} &\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \to 2c_2 - c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{c_3 \to c_3 - c_2} &\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 \to \frac{1}{2} d_2]{d_1 \to \frac{1}{2} d_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■

1.2 Định thức

1.2.1 Hoán vị và nghịch thế

1. *Cho tập chỉ số* $\{1, 2, ..., n\}$. *Mỗi cách sắp xếp* n *số đã cho theo một thứ tự nhất định được gọi là một hoán vị của* n *số đó.*

Mỗi hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$ được kí hiệu là $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ với $\sigma(i) \in \{1, 2, ..., n\}$ và $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ với mọi $i \neq j$.

Từ n số đã cho chúng ta có thể lập được $n!$ hoán vị.

Ví dụ 1.17. Từ tập chỉ số $\{1, 2\}$ chúng ta có $2! = 2$ hoán vị là: $(1, 2)$ và $(2, 1)$.

Ví dụ 1.18. Từ tập chỉ số $\{1, 2, 3\}$ chúng ta có $3! = 6$ hoán vị là:

$$(1, 2, 3);(1, 3, 2);(2, 1, 3);(2, 3, 1);(3, 1, 2);(3, 2, 1)$$

2. *Trong một hoán vị nếu mỗi lần xảy ra trường hợp số lớn đứng trước số bé $\sigma(i) > \sigma(j)$ với $i < j$ thì ta nói có một nghịch thế.*

Ví dụ 1.19. Tìm số nghịch thế của các hoán vị

$$(1, 2, 3);(1, 3, 2);(3, 1, 2);(3, 2, 1)$$

Giải. Dựa vào định nghĩa ta nhận được các kết quả sau:

- Hoán vị $(1, 3, 2)$ có một nghịch thế vì $\sigma(2) > \sigma(3)$.
- Hoán vị $(3, 1, 2)$ có hai nghịch thế vì $\sigma(1) > \sigma(2)$ và $\sigma(1) > \sigma(3)$.
- Hoán vị $(3, 2, 1)$ có ba nghịch thế (giải thích tương tự như trên).
- Hoán vị $(1, 2, 3)$ không có nghịch thế.

■

3. *Nếu số các nghịch thế trong một hoán vị bằng không hoặc là một số chẵn thì ta nói đó là một hoán vị chẵn. Ngược lại, nếu số các nghịch thế trong một hoán vị là một số lẻ thì ta nói đó là một hoán vị lẻ.*

Ví dụ 1.20. Hoán vị $(1, 2)$ là hoán vị chẵn. Hoán vị $(2, 1)$ là hoán vị lẻ.

Ví dụ 1.21. Các hoán vị $(1, 2, 3);(3, 1, 2)$ là các hoán vị chẵn (vì có số nghịch thế lần lượt bằng 0 và 2). Các hoán vị $(1, 3, 2);(3, 2, 1)$ là các hoán vị lẻ (vì có số nghịch thế lần lượt bằng 1 và 3).

Việc xem xét một hoán vị là chẵn hay lẻ nếu chỉ dùng định nghĩa thì không phải là chuyện đơn giản. Định lý sau đây giúp ta khắc phục khó khăn trên:

Định lý 1.2. *Cho σ là một hoán vị của tập chỉ số $\{1, 2, \ldots, n\}$. Xét hàm dấu*

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{(\sigma(j) - \sigma(i))}{(j - i)}$$

Khi đó, tập giá trị của $\operatorname{sign}(\sigma)$ chỉ bao gồm hai giá trị ± 1. Hơn nữa,

- *Nếu $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ thì σ là một hoán vị chẵn.*
- *Nếu $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ thì σ là một hoán vị lẻ.*

Ví dụ 1.22. Xét tính chẵn lẻ của hoán vị $\sigma = (2, 3, 1, 4)$.

Giải. Ta có

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \sum_{1 \le i < j \le 4} \frac{(\sigma(j) - \sigma(i))}{(j - i)} = 1$$

Vậy σ là một hoán vị chẵn. ■

Nhận xét 1.4. Số các hoán vị chẵn và lẻ của tập chỉ số $\{1, 2, \ldots, n\}$ là như nhau và bằng $\frac{1}{2}n!$.

1.2.2 Định nghĩa định thức của ma trận vuông

1. Cho A là một ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Đầu tiên, chúng ta lập một tích gồm n phần tử của ma trận A, nằm ở n dòng khác nhau và n cột cũng khác nhau. Chúng ta sẽ thu được $n!$ tích số có dạng $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}(*)$ với $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ là một hoán vị của bộ chỉ số $\{1, 2, ..., n\}$.

Tiếp theo, nếu hoán vị $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ là hoán vị chẵn thì chúng ta giữ nguyên dấu của tích dạng $(*)$. Ngược lại, nếu hoán vị $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ là hoán vị lẻ thì chúng ta đổi dấu tích số dạng $(*)$. Như vậy, số tích số giữ nguyên dấu và số tích số đổi dấu là bằng nhau và bằng $\frac{1}{2}n!$. Khi đó, chúng ta có $n!$ tích số dạng $\pm a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}(**)$.

2. Tổng của $n!$ tích số dạng $(**)$ được gọi là định thức (cấp n) của ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_n$. Ký hiệu: $\det A$ hoặc

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Qui ước: Nếu $A = (a)$ thì $\det A = a$.

Ví dụ 1.23. Sử dụng định nghĩa để xây dựng công thức tính định thức cấp 2.

Giải. Giả sử

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ta sẽ xây dựng công thức tính $\det A$.

Tập chỉ số $\{1, 2\}$ chỉ có hai hoán vị $(1, 2)$ và $(2, 1)$. Để xây dựng công thức tính định thức của ma trận A, chúng ta cần phải xác định hai tích $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$ cùng với dấu của chúng. Cụ thể, ta có bảng sau:

$(\sigma(1), \sigma(2))$	Hoán vị chẵn/ lẻ	$\pm a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$
$(1, 2)$	chẵn	$a_{11}a_{22}$
$(2, 1)$	lẻ	$-a_{12}a_{21}$

Vậy $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$ ■

Ví dụ 1.24. Sử dụng định nghĩa để xây dựng công thức tính định thức cấp 3.

Giải. Giả sử

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Tập chỉ số $\{1, 2, 3\}$ có 6 hoán vị là:

$$(1, 2, 3)\,;(1, 3, 2)\,;(2, 1, 3)\,;(2, 3, 1)\,;(3, 1, 2)\,;(3, 2, 1)$$

Để xây dựng công thức tính định thức của ma trận A, chúng ta cần phải xác định sáu tích $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$ cùng với dấu của chúng. Cụ thể, ta có bảng sau:

$(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$	Hoán vị chẵn/lẻ	$\pm a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$
$(1, 2, 3)$	chẵn	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$(1, 3, 2)$	lẻ	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$(2, 1, 3)$	lẻ	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$(2, 3, 1)$	chẵn	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$(3, 1, 2)$	chẵn	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$(3, 2, 1)$	lẻ	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Vậy

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}) \\ &\quad - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{12}a_{21}a_{33}) \end{aligned}$$

■

Nhận xét 1.5. Bằng cách lí luận tương tự như trong ví dụ 1.23 và 1.24 ta sẽ xây dựng cách tính định thức của ma trận vuông với cấp tùy ý.

Ví dụ 1.25. Tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Giải. Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-4) = 6$$

■

Ví dụ 1.26. Tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$.

Giải. Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = (1.1.4 + 3.2.2 + 1.6.2) - (2.1.2 + 1.6.2 + 1.3.4) = 0$$

■

Ví dụ 1.27. Giải bất phương trình $\begin{vmatrix} x & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3x \end{vmatrix} \geq 0$.

Giải. Ta có

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3x \end{vmatrix} = 3x^2 - 12$$

Do đó, bất phương trình đã cho tương đương với

$$3x^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $-2 \leq x \leq 2$. ■

1.2.3 Phần bù đại số, ma trận phụ hợp và công thức khai triển định thức

Phần bù đại số

Định nghĩa 1.6. *Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$. Định thức của ma trận thu được từ A bằng cách xóa bỏ dòng i và cột j nhân với $(-1)^{i+j}$ được gọi là phần bù đại số của phần tử a_{ij}, ký hiệu A_{ij}.*

Ví dụ 1.28. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Tính $A_{11}, A_{22}, A_{23}, A_{33}$.

Giải. Ta có

- $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6; A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4.$
- $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3; A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2.$

■

Ma trận phụ hợp

Định nghĩa 1.7. *Ma trận, ký hiệu A^*, được định nghĩa như sau:*

$$A^* = \left[\left(A_{ij}\right)_n\right]^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

với A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij}, được gọi là ma trận phụ hợp của ma trận A.

Ví dụ 1.29. cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tìm A^*

Giải. Ta có

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Ví dụ 1.30. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}$. Tìm A^*.

Giải. Ta có

- $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} = 1, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} = 1, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} = 1.$
- $A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} = 0, A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{vmatrix} = 0.$
- $A_{12} = -\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} = -a, A_{13} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & b \end{vmatrix} = ab - c.$
- $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & b \end{vmatrix} = -b.$

Vậy $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab-c & -b & 1 \end{pmatrix}.$ ■

Công thức khai triển định thức

Định lý 1.3. ***(Định lý Laplace.)*** *Giả sử $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó,*

- $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}, i = \overline{1,n}.$
- $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}, j = \overline{1,n}.$

Một số kết quả quan trọng rút ra từ định lý trên:

- Nếu $A = (a_{ij})_n$ là một ma trận tam giác thì $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
- Nếu tồn tại i, j sao cho $a_{ik} = 0, \forall k \neq j$ thì $\det A = a_{ij}A_{ij}$.

Nhận xét 1.6. Để việc tính định thức cho đơn giản thì ta thường khai triển định thức theo các hàng (cột) có càng nhiều số không càng tốt.

Ví dụ 1.31. Tính định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Giải. Khai triển định thức theo dòng 2 ta được

$$\det A = (-1)^{2+2}.2. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

■

Ví dụ 1.32. Tính định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Giải. Áp dụng công thức khai triển định thức ta được

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{khai triển theo c5}} 1(-1)^{4+5} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{khai triển theo c4}} -4(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

■

Ví dụ 1.33. Chứng minh đẳng thức

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

Chứng minh. Khai triển định thức theo dòng 4 ta được

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} &= -c_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{22} \\ 0 & 0 & c_{12} \end{vmatrix} + c_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} \\ 0 & 0 & c_{11} \end{vmatrix} \\
&= -c_{12}c_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + c_{11}c_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

■

Ví dụ 1.34. Giải phương trình $\begin{vmatrix} x & 9 & -1 & x \\ 1 & x & 2 & x^2 \\ 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

Giải. Áp dụng công thức 1.1 ta được

$$\begin{vmatrix} x & 9 & -1 & x \\ 1 & x & 2 & x^2 \\ 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 9 \\ 1 & x \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & 8 \\ 2 & x \end{vmatrix} = \left(x^2-9\right)\left(x^2-16\right)$$

Do đó, phương trình đã cho có bốn nghiệm $x = \pm 3; x = \pm 4$. ■

Nhận xét 1.7. Nếu trong ví dụ 1.33 ta đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

thì công thức 1.1 có thể viết lại như sau

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O_{2\times 2} & C \end{vmatrix} = |A|\,|C| \tag{1.2}$$

Bằng phương pháp chứng minh như trong ví dụ 1.33 ta cũng đạt được các kết quả

$$\begin{vmatrix} O_{2\times 2} & C \\ A & B \end{vmatrix} = |A|\,|C|; \begin{vmatrix} A & O_{2\times 2} \\ B & C \end{vmatrix} = |A|\,|C|$$

Các kết quả trên có thể mở rộng cho trường hợp $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, tức là

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O_{n\times n} & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O_{n\times n} & C \\ A & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O_{n\times n} \\ B & C \end{vmatrix} = |A|\,|C| \qquad (1.3)$$

1.2.4 Một số tính chất cơ bản của định thức

1. *Định thức bằng không nếu trong định thức có dòng (cột) không.*

Ví dụ 1.35. Các định thức $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ đều bằng không vì mỗi định thức đều chứa dòng không hoặc cột không.

2. *Định thức đổi dấu nếu ta đổi chỗ hai dòng (cột) của định thức và giữ nguyên các dòng (cột) còn lại.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{d_i \leftrightarrow d_j}{=\!=\!=\!=\!=} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ví dụ 1.36. Cho hai định thức

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

a. $\Delta_1 = \Delta_2$

b. $\Delta_2 = 2\Delta_1$

c. $\Delta_1 = -\Delta_2$

d. $\Delta_2 = -2\Delta_1$

Giải. Ta thấy định thức Δ_2 nhận được từ định thức Δ_1 bằng cách hoán đổi dòng 1 với dòng 2 và hoán đổi dòng 3 với dòng 4. Do đó

$$\Delta_2 = (-1)^2\Delta_1 = \Delta_1$$

Vậy đáp án ta chọn là a. ■

Ví dụ 1.37. Tính định thức $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & x & 0 & x+2 \\ 0 & 2 & 0 & y & 0 & y+4 \\ 0 & 3 & 0 & z & 0 & z+6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 7 & x & 6 & 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$.

Giải. Ta có

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & x & 0 & x+2 \\ 0 & 2 & 0 & y & 0 & y+4 \\ 0 & 3 & 0 & z & 0 & z+6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 7 & x & 6 & 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1 \leftrightarrow c_6 \\ c_3 \leftrightarrow c_4}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} x+2 & 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ y+4 & 2 & y & 0 & 0 & 0 \\ z+6 & 3 & z & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & x & 1 & 6 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+2 & 1 & x \\ y+4 & 2 & y \\ z+6 & 3 & z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

■

> 3. *Nếu trong định thức có hai dòng (cột) giống nhau thì định thức bằng không.*

Ví dụ 1.38. Định thức $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ bằng không vì dòng 1 và dòng 3 giống nhau.

Ví dụ 1.39. Giải phương trình $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & -2 & -2 \\ x & x^3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Giải. Vế trái của phương trình trên là một định thức có cột ba và bốn bằng nhau nên luôn luôn bằng không. Vậy phương trình đã cho có nghiệm là mọi $x \in \mathbb{R}$. ■

> 4. *Thừa số chung của một dòng (cột) có thể đưa ra ngoài dấu định thức.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

hoặc

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & ka_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & ka_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & ka_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ví dụ 1.40. Cho hai định thức

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -8 \\ -4 & -2 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

a. $\Delta_1 = \Delta_2$

b. $\Delta_2 = 4\Delta_1$

c. $\Delta_1 = 2\Delta_2$

d. $\Delta_2 = 8\Delta_1$

Giải. Ta thấy định thức Δ_2 nhận được từ định thức Δ_1 bằng cách nhân dòng 1 cho 2, dòng 2 cho 2 và cột 4 cho 2. Do đó $\Delta_2 = 8\Delta_1$. ■

> 5. *Nếu định thức có hai dòng (cột) tỉ lệ với nhau thì bằng không (hai dòng (cột) i và j của định thức được gọi là tỉ lệ khi $d_j = kd_i$ (tương ứng $c_j = kc_i$) với $k \in \mathbb{R}$).*

Ví dụ 1.41. Các định thức $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ x & y & z \end{vmatrix}$ là bằng không vì dòng 1 và dòng 2 tỷ lệ với nhau.

> 6. *Nếu định thức có một dòng (cột) mà các phần tử được tách thành tổng hai số thì định thức cũng được tách thành tổng của hai định thức tương ứng.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

Ví dụ 1.42. Không dùng định nghĩa hãy chứng minh các định thức

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+x & 3+y & 3+z \\ 1 & 3 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x+2 & x \\ 2 & y+4 & y \\ 3 & z+6 & z \end{vmatrix}$$

luôn bằng không với mọi x, y, z.

Giải. Áp dụng công thức 1.4 ta được

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 3 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

Tương tự ta cũng có $\Delta_2 = 0$. ■

> 7. *Định thức không thay đổi khi ta cộng hoặc trừ vào một dòng (cột), một dòng (cột) khác đã nhân với một số.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} \pm k a_{j1} & a_{i2} \pm k a_{j2} & \dots & a_{in} \pm k a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

hoặc

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \pm k a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} \pm k a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} \pm k a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ví dụ 1.43. Giải phương trình $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 2x \\ x & x & 1 & 4 \\ 1 & 3 & x & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

Giải. Sử dụng tính chất trên ta được

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 2x \\ x & x & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4 \to c_4 - 2c_1} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ x & x & 1 & 4-2x \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{khai triển cột 4}} (-1)^{2+4}(4-2x) \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 7x(4-2x)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 0, x = 2$. ∎

Ví dụ 1.44. Giải bất phương trình $\begin{vmatrix} m+1 & m-1 & 2 \\ m+2 & 2m+3 & m+2 \\ m+1 & m & 2 \end{vmatrix} \geq 0.$

Giải. Ta có

$$\begin{vmatrix} m+1 & m-1 & 2 \\ m+2 & 2m+3 & m+2 \\ m+1 & m & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{d_3 \to d_3 - d_1} \begin{vmatrix} m+1 & m-1 & 2 \\ m+2 & 2m+3 & m+2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{khai triển dòng 3}} -\left(m^2+m-2\right)$$

Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương với

$$m^2 + m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 1$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $-2 \leq m \leq 1$. ■

Ví dụ 1.45. Tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$

Giải. Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix} \overset{d_2 \to d_2 - d_1}{\underset{\substack{d_3 \to d_3 - d_1 \\ \vdots \\ d_n \to d_n - d_1}}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$
$$= (n-1)!$$

■

Ví dụ 1.46. Tính định thức $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix}$

Giải. Ta có

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} \overset{d_1 \to d_1 + \dots + d_n}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} n+1 & n+1 & n+1 & \dots & n+1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$
$$= (n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

Mặt khác

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{d_3 \to d_3 - d_1 \\ \vdots \\ d_n \to d_n - d_1}]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Vậy

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = n + 1$$

■

8. *Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì $|AB| = |A|\,|B|$. Đặc biệt, nếu $A \in M_n(\mathbb{R})$ thì $\left|A^k\right| = |A|^k$ với mọi $k \geq 0$.*

Ví dụ 1.47. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải. Áp dụng tính chất 8 ta được

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2.8 = 16$$

■

Ví dụ 1.48. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} m & 2 & m+2 \\ 0 & m-1 & 2 \\ 0 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$. Giải phương trình $\det\left(A^{2011}\right) = 0$.

Giải. Áp dụng tính chất 8 ta được

$$\det\left(A^{2011}\right) = (\det A)^{2011} = \left[m\left(m^2-1\right)\right]^{2011}$$

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\left[m\left(m^2-1\right)\right]^{2011} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm $m=0, m=\pm 1$. ■

Ví dụ 1.49. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $\det A = 2$ và $A^2 - 4A = 2I_n$. Tính $\det(A-4I_n)$.

Giải. Từ giả thiết đề bài ta được

$$\begin{aligned} & A^2-4A = 2I_n \\ \Leftrightarrow \quad & A\left(A-4I_n\right) = 2I_n \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} & \det\left[A\left(A-4I_n\right)\right] = \det\left(2I_n\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \det A \det\left(A-4I_n\right) = \det\left(2I_n\right) \end{aligned}$$

Vì $\det A = 2$ và $\det(2I_n) = 2^n$ nên ta suy ra $\det\left(A-4I_n\right) = 2^{n-1}$. ■

Ví dụ 1.50. Cho $A, B \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ thỏa $\det A = 2$ và $\det B = 2011$. Tính $\det(2AB)$.

Giải. Ta có $\det\left(2AB\right) = \det\left(2A\right)\det B = 2^n.2.2011 = 2011.2^{n+1}$ ■

> 9. *Định thức của ma trận vuông A bằng định thức của ma trận chuyển vị, tức là $|A| = \left|A^T\right|$.*

Ví dụ 1.51. Cho $A \in M_n\left(\mathbb{R}\right), \det A = a$. Tính $\det\left(A^T.A.\left(A^T\right)^2\right)$.

Giải. Ta có $\det\left(A^T.A.(A^T)^2\right) = \det A^T.\det A.\det(A^T)^2 = a^4$. ■

1.3 Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 1.8. *Ma trận vuông A được gọi là không suy biến nếu* $\det A \neq 0$.

Ví dụ 1.52. Tìm m để ma trận $A = \begin{pmatrix} m & m+1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$ là không suy biến.

Giải. Ta có $\det A = m(m-1)(m+2)$. Để ma trận A không suy biến thì

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow m(m-1)(m+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

■

Định nghĩa 1.9. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, nếu tồn tại $B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = BA = I_n$ thì B được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A, ký hiệu A^{-1}, còn ma trận A được gọi là ma trận khả nghịch.*

Ví dụ 1.53. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ có ma trận nghịch đảo là ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 1.54. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ có ma trận nghịch đảo là ma trận $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Ví dụ 1.55. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ không có ma trận nghịch đảo. Thật vậy, lấy ma trận bất kì $B \in M_2(\mathbb{R})$, giả sử $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, khi đó

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$$

Việc xác định một ma trận vuông đã cho có khả nghịch hay không là một việc không đơn giản nếu ta chỉ dựa vào định nghĩa, kết quả sau đây giúp ta giải quyết khó khăn này.

Định lý 1.4. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi A không suy biến. Hơn nữa, ma trận nghịch đảo của A là duy nhất và được xác định bởi $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$, ở đây A^* là ma trận phụ hợp của A.*

Hệ quả 1.1. *Nếu $ad - bc \neq 0$ thì ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ khả nghịch và ma trận nghịch đảo A^{-1} xác định bởi*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ví dụ 1.56. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ khả nghịch và có ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 1.57. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải. Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó,

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

■

Ví dụ 1.58. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}$.

Giải. Áp dụng định lý 1.4 ta được

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$$

Trong ví dụ 1.30 ta đã biết $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab-c & -b & 1 \end{pmatrix}$. Hơn nữa, $\det A = 1$ nên ta suy ra $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab-c & -b & 1 \end{pmatrix}$. ■

Ví dụ 1.59. Tìm m để ma trận $A = \begin{pmatrix} m & m^3 \\ 0 & m-1 \end{pmatrix}$ khả nghịch. Với m tìm được, hãy xác định A^{-1}.

Giải. Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi A không suy biến, điều này tương đương với

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow m\,(m-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Với m xác định như trên ta suy ra được

$$A^{-1} = \frac{1}{m\,(m-1)}\begin{pmatrix} m-1 & -m^3 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

■

Ví dụ 1.60. Tìm các số thực a, b, c để ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$$

khả nghịch.

Giải. Đầu tiên, ta tính được

$$\det A = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi A không suy biến, điều này tương đương với

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c \neq 0 \\ a+b-c \neq 0 \\ a+c-b \neq 0 \\ b+c-a \neq 0 \end{cases}$$

■

Nhận xét 1.8. Ta còn có một thuật toán khác để tìm A^{-1} chỉ qua các phép biến đổi sơ cấp trên dòng. Thuật toán này khá tiện lợi khi xử lí những ma trận có dạng đặc biệt. Các bước tiến hành thuật toán (ta giả thiết $A \in M_n(\mathbb{R})$):

- ***Bước 1:*** *Lập ma trận $(A|I_n)$ bằng cách ghép ma trận đơn vị I_n vào bên phải ma trận A.*
- ***Bước 2:*** *Dùng các phép biến đổi sơ cấp để đưa ma trận $(A|I_n)$ về dạng $(A'|B)$, trong đó A' là ma trận bậc thang rút gọn.*

  Nếu $A' = I_n$ thì $B = A^{-1}$.

  Nếu $A' \neq I_n$ thì ma trận A không khả nghịch nên không có ma trận nghịch đảo.

Ví dụ 1.61. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải. Ta có

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 \to \frac{1}{2}(d_1+d_2+d_3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_2 \to -d_2 \\ d_3 \to -d_3}]{d_1 \to d_1 + d_2 + d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Từ đây ta suy ra $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ■

Ví dụ 1.62. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ d & b & 1 & 0 \\ f & e & c & 1 \end{pmatrix}$$

Giải. Bằng cách lý luận như ví dụ trên ta tính được

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ ab - d & -b & 1 & 0 \\ f^* & cb - e & -c & 1 \end{pmatrix}$$

với $f^* = ae + cd - abc - f$. ■

1.3.1 Tính chất

1. Nếu ma trận A khả nghịch thì các ma trận A^{-1}, A^T cũng khả nghịch và $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A; \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

2. Nếu hai ma trận $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ khả nghịch thì ma trận tích AB cũng khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

   Tổng quát: Nếu m ma trận $A_1, A_2, \ldots, A_m \in M_n(\mathbb{R})$ khả nghịch thì ma trận tích $A_1A_2\ldots A_m$ cũng khả nghịch và $(A_1A_2...A_m)^{-1} = A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}...A_1^{-1}$.

   Trường hợp $A_1 = A_2 = \cdots = A_m = A$, ta có một hệ quả rất hay là $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

3. Nếu A khả nghịch thì $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

Ví dụ 1.63. Cho $A \in M_n(\mathbb{R}); \det A = a \neq 0$. Hãy tính $\det(2011(A^{-1})^4)$.

Giải. Áp dụng tính chất 3 ta được

$$\det\left(2011\left(A^{-1}\right)^4\right) = 2011^n \det\left(A^{-1}\right)^4 = 2011^n\left(\det A^{-1}\right)^4 = \frac{2011^n}{a^4}$$

■

Ví dụ 1.64. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải. Áp dụng tính chất 2 và kết quả trong ví dụ 1.58 ta nhận được

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Ví dụ 1.65. Cho hai ma trận $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa hai điều kiện:

- $\det A = a\ (a \neq 0)$, $\det B = b\ (b \neq 0)$.
- $\det\left(A^{-1} + B^{-1}\right) = (ab)^{-1}$.

Tính $\det(A + B)$.

Giải. Trước hết, ta có $A + B = A\left(A^{-1} + B^{-1}\right)B$. Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}\det(A+B) &= \det\left[A\left(A^{-1}+B^{-1}\right)B\right]\\ &= \det A \det\left(A^{-1}+B^{-1}\right)\det B = 1\end{aligned}$$

■

1.3.2 Phương trình ma trận $AX = B$ và $XA = B$

Định lý 1.5. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R}); \det A \neq 0$, phương trình $AX = B$ có nghiệm khi và chỉ khi $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, đồng thời nghiệm đó là duy nhất và được xác định bởi $X = A^{-1}B$.*

Định lý 1.6. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R}); \det A \neq 0$, phương trình $XA = B$ có nghiệm khi và chỉ khi $B \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$, đồng thời nghiệm đó là duy nhất và được xác định bởi $X = BA^{-1}$.*

Ví dụ 1.66. Giải phương trình $AX = B$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải. Vì $\det A = 1 \neq 0$ và $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

■

Ví dụ 1.67. Giải phương trình $XA = B$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải. Vì $\det A = 1 \neq 0$ và $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Ví dụ 1.68. Giải phương trình $AXB = C$ với

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Giải. Vì $\det A = \det B = 1 \neq 0$ và $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}CB^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -19 \\ -17 & 46 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Nhận xét 1.9. Trường hợp $\det A = 0$, các phương trình ma trận được giải như sau:

- *Phương trình $AX = B$ sẽ vô nghiệm khi $B \notin M_{n\times p}$, còn nếu $B \in M_{n\times p}$ thì ma trận X sẽ có cấp $n \times p$, ta giả sử $X = (x_{ij})_{n\times p}$ và thay trực tiếp vào phương trình $AX = B$ để xác định các x_{ij}.*
- *Phương trình $XA = B$ sẽ vô nghiệm khi $B \notin M_{q\times n}$, còn nếu $B \in M_{q\times n}$ thì ma trận X sẽ có cấp $q \times n$, ta giả sử $X = (x_{ij})_{q\times n}$ và thay trực tiếp vào phương trình $XA = B$ để xác định các x_{ij}.*

Ví dụ 1.69. Giải phương trình $AX = B$ với

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Giải. Ta thấy $A \in M_2(\mathbb{R})$ và $\det A = 0$. Ma trận B là một ma trận vuông cấp 2 nên ma trận X cũng là ma trận vuông cấp 2, ta giả sử $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, thay vào phương trình $AX = B$ ta được

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcccc} 2x_{11} & + & 4x_{21} & = & 1 \\ x_{11} & + & 2x_{21} & = & 3 \\ 2x_{12} & + & 4x_{22} & = & -2 \\ x_{12} & + & 2x_{22} & = & -6 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Hệ trên vô nghiệm nên phương trình đã cho cũng vô nghiệm. ■

Ví dụ 1.70. Giải phương trình $XA = B$ với

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Giải. Ta thấy $A \in M_2(\mathbb{R})$ và $\det A = 0$. Ma trận B là một ma trận vuông cấp 2 nên ma trận X cũng là ma trận vuông cấp 2, ta giả sử $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, thay vào phương trình $XA = B$ ta được

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcccc} 3x_{11} & + & 2x_{12} & = & 9 \\ 6x_{11} & + & 4x_{12} & = & 18 \\ 3x_{21} & + & 2x_{22} & = & 6 \\ 6x_{21} & + & 4x_{22} & = & 12 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcccc} 3x_{11} & + & 2x_{12} & = & 9 \\ 3x_{21} & + & 2x_{22} & = & 6 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình trên ta được nghiệm

$$x_{11} = \frac{9-2a}{3}; x_{12} = a; x_{21} = \frac{6-2b}{3}; x_{22} = b$$

với $a, b \in \mathbb{R}$. ■

1.4 Hạng của ma trận

1.4.1 Khái niệm về hạng của ma trận

Định nghĩa 1.10. *Ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ được gọi là có hạng r, ký hiệu $r(A) = r$, nếu ma trận A thỏa hai điều kiện:*

- *Tồn tại một ma trận con vuông cấp r của A có định thức khác không.*
- *Mọi ma trận con vuông của A có cấp không bé hơn $r+1$ đều có định thức bằng không.*

Ví dụ 1.71. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ có hạng bằng 2 vì ma trận con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ của A có định thức bằng 1 (tức khác không), hơn nữa các ma trận con có cấp không bé hơn 3 của A cũng chính là A. Mà $\det A = 0$ nên theo định nghĩa ta được $r(A) = 2$.

Ví dụ 1.72. Ma trận $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ với $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, r}$ có hạng bằng r.

Ví dụ 1.73. Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Giải. Trước hết, ta thấy ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ là một ma trận con của A có $\det B = 3 \neq 0$. Vậy $r(A) \geq 2$.

Mặt khác, nếu ta gọi C là một ma trận con của A có cấp không bé hơn 3 thì trong ma trận C luôn có dòng 2 và dòng 3 tỷ lệ với nhau, ta suy ra $\det C = 0$. Do đó $r(A) = 2$. ■

1.4.2 Tính chất

1. Nếu $A \in M_{m\times n}$ thì $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$.
2. Nếu $A \in M_n(\mathbb{R})$ thì
   - $r(A) = n$ khi và chỉ khi $\det A \neq 0$. Từ đây ta cũng suy ra A khả nghịch khi và chỉ khi $r(A) = n$.
   - $r(A) < n$ khi và chỉ khi $\det A = 0$.
3. $r(A) = r\left(A^T\right)$ với mọi $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
4. Nếu $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ thì $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.
5. Nếu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ thì $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.
6. Nếu $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thì $r(A + B) \leq r(A) + r(B) \leq n + r(AB)$.
7. Nếu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $X \in M_n(\mathbb{R})$ là một ma trận không suy biến thì $r(AX) = r(A)$.
8. Nếu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $Y \in M_m(\mathbb{R})$ là một ma trận không suy biến thì $r(YA) = r(A)$.
9. Nếu A' là ma trận nhận được từ ma trận A qua các phép biến đổi sơ cấp thì $r(A) = r(A')$.

Từ các tính chất trên, chúng ta rút ra một thuật để tìm hạng của ma trận. Thuật toán bao gồm các bước sau:

- **Bước 1:** *Dùng các phép biến đổi sơ cấp chuyển ma trận A về ma trận bậc thang A' (trong quá trình dùng các phép biến đổi sơ cấp chúng ta có thể loại bỏ dòng không, nếu có nhiều dòng đôi một tỉ lệ với nhau thì ta chỉ cần giữ lại một dòng, loại bỏ các dòng còn lại).*
- **Bước 2:** *Hạng của ma trận A bằng số dòng khác không của ma trận A'.*

Ví dụ 1.74. Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Giải. Ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 + d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy $r(A) = 2$. ■

Ví dụ 1.75. Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 15 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Giải. Vì các cột thứ hai, tư, năm đôi một tỉ lệ với nhau nên ta có thể xóa cột thứ tư và thứ năm

$$A \xrightarrow{\text{xóa cột 4 và 5}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & -1 & 2 \\ 15 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 \to d_4 - 5d_1]{\substack{d_2 \to d_2 - d_1 \\ d_3 \to d_3 - 3d_1}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} = B$$

Ta thấy các dòng hai, ba, bốn của ma trận B đôi một tỉ lệ với nhau nên ta có thể xóa dòng thứ ba và dòng thứ tư

$$B \xrightarrow{\text{xóa dòng 2,3 và 4}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vậy ta kết luận $r(A) = 2$. ■

Ví dụ 1.76. Tìm m để hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & m+5 & m^2+1 \\ 1 & -1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

bằng 3.

Giải. Ta có

$$A \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & m+1 & m^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & m-2 \end{pmatrix}$$

Ta xét hai trường hợp:

- Nếu $m = -1$ hoặc $m = 2$ thì $r(A) = 2$.
- Nếu $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$ thì $r(A) = 3$.

Vậy giá trị m cần tìm là $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$. ■

Ví dụ 1.77. Tùy theo giá trị của m tính hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & m & -2 \end{pmatrix}$$

Giải. Ta có

$$A \xrightarrow{\text{xóa cột 5}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3 \to d_3 + d_1 \\ d_4 \to d_4 - 2d_1}]{d_2 \to d_2 + 2d_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & m-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{xóa dòng 3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & m-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 + d_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

Nếu $m = -2$ thì $r(A) = 2$.

Nếu $m \neq -2$ thì $r(A) = 3$. ■

Bài tập chương 1

Phần tự luận

Bài tập 1.1. Cho A là ma trận vuông cấp 2012 mà phần tử ở dòng i là i. Tìm phần tử ở dòng 2 cột 7 của ma trận A^2.

Bài tập 1.2. Cho A là ma trận vuông cấp 2012 mà phần tử ở dòng i là $(-1)^i i$. Tìm phần tử ở dòng 3 cột 2 của ma trận A^2.

Bài tập 1.3. Cho A là ma trận vuông cấp 2012, trong đó phần tử ở dòng i cột j là $(-1)^{i+j}$. Tìm phần tử ở dòng 2 cột 2 của ma trận A^2.

Bài tập 1.4. Cho A là ma trận vuông cấp 2012, trong đó phần tử ở dòng thứ i là 2^{i-1}. Tìm phần tử ở dòng 1 cột 2012 của ma trận A^2.

Bài tập 1.5. Cho A là ma trận vuông cấp 2012, trong đó phần tử ở dòng thứ i là i. Tìm phần tử ở dòng 1 cột 2000 của ma trận A^2.

Bài tập 1.6. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận A^{2011}.

Bài tập 1.7. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$. Tìm ma trận A^{2011}.

Bài tập 1.8. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa $A^n = O_{3\times3}$.

Bài tập 1.9. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận $(I - A)^{2011}$.

Bài tập 1.10. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận A^{2011}.

Bài tập 1.11. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa $A^n = O_{3\times3}$ là bao nhiêu?

Bài tập 1.12. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Số nguyên dương n lớn nhất thỏa $A^n \neq O_{4\times4}$ là bao nhiêu?

Bài tập 1.13. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận tổng

$$\sum_{n=0}^{2011} 2^n A^n = I + 2A + 4A^2 + 8A^3 + .. + 2^{2011}A^{2011}$$

Bài tập 1.14. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận tổng

$$\sum_{n=0}^{2011} (-2)^n A^n = I - 2A + 4A^2 - 8A^3 + .. - 2^{2011}A^{2011}$$

Bài tập 1.15. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận tổng $\sum\limits_{n=0}^{2011} A^n$.

Bài tập 1.16. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận tổng $\sum\limits_{n=0}^{2011} \frac{(-1)^n}{n!} A^n$.

Bài tập 1.17. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận tổng $\sum\limits_{n=0}^{2011} 2^n A^n$.

Bài tập 1.18. Cho A là ma trận vuông cấp 2011 thỏa $\det A = 1$. Định thức của ma trận $4A^{-1}$ là bao nhiêu?

Bài tập 1.19. Cho A là ma trận vuông cấp 2011 thỏa $\det A = 4$. Định thức của ma trận $5\left(A^{-1}\right)^2$ là bao nhiêu?

Bài tập 1.20. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm phần tử ở dòng 2 cột 3 của ma trận A^{-1}?

Bài tập 1.21. Định thức của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & m^2 & m^3 \\ m^2 & m^3 & m^4 \end{pmatrix}$ là bao nhiêu?

Bài tập 1.22. Tìm số thực m để ma trận

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m-2 \end{pmatrix}$$

khả nghịch.

Bài tập 1.23. Ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2011}$.

Bài tập 1.24. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $AX = B$.

Bài tập 1.25. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $AX = B$.

Bài tập 1.26. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $AX = B$.

Bài tập 1.27. Cho A là ma trận vuông cấp n. Biết $\det A = 20$ và $A^2 - 3A = 10I_n$. Tính $\det(A - 3I_n)$.

Bài tập 1.28. Cho A là ma trận vuông cấp n. Biết $\det A = 2011$ và $A - A^{-1} = I_n$. Tính $\det\left(A^2 - I_n\right)$.

Bài tập 1.29. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, biết $\det A = 2$ và $\det\left(A^T A - A^T\right) = 1$. Tính $\det(A - I_n)$.

Bài tập 1.30. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ khả nghịch, biết $\det(5I_n - A) = 2$ và $A^2 - 5A + I_n = O_{n\times n}$. Tính $\det A^{-1}$.

Bài tập 1.31. Tính các định thức

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Bài tập 1.32. Tính các định thức

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \Delta_5 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Bài tập 1.33. Tính các định thức

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_8 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \Delta_9 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Bài tập 1.34. Tính các định thức

$$\Delta_{10} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix}, \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Bài tập 1.35. Tính các định thức

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ 14 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Bài tập 1.36. Tính các định thức

$$\Delta_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}, \Delta_{15} = \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}$$

Bài tập 1.37. Tính các định thức

$$\Delta_{16} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}, \Delta_{17} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Bài tập 1.38. Tính các định thức

$$\Delta_{18} = \begin{vmatrix} x+1 & x & 1 & 1 \\ 2 & x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix}, \Delta_{19} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^3 & x^4 & x^5 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Bài tập 1.39. Tìm m thỏa

a. $\begin{vmatrix} 2 & m & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \leq 0$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \geq 0$

c. $\begin{vmatrix} 2 & m & 4 \\ m & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 0$

d. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} > 0$

Bài tập 1.40. Tìm m thỏa

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 5 & m+1 \\ 3 & 7 & m+2 \end{vmatrix} > 0$

c. $\begin{vmatrix} 2+2m & -5 & 12 \\ m-3 & m+1 & -3m \\ m+3 & -m-1 & 3m \end{vmatrix} > 0$

b. $\begin{vmatrix} 2+2 & 1 & 4 \\ m+3 & 1 & m \\ 3 & 1 & m \end{vmatrix} > 0$

d. $\begin{vmatrix} m & 0 & 2m & m \\ 1 & m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0$

Bài tập 1.41. Giải các phương trình

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2x & -1 & -1 \\ 1 & x & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

c. $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 1 & x^2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

b. $\begin{vmatrix} x & x & -1 & -1 \\ 1 & x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

d. $\begin{vmatrix} x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 1 \\ x & x & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Bài tập 1.42. Giải phương trình

a. $\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ x & x & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

c. $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ -1 & -1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

b. $\begin{vmatrix} x & -1 & 2 & 2 \\ 1 & x & 1 & 4 \\ 0 & 0 & x & -2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

d. $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

Bài tập 1.43. Tính hạng của các ma trận

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 35 \\ 3 & 7 & 9 & 12 & 14 \\ 4 & 8 & 13 & 16 & 20 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Bài tập 1.44. Tính hạng của các ma trận

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & -1 & 2 & 2 \\ 7 & 15 & -9 & 8 & 18 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 15 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 2 & 8 & 2 \\ 7 & -9 & 8 & 14 & 18 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Bài tập 1.45. Tìm m để các ma trận sau có hạng lần lượt bằng 1,2,3,4.

a. $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 3m-1 & 2 & m+4 \\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7 \\ 2 & 2m & 2 & 4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3 & m & 0 & 1 \\ 6 & 2m & m & 2 \\ 9 & 3m & 0 & m+2 \\ 15 & 5m+1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 3m-1 & 2 & m+4 \\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7 \\ 2 & 2m & 2 & m+4 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 3 & m & 0 & 1 \\ 6 & 2m & m & 2 \\ 9 & 3m & 0 & m+2 \\ 15 & 5m & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Bài tập 1.46. Tìm m để các ma trận sau có hạng lần lượt bằng 1,2,3,4.

a. $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 3m-1 & m+2 & m+3 \\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7 \\ 2 & 2m & 2 & 4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} m & 2 & 2 & 2 \\ -2 & m & 2 & 2 \\ -2 & -2 & m & 2 \\ -2 & -2 & -2 & m \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 3m-1 & 2 & m+4 \\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7 \\ 4 & 4m & 4 & 8 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Bài tập 1.47. Ma trận nào sau đây khả nghịch?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Bài tập 1.48. Ma trận nào sau đây khả nghịch?

a. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Bài tập 1.49. Tìm m để các ma trận sau khả nghịch:

a. $\begin{pmatrix} m+1 & 1 & 3 \\ 2 & m+2 & 0 \\ 2m & 1 & 3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} m+1 & 1 & 3 \\ m+3 & m+3 & 3 \\ 2m+2 & m+3 & 3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} m+1 & m+2 & 0 \\ 2 & m+2 & 0 \\ m-4 & 3 & m+2 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} m & m & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

Bài tập 1.50. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận:

a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - 3I_3$ d. $\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 14 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Bài tập 1.51. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Bài tập 1.52. Tìm m để các ma trận sau khả nghịch, tìm ma trận nghịch đảo trong các trường hợp đó.

a. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & 2m+3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ m & -1 & m-1 \\ 1 & -3 & m-1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ m & 1 & m+7 \\ m+3 & 0 & 2m+7 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} m-1 & 2 & m \\ 0 & m+1 & 3 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$

Bài tập 1.53. Tìm m để các ma trận sau khả nghịch, tìm ma trận nghịch đảo trong các trường hợp đó.

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 3 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 3 & 7 & m \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & m & 3 \\ 2 & 2m+1 & 7 \\ 1 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$

Bài tập 1.54. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $XA = B$.

Bài tập 1.55. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $AX = B$.

Bài tập 1.56. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 12 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Tìm ma trận X thỏa $XA = B$.
2. Tìm ma trận X thỏa $AX = B$.

Bài tập 1.57. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.

1. Tìm ma trận X thỏa $XA = B$.
2. Tìm ma trận X thỏa $AX = B$.

Bài tập 1.58. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Tìm ma trận X thỏa $XA = B$.
2. Tìm ma trận X thỏa $AX = B$.

Phần trắc nghiệm

Bài tập 1.59. Cho hai định thức

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

a. $\Delta_1 = \Delta_2$ b. $\Delta_1 = -\Delta_2$ c. $\Delta_2 = 2\Delta_1$ d. $\Delta_2 = -2\Delta_1$

Bài tập 1.60. Cho hai định thức

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 16 \\ 2 & 5 & 4 & 14 \\ 3 & 6 & 8 & -8 \\ 4 & 8 & 12 & 34 \end{vmatrix}$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

a. $\Delta_1 = \Delta_2$ b. $\Delta_1 = -\Delta_2$ c. $\Delta_2 = 2\Delta_1$ d. $\Delta_2 = 4\Delta_1$

Bài tập 1.61. Cho hai định thức

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ a & b & -c & d \\ 3 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 8 \\ 2a & 2b & -2c & 2d \\ 6 & 12 & -16 & 8 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

a. $2\Delta_1 = \Delta_2$ b. $\Delta_2 = 8\Delta_1$ c. $\Delta_2 = 4\Delta_1$ d. $\Delta_2 = 16\Delta_1$

Bài tập 1.62. Cho hai định thức

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ a & b & -c & d \\ 3 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 8 \\ 2a & 2b & -2c & 2d \\ 6 & 12 & -16 & 8 \\ 8 & 16 & -24 & 34 \end{vmatrix}$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

a. $16\Delta_1 = \Delta_2$ b. $\Delta_2 = 8\Delta_1$ c. $\Delta_2 = 4\Delta_1$ d. $\Delta_2 = 2\Delta_1$

Bài tập 1.63. Cho hai định thức

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 5 & 4 & y \\ 3 & 6 & 8 & z \\ 4 & 8 & 12 & t \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6-2x \\ 2 & 5 & 4 & 8-2y \\ 3 & 6 & 8 & 16-2z \\ 4 & 8 & 12 & 24-2t \end{vmatrix}$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

a. $\Delta_1 = \Delta_2$ b. $\Delta_2 = 2\Delta_1$ c. $\Delta_2 = -2\Delta_1$ d. $\Delta_2 = -4\Delta_1$

Bài tập 1.64. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 3 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

a. A khả nghịch khi và chỉ khi m khác 0.
b. A luôn khả nghịch.
c. A luôn có hạng bằng 3.
d. A có hạng bằng 3 khi và chỉ khi $m = 0$.

Bài tập 1.65. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

. Khẳng định nào sau đây đúng?

a. A có hạng bằng 3.
b. A có định thức bằng 0.
c. A có hạng bằng 1.
d. Các khẳng định trên đều sai.

Bài tập 1.66. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

a. A có hạng bằng 2.
b. A có định thức bằng 0.
c. A có hạng bằng 1.
d. Các khẳng định trên đều sai.

Bài tập 1.67. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 15 & 9 \end{pmatrix}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

a. A có hạng bằng 3.
b. A có định thức bằng 0.
c. A có hạng bằng 1.
d. Các khẳng định trên đều sai.

Bài tập 1.68. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính $\det(3AB)$.

a. 324 b. 18 c. 6 d. 20

Bài tập 1.69. Tính $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

a. 30 b. -30 c. 15 d. -15

Bài tập 1.70. Tính $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

a. 16 b. -16 c. 32 d. -32

Bài tập 1.71. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính $\det\left(\left((3A)^{-1}\right)^T\right)$.

a. 6 b. 54 c. $\frac{1}{6}$ d. $\frac{1}{54}$

Bài tập 1.72. Cho định thức $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ 2 & 1 & 2m-2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Tìm m để $\Delta > 0$.

a. $m > 2$ b. $m < 2$ c. $m > 0$ d. $m < 1$

Bài tập 1.73. Tính $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & a & b \end{vmatrix}$.

a. $7a + 21$ b. $7a + 21b$ c. $7a - 2b$ d. $-7a - 21$

Bài tập 1.74. Tính $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix}$.

a. $17b - 11$ b. $17b + 21$ c. $7b - 10$ d. $7b + 10$

Bài tập 1.75. Cho $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ và $\det A = 2, \det B = 3$. Tính $\det(2AB)$.

a. 6 b. 12 c. 24 d. 48

Bài tập 1.76. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Kết quả nào sau đây là đúng?

a. $\det A = -53$
b. $\det A = -63$
c. $\det A = 63$
d. Các câu a,b,c đều sai

Bài tập 1.77. Các giá trị nào sau đây là nghiệm của phương trình

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

a. $x = 2, x = -1$
b. $x = 3, x = -1$
c. $x = 2, x = 3$
d. Các câu a, b, c đều sai.

Bài tập 1.78. Cho ma trận vuông cấp 2 có các phần tử là 2 hoặc – 2. Kết quả nào sau đây là đúng?

a. $\det(3A) = -72$
b. $\det(3A) = 30$
c. $\det(3A) = 45$
d. $\det(3A) = 27$

Bài tập 1.79. Giải phương trình $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$.

a. Phương trình vô nghiệm.
b. Phương trình có ba nghiệm a, b, c.
c. Phương trình có ba nghiệm $a+b, b+c, a+c$
d. Phương trình có vô số nghiệm.

Bài tập 1.80. Tìm số nghiệm phân biệt của phương trình

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2x & x \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a. 1 b. 2 c. 3 d. 4

Bài tập 1.81. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Kết quả nào sau đây là đúng?

a. $AB = BA$.
b. AB xác định nhưng BA không xác định.
c. $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
d. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bài tập 1.82. Tìm nghịch đảo của ma trận

$$\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 14 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a. $\begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{14}{13} \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{-7}{13} \end{pmatrix}$

Bài tập 1.83. Ma trận nào sau đây khả nghịch?

a. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Bài tập 1.84. Cho $f(x) = x^2 - 2x + 3$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính $f(A)$.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

d. Các câu a,b,c đều sai.

Bài tập 1.85. Tìm hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & -4 & 5 & 2 & 10 \\ 5 & -6 & 7 & 6 & 18 \end{pmatrix}$.

a. 1 b. 2 c. 3 d. 4

Bài tập 1.86. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & m+4 & m+7 \end{pmatrix}$. Với giá trị nào của m thì $r(A) = 3$?

a. $m = 1$ b. $m = 3$ c. $m \neq 1$ d. $\forall m \in \mathbb{R}$

Bài tập 1.87. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $XA = B$.

a. $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

b. $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c. $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

d. Không có ma trận X.

Bài tập 1.88. Cho $A \in M_4(\mathbb{R})$ biết rằng $r(A) = 3$. Kết quả nào sau đây đúng?

a. $\det A = 1$ b. $\det A = 0$ c. $\det A = 2$ d. $\det A = 3$

Bài tập 1.89. Cho $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $B \in M_4(\mathbb{R})$ biết $\det B \neq 0$ và $r(A) = 3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a. $r(AB) = 1$ b. $r(AB) = 3$ c. $r(AB) = 4$ d. $r(AB) = 5$

Bài tập 1.90. Tìm nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

b. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

d. Không tồn tại A^{-1}.

Chương 2

Hệ phương trình tuyến tính

2.1 Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

2.1.1 Khái niệm tổng quát

Định nghĩa 2.1. *Một hệ phương trình tuyến tính là một hệ thống gồm m phương trình bậc nhất với n ẩn có dạng tổng quát như sau:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

với $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}; i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ là các hệ số và $x_i, i = \overline{1,n}$ là các ẩn.

Ta đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Rõ ràng hệ phương trình 2.1 có thể được viết lại dưới dạng $AX = B$. Ta gọi A là ma trận hệ số, X là ma trân cột ẩn và B là ma trận cột hệ số tự do của hệ phương trình 2.1.

Ký hiệu

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

được gọi là ma trận hệ số mở rộng. Hiển nhiên nếu biết hệ phương trình tuyến tính thì ta viết ngay được ma trận mở rộng của nó. Ngược lại, nếu biết được ma trận hệ số mở rộng của một hệ phương trình tuyến tính thì ta cũng dễ dàng khôi phục lại hệ phương trình đó. Do đó, ta gọi ma trận mở rộng $\overline{A}$ là sự ma trận hóa hệ 2.1.

Định nghĩa 2.2. *Nếu* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ *thì hệ 2.1 được gọi là hệ tuyến tính thuần nhất.*

Định nghĩa 2.3. *Ta nói bộ* $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$ *là một nghiệm của hệ 2.1 nếu ta thay* $x_1 = \alpha_1; \ldots; x_n = \alpha_n$ *vào hệ 2.1 thì tất cả các phương trình trong 2.1 đều được thỏa.*

Ví dụ 2.1. Bộ $(1; 2; 1)$ là nghiệm của hệ $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 7 \\ 3x & - & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$ vì khi ta thay $x = 1; y = 2; z = 1$ vào hệ thì các phương trình của hệ đều thỏa mãn.

Ví dụ 2.2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn có ít nhất một nghiệm $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ và nghiệm này được gọi là **nghiệm tầm thường** của hệ.

Định lý 2.1. *Đối với một hệ phương trình tuyến tính tổng quát thì chỉ có một trong ba trường hợp nghiệm xảy ra là: hoặc có nghiệm duy nhất hoặc có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm.*

Cũng giống như phương trình, việc tìm các phương pháp giải hệ phương trình đã thúc đẩy sự phát triển của Toán học. Hiện nay, chúng ta đã đạt nhiều kết quả rất mạnh về lý thuyết cũng như ứng dụng, đặc biệt là các vấn đề về hệ phi tuyến. Tiếc là trong khuôn khổ bài giảng này cũng như về kiến thức thực tại, tác giả chưa thể giới thiệu cho bạn đọc. Xin hẹn một ngày không xa.

Để không mất nhiều thời gian, chúng ta sẽ tiến hành tìm hiểu một vài phương pháp giải hệ tuyến tính đơn giản đã được phát triển trước thế kỷ XX.

2.2 Phương pháp khử Gauss

Phương pháp khử Gauss được xây dựng dựa vào nhận xét sau: Nếu thực hiện trên hệ 2.1 các phép biến đổi sơ cấp sau:

- Đổi chỗ các phương trình của hệ 2.1 (tương ứng $d_i \leftrightarrow d_j$).
- Nhân một số khác không vào một phương trình của hệ ($d_i \to \alpha d_i$ với $\alpha \neq 0$).
- Cộng một phương trình vào một phương trình khác đã được nhân một số (tương ứng với $d_i \to d_i + \alpha d_j$).

thì ta sẽ được một hệ phương trình mới tương đương với hệ 2.1.

Phương pháp khử Gauss được thực hiện như sau: Không mất tổng quát, chúng ta luôn giả thuyết $a_{11} \neq 0$. Để ma trận A có dạng bậc thang, đầu tiên, chúng ta làm cho các phần tử ở cột thứ nhất, dòng thứ hai trở đi biến thành 0 bằng cách nhân dòng một với $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ rồi cộng vào dòng i $(i = 2, 3, ...m)$, sau $m - 1$ phép biến đổi như vậy chúng ta thu được hệ phương trình tương đương

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & + & a'_{22}x_2 & + & ... & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & \vdots & & & & & & & \\ & + & a'_{m2}x_2 & + & ... & + & a'_{mn}x_n & = & b'_m \end{array}\right. \tag{2.2}$$

trong đó $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}; b'_i = b_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}b_1$.

Ở đây, ta còn nói "khử ẩn x_1", tiếp theo bằng cách tương tự chúng ta "khử ẩn x_2" từ phương trình thứ ba trở đi đối với hệ 2.2. Sau đó, ta lại "khử ẩn x_3" từ phương trình thứ tư trở đi (nếu có)... Quá trình khử ẩn ở trên sẽ dừng lại sau hữu hạn bước biến đổi.

Nhận xét 2.1. Trong quá trình biến đổi, nếu trong hệ xuất hiện phương trình dạng $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ thì ta có thể loại bỏ phương trình này ra khỏi hệ phương trình.

Về mặt thực hành, để giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử ẩn Gauss, ta làm như sau:

- *Xác định ma trận hệ số mở rộng $\overline{A} = (A|B)$.*
- *Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để biến đổi sao cho ma trận hệ số mở rộng chuyển thành dạng bậc thang.*
- *Giải hệ phương trình bằng quá trình ngược.*

Ví dụ 2.3. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = 0 \\ 3x_1 & & & - & 2x_3 & = -1 \end{cases}$$

Giải. Ta lập ma trận hệ số mở rộng $\overline{A}$

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Biến đổi $\overline{A}$ về dạng bậc thang

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3\to d_3-3d_1]{d_2\to d_2-2d_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow{d_3\to d_3-\frac{6}{5}d_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{29}{5} \end{array}\right)$$

Ta khôi phục lại hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_3 = -\dfrac{29}{5} \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được nghiệm $x_1 = -\dfrac{19}{5}; x_2 = -\dfrac{24}{5}; x_3 = -\dfrac{29}{5}$ ■

Ví dụ 2.4. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 11 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6 \end{cases}$$

Giải. Ta lập ma trận hệ số mở rộng $\overline{A}$

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 7 & 11 \\ 3 & 1 & -6 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

Biến đổi $\overline{A}$ về dạng bậc thang

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 7 & 11 \\ 3 & 1 & -6 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right)\xrightarrow[d_4\to d_4-4d_1]{\substack{d_2\to d_2-2d_1 \\ d_3\to d_3-3d_1}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -9 & 2 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & -7 & -9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4\to 5d_4-d_2]{d_3\to 5d_3-2d_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -51 & 0 & -51 \\ 0 & 0 & -8 & -40 & -48 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4\to 51d_4-8d_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -51 & 0 & -51 \\ 0 & 0 & 0 & -2040 & -2040 \end{array}\right)$$

Ta khôi phục hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ & & & - & 51x_3 & & & = & -51 \\ & & & & & - & 2040x_4 & = & -2040 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 = 1$ ∎

Ví dụ 2.5. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss

$$\begin{cases} x & + & 2y & - & 3z & + & 5t & = & 1 \\ x & + & 3y & - & z & + & t & = & -2 \\ 2x & + & 5y & - & 4t & + & 6z & = & -1 \end{cases}$$

Giải. Ta lập ma trận hệ số mở rộng $\overline{A}$

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 & 6 & -1 \end{array}\right)$$

Biến đổi $\overline{A}$ về dạng bậc thang

$$\overline{A} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 2d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Khôi phục lại ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x & + & 2y & - & 3z & + & 5t & = & 1 \\ & & y & + & 2z & - & 4t & = & -3 \end{cases} \tag{2.3}$$

Hệ trên gồm có hai phương trình và bốn ẩn nên ta có thể chọn x, y làm ẩn chính; y, t làm ẩn phụ.

Đặt $z = \alpha; t = \beta$ thế vào hệ 2.3 ta được

$$\begin{cases} x = 7 + 7\alpha - 14\beta \\ y = -3 - 2\alpha + 4\beta \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$x = 7 + 7\alpha - 14\beta; y = -3 - 2\alpha + 4\beta; z = \alpha; t = \beta$$

với $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$. ∎

2.3 Phương pháp Cramer

Định nghĩa 2.4. *Hệ Cramer là một hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng với số ẩn (tức là $m = n$) và ma trận hệ số của hệ không suy biến. Cụ thể hơn, một hệ được gọi là Cramer nếu nó có dạng sau*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \quad\vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \tag{2.4}$$

trong đó $\det A \neq 0$ *với* $A = \left(a_{ij}\right)_n \in M_n(\mathbb{R})$.

Ví dụ 2.6. Trong các hệ phương trình sau đây, hệ nào là hệ Cramer?

a. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \\ 3x + 4y + 5z = 12 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + 4y + 8z = 13 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5x + y + z = 7 \\ 10x + 2y + 2z = 14 \\ 3x + 4y + 5z = 12 \end{cases}$

Giải. Phương án được chọn là phương án b. ∎

Ví dụ 2.7. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 & + & a_1x_2 & + & a_1^2x_3 & + & \dots & + & a_1^{n-1}x_n & = & b_1 \\ x_1 & + & a_2x_2 & + & a_2^2x_3 & + & \dots & + & a_2^{n-1}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ x_1 & + & a_nx_2 & + & a_n^2x_3 & + & \dots & + & a_n^{n-1}x_n & = & b_n \end{cases} \tag{2.5}$$

Tìm điều kiện của các hệ số $a_1; a_2; \dots; a_n$ để hệ 2.5 là hệ Cramer.

Giải. Gọi A là ma trận hệ số của hệ 2.5, khi đó ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Hệ 2.5 là hệ Cramer khi và chỉ khi $\det A \neq 0$, hay

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.6}$$

Vế trái của bất đẳng thức 2.6 được gọi là định thức Vandermonde. Để tính định thức này chúng ta chỉ cần áp dụng các tính chất cơ bản của định thức nên xin nhường cho bạn đọc, kết quả cụ thể như sau

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(a_j - a_i\right) \tag{2.7}$$

Từ 2.7 bất đẳng thức 2.6 xảy ra khi và chỉ khi bộ n số $a_1; a_2; \dots; a_n$ đôi một khác nhau.

Vậy hệ 2.5 là hệ Cramer khi và chỉ khi các hệ số $a_1; a_2; \dots; a_n$ đôi một khác nhau. ■

Định lý 2.2. ***(Phương pháp Cramer)***. *Hệ 2.4 có nghiệm duy nhất là* $x_j = \dfrac{\det A_j}{\det A}, j = \overline{1,n}$, *trong đó ma trận* A_j *nhận được bằng cách thay cột thứ* j *của ma trận* A *bằng cột các hệ số tự do của hệ 2.4.*

Ví dụ 2.8. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - 3y + 6z = 4 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases}$$

Giải. Ta có

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 75.$

- $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_1 = 75.$

- $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = 75.$

- $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_3 = 75.$

Vậy hệ có nghiệm $x = \frac{75}{75} = 1; y = \frac{75}{75} = 1; z = \frac{75}{75} = 1.$ ■

Ví dụ 2.9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$

bằng phương pháp Cramer, trong đó các số thực a, b, c đôi một khác nhau.

Giải. Áp dụng 2.7 ta được

- $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (c-b)(c-a)(b-a).$

- $A_1 = \begin{pmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_1 = abc\,(c-b)\,(c-a)\,(b-a).$

- $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = -\,(c-b)\,(c-a)\,(b-a)\,(ab+bc+ca).$

- $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = (c-b)\,(c-a)\,(b-a)\,(a+b+c).$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

- $x = \dfrac{\det A_1}{\det A} = abc.$

- $y = \dfrac{\det A_2}{\det A} = -\,(ab+bc+ca).$

- $z = \dfrac{\det A_3}{\det A} = a+b+c.$

■

Tiếp theo, ta sẽ mở rộng định lý 2.2 cho hệ phương trình tuyến tính mà số ẩn và số phương trình bằng nhau (hệ Cramer là một trường hợp riêng của lớp hệ này). Kết quả của định lý rất phù hợp để giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính với số ẩn bằng số phương trình.

Định lý 2.3. *Cho hệ phương trình tuyến tính* $AX = B$ *với* $A = (a_{ij})_n$. *Khi đó,*

- *Nếu* $\det A \neq 0$ *thì hệ có nghiệm duy nhất* $x_j = \dfrac{\det A_j}{\det A}, j = \overline{1,n}$.

- *Nếu* $\det A = 0$ *và tồn tại* $j \in \{1;2;\ldots;n\}$ *sao cho* $\det A_j \neq 0$ *thì hệ vô nghiệm.*

- *Nếu* $\det A = 0$ *và* $\det A_j = 0$ *với mọi* $j \in \{1;2;\ldots;n\}$ *thì hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.*

Chú ý 2.1. Đối với trường hợp $\det A = 0$ và $\det A_j = 0$ với mọi $j \in \{1;2;\ldots;n\}$, muốn biết hệ vô nghiệm hay vô số nghiệm (và giải tìm nghiệm) thì ta phải giải trực tiếp bằng phương pháp Gauss.

Ví dụ 2.10. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình sau theo m

$$\begin{cases} mx + y + z = 3 \\ x + my + z = 3 \\ x + y + mz = 3 \end{cases}$$

Giải. Ta lập ma trận hệ số A của hệ

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Nếu $\det A \neq 0 \Leftrightarrow m^3 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Nếu $m = 1$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 3$$

Hệ trên có vô số nghiệm và nghiệm được biểu diễn như sau

$$\begin{cases} x = 3 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Nếu $m = -2$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} -2x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 3 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

Cộng từng vế ba phương trình của hệ ta được $0x + 0y + 0z = 9$, điều này là vô lý. Vậy trong trường hợp này hệ vô nghiệm. ■

Hệ quả 2.1. *Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $AX = O_{n\times 1}$ *với* $A = (a_{ij})_n$. *Khi đó,*

- *Nếu* $\det A \neq 0$ *thì hệ chỉ có nghiệm tầm thường* $x_j = 0, j = \overline{1,n}$.
- *Nếu* $\det A = 0$ *thì hệ có vô số nghiệm (tức hệ có nghiệm không tầm thường).*

Ví dụ 2.11. Tìm m để hệ $\begin{cases} x + y + (1-m)z = 0 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = 0 \end{cases}$ có vô số nghiệm.

Giải. Ma trận hệ số của hệ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$.

Vì hệ phương trình trên là hệ thuần nhất nên nó có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\det A = 0$. Tức là

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m^3 - 4m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

■

2.4 Phương pháp phân rã LU

Xét lại hệ phương trình $AX = B$ với $A = (a_{ij})_n$. Giả sử ma trận A có thể biểu diễn dưới dạng $A = LU$ trong đó

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó ta có $B = AX = LUX = LY$ với $Y = UX$.

Vậy hệ ban đầu sẽ được phân rã thành hai hệ $\begin{cases} LY = B \\ UX = Y \end{cases}$.

Vấn đề giải các hệ phương trình trên rất đơn giản, đầu tiên là giải hệ $LY = B$ để tìm Y, sau đó với Y vừa tìm được ta giải hệ $UX = Y$ để tìm X.

Sau đây ta đi vào một số trường hợp thường gặp của phương pháp phân rã LU.

2.4.1 Phương pháp Crout

Với phương pháp Crout thì ta cho $u_{ii} = 1, i = \overline{1,n}$, từ đó tìm các phần tử còn lại của ma trận L và U.

Sau đây ta sẽ dùng phương pháp Crout để phân rã ma trận cấp 3. Ta có

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra

$$\boxed{\begin{aligned} &l_{11} = a_{11} \\ &l_{21} = a_{21} \\ &l_{31} = a_{31} \\ &l_{11}u_{12} = a_{12} \Rightarrow u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} \\ &l_{21}u_{12} + l_{22} = a_{22} \Rightarrow l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\ &l_{31}u_{12} + l_{32} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} \\ &l_{11}u_{13} = a_{13} \Rightarrow u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} \\ &l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}} \\ &l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = a_{33} \Rightarrow l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \end{aligned}}$$

Bằng cách tương tự, ta có thể phân rã ma trận vuông cấp n. Cụ thể hơn, nếu A là một ma trận vuông cấp n được cho bởi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

thì các phần tử của hai ma trận L, U được xác định như sau:

$$\boxed{\begin{aligned} & l_{i1} = a_{i1}, i = 1, 2, ..., n \\ & u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, j = 2, 3, ..., n \\ & l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \text{ với } 1 < j \le i \le n \\ & u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right) \text{ với } 1 < i < j \le n \end{aligned}}$$

Ví dụ 2.12. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Crout

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

Giải. Hệ phương trình trên có ma trận hệ số $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Áp dụng phương pháp Crout phân rã ma A ta được

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & \frac{7}{2} & \frac{13}{5} \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trước hết ta giải hệ

$$LY = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & \frac{7}{2} & \frac{13}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{2}{5} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Tiếp theo, ta giải hệ

$$UX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{2}{5} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 4.$ ■

Ví dụ 2.13. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Crout

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Giải. Áp dụng phương pháp Crout ta được

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Trước hết ta giải hệ phương trình

$$LY=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tiếp theo, ta giải hệ

$$UX=Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 = 1$. ■

2.4.2 Phương pháp Doolittle

Với phương pháp Doolittle thì ta cho $l_{ii} = 1, i = \overline{1, n}$, từ đó tìm các phần tử còn lại của ma trận L và U.

Sau đây ta sẽ dùng phương pháp Doolittle để phân rã ma trận cấp 3. Ta có

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} \end{pmatrix}$$

Từ đây ta suy ra

$$
\begin{aligned}
&u_{11} = a_{11}\\
&u_{12} = a_{12}\\
&u_{13} = a_{13}\\
&l_{21}u_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}\\
&l_{31}u_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}\\
&l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}\\
&l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}\\
&l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{1}{u_{22}}(a_{32} - l_{31}u_{12})\\
&l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \Rightarrow u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}
\end{aligned}
$$

Bằng cách tương tự, ta có thể phân rã ma trận vuông cấp n. Cụ thể hơn, nếu A là một ma trận vuông cấp n được cho bởi

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

thì các phần tử của hai ma trận L, U được xác định như sau:

$$
\begin{aligned}
&u_{1j} = a_{1j}, j = 1, 2, \ldots, n\\
&l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, i = 2, 3, \ldots, n\\
&u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \text{ với } 1 < i \le j \le n\\
&l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}\right) \text{ với } 1 < j < i \le n
\end{aligned}
$$

Ví dụ 2.14. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Doolittle

$$
\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_5 = 10 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}
$$

Giải. Hệ phương trình trên có ma trận hệ số là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Áp dụng phương pháp Doolittle phân rã ma trận A ta được

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & \dfrac{14}{11} & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -11 & -13 \\ 0 & 0 & -\dfrac{27}{11} \end{pmatrix}$$

Trước hết ta giải hệ

$$\begin{aligned} LY = B \quad & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & \dfrac{14}{11} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \\ -\dfrac{27}{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tiếp theo ta giải hệ

$$\begin{aligned} UX = Y \quad & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -11 & -13 \\ 0 & 0 & -\dfrac{27}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \\ -\dfrac{27}{11} \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1$ ■

Ví dụ 2.15. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Doolittle

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 13 \\ 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 = 19 \\ 4x_1 + 6x_2 + 16x_3 + 19x_4 = 26 \end{cases}$$

Giải. Hệ phương trình trên có ma trận hệ số là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 16 & 19 \end{pmatrix}$$

Áp dụng phương pháp Doolittle phân rã ma trận A ta được

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trước hết ta giải hệ

$$\begin{aligned} LY = B \quad &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 19 \\ 26 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tiếp theo ta giải hệ

$$\begin{aligned} UX = Y \quad &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 = 0$ ■

2.5 Điều kiện có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Đôi khi việc giải một hệ phương trình không quan trọng bằng việc xem xét hệ phương trình đó vô nghiệm hay có nghiệm. Nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất hay vô số nghiệm. Như đã biết, định lý 2.3 giúp chúng ta biện luận số nghiệm của hệ trong trường hợp hệ có số ẩn bằng số phương trình, tuy nhiên cách làm đó không thuận lợi khi hệ có số ẩn lớn (việc tính định thức sẽ rất khó khăn) hoặc hệ có số ẩn khác số phương trình. Kết quả sau đây là một công cụ rất hiệu quả để khắc phục những khó khăn trên.

Định lý 2.4. ***(Định lý Kronecker - Capelli)*** *Nếu* $\overline{A} = (A|B)$ *là ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính* $AX = B$ *thì* $r(\overline{A}) \geq r(A)$. *Hơn nữa,*

- *Nếu* $r(\overline{A}) > r(A)$ *thì hệ vô nghiệm.*
- *Nếu* $r(\overline{A}) = r(A) = n$ *thì hệ có nghiệm duy nhất (ở đây* n *là số ẩn của hệ).*
- *Nếu* $r(\overline{A}) = r(A) < n$ *thì hệ có vô số nghiệm.*

Ví dụ 2.16. Tìm m để hệ phương trình sau có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 5 \\ 3x + 7y + m^2 z = 6 \end{cases}$$

Giải. Lập ma trận hệ số mở rộng của hệ

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & m^2 & 6 \end{array}\right)$$

Ta biến đổi $\overline{A}$ về dạng bậc thang

$$\overline{A} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & m^2 - 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & m^2 - 4 & 0 \end{array}\right)$$

Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$ thì $r(A) = r\left(\overline{A}\right) = 3$. Khi đó, hệ có nghiệm duy nhất.

Nếu $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$ thì $r(A) = r\left(\overline{A}\right) = 2$. Khi đó, hệ có vô số nghiệm.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$ thỏa điều kiện đề bài. ■

Ví dụ 2.17. Tìm m để hệ phương trình sau vô nghiệm

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & -1 \\ -2x & - & 6y & + & (m-1)z & = & 4 \\ 4x & + & 12y & + & \left(3 + m^2\right)z & = & m - 3 \end{array}\right.$$

Giải. Lập ma trận hệ số mở rộng của hệ

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & m-1 & 4 \\ 4 & 12 & m^2 + 3 & m - 3 \end{array}\right)$$

Ta biến đổi $\overline{A}$ về dạng bậc thang

$$\overline{A} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 4d_1]{d_2 \to d_2 + 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m+1 & 2 \\ 0 & 0 & m^2 - 1 & m + 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - (m-1)d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 - m \end{array}\right)$$

Nếu $m = 3$ thì $r(A) = r\left(\overline{A}\right) = 2$. Khi đó, hệ đã cho có vô số nghiệm.

Nếu $m = -1$ thì $r(A) = 1 < r\left(\overline{A}\right) = 2$. Khi đó, hệ đã cho có vô nghiệm.

Nếu $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 3 \end{cases}$ thì $r(A) = 2 < r\left(\overline{A}\right) = 3$. Hệ đã cho vô nghiệm.

Vậy $m \neq 3$ thỏa yêu cầu đề bài. ■

2.6 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Trong các phần trước, ta đã tìm hiểu sơ lược một vài tính chất sơ đẳng của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, chẳng hạn như hệ quả 2.1. Để có cái nhìn tổng quát và sâu sắc hơn, chúng ta sẽ dành riêng mục này để xây dựng phương pháp tìm số nghiệm của hệ thuần nhất, cách biểu diễn nghiệm của hệ thông qua khái niệm nghiệm cơ bản v.v...

Để thuận tiện cho việc trình bày, chúng ta sẽ nêu lại một số định nghĩa quan trọng.

Định nghĩa 2.5. *Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là hệ phương trình có dạng sau*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Hệ 2.8 có thể viết dưới dạng ma trận $AX = O_{m\times 1}$ với

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, O_{m\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Như đã biết, hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn có nghiệm tầm thường $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Một câu hỏi đặt ra là khi nào hệ chỉ có nghiệm tầm thường, khi nào hệ có nghiệm không tầm thường (vô số nghiệm). Kết quả sau đây có thể xem như một hệ quả trực tiếp của định lý 2.4.

Định lý 2.5. *Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $AX = O_{m\times 1}$. *Khi đó,*

- *Nếu* $r(A) = n$ *thì hệ chỉ có nghiệm tầm thường.*
- *Nếu* $r(A) < n$ *thì hệ có nghiệm không tầm thường (vô số nghiệm).*

Ví dụ 2.18. Tìm m để hệ phương trình sau chỉ có nghiệm tầm thường

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ 2mx + y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

Giải. Ta lập ma trận hệ số của hệ

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2m & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hệ chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $\det A \neq 0$, điều này tương đương với

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 2m & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$$

■

Ví dụ 2.19. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} x + my + m^2z = 0 \\ mx + m^2y + z = 0 \\ m^2x + y + mz = 0 \end{cases}$$

Giải. Ta lập ma trận hệ số của hệ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Hệ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $r(A) < 3$ hay $\det A = 0$. Điều này tương đương với

$$\begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(m-1)^2\left(m^2+m+1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy $m = 1$ là kết quả cần tìm. ■

Ví dụ 2.20. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} mx & + & (m+1)\,y & - & \left(m^2+1\right)z & + & 5t & = & 0 \\ \left(m^2-1\right)x & + & (m-5)\,y & + & z & + & (3m-1)\,t & = & 0 \\ x & + & \left(m^2+1\right)y & - & (m-4)\,z & + & 6mt & = & 0 \end{cases}$$

Giải. Ta lập ma trận hệ số của hệ

$$A = \begin{pmatrix} m & m+1 & -\left(m^2+1\right) & 5 \\ m^2-1 & m-5 & 1 & 3m-1 \\ 1 & m^2+1 & -(m-4) & 6m \end{pmatrix}$$

Vì A là một ma trận có cấp 3×4 nên $r(A) \leq 3$. Hệ phương trình trên có bốn ẩn nên ta suy ra hệ luôn có nghiệm không tầm thường với mọi tham số m. ■

Nhận xét 2.2. Trong trường hợp hệ có nghiệm không tầm thường, để tìm nghiệm tổng quát của hệ chúng ta dùng phương pháp khử Gauss. Cụ thể hơn, nếu $r(A) = r < n$ thì nghiệm tổng quát của hệ 2.8 có dạng

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}\right) \\ x_2 = \varphi_2\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}\right) \\ \vdots \\ x_r = \varphi_r\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}\right) \\ x_{r+1} = \alpha_1 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_{n-r} \end{cases} \tag{2.9}$$

trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-r}$ là các số thực tùy ý.

- Thay $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_{n-r} = 0$ vào 2.9 ta được nghiệm X_1.
- Thay $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \dots, \alpha_{n-r} = 0$ vào 2.9 ta được nghiệm X_2.
- Một cách tương tự, ta thay $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_i = 1, \dots, \alpha_{n-r} = 0$, với $i = \overline{1, n-r}$, vào 2.9 ta được nghiệm X_{n-r}.

Với cách xây dựng như trên các nghiệm X_i với $i = \overline{1, n-r}$ có dạng

$$X_i = \begin{pmatrix} \underbrace{\varphi_1(0, \dots, 1, \dots, 0)}_{\text{Vị trí thứ i bằng 1}} \\ \varphi_2(0, \dots, 1, \dots, 0) \\ \vdots \\ \varphi_r(0, \dots, 1, \dots, 0) \\ 0 \\ \vdots \\ \underbrace{1}_{\text{hàng thứ r+i}} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa 2.6. *Hệ nghiệm $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ được gọi là hệ nghiệm cơ bản của hệ 2.8.*

Định lý 2.6. *Nghiệm tổng quát của hệ 2.8 có thể biểu diễn dưới dạng $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_{n-r} X_{n-r}$ với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ là các số thực tùy ý.*

Ví dụ 2.21. Tìm hệ nghiệm cơ bản và nghiệm tổng quát của hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

Giải. Lập ma trận hệ số của hệ và biến đổi về dạng bậc thang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Khôi phục hệ ta được

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad\;\; y + 2z = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Cho $z = 1$ ta được một nghiệm cơ bản là $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vì hệ 2.10 gồm hai phương trình và ba ẩn nên hệ $\{X_1\}$ cũng là hệ nghiệm cơ bản của hệ 2.10. Vậy nghiệm tổng quát của hệ là $X = \alpha X_1$ hay

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

■

Ví dụ 2.22. Tìm hệ nghiệm cơ bản và nghiệm tổng quát của hệ

$$\begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ 2x - y - 2z + t = 0 \end{cases}$$

Giải. Lập ma trận hệ số của hệ và biến đổi về dạng bậc thang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Khôi phục hệ ta được

$$\begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ \quad - 3y - 4z - 3t = 0 \end{cases}$$

Lần lượt cho $z = 1, t = 0$ và $z = 0, t = 1$ ta được hai nghiệm cơ bản của hệ là

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hệ $\{X_1, X_2\}$ cũng chính là hệ nghiệm cơ bản của hệ đã cho. Do đó, nghiệm tổng quát của hệ là

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}\alpha_1 - \alpha_2 \\ y = -\frac{4}{3}\alpha_1 - \alpha_2 \\ z = \alpha_1 \\ t = \alpha_2 \end{cases}$$

■

2.7 Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Định nghĩa 2.7. *Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = O_{m\times 1}$ được gọi là hệ thuần nhất liên kết với hệ phương trình tuyến tính tổng quát $AX = B$.*

Ví dụ 2.23. Hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 3y - 2z = 2 \end{cases}$ có hệ thuần nhất liên kết là $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$.

Định lý 2.7. *Nếu X_0 là nghiệm riêng của hệ phương trình tuyến tính tổng quát $AX = B$ và X là nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất liên kết $AX = O_{m\times 1}$ thì $\widetilde{X} = X + X_0$ là nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính $AX = B$.*

Ví dụ 2.24. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z + 2t = 4 \\ 2x - y - 2z + t = 2 \end{cases} \tag{2.11}$$

Giải. Xét hệ phương trình thuần nhất liên kết với hệ 2.11

$$\begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ 2x - y - 2z + t = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

Trong ví dụ trên ta đã biết hệ 2.11 có nghiệm tổng quát $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ với

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mặt khác, hệ 2.11 có một nghiệm riêng là $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vậy nghiệm tổng quát của hệ 2.11 là

$$\widetilde{X} = X + X_0 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + X_0$$

hay

$$\widetilde{X} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}\alpha_1 - \alpha_2 \\ y = -\frac{4}{3}\alpha_1 - \alpha_2 \\ z = \alpha_1 \\ t = \alpha_2 + 2 \end{cases}$$

■

Bài tập chương 2

Phần tự luận

Bài tập 2.1. Biện luận theo m số nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính sau:

1. $\begin{cases} (m-1)x + (m-1)y = 1 \\ x + my = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (m+1)x + (m+1)y = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2(m+1)x + (m+10)y = m \\ mx + (m+2)y = 2m \end{cases}$

4. $\begin{cases} x\sin\alpha + y\cos\alpha = m \\ x\cos\alpha - y\sin\alpha = 2m \end{cases}$

5. $\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ (m+1)x + 3y = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + 2y - 4z = m \\ -3x + 5y - z = 3 \\ -4x - 4y + 8z = -2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - mz = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ 2x + 5y - 2z = 7 \\ 6x + 6y - 3z = 2m+1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 4y - 5z = 1 \\ 3x + 6y + mz = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 7y - z = 5 \\ 2x + 4y + mz = 7 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x + 3y + z = 7 \\ 2x + 4y - 2z = m+7 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - 2z = m \\ x - 2y + 4z = 4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + 7y + 2z = 2 \\ 8x + 12y + (m+6)z = 5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + 7y + 2z = 2 \\ 8x + 12y + (m+6)z = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + (m+5)y + (m-3)z = m+1 \\ 8x + (m+11)y + (m-5)z = m+4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + my + z = m \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + (m+2)y + (m^2+2)z = m^2+m \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + my + z = m \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + (m+2)y + 3z = m+2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + my + z = m \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + (m+2)y + z = m+2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + 2y + (7-m)z = 2 \\ 2x + 4y - 5z = 1 \\ 5x + 10y + (m-5)z = 4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$

Bài tập 2.2. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp khử Gauss

1. $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + 5y - 2z = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - 2z = 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 4y + 5z = 1 \\ 2x + 7y - 11z = 2 \\ 3x + 11y - 6z = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4x = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x + 3y + z = 7 \\ 2x + 4y - 2z = 7 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + 4z = 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + 7y + 2z = 2 \\ 8x + 12y + 2z = 5 \end{cases}$

Bài tập 2.3. Tìm m để hai hệ phương trình sau có nghiệm chung:

1. $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + 5y - 2z = 7 \end{cases}$ và $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - mz = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ mx + 2y + z = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x - 2y + 5z = 8 \\ 2x + y - mz = m \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + mz = m \end{cases}$ và $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 8 \\ 2x + y + z = m \end{cases}$

Bài tập 2.4. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Crout

1. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 17 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 12 \\ 7x_1 + 6x_2 + x_3 = 20 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 - x_4 = 14 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^3y^4z^2t^6 = 27 \\ x^2y^6z^8t^9 = 9 \\ x^4y^2z^4t^2 = 81 \\ x^6y^4z^8t = 729 \end{cases}$

Bài tập 2.5. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Doolittle

1. $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 19 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2y^4z^8 = 4 \\ x^6y^3z^6 = 64 \\ x^2y^6z^4 = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^3y^4z^2t^6 = 81 \\ x^2y^6z^8t^9 = 729 \\ x^4y^2z^4t^2 = 9 \\ x^6y^4z^8t = 81 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5 = 13 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 - x_5 = 9 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 8x_4 + x_5 = 13 \end{cases}$

Phần trắc nghiệm

Bài tập 2.6. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 5 \\ 3x + 7y + m^2z = 6 \end{cases}$$

a. $m = \pm 2$ b. $m \neq \pm 2$ c. $m = 2$ d. $m = -2$

Bài tập 2.7. Tìm m để hệ sau có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ -2x - 6y + (m-1)z = 4 \\ 4x + 12y + \left(3+m^2\right)z = m-3 \end{cases}$$

a. $m = 3$ b. $m = 1$ c. $m = \pm 1$ d. m

Bài tập 2.8. Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 3x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$.

a. $x = -1, y = 1, z = 0$
b. $x = -a - b, y = a, z = b; a, b \in \mathbb{R}$
c. $x = -a + b, y = a, z = b; a, b \in \mathbb{R}$
d. $x = 1 - a, y = 1, z = a; a \in \mathbb{R}$

Bài tập 2.9. Tìm m để hệ sau đây có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} mx + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3mx - y + 2z = 0 \end{cases}$$

a. $m = 0$ b. $m = 1$ c. $m = -1$ d. $\forall m$

Bài tập 2.10. Tìm m để hệ sau đây có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4t = 0 \\ 2x - y + z + 3t = 0 \\ 3mx - y + 2m^2z = 0 \end{cases}$$

a. $m = 0$ b. $m = 1$ c. $m = -1$ d. $\forall m$

Bài tập 2.11. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình sau đây có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + mz = 0 \end{cases}$$

a. $m = 0$ b. $m = 3$ c. $m = 4$ d. $m = 5$

Bài tập 2.12. Tìm tất cả các giá trị m để hệ sau đây có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + (m+6)\,z = 4 \\ -3x - 3y + \left(m^2 - 10\right) z = m - 1 \end{cases}$$

a. $m = 6$ b. $m = 2$ c. $m = -2$ d. m

Bài tập 2.13. Tìm tất cả các giá trị m để hệ sau đây có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$

a. $m \neq 1; m \neq 2$
b. $m \neq -2; m \neq 1$
c. $m \neq -1; m \neq -2$
d. $m \neq 2; m \neq -1$

Bài tập 2.14. Tìm tất cả các giá trị m để hệ phương trình sau đây vô nghiệm

$$\begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ -2x - 6y + (m-1)\,z = 4 \\ 4x + 12y + \left(3 + m^2\right) z = m - 3 \end{cases}$$

a. $m = \pm 1$ b. $m = 1$ c. $m = -1$ d. m

Bài tập 2.15. Tìm tất cả các giá trị m để hệ phương trình sau đây có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} 5x + 3y + 6z + 2011t = -1 \\ x + 6y - z + 13\left(m^2 + 1\right) t = 6 \\ 4x - 6y + 56z + \left(m^4 - 1\right) t = 9 \end{cases}$$

a. $m = 0$ b. $m \neq 0$ c. $\forall m$ d. m

Bài tập 2.16. Tìm tất cả các giá trị m để hệ sau đây có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x + 3y + 4z - t = 0 \\ 3x + y + 2z + 5t = 0 \\ 4x + 6y + 3z + mt = 0 \end{cases}$$

a. $m = \frac{14}{3}$ b. $m \neq \frac{14}{3}$ c. $\forall m$ d. m

Bài tập 2.17. Tìm tất cả các giá trị m để hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ 2x + 3y - z + 2t = 2 \\ mx + y + \left(m^2+1\right) z - 2t = m^3 + 1 \end{cases}$$

a. $m \neq 0$ b. $m \neq 1$ c. $m \neq -1$ d. m

Bài tập 2.18. Tìm tất cả các giá trị m để hệ phương trình sau vô nghiệm

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 3x + 3y + (m+4) z = m^2 + 2 \end{cases}$$

a. $\forall m$ b. $m = \pm 1$ c. $m = -1$ d. m

Bài tập 2.19. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 3y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

a. $x = -5a, y = 2a, z = 4a, t = a; a \in \mathbb{R}$
b. $x = 5a, y = -2a, z = 4a, t = a; a \in \mathbb{R}$
c. $x = -5a, y = 3a, z = 2a, t = a; a \in \mathbb{R}$
d. Các câu a,b,c đều sai

Bài tập 2.20. Hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} (m-1)\, x + (m-1)\, y = 1 \\ x + my = 0 \end{cases}$$

vô nghiệm khi và chỉ khi

a. $m = 1$ b. $m = 0$ c. $m = \pm 1$ d. $m = -1$

Bài tập 2.21. Hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} (m+1)\,x & + & (m+1)\,y & = & 1 \\ x & + & my & = & 0 \end{cases}$$

vô nghiệm khi và chỉ khi

a. $m = 1$ b. $m = 0$ c. $m = \pm 1$ d. $m = -1$

Bài tập 2.22. Hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2\,(m+1)\,x & + & (m+10)\,y & = & m \\ mx & + & (m+2)\,y & = & 2m \end{cases}$$

có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi

a. $m = 2$ b. $m \neq 2$ c. $m = -2$ d. $m \neq -2$

Bài tập 2.23. Hệ phương trình

$$\begin{cases} mx & + & (6m-9)\,y & = & 2m^2 + 3m + 2 \\ x & + & my & = & m^3 + 1 \end{cases}$$

có duy nhất nghiệm khi

a. $m = 3$ b. $m \neq 3$ c. $m = \pm 3$ d. $m \neq \pm 3$

Bài tập 2.24. Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 4x & - & y & = & m+1 \\ 10x & + & 3y & = & 6m-3 \end{cases}$$

Chọn khẳng định đúng

a. Hệ trên vô nghiệm với mọi m.
b. Hệ trên vô số nghiệm với mọi m.
c. Hệ trên có nghiệm duy nhất với mọi m.
d. Các khẳng định trên với mọi m.

Bài tập 2.25. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} mx & + & y & = & 1 \\ x & + & my & = & m \end{cases}$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

a. Hệ trên có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq 1$.
b. Hệ trên vô nghiệm khi $m = -1$.
c. Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m \neq \pm 1$.
d. Hệ trên có nghiệm với mọi m.

Bài tập 2.26. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m \end{cases}$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

a. Hệ trên có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq 1$.
b. Hệ trên vô nghiệm khi $m = -1$.
c. Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m \neq 1$.
d. Hệ trên có nghiệm với mọi m.

Chương 3

Không gian vector

3.1 Khái niệm không gian vector

Định nghĩa 3.1. *Tập hợp* $\mathbb{V} \neq \emptyset$ *được gọi là một không gian vector trên* $\mathbb{R}$ *nếu nó được trang bị hai phép toán, gồm*

1. *Phép cộng vector*

$$\begin{aligned} + : \quad & \mathbb{V} \times \mathbb{V} && \to \mathbb{V} \\ & (X_1, X_2) && \mapsto X_1 + X_2 \end{aligned}$$

2. *Phép nhân vector với vô hướng*

$$\begin{aligned} \cdot : \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{V} && \to \mathbb{V} \\ & (\alpha, X) && \mapsto \alpha.X = \alpha X \end{aligned}$$

Các phép toán này thỏa những điều kiện (hoặc tiền đề) sau:

1. $X_1 + X_2 = X_2 + X_1; \forall X_1, X_2 \in \mathbb{V}.$
2. $(X_1 + X_2) + X_3 = X_1 + (X_2 + X_3)\,; \forall X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{V}.$
3. $\exists 0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V} : X + 0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}} + X = X; \forall X \in \mathbb{V}.$
4. $\forall X \in \mathbb{V}, \exists X' \in \mathbb{V} : X + X' = X' + X = 0_{\mathbb{V}}.$

5. $(\alpha + \beta) X = \alpha X + \beta X; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{V}$.
6. $\alpha (X_1 + X_2) = \alpha X_1 + \alpha X_2; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X_1, X_2 \in \mathbb{V}$.
7. $\alpha (\beta X) = (\alpha\beta) X; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{V}$.
8. $1X = X; \forall X \in \mathbb{V}$.

Ví dụ 3.1. Gọi $\mathbb{R}^n$ là tập hợp tất cả các bộ số thực có n thành phần (có tính thứ tự), $\mathbb{R}^n = \{X : X = (x_1, x_2, ..., x_n) ; x_i \in \mathbb{R}\}$. Định nghĩa trên $\mathbb{R}^n$ hai phép toán sau:

$$\begin{array}{lll} + & : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^n \\ & (X, Y) & \mapsto X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \\ \cdot & : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^n \\ & (\alpha, X) & \mapsto \alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) \end{array}$$

Với việc trang bị hai phép toán trên thì tập $\mathbb{R}^n$ trở thành một không gian vector.

Vector không là $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, ..., 0)$.

Vector đối là $-X = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$.

Ví dụ 3.2. Gọi $P_n[x]$ là tập hợp các đa thức theo biến x, bậc nhỏ hơn hoặc bằng n, hệ số thực. Một phần tử $f \in P_n[x]$ có dạng $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ ($a_i \in \mathbb{R}$). Định nghĩa trên $P_n[x]$ hai phép toán:

$$\begin{array}{lll} + & : P_n[x] \times P_n[x] & \to P_n[x] \\ & (f, g) & \mapsto f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \cdots + (a_n + b_n) x^n \\ \cdot & : \mathbb{R} \times P_n[x] & \to P_n[x] \\ & (\alpha, f) & \mapsto \alpha f = \alpha a_0 + (\alpha a_1) x + \cdots + (\alpha a_n) x^n \end{array}$$

Với việc trang bị hai phép toán trên thì tập $P_n[x]$ trở thành một không gian vector.

Vector không là $0_{P_n[x]} = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$.

Vector đối là $-f = -a_0 + (-a_1) x + (-a_2) x^2 + ... + (-a_n) x^n$.

Chú ý 3.1. Hai không gian vector $\mathbb{R}^n$ và $P_n[x]$ là rất quan trọng (đặc biệt khi $n = 2$ và $n = 3$), được tác giả sử dụng nhiều trong bài giảng này nên xin lưu ý bạn đọc nghiên cứu kỹ các ví dụ 3.1 và ví dụ 3.2

Ví dụ 3.3. Gọi $C[a, b]$ là tập hợp tất cả các hàm số $f(t)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Định nghĩa các phép toán trong $C[a, b]$ như sau:

Nếu $f, g \in C[a, b]$ thì

- $(f + g)(t) = f(t) + g(t), \forall t \in [a, b]$.
- $(\alpha f)(t) = \alpha f(t), \forall t \in [a, b]$.

Với việc trang bị hai phép toán trên, tập $C[a, b]$ trở thành một không gian vector.

Vector không $0_{C[a,b]}$ là hàm số đồng nhất không, tức bằng không với mọi $t \in [a; b]$.

Vector đối là $-f$ có tính chất $(-f)(t) = -f(t), \forall t \in [a, b]$.

Ví dụ 3.4. Gọi $\mathbb{R}_n$ là tập hợp tất cả các cột $n-$thành phần thực

$$\mathbb{R}_n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathbb{R}_n$ cũng lập nên một không gian vector với hai phép toán sau đây:

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.
- $a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$.

Ví dụ 3.5. Tập $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ gồm tất cả các ma trận cấp $m \times n$ cùng phép toán cộng hai ma trận và phép nhân vô hướng một số thực với một ma trận tạo thành một không gian vector.

3.2 Tổ hợp tuyến tính và biểu thị tuyến tính

Định nghĩa 3.2. *Một tổ hợp tuyến tính các vector* $X_1, X_2, ..., X_m \in \mathbb{V}$ *là một biểu thức có dạng* $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i X_i = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_m X_m$ *với* $\alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, m}$.

Định nghĩa 3.3. *Cho m vector* $X_1, X_2, ..., X_m \in \mathbb{V}$. *Vector* $X \in \mathbb{V}$ *được gọi là biểu thị tuyến tính qua hệ vector* $P = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ *nếu tồn tại m số thực* $\alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, m}$ *sao cho* $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_m X_m$.

Ví dụ 3.6. Vector $X = (3, 2)$ có thể biểu thị tuyến tính qua hệ vector (X_1, X_2) hay không, biết $X_1 = (1, 1), X_2 = (0, 1)$?

Giải. Xét đẳng thức

$$\begin{aligned} & X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \\ \Leftrightarrow\ & (3, 2) = \alpha_1 (1, 1) + \alpha_2 (0, 1) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \alpha_1 & & = 3 \\ \alpha_1 & + \alpha_2 & = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy vector X biểu thị tuyến tính qua hệ vector (X_1, X_2). ■

Ví dụ 3.7. Vector $X = (1, 7, -4)$ có thể biểu thị tuyến tính qua hệ vector (X_1, X_2) hay không, biết $X_1 = (1, -3, 2)\,, X_2 = (2, -1, 1)$?

Giải. Giả sử vector $X = (1, 7, -4)$ được biểu thị tuyến tính qua hệ vector (X_1, X_2), tức tồn tại α_1, α_2 sao cho

$$\begin{aligned} & X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \\ \Leftrightarrow\ & (1, 7, -4) = \alpha_1 (1, -3, 2) + \alpha_2 (2, -1, 1) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 = 7 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = 2$.

Vậy vector X có thể biểu thị tuyến tính qua hệ vector (X_1, X_2). ■

Ví dụ 3.8. Tìm m để vector $X = (1, m, 5)$ được biểu thị tuyến tính qua hệ vector (X_1, X_2) được cho trong ví dụ 3.7.

Giải. Giả sử vector $X = (1, m, 5)$ được biểu thị tuyến tính qua hệ vector (X_1, X_2), tức tồn tại α_1, α_2 sao cho

$$\begin{aligned} & X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \\ \Leftrightarrow \ & (1, m, 5) = \alpha_1 (1, -3, 2) + \alpha_2 (2, -1, 1) \\ \Leftrightarrow \ & \left\{ \begin{array}{rcrcr} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & = & 1 \\ -3\alpha_1 & - & \alpha_2 & = & m \\ 2\alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 5 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Từ phương trình thứ nhất và thứ ba, ta tìm được $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1$, thay vào phương trình thứ hai ta tìm được $m = -8$. ■

Ví dụ 3.9. Cho vector $f = 2x^2 + 3x - 4$ trong không gian $P_2[x]$. Vector f có thể biểu thị tuyến tính qua hệ vector (u, v) với $u = 3x^2 + x - 1, v = -x^2 - 5x + 7$ hay không?

Giải. Giả sử vector $f = 2x^2 + 3x - 4$ được biểu thị tuyến tính qua hệ vector (u, v), tức tồn tại α_1, α_2 sao cho

$$\begin{aligned} & f = \alpha_1 u + \alpha_2 v \\ \Leftrightarrow \ & 2x^2 + 3x - 4 = \alpha_1 \left(3x^2 + x - 1\right) + \alpha_2 \left(-x^2 - 5x + 7\right) \\ \Leftrightarrow \ & 2x^2 + 3x - 4 = (3\alpha_1 - \alpha_2)\, x^2 + (\alpha_1 - 5\alpha_2)\, x - \alpha_1 + 7\alpha_2 \\ \Leftrightarrow \ & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3\alpha_1 & - & \alpha_2 & = & 2 \\ \alpha_1 & - & 5\alpha_2 & = & 3 \\ -\alpha_1 & + & 7\alpha_2 & = & -4 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \ & \left\{ \begin{array}{rcr} \alpha_1 & = & \frac{1}{2} \\ \alpha_2 & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Vậy vector f biểu thị được qua hệ vector (u, v). ■

Ví dụ 3.10. Tìm điều kiện của a, b, c để vector $X = (a, b, c)$ là tổ hợp tuyến tính của hệ vector $(X_1 = (1, 2, 1), X_2 = (1, 1, 2))$.

Giải. Xét đẳng thức

$$\begin{aligned} & X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \\ \Leftrightarrow\ & (a, b, c) = \alpha_1 (1, 2, 1) + \alpha_2 (1, 1, 2) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & a \\ 2\alpha_1 & + & \alpha_2 & = & b \\ \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & = & c \end{cases} \end{aligned}$$

Ta lập ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình và biến đổi về dạng bậc thang

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & b - 2a \\ 0 & 1 & c - a \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 + d_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & b - 2a \\ 0 & 0 & c + b - 3a \end{array}\right)$$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r\left(\overline{A}\right)$ hay $c + b - 3a = 0$. ■

3.3 Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa 3.4. *Hệ vector $P = (X_1, X_2, ..., X_m)$ của không gian vector $\mathbb{V}$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu đẳng thức $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_m X_m = 0_{\mathbb{V}}$ xảy ra khi và chỉ khi $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$.*

Định nghĩa 3.5. *Hệ vector $P = (X_1, X_2, ..., X_m)$ của không gian vector $\mathbb{V}$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu P không độc lập tuyến tính.*

Chú ý 3.2. Nếu hệ vector $(X_1, X_2, ..., X_m)$ độc lập (hoặc phụ thuộc) tuyến tính, ta cũng nói các vector $X_1, X_2, ..., X_m$ độc lập (hoặc phụ thuộc) tuyến tính.

Đẳng thức $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_m X_m = 0_{\mathbb{V}}$ được gọi là một sự ràng buộc tuyến tính giữa các vector $X_1, X_2, ..., X_m$. Nếu $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$ thì ta gọi ràng buộc đó là tầm thường. Theo định nghĩa, hệ $(X_1, X_2, ..., X_m)$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi mọi ràng buộc tuyến tính giữa các vector $X_1, X_2, ..., X_m$ đều là ràng buộc tầm thường. Hệ $(X_1, X_2, ..., X_m)$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại các số thực $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ không đồng thời bằng không sao cho đẳng thức $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_m X_m = 0_{\mathbb{V}}$ được thỏa mãn, nghĩa là có một sự ràng buộc tuyến tính không tầm thường giữa các vector $X_1, X_2, ..., X_m$.

Ví dụ 3.11. Trong không gian các vector tự do của hình học sơ cấp, hệ hai vector độc lập tuyến tính khi và chỉ khi chúng không cùng phương, hệ ba vector độc lập tuyến tính khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng, hệ bốn vector luôn luôn phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 3.12. Trong không gian $\mathbb{R}^2$, hai vector $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ là độc lập tuyến tính. Thật vậy, xét ràng buộc tuyến tính

$$\begin{aligned} & \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_1 (1, 0) + \alpha_2 (0, 1) = (0, 0) \\ \Leftrightarrow\ & (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 3.13. Trong $\mathbb{R}^3$, ba vector $X_1 = (1, 1, 0), X_2 = (1, 0, 1), X_3 = (0, 1, 1)$ là độc lập tuyến tính. Thật vậy, xét ràng buộc tuyến tính

$$\begin{aligned} & \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_1 (1, 1, 0) + \alpha_2 (1, 0, 1) + \alpha_3 (0, 1, 1) = (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow\ & (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

Ví dụ 3.14. Trong $\mathbb{R}^3$, ba vector $X_1 = (1, 2, 3), X_2 = (2, 3, 4), X_3 =$

$(3,4,5)$ là phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy, xét ràng buộc tuyến tính

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 (1,2,3) + \alpha_2 (2,3,4) + \alpha_3 (3,4,5) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow\ & (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3, 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & 3\alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & + & 4\alpha_3 & = & 0 \\ 3\alpha_1 & + & 4\alpha_2 & + & 5\alpha_3 & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Hệ phương trình trên là hệ tuyến tính thuần nhất có định thức của ma trận hệ số bằng không nên hệ có nghiệm không tầm thường. Ta suy ra hệ vector (X_1, X_2, X_3) là phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 3.15. Trong $\mathbb{R}^2$, xét hai vector $X_1 = (1,3)\,, X_2 = (2,m)$. Tìm tham số m để hệ vector (X_1, X_2) là độc lập tuyến tính.

Giải. Xét ràng buộc tuyến tính

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 (1,3) + \alpha_2 (2,m) = (0,0) \\
\Leftrightarrow\ & (\alpha_1 + 2\alpha_2, 3\alpha_1 + m\alpha_2) = (0,0) \\
\Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & = & 0 \\ 3\alpha_1 & + & m\alpha_2 & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Hệ vector (X_1, X_2) độc lập tuyến tính khi

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 6$$

Vậy $m \neq 6$ là các giá trị cần tìm. ∎

Ví dụ 3.16. Trong $\mathbb{R}^3$, xét ba vector $X_1 = (m,1,1)\,, X_2 = (1,m,1)\,, X_3 = (1,1,m)$. Tìm m để hệ vector (X_1, X_2, X_3) phụ thuộc tuyến tính.

Giải. Xét ràng buộc tuyến tính

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 (m,1,1) + \alpha_2 (1,m,1) + \alpha_3 (1,1,m) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{ccccccc} m\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & m\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & m\alpha_3 & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Hệ vector (X_1, X_2, X_3) phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

Vậy $m = 1$ và $m = -2$ là hai giá trị cần tìm. ■

Ví dụ 3.17. Trong không gian $P_2[x]$ cho ba vector $f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2$. Chứng minh rằng hệ vector (f_1, f_2, f_3) độc lập tuyến tính.

Giải. Xét ràng buộc tuyến tính

$$\begin{aligned} & \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0_{P_2[x]} \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy hệ vector (f_1, f_2, f_3) độc lập tuyến tính. ■

Ví dụ 3.18. Trong $P_2[x]$ cho ba vector $f_1 = 2x^2$; $f_2 = x^2 + x + 1$; $f_3 = x^2 - x + m$. Tìm m để hệ vector (f_1, f_2, f_3) phụ thuộc tuyến tính.

Giải. Xét ràng buộc tuyến tính

$$\begin{aligned} & \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0_{P_2[x]} \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha_1 2x^2 + \alpha_2 \left(x^2 + x + 1\right) + \alpha_3 \left(x^2 - x + m\right) = 0 + 0x + 0x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) x^2 + (\alpha_2 - \alpha_3) x + \alpha_2 + m\alpha_3 = 0 + 0x + 0x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ & & \alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0 \\ & & \alpha_2 & + & m\alpha_3 & = & 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Hệ vector (f_1, f_2, f_3) phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi hệ phương trình trên có nghiệm không tầm thường, tức là

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(m+1) = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm. ■

Tính chất

1. Hệ một vector (X) phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu $X = 0_{\mathbb{V}}$.
2. Hệ con của một hệ vector độc lập tuyến tính cũng là một một hệ độc lập tuyến tính.
3. Hệ vector có chứa một hệ con phụ thuộc tuyến tính là một hệ phụ thuộc tuyến tính. Nói riêng, hệ vector chứa vector không là một hệ phụ thuộc tuyến tính.
4. Giả sử hệ vector $(X_1, X_2, ..., X_m)$ độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $(X_1, X_2, ..., X_m, X)$ là phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu X biểu thị tuyến tính qua hệ $(X_1, X_2, ..., X_m)$.

Ma trận vector dòng

Định nghĩa 3.6. *Cho hệ vector $(X_1, X_2, ..., X_m)$ chứa trong không gian vector $\mathbb{R}^n$. Giả sử $X_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})\,, i = \overline{1, m}$, khi đó ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận vector dòng của hệ vector $(X_1, X_2, ..., X_m)$.

Định lý 3.1. *Cho hệ vector $(X_1, X_2, ..., X_m)$ chứa trong không gian vector $\mathbb{R}^n$. Giả sử A là ma trận vector dòng của hệ $(X_1, X_2, ..., X_m)$, khi đó*

- *Hệ vector $(X_1, X_2, ..., X_m)$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $r\,(A) = m$.*
- *Hệ vector $(X_1, X_2, ..., X_m)$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $r\,(A) < m$.*

Ví dụ 3.19. Trong $\mathbb{R}^4$, ba vector $X_1 = (1,1,1,1)\,, X_2 = (1,2,3,4)\,, X_3 = (1,3,-1,0)$ là độc lập tuyến tính. Thật vậy, ta lập ma trận vector dòng của hệ vector (X_1, X_2, X_3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta biến đổi A về dạng bậc thang

$$A \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

Ta suy ra $r(A) = 3$. Do đó, hệ vector (X_1, X_2, X_3) là độc lập tuyến tính.

Ví dụ 3.20. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, ba vector $X_1 = (-1,1,1,-1)\,, X_2 = (2,-1,2,-1)\,, X_3 = (0,1,4,-3)$ là phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy, ta lập ma trận vector dòng của hệ vector (X_1, X_2, X_3)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Ta biến đổi A về dạng bậc thang

$$A \xrightarrow{d_2 \to d_2 + 2d_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta suy ra $r(A) = 2 < 3$. Do đó, hệ vector (X_1, X_2, X_3) là phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 3.21. Trong $\mathbb{R}^3$, cho ba vector $X_1 = (1,1,1)\,, X_2 = (1,2,3)\,, X_3 = (1,1,m)$. Tìm m để hệ vector (X_1, X_2, X_3) là phụ thuộc tuyến tính.

Giải. Ta lập ma trận vector dòng của hệ vector

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Ta đưa A ma trận về dạng bậc thang

$$A \xrightarrow[d_3 \to d_2 - d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$$

Hệ (X_1, X_2, X_3) phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi

$$r(A) < 3 \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm. ■

Định nghĩa 3.7. *Cho hệ vector $(f_1, f_2, ..., f_m)$ chứa trong không gian không vector $P_n[x]$. Giả sử $f_i = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + ... + a_{in}x^n, i = \overline{1, m}$, khi đó ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận vector dòng của hệ vector $(f_1, f_2, ..., f_m)$.

Định lý 3.2. *Cho hệ vector $(f_1, f_2, ..., f_m)$ chứa trong không gian vector $P_n[x]$. Giả sử A là ma trận vector dòng của hệ $(f_1, f_2, ..., f_m)$. Khi đó,*

- *Hệ vector $(f_1, f_2, ..., f_m)$ độc lập tuyến tính khi $r(A) = m$.*
- *Hệ vector $(f_1, f_2, ..., f_m)$ phụ thuộc tuyến tính khi $r(A) < m$.*

Ví dụ 3.22. Tìm m để hệ vector

$$\left(f_1 = x^2 + x + 1, f_2 = x + m, f_3 = x^2 - x + m\right)$$

của $P_2[x]$ phụ thuộc tuyến tính.

Giải. Ta lập ma trận vector dòng của hệ vector

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hệ vector (f_1, f_2, f_3) phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $\det A = 0$, tức là

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$$

Vậy $m = \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm. ■

3.4 Cơ sở và số chiều của không gian vector

Định nghĩa 3.8. *Một hệ vector của $\mathbb{V}$ được gọi là độc lập tuyến tính cực đại (tối đại) nếu hệ độc lập tuyến tính và nếu ta thêm bất kì một vector nào của $\mathbb{V}$ vào hệ thì được một hệ vector phụ thuộc tuyến tính.*

Ví dụ 3.23. Trong $\mathbb{R}^2$, hệ vector $(e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ như đã biết là hệ độc lập tuyến tính. Mặt khác, nếu ta lấy bất kì vector $X \in \mathbb{R}^2$ thì hệ vector (X, e_1, e_2) là phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy, giả sử $X = (x_1, x_2)$, khi đó

$$X - x_1e_1 - x_2e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

Ràng buộc tuyến tính trên chứng tỏ hệ (X, e_1, e_2) phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 3.24. Trong $\mathbb{R}^3$ hệ hai vector $(X_1 = (1, 1, 1), X_2 = (0, 1, 1))$ là độc lập tuyến tính nhưng không phải là độc lập tuyến tính tối đại. Thật vậy, nếu ta lấy $X_3 = (0, 0, 1)$ thì hệ ba vector (X_1, X_2, X_3) cũng độc lập tuyến tính. Tuy nhiên, hệ ba vector (X_1, X_2, X_3) lại là độc lập tuyến tính tối đại. Thật vậy, ta lấy bất kì vector $X \in \mathbb{R}^3$, giả sử $X = (a, b, c)$, ta sẽ chứng tỏ hệ (X_1, X_2, X_3, X) phụ thuộc tuyến tính. Ta lập ma trận vector dòng của hệ (X_1, X_2, X_3, X)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Vì ma trận A có cấp 4×3 nên $r(A) \leq 3 < 4$, suy ra hệ (X_1, X_2, X_3, X) phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 3.25. Trong $P_2[x]$, hệ vector $\left(f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2\right)$ là độc lập tuyến tính. Mặt khác, nếu ta lấy bất kì vector $f \in P_2[x]$ thì hệ vector (f_1, f_2, f_3, f) là phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy, giả sử $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, khi đó

$$f - a_0 f_1 - a_1 f_2 - a_2 f_3 = 0_{P_2[x]}$$

Ta suy ra hệ (f_1, f_2, f_3, f) phụ thuộc tuyến tính.

Vậy hệ vector (f_1, f_2, f_3) là độc lập tuyến tính cực đại.

Định nghĩa 3.9. *Hạng của hệ vector P trong không gian vector $\mathbb{V}$ là số vector độc lập tuyến tính cực đại của hệ vector đó, ký hiệu: $r(P)$.*

Ví dụ 3.26. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ vector

$$(X_1 = (1, 2, 3), X_2 = (2, 3, 4), X_3 = (3, 4, 5))$$

Tìm hạng của hệ vector trên.

Giải. Ta thấy hệ hai vector (X_1, X_2) là độc lập tuyến tính. Xét ràng buộc tuyến tính

$$\begin{aligned} & \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_1 (1, 2, 3) + \alpha_2 (2, 3, 4) + \alpha_3 (3, 4, 5) = (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ phương trình trên có định thức ma trận hệ số bằng không nên hệ có nghiệm không tầm thường. Vậy hệ vector (X_1, X_2, X_3) là phụ thuộc tuyến tính. Do đó $r(X_1, X_2, X_3) = 2$. ■

Ví dụ 3.27. Tìm hạng của hệ vector $\left(f_1 = x^2, f_2 = 2x^2, f_3 = x^2 + x\right)$ trong $P_2[x]$.

Giải. Hệ hai vector (f_1, f_3) là độc lập tuyến tính. Thật vậy, xét đẳng thức

$$\begin{aligned} & \alpha f_1 + \beta f_3 = 0_{P_2[x]} \\ \Leftrightarrow\ & \alpha x^2 + \beta\left(x^2 + x\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\alpha + \beta)\, x^2 + \beta x = 0 + 0x + 0x^2 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta xét hệ ba vector (f_1, f_2, f_3). Ta có

$$2f_1 - f_2 + 0f_3 = 0_{P_2[x]}$$

Điều này chứng tỏ hệ (f_1, f_2, f_3) phụ thuộc tuyến tính. Ta suy ra $r(f_1, f_2, f_3) = 2$. ■

Định lý 3.3. *Cho hệ vector $P = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ trong không gian $\mathbb{R}^n$. Khi đó $r(P) = r(A)$ với A là ma trận vector dòng của hệ P.*

Định lý 3.4. *Cho hệ vector $P = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ trong không gian $P_n[x]$. Khi đó $r(P) = r(A)$ với A là ma trận vector dòng của hệ P.*

Ví dụ 3.28. Tìm hạng của hệ vector $(X_1 = (1, 1, 2), X_2 = (1, 2, 5), X_3 = (0, 1, 3))$ trong $\mathbb{R}^3$.

Giải. Ta lập ma trận vector dòng của hệ (X_1, X_2, X_3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Biến đổi A về dạng bậc thang ta được

$$A \xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy $r(A) = 2$, suy ra $r(X_1, X_2, X_3) = 2$. ■

Ví dụ 3.29. Trong $P_2[x]$, tìm hạng của hệ vector $P = (f_1 = x^2 + 2x + 2; f_2 = x^2; f_3 = x + 1)$.

Giải. Ta lập ma trận vector dòng của hệ vector P và biến đổi về dạng bậc thang

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to 2d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta suy ra $r(A) = 2$ hay $r(f_1, f_2, f_3) = 2$. ■

Định nghĩa 3.10. *Một hệ vector của $\mathbb{V}$ được gọi một hệ sinh của $\mathbb{V}$ nếu mỗi vector của $\mathbb{V}$ đều biểu thị tuyến tính được qua hệ đó. Cụ thể hơn, hệ vector $P \subset \mathbb{V}$ được gọi là hệ sinh của $\mathbb{V}$ nếu với mọi $X \in \mathbb{V}$, $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$ sao cho*

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_m X_m$$

với $X_1, X_2, ..., X_m \in P$. Ta cũng nói $\mathbb{V}$ sinh bởi P. Ký hiệu: $\mathbb{V} = \langle P \rangle$.

Nếu P chỉ gồm hữu hạn phần tử thì không gian vector $\mathbb{V}$ được gọi là hữu hạn sinh.

Ví dụ 3.30. Hệ vector $(e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$ hay $\mathbb{R}^2 = \langle (e_1, e_2) \rangle$ .Thật vậy, lấy bất kì vector $X \in \mathbb{R}^2$, giả sử $X = (a, b)$, khi đó $X = ae_1 + be_2$.

Ví dụ 3.31. Hệ vector $(X_1 = (1,1), X_2 = (1,2), X_3 = (1,3))$ cũng là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$. Thật vậy, lấy bất kì vector $X \in \mathbb{R}^2$, giả sử $X = (a,b)$, xét đẳng thức

$$\begin{aligned} & X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \\ \Leftrightarrow\ & (a,b) = \alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (1,2) + \alpha_3 (1,3) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = b \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ phương trình trên có ma trận hệ số mở rộng

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b-a \end{array}\right)$$

Ta thấy $r\left(\overline{A}\right) = r(A) = 2$, chứng tỏ hệ trên có vô số nghiệm. Ta suy ra X được biểu thị tuyến tính qua hệ vector (X_1, X_2, X_3) hay $\mathbb{R}^2 = \langle((1,1), (1,2), (1,3))\rangle$.

Ví dụ 3.32. Hệ vector $X_1 = (1,1,1), X_2 = (0,1,1)$ không là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$. Thật vậy, lấy vector $X = (0,0,1)$, xét đẳng thức

$$\begin{aligned} & X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \\ \Leftrightarrow\ & (0,0,1) = \alpha_1 (1,1,1) + \alpha_2 (0,1,1) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm, chứng tỏ hệ vector (X_1, X_2) không là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 3.33. Hệ vector $(f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2)$ là hệ sinh của $P_2[x]$ nhưng không là hệ sinh của $P_3[x]$ (tại sao?).

Định nghĩa 3.11. *Hệ vector $P = (X_1, X_2, ..., X_m)$ của không gian vector $\mathbb{V}$ được gọi một cơ sở của $\mathbb{V}$ nếu P là hệ sinh của $\mathbb{V}$ và hệ vector P độc lập tuyến tính.*

Ví dụ 3.34. Hệ vector $(e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Hệ vector $X_1 = (1,1), X_2 = (1,2)$ cũng là cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

Hệ $(X_1 = (1,1), X_2 = (1,2), X_3 = (1,3))$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$ nhưng không phải là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

Hệ $(X_1 = (1,1,0), X_2 = (1,0,0))$ là một hệ độc lập tuyến tính nhưng không phải là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Hệ $(f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2)$ là một cơ sở của $P_2[x]$. Hệ $(g_1 = 1, g_2 = x+1, g_3 = x^2+1)$ cũng là một cơ sở của $P_2[x]$ (tại sao?).

Hệ $(f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2, f_4 = 2x^2)$ là một hệ sinh của $P_2[x]$ nhưng không phải là cơ sở của $P_2[x]$.

Hệ $(f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2)$ là một hệ độc lập tuyến tính nhưng nó không phải là cơ sở của $P_3[x]$.

Hệ $(e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1))$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$ và được gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$, ký hiệu E_4.

Hệ $(e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,...,0), ..., e_n = (0,0,...,1))$ được gọi là cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^n$, ký hiệu E_n.

Hệ $\left(u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, u_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ là cơ sở không gian $\mathbb{R}_n$ và được gọi là cơ sở chính tắc.

Định nghĩa 3.12. *Số vector trong một cơ sở của không gian vector* $\mathbb{V}$ *được gọi là số chiều của* $\mathbb{V}$*, ký hiệu* $\dim \mathbb{V}$.

Tính chất

1. Trong không gian $\mathbb{V}$, cơ sở không tồn tại duy nhất nhưng số vector trong cơ sở thì luôn luôn bằng nhau.

2. Nếu $\dim \mathbb{V} = n$ thì mọi hệ gồm n vector độc lập tuyến tính của $\mathbb{V}$ đều là cơ sở của $\mathbb{V}$. Mọi hệ nhiều hơn n vector đều là hệ phụ thuộc.

3. Nếu $\dim \mathbb{V} = n$ và $P = (X_1, X_2, ..., X_n)$ là hệ gồm n vector của $\mathbb{V}$. Khi đó, P là cơ sở của $\mathbb{V}$ khi và chỉ khi $r(S) = n$.

4. Từ các ví dụ trên ta đạt được một số kết quả sau:

$$\dim \mathbb{R}^n = n; \dim P_n[x] = n + 1; \dim \mathbb{R}_n = n$$

Ví dụ 3.35. Trong $\mathbb{R}^3$, cho hệ vector $P = ((2, 1, -1), (3, 2, -5), (1, -1, m))$. Tìm m để hệ P là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Giải. P là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ khi và chỉ khi $r(P) = 3$, tức là

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m - 10 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 10$$

Vậy với $m \neq 10$ thì P là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. ■

Ví dụ 3.36. Trong $\mathbb{R}^4$, cho hệ vector

$$P = ((1, 1, 1, m), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1))$$

Tìm m để hệ P là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

Giải. P là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$ khi và chỉ khi $r(P) = 4$, tức là

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & -1 & 1-m \\ 0 & -1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$
$$\Leftrightarrow 2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$$

Vậy với $m \neq \frac{3}{2}$ thì P là cơ sở của $\mathbb{R}^4$. ■

Ví dụ 3.37. Tìm m để hệ vector $P = (f_1 = x^2 + x + 1, f_2 = 2x^2 + 1, f_3 = x^2 - x + m)$ là cơ sở của $P_2[x]$.

Giải. Ta lập ma trận vector dòng của hệ vector $P = (f_1, f_2, f_3)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hệ P là cơ sở của $P_2[x]$ khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$$

Vậy với $m \neq 0$ thì P là cơ sở của $P_2[x]$. ■

3.5 Tọa độ của vector. Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa 3.13. *Giả sử $\mathbb{V}$ là một không gian vector n chiều và $P = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là một cơ sở của nó. Lấy X là một vector tùy ý của $\mathbb{V}$, nếu $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$ thì bộ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ được gọi là tọa độ của vector X trong cơ sở P, mỗi $\alpha_i, i = \overline{1,n}$ gọi là tọa độ thứ i, ký hiệu*

$$[X]_P = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Trường hợp $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ và $P \equiv E_n$ thì ta dùng ký hiệu $[X]$ thay cho $[X]_{E_n}$.

Ví dụ 3.38. Trong $\mathbb{R}^n$ xét cơ sở chính tắc

$$E_n = (e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1))$$

Lấy một vector $X \in \mathbb{R}^n$. Giả sử $X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, khi đó ta có

$$X = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Vậy $[X] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Ví dụ 3.39. Trong $P_n[x]$ xét cơ sở

$$E = (f_1 = 1, f_2 = x, \ldots, f_{n+1} = x^n)$$

Lấy một vector $f \in P_n[x]$. Giả sử $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, khi đó ta có

$$f = a_0 f_1 + a_1 f_2 + a_2 f_3 + \cdots + a_n f_{n+1}$$

Vậy $[f]_E = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Ví dụ 3.40. Trong $\mathbb{R}^3$, hệ vector $P = ((1,1,1), (0,1,1), (0,0,1))$ là một cơ sở. Tìm tọa độ của vector $X = (1,2,3)$ trong cơ sở P.

Giải. Xét đẳng thức

$$\begin{aligned} & (1,2,3) = \alpha_1 (1,1,1) + \alpha_2 (0,1,1) + \alpha_3 (0,0,1) \\ \Leftrightarrow\ & (1,2,3) = (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & & & & & = & 1 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = & 2 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Vậy $[X]_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ■

Ví dụ 3.41. Trong không gian $P_2[x]$ cho hệ vector

$$P = \left(f_1 = x^2 + x + 1, f_2 = 2x + 1, f_3 = 3\right)$$

Chứng tỏ rằng P là một cơ sở của $P_2[x]$ và hãy tìm tọa độ của vector $f = 2x^2 - x + 1$ trong cơ sở này.

Giải. Trước hết ta chứng tỏ P là một cơ sở của $P_2[x]$. Thật vậy, xét ma trận vector dòng của hệ vector P

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiếp theo, ta tìm tọa độ của vector $f = 2x^2 - x + 1$ trong cơ sở này. Xét đẳng thức

$$\begin{aligned} & f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - x + 1 = \alpha_1 \left(x^2 + x + 1\right) + \alpha_2 (2x + 1) + \alpha_3 3 \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{lllllll} \alpha_1 & & & & & = & 2 \\ \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & & & = & -1 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 3\alpha_3 & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -\frac{3}{2} \\ \alpha_3 = \frac{1}{6} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Vậy $[f]_P = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. ■

Ví dụ 3.42. Trong không gian $P_2[x]$ cho hệ vector

$$P = \left(f_1 = 1, f_2 = (x - 1), f_3 = (x - 1)^2\right)$$

Chứng tỏ rằng P là một cơ sở của $P_2[x]$ và hãy tìm tọa độ của vector $f = x^2 + x + 1$ trong cơ sở này.

Giải. Trước hết ta chứng tỏ P là một cơ sở của $P_2[x]$. Thật vậy, ta xét ma trận vector dòng của hệ vector P.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta thấy $\det A = 1 \neq 0$ nên P là một cơ sở của $P_2[x]$.

Tiếp theo, ta tìm tọa độ của vector $f = x^2 + x + 1$ trong cơ sở này. Xét đẳng thức

$$\begin{aligned} & f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + x + 1 = \alpha_1 1 + \alpha_2 (x - 1) + \alpha_3 (x - 1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{lllllll} \alpha_3 & & & & & = & 1 \\ \alpha_2 & - & 2\alpha_3 & & & = & 1 \\ \alpha_1 & - & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Vậy $[f]_P = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. ■

Định nghĩa 3.14. *Trong không gian vector n chiều $\mathbb{V}$ cho hai cơ sở $P = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ và $P' = (X'_1, X'_2, \ldots, X'_n)$. Giả sử*

$$[X'_j]_P = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}, j = \overline{1, n}$$

Khi đó ma trận

$$C = ([X'_1]_P [X'_2]_P \ldots [X'_n]_P) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận chuyển cở sở từ P sang P', kí hiệu là $C_{P \to P'}$ hoặc $Pass\,(P, P')$.

Định lý 3.5. *Trong không gian vector n chiều $\mathbb{V}$ cho hai cơ sở $P = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ và $P' = (X'_1, X'_2, \ldots, X'_n)$. Lấy $X \in \mathbb{V}$, giả sử*

$$[X]_P = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, [X]_{P'} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Khi đó ta có mối liên hệ sau:

$$[X]_P = C_{P \to P'}[X]_{P'} \tag{3.1}$$

Công thức 3.1 được gọi là công đổi tọa độ từ P sang P'.

Ví dụ 3.43. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hai cơ sở

$$\begin{aligned} P &= ((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)) \\ P' &= ((0,0,1),(1,-1,0),(1,1,1)) \end{aligned}$$

Xác định $C_{P\to P'}$.

Giải. Trước hết ta tìm $[(0,0,1)]_P$. Xét đẳng thức

$$(0,0,1) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,0,1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $[(0,0,1)]_P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Tương tự ta tìm được

$$[(1,-1,0)]_P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};[(1,1,1)]_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vậy $C_{P\to P'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. ■

Ví dụ 3.44. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hai hệ vector

$$\begin{aligned} P &= ((1,1,1),(1,1,2),(1,2,3)) \\ P' &= ((2,1,-1),(3,2,5),(1,-1,m)) \end{aligned}$$

1. Chứng minh P là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
2. Tìm m để P' là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
3. Tìm $C_{P\to P'}$ ứng với $m = 1$.

Giải.

1. Ta có $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, do đó P là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2. P' là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ khi và chỉ khi
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m + 20 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -20$$

3. Khi $m = 1$ thì $P' = ((2,1,-1), (3,2,5), (1,-1,1))$, ta tính được
$$[(2,1,-1)]_P = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; [(3,2,5)]_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$[(1,-1,1)]_P = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vậy $C_{P\to P'} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

■

Định lý 3.6. *Trong không gian vector n chiều $\mathbb{V}$ cho ba cơ sở P, P', P'', khi đó*

- $C_{P\to P} = I_n$.
- $C_{P'\to P} = C^{-1}_{P\to P'}$.
- $C_{P\to P''} = C_{P\to P'} C_{P'\to P''}$.

Hệ quả 3.1. *Trong không gian vector $\mathbb{R}^n$, ta xét ba cơ sở P, P' và E_n (cơ sở chính tắc), khi đó*
$$C_{P\to P'} = C_{P\to E_n} C_{E\to P'} = C^{-1}_{E_n\to P} C_{E_n\to P'}$$

Ví dụ 3.45. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hai cơ sở

$$\begin{aligned} P &= ((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)) \\ P' &= ((0,0,1),(1,-1,0),(1,1,1)) \end{aligned}$$

Tìm $C_{P\to P'}$.

Giải. Ta có

$$C_{E_3\to P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; C_{E_3\to P'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Áp dụng hệ quả 3.1 ta được

$$\begin{aligned} C_{P\to P'} = C^{-1}_{E_3\to P} C_{E_3\to P'} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Ví dụ 3.46. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hai cơ sở P, P' và $C_{P\to P'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Biết $[X]_{P'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Hãy tìm $[X]_P$.

2. Biết $[X]_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Hãy tìm $[X]_{P'}$.

Giải.

1. Áp dụng công thức 3.1 ta được

$$[X]_P = C_{P\to P'}[X]_{P'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Ta có

$$
\begin{aligned}
& [X]_P = C_{P\to P'}[X]_{P'} \\
\Leftrightarrow \quad & [X]_{P'} = C^{-1}_{P\to P'}[X]_P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

■

3.6 Không gian vector con

Định nghĩa 3.15. *Tập con khác rỗng $\mathbb{W}$ của không gian vector $\mathbb{V}$ được gọi là một không gian vector con (hay không gian con) của $\mathbb{V}$ nếu hai tính chất sau được thỏa:*

- $\forall X, Y \in \mathbb{W}, X + Y \in \mathbb{W}$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{W}, \alpha X \in \mathbb{W}$.

Ví dụ 3.47. $\{0\}$ và $\mathbb{V}$ là hai không gian vector con của $\mathbb{V}$. Chúng được gọi là các không gian vector con tầm thường của $\mathbb{V}$.

Ví dụ 3.48. Giả sử $m \leq n$. Khi đó, tập các vector dạng $(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)$ là một không gian vector con của $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 3.49. Nếu $m \leq n$ thì $P_m[x]$ là một không gian vector con của $P_n[x]$.

Ví dụ 3.50. Không gian $C^1[a, b]$ các hàm khả vi liên tục trong đoạn $[a, b]$ là một không gian vector con của không gian $C[a, b]$.

Chú ý 3.3. Nếu $\mathbb{W}$ là không gian vector con của $\mathbb{V}$ thì $\mathbb{W}$ cũng là không gian vector. Do đó, ta cũng có các khái niệm cơ sở, tọa độ, số chiều trên không gian $\mathbb{W}$.

Định lý 3.7. *Nếu $\mathbb{W}$ là không gian vector con của $\mathbb{V}$ thì $\dim \mathbb{W} \leq \dim \mathbb{V}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\mathbb{W} = \mathbb{V}$.*

3.6.1 Không gian con sinh bởi một tập hợp

Trước khi đi vào nội dung chính, chúng ta tìm hiểu định lý sau:

Định lý 3.8. *Giao của một họ bất kỳ các không gian vector con của $\mathbb{V}$ là một không gian vector con của $\mathbb{V}$. Cụ thể hơn, nếu $\{\mathbb{W}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ là một họ các không gian vector con của $\mathbb{V}$ thì $\bigcap\limits_{\alpha\in I}\mathbb{W}_\alpha$ là một không gian vector con của $\mathbb{V}$.*

Định nghĩa 3.16. *Trong không gian vector $\mathbb{V}$ cho hệ vector P. Giao của tất cả các không gian vector con của $\mathbb{V}$ chứa P được gọi là không gian vector con của $\mathbb{V}$ sinh bởi P, ký hiệu $\langle P\rangle$.*

Nhận xét 3.1. Họ các không gian vector con của $\mathbb{V}$ chứa P luôn khác rỗng vì luôn chứa ít nhất một phần tử chính là không gian $\mathbb{V}$.

Từ định nghĩa 3.16 và định lý 3.8 ta suy ra $\langle P\rangle$ là không gian vector con nhỏ nhất của $\mathbb{V}$ chứa P.

Hai trường hợp đặc biệt là $\langle\emptyset\rangle = \{0_{\mathbb{V}}\}$ và $\langle\mathbb{W}\rangle = \mathbb{W}$ đối với mọi không gian vector con $\mathbb{W}$ của $\mathbb{V}$.

Định lý 3.9. *Trong không gian vector $\mathbb{V}$ cho hệ vector $P = (X_1, X_2, ..., X_m)$. Khi đó*

- $\langle P\rangle = \langle(X_1, X_2, ..., X_m)\rangle = \{\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + ... + \alpha_mX_m | \alpha_i \in \mathbb{R}\}$.
- $\dim\langle P\rangle = r(P)$
- *Cở sở của không gian vector con $\langle P\rangle$ là hệ vector độc lập tuyến tính tối đại trong P.*

Ví dụ 3.51. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con $\mathbb{W}$ trong $\mathbb{R}^3$ cho bởi $\mathbb{W} = \langle P\rangle$ với $P = ((1,1,1), (1,2,3), (2,3,4))$.

Giải. Ta lập ma trận vector dòng của hệ vector P

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ta biến đổi ma trận A về dạng bậc thang

$$A \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 2d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy không gian vector con $\mathbb{W}$ có cơ sở là hệ $((1,1,1),(1,2,3))$. Từ đây ta cũng suy ra $\dim \mathbb{W} = 2$. ■

Ví dụ 3.52. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con $\mathbb{W}$ trong $\mathbb{R}^4$ cho bởi $\mathbb{W} = \langle P \rangle$ với $P = ((1,0,0,-1),(2,1,1,0),(1,1,1,1))$.

Giải. Ta lập ma trận vector dòng của hệ vector P

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta biến đổi ma trận A về dạng bậc thang

$$A \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy không gian vector con $\mathbb{W}$ có cơ sở là hệ $((1,0,0,-1),(2,1,1,0))$. Từ đây ta cũng suy ra $\dim \mathbb{W} = 2$. ■

Ví dụ 3.53. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con $\mathbb{W}$ của $P_2[x]$ cho bởi $\mathbb{W} = \langle P \rangle$ với $P = \left(x^2 + x - 1, x - 1, x^2 + 2x - 2, 2x^2 + x - 1\right)$.

Giải. Ta lập ma trận vector dòng của hệ vector P

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta biến đổi ma trận A về dạng bậc thang

$$A \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 \to d_4 - 2d_1]{d_3 \to d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[d_4 \to d_4 + d_2]{d_3 \to d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy không gian $\mathbb{W}$ có cơ sở là hệ vector $\left(x^2 + x - 1, x - 1\right)$. Từ đây ta cũng suy ra $\dim \mathbb{W} = 2$. ■

Ví dụ 3.54. Tìm m để không gian con $\mathbb{W}$ của $\mathbb{R}^3$ có số chiều là 2 với $\mathbb{W} = \langle ((1, 2, 1), (1, m, m + 1), (2, m + 1, m + 4)) \rangle$.

Giải. Ta lập ma trận vector dòng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & m+1 \\ 2 & m+1 & m+4 \end{pmatrix}$$

Ta có $\dim \mathbb{W} = 2$ khi và chỉ khi $r(A) = 2$. Ta biến đổi ma trận A như sau

$$A \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 2d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m-2 & m \\ 0 & m-3 & m-2 \end{pmatrix} = A'$$

Nếu $m = 2$ thì $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó $r(A') = 3$, suy ra $r(A) = 3$. Vậy $m = 2$ không thỏa yêu cầu đề bài.

Nếu $m \neq 2$ thì ta tiếp tục biến đổi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m-2 & m \\ 0 & m-3 & m-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - \frac{m-3}{m-2} d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m-2 & m \\ 0 & 0 & \dfrac{-m+4}{m-2} \end{pmatrix}$$

Ta thấy $r(A) = 2$ khi và chỉ khi $-m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$. ■

3.6.2 Không gian con nghiệm

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

hay viết dưới dạng ma trận là

$$AX = O_{m\times 1} \tag{3.3}$$

Như đã biết, hệ phương trình tuyến tính thuần nhất 3.2 luôn tồn tại nghiệm. Gọi $\mathbb{W}$ là tập tất cả các nghiệm của hệ 3.2, khi đó ta được các kết quả sau:

Định lý 3.10. *$\mathbb{W}$ là không gian vector con của không gian vector $\mathbb{R}_n$ và được gọi là không gian con nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất 3.2.*

Định lý 3.11. *Không gian con nghiệm $\mathbb{W}$ có số chiều $\dim \mathbb{W} = n - r$ và cơ sở là hệ nghiệm cơ bản $(X_1, X_2, \dots, X_{n-r})$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất 3.2, ở đây $r = r(A)$.*

Ví dụ 3.55. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con nghiệm $\mathbb{W}$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

Giải. Lập ma trận hệ số của hệ phương trình

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Biến đổi A về dạng bậc thang

$$A \xrightarrow{d_2 \to 3d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$$

Ta suy ra $r(A) = 2$ và $\dim \mathbb{W} = 1$.

Cho $z = 1$ ta tìm được nghiệm cơ bản của hệ là $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ và đây cũng chính là cơ sở của không gian con nghiệm $\mathbb{W}$. ■

Ví dụ 3.56. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con nghiệm $\mathbb{W}$ của hệ phương trình thuần nhất sau

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

Giải. Ta lập ma trận hệ số của hệ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Biến đổi ma trận A về dạng bậc thang

$$A \xrightarrow[\substack{d_3 \to d_3 - 3d_1 \\ d_4 \to d_4 - d_1}]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 \to d_4 - 3d_2]{d_3 \to d_3 - 2d_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Xóa dòng 3}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

Ta suy ra $r(A) = 3$ và $\dim \mathbb{W} = 2$.

Để tìm cơ sở của không gian $\mathbb{W}$ ta khôi phục hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ 4x_4 + 12x_5 = 0 \end{cases}$$

Lần lượt cho $x_1 = 1, x_5 = 0$ và $x_1 = 0, x_5 = 1$ ta tìm được hệ nghiệm cơ bản của hệ

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

và đây cũng chính là cơ sở của không gian con nghiệm $\mathbb{W}$. ■

3.7 Không gian vector Euclide

Định nghĩa 3.17. *Cho $\mathbb{V}$ là một không gian vector n chiều. Khi đó, $\mathbb{V}$ được gọi là không gian vector Euclide nếu đã cho*

1. *Quy tắc*

$$\begin{aligned} \langle .|. \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\to \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \langle X|Y \rangle \end{aligned}$$

gọi là tích vô hướng của hai vector X và Y.

2. *Quy tắc đó thỏa mãn bốn yêu cầu:*

- $\langle X|Y \rangle = \langle Y|X \rangle ; \forall X, Y \in \mathbb{V}$.
- $\langle X + Y|Z \rangle = \langle X|Z \rangle + \langle Y|Z \rangle ; \forall X, Y, Z \in \mathbb{V}$.
- $\langle \alpha X|Y \rangle = \alpha \langle X|Y \rangle = \langle X|\alpha Y \rangle ; \forall X, Y \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\langle X|X \rangle \geq 0; \forall X \in \mathbb{V}$ *và* $\langle X|X \rangle = 0$ *khi và chỉ khi* $X = 0_{\mathbb{V}}$.

Ví dụ 3.57. Không gian các vector tự do đã học ở hình học sơ cấp là một không gian vector Euclide với tích vô hướng thông thường

$$\left\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{v} \right\rangle = \left|\overrightarrow{u}\right| \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$$

Ví dụ 3.58. Giả sử $\mathbb{V}$ là không gian vector n chiều và $(X_1, X_2, ..., X_n)$ là một cơ sở của nó. Có thể định nghĩa một tích vô hướng trên $\mathbb{V}$ như sau: Nếu $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i X_i$ và $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i X_i$ thì ta đặt $\langle X|Y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Nói riêng, nếu $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ và $(e_1, e_2, ..., e_n)$ là một cơ sở chính tắc của nó thì tích vô hướng của hai vector $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ được định nghĩa $\langle X|Y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ và được gọi là tích vô hướng chính tắc trên $\mathbb{R}^n$.

Nhận xét rằng theo cách này thì mỗi cơ sở của $\mathbb{V}$ xác định một tích vô hướng trên $\mathbb{V}$. Hai tích vô hướng xác định bởi hai cơ sở khác nhau thì khác nhau.

Ví dụ 3.59. Trong không gian vector $C[a,b]$ xét ánh xạ

$$\begin{array}{rccl} \langle . | . \rangle : & C[a,b] \times C[a,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \langle f|g \rangle = \int\limits_a^b f(t)\, g(t)\, dt \end{array}$$

Ta thấy ánh xạ $\langle . | . \rangle$ thỏa mãn cả bốn yêu cầu của định nghĩa nên nó là một tích vô hướng trên $C[a,b]$.

Định nghĩa 3.18. *Giả sử $\mathbb{V}$ là một không gian vector Euclide với tích vô hướng $\langle . | . \rangle$. Khi đó, độ dài (hay chuẩn) của vector X, ký hiệu bởi $\|X\|$, là số thực không âm $\sqrt{\langle X|X \rangle}$, nghĩa là $\|X\| = \sqrt{\langle X|X \rangle}$.*

Định lý 3.12. ***(Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)****. Giả sử $\mathbb{V}$ là một không gian vector Euclide với tích vô hướng $\langle . | . \rangle$. Khi đó với mọi $X, Y \in \mathbb{V}$ ta luôn có $\langle X|Y \rangle^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $X = \alpha Y$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Ví dụ 3.60. Trong không gian $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz có dạng

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

với $x_i, y_i \in \mathbb{R}; i = \overline{1,n}$.

Định lý 3.13. *Giả sử $\mathbb{V}$ là một không gian vector Euclide với tích vô hướng $\langle .|. \rangle$. Ánh xạ $\|\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi $\|X\| = \sqrt{\langle X|X \rangle}$ thỏa mãn các tính chất sau đây:*

- $\|\alpha X\| = |\alpha| \, \|X\|; \forall X \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0_{\mathbb{V}}$.
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|; \forall X, Y \in \mathbb{V}$. *Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại số $\alpha \geq 0$ sao cho $X = \alpha Y$ hoặc $Y = \alpha X$.*

Định nghĩa 3.19. *Giả sử X, Y là hai vector khác không của không gian vector Euclide $\mathbb{V}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có*

$$\frac{|\langle X|Y \rangle|}{\|X\| \, \|Y\|} \leq 1$$

Từ đây suy ra tồn tại duy nhất một góc $\theta \in [0, \pi]$ sao cho

$$\cos\theta = \frac{|\langle X|Y \rangle|}{\|X\| \, \|Y\|}$$

Ta gọi θ là góc giữa các vector X và Y, ký hiệu $\theta = \widehat{(X, Y)}$.

Nhận xét 3.2. Góc giữa vector $0_{\mathbb{V}}$ và X có thể được xem là tùy ý.

3.7.1 Cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn. Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt

Định nghĩa 3.20. *Cho $\mathbb{V}$ là một không gian Euclide với tích vô hướng $\langle .|. \rangle$. Ta nói*

- *Hai vector $X, Y \in \mathbb{V}$ là trực giao nếu $\langle X|Y \rangle = 0$.*
- *Hệ vector $(X_1, X_2, ..., X_m)$ là hệ trực giao nếu chúng trực giao từng đôi một.*
- *Hệ vector $(X_1, X_2, ..., X_m)$ là hệ trực chuẩn nếu nó trực giao và $\|X_i\| = 1$ với mọi $i = \overline{1, m}$.*

Ví dụ 3.61. Trong $\mathbb{R}^2$ với tích vô hướng chính tắc, hai vector $X_1 = (2, 1)\,, X_2 = (-1, 2)$ là trực giao với nhau vì $\langle X_1|X_2 \rangle = 2.(-1) + 1.2 = 0$.

Ví dụ 3.62. Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, hệ ba vector $X_1 = (1, 1, 1)$, $X_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $X_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ lập thành một hệ trực giao.

Ví dụ 3.63. Trong $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc, cơ sở E_n lập thành một hệ trực chuẩn.

Định lý 3.14. *Hệ vector trực giao trong không gian Euclide $\mathbb{V}$ không chứa vector không là một hệ độc lập tuyến tính.*

Định nghĩa 3.21. *Trong không gian vector Euclide $\mathbb{V}$ có n chiều, hệ gồm n vector khác không, trực giao từng đôi một tạo thành một cơ sở của $\mathbb{V}$ và ta gọi là cơ sở trực giao. Hệ gồm n vector khác không được gọi là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{V}$ nếu nó là một cơ sở trực giao và mỗi vector của hệ có độ dài bằng một.*

Định lý 3.15. *Mọi không gian vector Euclide $\mathbb{V}$ với số chiều n đều tồn tại cơ sở trực chuẩn.*

Sau đây ta sẽ chỉ ra cách xây dựng cơ sở trực giao (hoặc trực chuẩn) từ một cơ sở bất kì.

Thuật toán trực chuẩn hóa Gram-Schmidt

Giả sử hệ vector $(X_1, X_2, ..., X_n)$ là cơ sở của không gian Euclide $\mathbb{V}$ được trang bị tích vô hướng $\langle .|. \rangle$. Hệ vector $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ được thiết lập bởi công thức

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_2 - \dfrac{\langle X_2|Y_1\rangle}{\langle Y_1|Y_1\rangle} Y_1 \\ Y_3 = X_3 - \dfrac{\langle X_3|Y_1\rangle}{\langle Y_1|Y_1\rangle} Y_1 - \dfrac{\langle X_3|Y_2\rangle}{\langle Y_2|Y_2\rangle} Y_2 \\ \vdots \\ Y_i = X_i - \dfrac{\langle X_i|Y_1\rangle}{\langle Y_1|Y_1\rangle} Y_1 - \dfrac{\langle X_i|Y_2\rangle}{\langle Y_2|Y_2\rangle} Y_2 - ... - \dfrac{\langle X_i|Y_{i-1}\rangle}{\langle Y_{i-1}|Y_{i-1}\rangle} Y_{i-1} \\ \vdots \\ Y_n = X_n - \dfrac{\langle X_n|Y_1\rangle}{\langle Y_1|Y_1\rangle} Y_1 - \dfrac{\langle X_n|Y_2\rangle}{\langle Y_2|Y_2\rangle} Y_2 - ... - \dfrac{\langle X_n|Y_{n-1}\rangle}{\langle Y_{n-1}|Y_{n-1}\rangle} Y_{n-1} \end{cases}$$

là một cơ sở trực giao của $\mathbb{V}$. Khi đó, hệ vector $(Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ được thiết lập bởi công thức

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{Y_1}{\|Y_1\|} \\ Z_2 = \dfrac{Y_2}{\|Y_2\|} \\ \vdots \\ Z_n = \dfrac{Y_n}{\|Y_n\|} \end{cases}$$

là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{V}$.

Ví dụ 3.64. Biết hệ vector $(X_1 = (1,1,1), X_2 = (0,-1,1), X_3 = (1,2,2))$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Trực chuẩn hóa hệ này bằng phương pháp Gram – Schmidt.

Giải. Áp dụng phương pháp Gram – Schmidt ta được

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 = (1,1,1) \\ Y_2 = X_2 - \dfrac{\langle X_2|Y_1\rangle}{\langle Y_1|Y_1\rangle} Y_1 = (0,-1,1) \\ Y_3 = X_3 - \dfrac{\langle X_3|Y_1\rangle}{\langle Y_1|Y_1\rangle} Y_1 - \dfrac{\langle X_3|Y_2\rangle}{\langle Y_2|Y_2\rangle} Y_2 = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$$

Khi đó hệ vector (Y_1, Y_2, Y_3) là cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^3$. Hơn nữa, nếu ta đặt

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{Y_1}{\|Y_1\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ Z_2 = \dfrac{Y_2}{\|Y_2\|} = \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ Z_3 = \dfrac{Y_3}{\|Y_3\|} = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{cases}$$

thì hệ vector (Z_1, Z_2, Z_3) là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$. ■

Ví dụ 3.65. Trực chuẩn hóa Gram – Schmidt hệ vector sau đây

$$P = (X_1 = (1,1,0,0), X_2 = (0,1,1,0), X_3 = (0,0,1,1), X_4 = (1,0,0,1))$$

Giải. Áp dụng phương pháp Gram – Schmidt ta được

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 = (1,1,0,0) \\ Y_2 = X_2 - \dfrac{\langle X_2|Y_1\rangle}{\langle Y_1|Y_1\rangle} Y_1 = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1, 0\right) \\ Y_3 = X_3 - \dfrac{\langle X_3|Y_1\rangle}{\langle Y_1|Y_1\rangle} Y_1 - \dfrac{\langle X_3|Y_2\rangle}{\langle Y_2|Y_2\rangle} Y_2 = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right) \\ Y_4 = X_4 - \dfrac{\langle X_4|Y_1\rangle}{\langle Y_1|Y_1\rangle} Y_1 - \dfrac{\langle X_4|Y_2\rangle}{\langle Y_2|Y_2\rangle} Y_2 - \dfrac{\langle X_4|Y_3\rangle}{\langle Y_3|Y_3\rangle} Y_3 = (0,0,0,1) \end{cases}$$

Khi đó hệ vector (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) là cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^4$. Hơn nữa, nếu ta đặt

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{Y_1}{\|Y_1\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \\ Z_2 = \dfrac{Y_2}{\|Y_2\|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, 0\right) \\ Z_3 = \dfrac{Y_3}{\|Y_3\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \\ Z_4 = \dfrac{Y_4}{\|Y_4\|} = (0, 0, 0, 1) \end{cases}$$

thì hệ vector (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^4$. ∎

Bài tập chương 3

Phần tự luận

Bài tập 3.1. Xác định điều kiện để vector x là một tổ hợp tuyến tính của hệ (u, v, w):

1. $x = (1, m, 1); u = (1, 1, 0), v = (2, 1, 1), w = (3, 2, 1)$.
2. $x = (2, m+4, m+6); u = (1, 2, 3), v = (3, 8, 11), w = (1, 3, 4)$.
3. $x = (2, m-4, m); u = (1, 2, 3), v = (2, 3, 4), w = (1, 3, 5)$.
4. $x = (x_1, x_2, x_3); u = (1, 2, 3), v = (2, 4, 5), w = (3, 6, 7)$
5. $x = (1, m, 1); u = (1, 2, 4), v = (2, 1, 5), w = (3, 6, 12)$.

Bài tập 3.2. Xác định điều kiện để vector x không phải là một tổ hợp tuyến tính của hệ (u, v, w):

1. $x = (11, m-9, 17); u = (1, 1, 3), v = (2, 2, 5), w = (3, 4, 3)$.
2. $x = (1, m+2, m+4); u = (1, 2, 3), v = (3, 7, 10), w = (2, 4, 6)$.
3. $x = (x_1, x_2, x_3); u = (1, 2, 1), v = (1, 1, 0), w = (3, 6, 3)$.
4. $x = (x_1, x_2, x_3); u = (1, 2, 1), v = (1, 1, 0), w = (3, 6, 4)$.

Bài tập 3.3. Xác định m để hệ vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:

1. $u = (1, 2, m), v = (0, 2, m), w = (0, 0, 3)$.
2. $u = (m+1, m, m-1), v = (2, m, 1), w = (1, m, m-1)$.

3. $u = (m, 1, 3, 4), v = (m, m, m + 2, 6), w = (2m, 2, 6, m + 10)$.

4. $u = (m, 1, 3, 4), v = (m, m, m + 4, 6), w = (2m, 2, 6, m + 10)$.

4. $u = (m, 1, 1, 4), v = (m, m, m, 6), w = (2m, 2, 2, m + 10)$.

Bài tập 3.4. Xác định m để hệ vector sau đây độc lập tuyến tính:

1. $u = (2, 1, 1, m), v = (2, 1, m, m), w = (m + 2, 1, 0, 0)$.
2. $u = (2, 1, 1, m), v = (2, 1, -1, m), w = (10, 5, -1, 5m)$.
3. $u_1 = (2, 3, 1, 4), u_2 = (3, 7, 5, 1), u_3 = (8, 17, 11, m), u_4 = (1, 4, 4, -3)$.

Bài tập 3.5. Hệ vectơ nào sau đây tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^4$?

1. $u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (2, 0, 1); u_3 = (1, -1, 0)$.
2. $u_2 = (1, 1, 0, -1), u_2 = (2, 2, 1, 1), u_3 = (-1, 2, 5, 0), u_4 = (0, -1, 1, 2)$.

Bài tập 3.6. Tìm m để hệ vectơ sau tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$:

1. $u = (1, 2, m), v = (1, m, 0), w = (m, 1, 0)$.
2. $u = (m, 1, 1), v = (1, m, 1), w = (1, 1, m)$.

Bài tập 3.7. Tìm m để hệ vectơ sau tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^4$:

1. $u_1 = (3, 1, 2, m - 1), u_2 = (0, 0, m, 0), u_3 = (2, 1, 4, 0), u_4 = (3, 2, 7, 0)$.
2. $u_1 = (1, 2, 3, 4), u_2 = (2, 3, 4, 5), u_3 = (3, 4, 5, 6), u_4 = (4, 5, 6, m)$.

Bài tập 3.8. Hệ vector nào tạo thành một cơ sở của không gian con $\mathbb{W}$ của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ sau:

1. $u_1 = (2, 3, 4), u_2 = (2, 6, 0), u_3 = (4, 6, 8)$.
2. $u_1 = (2, 3, 4), u_2 = (5, -4, 0), u_3 = (7, -1, 5)$.

Bài tập 3.9. Hệ vectơ nào tạo thành một cơ sở của không gian con $\mathbb{W}$ của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ sau:

1. $u_1 = (1, 2, 3, 4), u_2 = (0, 2, 6, 0), u_3 = (0, 0, 1, 0), u_4 = (0, 2, 4, 4)$.
2. $u_1 = (1, 2, 3, 4), u_2 = (0, 2, 6, 0), u_3 = (0, 0, 1, 0), u_4 = (1, 2, 4, 4)$.

Bài tập 3.10. Tìm số chiều $\dim \mathbb{W}$ của không gian con $\mathbb{W}$ của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ sau:

1. $u_1 = (1, 2, 3, 4), u_2 = (2, 3, 4, 5), u_3 = (3, 4, 5, 6), u_4 = (4, 5, 6, 7)$.
2. $u_1 = (3, 1, 5, 7), u_2 = (4, 1, 2, 2), u_3 = (1, 1, 8, 1), u_4 = (1, 2, 1, 2)$.

Bài tập 3.11. Tìm hạng của các hệ vectơ sau:

1. $u_1 = (2,3,5,7), u_2 = (4,1,3,2), u_3 = (8,7,13,16), u_4 = (6,4,8,9)$.
2. $u_1 = (1,1,5,7), u_2 = (6,2,2,2), u_3 = (13,1,8,17), u_4 = (0,1,1,2)$.

Bài tập 3.12. Định m để hệ sau có hạng bằng 2:

1. $u = (1,3,1), v = (1,m+3,3), w = (1,m+6,m+3)$.
2. $u = (m,1,0,2), v = (m,m+1,-1,2), w = (2m,m+2,-1,5)$.
3. $u = (m,1,1), v = (1,m,1), w = (1,1,m)$.

Bài tập 3.13. Tìm tọa độ của vector u trong cơ sở (u_1, u_2, u_3):

1. $u = (1,2,4); u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)$.
2. $u = (m,0,1); u_1 = (0,0,1), u_2 = (0,1,0), u_3 = (1,0,0)$.
3. $u = (2,3,6); u_1 = (1,2,3), u_2 = (1,3,4), u_3 = (2,4,7)$.
4. $u = (m,0,1); u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (0,-1,1)$.
5. $u = (m,m,4m); u_1 = (1,2,3), u_2 = (3,7,9), u_3 = (5,10,16)$.
6. $u = (1,2m,2); u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,2,0), u_3 = (2,1,1)$.

Bài tập 3.14. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp

$$\mathbb{W} = \{u = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$$

1. Chứng minh $\mathbb{W}$ là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$.

2. Tìm một cơ sở của $\mathbb{W}$.

3. Chứng minh vector $u = (1,2,7)$ thuộc $\mathbb{W}$. Xác định tọa độ của u đối với cơ sở vừa tìm được ở câu 2.

Bài tập 3.15. Trong không gian $\mathbb{R}^2$ cho hệ vectơ $P = (u_1, u_2)$. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc E_2 sang cơ sở $P = (u_1, u_2)$ và ngược lại.

1. $u_1 = (2,1), u_2 = (-1,-1)$.
2. $u_1 = (2,1), u_2 = (-1,1)$.
3. $u_1 = (-1,0), u_2 = (0,1)$.
4. $u_1 = (1,2), u_2 = (3,4)$.

Bài tập 3.16. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ vectơ $P = (u_1, u_2, u_3)$.Tìm ma trận chuyển cơ sở, từ cơ sở chính tắc E_3 sang cơ sở $P = (u_1, u_2, u_3)$ và ngược lại.

1. $u_1 = (1, 0, 1)\,, u_2 = (0, 1, 1)\,, u_3 = (0, 0, 1)$.
2. $u_1 = (0, 1, 1)\,, u_2 = (1, 0, 1)\,, u_3 = (1, 1, 0)$.
3. $u_1 = (1, 2, 1)\,, u_2 = (-1, -1, 1)\,, u_3 = (0, 1, 1)$.
4. $u_1 = (4, 2, 1)\,, u_2 = (0, 1, -2)\,, u_3 = (1, 2, 1)$.

Bài tập 3.17. Trong không gian $\mathbb{R}^2$, tìm ma trận chuyển cơ sở $P_1 = (u_1, u_2)$ sang cơ sở $P_2 = (v_1, v_2)$ và ngược lại.

1. $u_1 = (2, 1)\,, u_2 = (-1, -1)\,; v_1 = (-1, 0)\,, v_2 = (0, 1)$.
2. $u_1 = (2, 1)\,, u_2 = (3, 2)\,; v_1 = (-1, 7)\,, v_2 = (8, 1)$.
3. $u_1 = (12, 13)\,, u_2 = (1, 1)\,; v_1 = (1, -1)\,, v_2 = (3, 1)$.

Bài tập 3.18. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, tìm ma trận chuyển cơ sở $P_1 = (u_1, u_2,\ u_3)$ sang cơ sở $P_2 = (v_1, v_2,\ v_3)$ và ngược lại.

1. $u_1 = (1, 0, 0)\,, u_2 = (0, -1, 0)\,, u_3 = (0, 0, -1)\,; v_1 = (1, 0, 1)\,, v_2 = (0, 1, 1)\,, v_3 = (0, 0, 1)$.

2. $u_1 = (1, 2, 0)\,, u_2 = (1, -1, 3)\,, u_3 = (1, 1, -1)\,; v_1 = (1, 1, 0)\,, v_2 = (1, 0, 1)\,, v_3 = (0, 1, 1)$.

3. $u_1 = (-1, 2, 1)\,, u_2 = (1, -1, 3)\,, u_3 = (1, 1, -1)\,; v_1 = (1, 1, 3)\,, v_2 = (1, 1, 1)\,, v_3 = (7, 1, 1)$.

Bài tập 3.19. Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B sang cơ sở chính tắc E_3 của $\mathbb{R}^3$ là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tìm tọa độ của vector $u = (1, 0, 1)$ theo cơ sở B.

Bài tập 3.20. Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B sang cơ sở chính tắc E_3 của $\mathbb{R}^3$ là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tìm tọa độ của vector $u = (1, 2, 3)$ theo cơ sở B.

Bài tập 3.21. Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B sang cơ sở chính tắc E_3 của $\mathbb{R}^3$ là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tìm tọa độ của vector $u = (-1, 8, 1)$ theo cơ sở B.

Bài tập 3.22. Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_1 sang cơ sở B_2 của $\mathbb{R}^3$ là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

và tọa độ của vector u theo cơ sở B_1 là $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$. Tìm $[u]_{B_2}$.

Bài tập 3.23. Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_1 sang cơ sở B_2 của $\mathbb{R}^3$ là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

và tọa độ của vector u theo cơ sở B_1 là $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3$. Tìm $[u]_{B_2}$.

Bài tập 3.24. Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_1 sang cơ sở B_2 của $\mathbb{R}^3$ là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

và tọa độ của vector u theo cơ sở B_1 là $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Tìm $[u]_{B_2}$.

Bài tập 3.25. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ vector $(u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,-1,0), u_3 = (0,0,-1))$. Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_1 sang cơ sở $B_2 = (u_1, u_2, u_3)$ của $\mathbb{R}^3$ là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

và tọa độ vectơ u theo cơ sở B_1 là $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$. Tìm vectơ u.

Bài tập 3.26. 1. Trong không gian $P_5[x]$ cho cơ sở

$$F = \left(1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\right)$$

Tìm $\left[p(x) = x^5 - 1\right]_F$.

2. Trong không gian $P_5[x]$ cho cơ sở

$$F = \left(1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4, (x-1)^5\right)$$

Xác định $\left[p(x) = x^5 + 4x^4 + 3x - 1\right]_F$.

3. Trong không gian $P_5[x]$ cho cơ sở

$$F = \left(1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4, (x-1)^5\right)$$

Xác định $\left[p(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^3 + x^2 + x - 5\right]_F$.

4. Trong không gian $P_5[x]$ cho cơ sở

$$F = \left(1, x-1, \frac{(x-1)^2}{2!}, \frac{(x-1)^3}{3!}, \frac{(x-1)^4}{4!}, \frac{(x-1)^5}{5!}\right)$$

Xác định $\left[p(x) = 6x^5 + 4x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x - 5\right]_F$.

5. Trong không gian $P_5[x]$ cho cơ sở

$$F = \left(1, x-1, \frac{(x-1)^2}{2}, \frac{(x-1)^3}{3}, \frac{(x-1)^4}{4}, \frac{(x-1)^5}{5}\right)$$

Xác định $\left[p(x) = 6x^5 + 14x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 5\right]_F$.

Bài tập 3.27. 1. Trong không gian vector các đa thức có bậc không vượt quá bốn $P_4[x]$ cho hai cơ sở

$$E = \left\{1, x, x^2, x^3, x^4\right\}; F = \left(1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4\right)$$

Tìm $C_{E \to F}$ và $C_{F \to E}$.

2. Trong không gian vector các đa thức có bậc không vượt quá bốn $P_4[x]$ cho hai cơ sở

$$E = \left\{1, x, x^2, x^3, x^4\right\} F = \left(1, x-1, \frac{(x-1)^2}{2!}, \frac{(x-1)^3}{3!}, \frac{(x-1)^4}{4!}\right)$$

Tìm $C_{E \to F}$ và $C_{F \to E}$.

Phần trắc nghiệm

Bài tập 3.28. Cho $\mathbb{V}$ là một không gian có số chiều bằng bốn. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a. Mọi tập có một phần tử đều độc lập tuyến tính.

b. Mọi tập có bốn phần tử là tập sinh.

c. Mọi tập có năm phần tử là tập sinh.

d. Các câu a, b, c đều sai.

Bài tập 3.29. Tìm $\left[x^2 + 2x - 2\right]_B$ với $B = \left(f_1 = x^2 + x + 1, f_2 = x, f_3 = 1\right)$.

a. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Bài tập 3.30. Trong $\mathbb{R}^2$ cho hai cơ sở $P_1 = ((1,1),(2,3))$ và $P_2 = ((1,-1),(1,0))$. Biết $[x]_{P_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, hãy xác định $[x]_{P_2}$.

a. $\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bài tập 3.31. Cho $\mathbb{W} = \langle((1,1,1,1),(2,3,2,3),(3,4,-1,m))\rangle$, với giá trị nào của m thì $\mathbb{W}$ có số chiều lớn hơn 1?

a. $m = 0$ b. $m = -1$ c. không có m d. $\forall m$

Bài tập 3.32. Trong $\mathbb{R}^3$ cho $\mathbb{W} = \langle((1,1,1),(2,3,2))\rangle$, $P = ((1,0,0),(2,2,m))$ với giá nào của m thì P là cơ sở của $\mathbb{W}$?

a. $m = 0$ b. $m = 1$ c. không có m d. $\forall m$

Bài tập 3.33. Trong $\mathbb{R}^3$ cho $\mathbb{W} = \langle((1,1,1),(2,3,1),(3,5,m))\rangle$. Với giá trị nào của m thì $\mathbb{W}$ có số chiều là 2?

a. $m = 0$ b. $m = 1$ c. $m = 2$ d. $m = 4$

Bài tập 3.34. Trong không gian $P_2[x]$ cho các vector

$$f_1 = x^2 + x + 1,\ f_2 = 2x + 1,\ f_3 = 3x^2 + 2x + m$$

Với giá trị nào của m thì hệ vector $P = (f_1, f_2, f_3)$ sinh ra $P_2[x]$.

a. $m \neq 1$ b. $m = 1$ c. $m = \frac{5}{2}$ d. $m \neq \frac{5}{2}$

Bài tập 3.35. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hai cơ sở

$$\begin{aligned} P &= ((1,2,3), (3,4,5), (2,1,4)) \\ P' &= ((1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)) \end{aligned}$$

Biết rằng $[X]_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Hãy tìm $[X]_{P'}$.

a. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Bài tập 3.36. Cho không gian vector $\mathbb{V}$ có số chiều là ba. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a. Mọi tập sinh phải có nhiều hơn ba phần tử.

b. Mọi tập độc lập tuyến tính phải có ba phần tử.

c. Mọi tập sinh của $\mathbb{V}$ có ba phần tử đều là cơ sở của $\mathbb{V}$.

d. Mọi tập sinh của $\mathbb{V}$ phải có đúng ba phần tử.

Bài tập 3.37. Trong $\mathbb{R}^3$ cho không gian vector con

$$\mathbb{W} = \{(a, a+b, a-b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

a. $((1,0,0), (0,1,-1), (0,1,1))$ là cơ sở của $\mathbb{W}$.

b. $((1,0,0), (0,1,-1), (0,1,1))$ là tập sinh của $\mathbb{W}$.

c. $((1,1,-1), (0,1,1))$ là cơ sở của $\mathbb{W}$.

d. Các câu trên đều sai.

Bài tập 3.38. Trong $\mathbb{R}^3$ cho $\mathbb{W} = \langle((1,-1,1), (2,1,3), (3,3,5))\rangle$ và $X = (3,2,m)$. Tìm m để $X \notin \mathbb{W}$.

a. $\forall m$ b. Không có m c. $m = \frac{14}{3}$ d. $m \neq \frac{14}{3}$

Bài tập 3.39. Trong $P_2[x]$ xét hai cơ sở

$$\begin{aligned} P &= \left(x^2+x+1, 7x-2, 2\right) \\ P' &= \left(x^2, 3x, 3\right) \end{aligned}$$

Biết rằng $[p(x)]_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Hãy tìm $[p(x)]_{P'}$.

a. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Bài tập 3.40. Trong $\mathbb{R}^4$ cho hệ vector

$$P = ((1,1,1,1), (1,2,3,4), (0,0,0,0), (2,3,4,5))$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

a. $r(P) = 2$ c. $r(P) = 3$
b. P là cơ sở của $\mathbb{R}^4$ d. P sinh ra $\mathbb{R}^4$

Bài tập 3.41. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ vector

$$P = \left(x^2+x+1, 2x+1, x^2+2x+m\right)$$

là cơ sở của $P_2[x]$.

a. $m = 3$ b. $m \neq 3$ c. $m = \frac{3}{2}$ d. $m \neq \frac{3}{2}$

Bài tập 3.42. Cho $\mathbb{W} = \langle (1,1,1), (1,2,1) \rangle$ và $P = ((1,1,1), (1,-1,m))$. Tìm m để P là cơ sở của $\mathbb{W}$.

a. $m = 0$ b. $m = 1$ c. không có m d. $\forall m$

Bài tập 3.43. Trong $\mathbb{R}^3$ cho không gian con

$$\mathbb{W} = \langle ((1,1,1), (2,3,1), (5,-1,2)) \rangle$$

Tìm một cơ sở P của $\mathbb{W}$ và $\dim \mathbb{W}$.

a. $\dim \mathbb{W} = 2$, $P = ((1,1,1), (0,1,-1))$.

b. $\dim \mathbb{W} = 2$, $P = ((1,1,1), (0,0,1))$.

c. $\dim \mathbb{W} = 3$, $P = ((1,1,1), (2,3,1), (5,-1,2))$.

d. Các câu trên đều sai.

Bài tập 3.44. Trong $\mathbb{R}^3$ cho không gian con $\mathbb{W} = \{(x, y, z) : x + y - z = 0\}$. Tìm một cơ sở P của $\mathbb{W}$ và $\dim \mathbb{W}$.

a. $\dim \mathbb{W} = 1$, $P = ((1, 1, -1))$.

b. $\dim \mathbb{W} = 2$, $P = ((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$.

c. $\dim \mathbb{W} = 2$, $P = ((1, 1, 2), (2, 2, 4))$.

d. $\dim \mathbb{W} = 3$, $P = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Bài tập 3.45. Trong $\mathbb{R}^4$ cho không gian con

$$\mathbb{W} = \left\{(x, y, z, t) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$$

Tìm một cơ sở P của $\mathbb{W}$ và $\dim \mathbb{W}$.

a. $\dim \mathbb{W} = 2$, $P = ((-4, 3, 1, 0), (-2, 1, 0, 1))$.

b. $\dim \mathbb{W} = 2$, $P = ((1, 1, 1, 1), (2, 3, -1, 1))$.

c. $\dim \mathbb{W} = 3$, $P = ((1, 1, 1, 1), (-4, 3, 1, 0), (-2, 1, 0, 1))$.

d. Các câu kia đều sai.

Bài tập 3.46. Trong $\mathbb{R}^3$ cho

$$\mathbb{W} = \langle((1, 1, 1), (0, 1, -1))\rangle ; \mathbb{U} = \langle((2, 2, 2), (1, 2, m))\rangle$$

Với giá trị nào của m thì $\mathbb{W} = \mathbb{U}$?

a. $m = 0$ b. $m \neq 0$ c. $m = 1$ d. $m \neq 1$

Bài tập 3.47. Với giá trị nào của m thì không gian con của hệ

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & + & mt & = & 0 \end{array}\right.$$

có số chiều lớn hơn 1.

a. $m \neq 5$ b. $m = 7$ c. $m \neq 7$ d. $\forall m$

Bài tập 3.48. Trong $\mathbb{R}^3$ cho không gian con

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) : mx_1 + x_3 = 0\}$$

Tìm tất cả m để $\dim \mathbb{W} = 2$

a. $m \neq 0$ b. $m = 0$ c. $m = 1$ d. $\forall m$

Bài tập 3.49. Cho không gian con $\mathbb{W} = \{(x, my, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Tìm tất cả m để $\mathbb{W} = \mathbb{R}^3$.

a. $m \neq 0$ b. $m = 0$ c. $m = 1$ d. $m \neq 1$

Bài tập 3.50. Cho không gian con

$$\mathbb{W} = \{((m+1)x, y, (m+2)z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Tìm tất cả m để $\mathbb{W} \neq \mathbb{R}^3$.

a. $m \neq -1$ và $m = -2$.

b. $m \neq -1 \vee m \neq -2$.

c. $\forall m$.

d. Các câu trên đều sai.

Bài tập 3.51. Trong $\mathbb{R}^2$ cho quy tắc

$$\langle X|Y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + mx_2y_2$$

với $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$. Tìm m để $\langle X|Y\rangle$ là tích vô hướng.

a. $m > 1$ b. $m < 1$ c. $m = 1$ d. $m \neq 1$

Bài tập 3.52. Trong $\mathbb{R}^2$ cho tích vô hướng

$$\langle X|Y\rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

và $Z = (1, 2)$. Tìm độ dài vector Z.

a. $\|Z\| = \sqrt{11}$ b. $\|Z\| = \sqrt{5}$ c. $\|Z\| = 11$ d. $\|Z\| = 5$

Bài tập 3.53. Trong $\mathbb{R}^2$ cho tích vô hướng

$$\langle X|Y\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$$

và $Z = (1, -1), T = (2, m)$. Tìm m để $Z \perp T$.

a. $m = 3$ b. $m = 2$ c. $m \neq 2$ d. $m = 1$

Bài tập 3.54. Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho hệ vector

$$P = ((1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 0), (2, 1, 1, m))$$

Tìm m để P là hệ trực giao.

a. $m = -4$ b. $\forall m$ c. $m = 3$ d. $m = 0$