Chương 4

Ánh xạ tuyến tính

4.1 Định nghĩa và các tính chất căn bản

Định nghĩa 4.1. *Cho hai không gian vector* $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$. *Ánh xạ* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ *được gọi là một ánh xạ tuyến tính nếu hai điều kiện sau đây được thỏa:*

- $f(X+Y) = f(X) + f(Y); \forall X, Y \in \mathbb{V}$.
- $f(\alpha X) = \alpha f(X); \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{V}$.

Ví dụ 4.1. Ánh xạ

$$\begin{aligned} f \ : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x+y, x-y) \end{aligned}$$

là một ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, ta lấy hai vector $X, Y \in \mathbb{R}^2$, giả sử $X = (x_1, x_2)$ và $Y = (y_1, y_2)$, khi đó

$$f(X+Y) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_1 + y_1 - x_2 - y_2)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} f(X) + f(Y) &= (x_1 + x_2, x_1 - x_2) + (y_1 + y_2, y_1 - y_2) \\ &= (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_1 + y_1 - x_2 - y_2) \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $f(X+Y) = f(X) + f(Y), \forall X \in \mathbb{R}^2$.

Hơn nữa, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và mọi $X \in \mathbb{R}^2$, ta có

$$f(\alpha X) = f(\alpha x_1, \alpha x_2) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_1 - \alpha x_2) = \alpha f(X)$$

Vậy f là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 4.2. Ánh xạ

$$\begin{array}{lll} f & : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y+x, x-y+3z, x-z) \end{array}$$

cũng là một ánh xạ tuyến tính (chứng minh tương tự như ví dụ 4.1)

Tính chất

Sau đây là một số tính chất của ánh xạ tuyến tính mà ta có thể suy ra trực tiếp từ định nghĩa

1. $f(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{V}'}$.
2. $f(-X) = -f(X); \forall X \in \mathbb{V}$.
3. Hai điều kiện trong định nghĩa có thể thay thế bằng điều kiện tương đương sau

$$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y); \forall X, Y \in \mathbb{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

Các tính chất 1,2 và 3 thường được sử dụng để chứng tỏ hay bác bỏ một ánh xạ có là ánh xạ tuyến tính. Ta xét một vài ví dụ sau đây:

Ví dụ 4.3. Cho không gian vector $\mathbb{V}$, ánh xạ đồng nhất

$$\begin{array}{llll} Id_{\mathbb{V}}: & \mathbb{V} & \to & \mathbb{V} \\ & X & \mapsto & X \end{array}$$

là một ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, $\forall X, Y \in \mathbb{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có

$$Id_{\mathbb{V}}(\alpha X + \beta Y) = \alpha X + \beta Y = \alpha Id_{\mathbb{V}}(X) + \beta Id_{\mathbb{V}}(Y)$$

Ví dụ 4.4. Ánh xạ

$$\begin{array}{rccc} f: & P_n[x] & \to & P_n[x] \\ & p(x) & \mapsto & p'(x) \end{array}$$

là một ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, $\forall p(x), q(x) \in P_n[x], \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned} f(\alpha p(x) + \beta q(x)) &= (\alpha p(x) + \beta q(x))' = \alpha p'(x) + \beta q'(x) \\ &= \alpha f(p(x)) + \beta f(q(x)) \end{aligned}$$

Ví dụ 4.5. Ánh xạ

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (2x - y + 3z, x - y + 5z + 1) \end{array}$$

không là ánh xạ tuyến tính vì $f(0_{\mathbb{R}^3}) = f(0, 0, 0) = (0, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.

Định lý 4.1. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ *và* $\mathbb{W}$ *là một không gian vector con của* $\mathbb{V}$*, khi đó*

- *Tập hợp* $f(\mathbb{W}) = \{f(X) : X \in \mathbb{W}\}$ *là một không gian vector con của* $\mathbb{V}'$.
- *Nếu* $\mathbb{W} = \langle P \rangle$ *thì* $f(\mathbb{W}) = \langle f(P) \rangle$.

Hệ quả 4.1. $f(\mathbb{V})$ *là một không gian vector con của* $\mathbb{V}'$ *và được gọi là ảnh của* f*, ký hiệu* $\operatorname{Im} f$.

Định lý 4.2. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ *và* $\mathbb{W}'$ *là một không gian vector con của* $\mathbb{V}'$*. Khi đó tập hợp*

$$f^{-1}(\mathbb{W}') = \{X \in \mathbb{V} : f(X) \in \mathbb{W}'\}$$

là một không gian vector con của $\mathbb{V}$.

Hệ quả 4.2. *Tập hợp* $f^{-1}(0_{\mathbb{V}'}) = \{X \in \mathbb{V} : f(X) = 0_{\mathbb{V}'}\}$ *là một không gian vector con của* $\mathbb{V}$ *và được gọi là hạt nhân của* f*, ký hiệu* $\ker f$.

Định lý 4.3. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ *với* $\mathbb{V}$ *là một không gian vector hữu hạn chiều. Khi đó* $\operatorname{Im} f$ *và* $\ker f$ *cũng hữu hạn chiều, đồng thời*

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{V}$$

Chú ý 4.1. $\dim \operatorname{Im} f$ còn được gọi là **hạng của ánh xạ** f, ký hiệu $r(f)$. $\dim \ker f$ được gọi là **số khuyết của ánh xạ** f, ký hiệu $d(f)$.

Ví dụ 4.6. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, x - y - 4z)$$

Tìm một cở sở và số chiều của $\ker f$ và $\operatorname{Im} f$.

Giải. Ta có $\ker f = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$ hay $\ker f$ chính là không gian con nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

Ta lập ma trận hệ số của hệ và đưa về dạng bậc thang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Khôi phục hệ ta được

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ \quad - 3y - 5z = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có một ẩn phụ z, cho $z = 1$ ta tìm được một nghiệm cơ bản

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

và hệ $P = (X_1)$ cũng chính là cơ sở của $\ker f$, suy ra $\dim \ker f = 1$.

Tiếp theo, ta tìm cơ sở và số chiều của $\operatorname{Im} f$

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, x - y - 4z) = x(1, 1) + y(2, -1) + z(1, -4)$$

Ta suy ra $\operatorname{Im} f = \langle P \rangle$ với $P = ((1, 1), (2, -1), (1, -4))$.

Lập ma trận vector dòng của hệ P và biến đổi về dạng bậc thang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to 3d_3 - 5d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta suy ra $\dim \operatorname{Im} f = 2$ và $\operatorname{Im} f$ có cơ sở là hệ $P = ((1, 1), (2, -1))$. ■

Ví dụ 4.7. Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_3[x] \to P_3[x]$ xác định như sau

$$f\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) = a_1 + (a_0 - 2a_3)x + (2a_3 - a_1)x^2 + (a_0 - a_1)x^3$$

Tìm cơ sở và số chiều của $\ker f$ và $\operatorname{Im} f$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} \ker f &= \left\{p(x) \in P_3[x] : f(p(x)) = 0_{P_3[x]}\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=0}^{3} a_i x^i : a_1 + (a_0 - 2a_3)x + (2a_3 - a_1)x^2 + (a_0 - a_1)x^3 = 0\right\} \end{aligned}$$

Đẳng thức $a_1 + (a_0 - 2a_3)x + (2a_3 - a_1)x^2 + (a_0 - a_1)x^3 = 0$ tương đương với

$$\begin{cases} a_1 &= 0 \\ a_0 - 2a_3 &= 0 \\ 2a_3 - a_1 &= 0 \\ a_0 - a_1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Ta suy ra $\ker f = \left\{a_2 x^2 : a_2 \in \mathbb{R}\right\}$.

Vậy $\dim\ker f = 1$ và $\ker f$ có cơ sở là hệ vector $P = (x^2)$.

Tiếp theo, ta xác định cơ sở và số chiều của $\operatorname{Im} f$.

Vì $\dim\ker f = 1$ nên ta suy ra

$$\dim\operatorname{Im} f = \dim P_3[x] - \dim\ker f = 4 - 1 = 3$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} & a_1 + (a_0 - 2a_3)x + (2a_3 - a_1)x^2 + (a_0 - a_1)x^3 \\ = \; & a_0\left(x + x^3\right) + a_1\left(1 - x^2 - x^3\right) + a_3\left(-2x + 2x^2\right) \end{aligned}$$

Vậy $\operatorname{Im} f = \langle P\rangle$ với $P = \left(x + x^3, 1 - x^2 - x^3, -2x + 2x^2\right)$.

Ta lập ma trận vector dòng của hệ P

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta thấy $r(A) = 3$ nên hệ P chính là cơ sở của $\operatorname{Im} f$. ■

Ví dụ 4.8. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + y - 4mz, 3x + 5y + 2z, 4x + 7y + (m+1)z)$$

1. Tìm m để $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
2. Khi $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, hãy tìm cơ sở, số chiều của $\ker f$ và $\operatorname{Im} f$.

Giải. 1. $\ker f$ chính là không gian con nghiệm của hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 4mz & = & 0 \\ 3x & + & 5y & + & 2z & = & 0 \\ 4x & + & 7y & + & (m+1)z & = & 0 \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Ta lập ma trận vector dòng của hệ 4.2 và biến đổi về dạng bậc thang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4m \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 4d_1]{d_2 \to d_2 - 3d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4m \\ 0 & 2 & 2 + 12m \\ 0 & 3 & 17m + 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 \to 2d_3 - 3d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4m \\ 0 & 2 & 2 + 12m \\ 0 & 0 & -2m - 4 \end{pmatrix}$$

$\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ khi và chỉ khi $r(A) < 3$ hay $-2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

2. Với $m = -2$ thì $r(A) = 2$, ta suy ra $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$ và hệ 4.2 có thể viết lại như sau

$$\begin{cases} x + y + 8z = 0 \\ \quad 2y - 22z = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Hệ 4.3 có một ẩn phụ z. Cho $z = 1$ ta tìm được một nghiệm cơ bản là

$$X_1 = \begin{pmatrix} -19 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

và hệ $P = (X_1)$ cũng chính là cơ sở của $\ker f$.

Mặt khác, với $m = -2$ ta cũng suy ra được

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + y + 8z, 3x + 5y + 2z, 4x + 7y - z) \\ &= x(1, 3, 4) + y(1, 5, 7) + z(8, 2, -1) \end{aligned}$$

Do đó, $\mathrm{Im} f = \langle P \rangle$ với $P = ((1, 3, 4), (1, 5, 7), (8, 2, -1))$.

Vì $\dim \ker f = 1$ nên ta được

$$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2$$

Để tìm cơ sở của $\mathrm{Im}\, f$ ta lập ma trận vector dòng của hệ P và biến đổi về dạng bậc thang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 8d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -22 & -33 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_2 + 11d_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy $\mathrm{Im} f$ có cơ sở là hệ vector $P = ((1, 3, 4), (1, 5, 7))$. ■

4.2 Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

4.2.1 Đơn cấu

Định nghĩa 4.2. *Ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ *được gọi là đơn cấu nếu* $f(X) \neq f(Y); \forall X, Y \in \mathbb{V}, X \neq Y$.

Định lý 4.4. *Ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ *đơn cấu khi và chỉ khi* $\ker f = \{0_{\mathbb{V}}\}$.

Ví dụ 4.9. Các ánh xạ tuyến tính nào sau đây là đơn cấu:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $g(x, y) = (x + 2y, x + 3y, 2x - y)$
3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2x + 3z, 2x + 3y + 4z)$$

Giải. 1. Ta có

$$\ker f = \{X \in \mathbb{R}^2 : f(X) = 0_{\mathbb{R}^2}\} = \left\{(x, y) : \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right.\right\}$$

Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right.$ được nghiệm $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$.

Ta suy ra $\ker f = \{(0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Vậy f là đơn cấu.

2. Tương tự như trên ta tìm được

$$\ker g = \left\{(x, y) : \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & + & 2y & = & 0 \\ 2x & - & y & = & 0 \end{array}\right.\right\} = \{(0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

Vậy g là đơn cấu.

3. Ta thấy

$$\ker h = \left\{(x,y,z) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.\right\}$$

Hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

có định thức của ma trận hệ số bằng không nên hệ có nghiệm không tầm thường, tức $\ker h \neq \{(0,0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Vậy h không là đơn cấu. ■

Ví dụ 4.10. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x,y) = (x+y, -x+my)$$

Tìm m để f là đơn cấu.

Giải. Ta có

$$\ker f = \left\{(x,y) : \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ -x & + & my & = & 0 \end{array}\right.\right\}$$

Ánh xạ tuyến tính f là đơn cấu khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ -x & + & my & = & 0 \end{array}\right.$$

chỉ có nghiệm tầm thường, tức là

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$$

Vậy với $m \neq 1$ thì f là một đơn cấu. ■

Ví dụ 4.11. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (mx + y + z, x + my + z, x + y + mz)$$

Tìm m để f không là một đơn cấu.

Giải. Ta có

$$\ker f = \left\{ (x, y, z) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & my & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & mz & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

Ánh xạ tuyến tính f không đơn cấu khi và chỉ khi $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, hay hệ phương trình

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & my & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & mz & = & 0 \end{array} \right.$$

có nghiệm không tầm thường. Khi đó

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array} \right.$$

Vậy với $m = 1; m = -2$ thì f là không là đơn cấu. ■

4.2.2 Toàn cấu

Định nghĩa 4.3. *Ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ *được gọi là toàn cấu nếu* $\operatorname{Im} f = \mathbb{V}'$.

Định lý 4.5. *Ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ *toàn cấu khi và chỉ khi* $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{V}'$

Ví dụ 4.12. Các ánh xạ tuyến tính nào sau đây là toàn cấu?

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $g(x, y) = (x + 2y, x + 3y, 2x - y)$.
3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2x + 3z, 2x + 3y + 4z)$$

Giải. 1. Ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \left\{ f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ (x + y, x - y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x(1, 1) + y(1, -1) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \langle (1, 1), (1, -1) \rangle \end{aligned}$$

Khi đó $\dim \operatorname{Im} f = r((1, 1), (-1, 1)) = 2$. Vậy f là toàn cấu.

2. Tương tự như câu 1. ta có $\operatorname{Im} g = \langle (1, 1, 2), (2, 3, -1) \rangle$.

Khi đó $\dim \operatorname{Im} g = r((1, 1, 2), (2, 3, -1)) = 2$. Vậy g không là một toàn cấu.

3. Ta có $\operatorname{Im} h = \langle (1, 1, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 4) \rangle$.

Khi đó $\dim \operatorname{Im} h = r((1, 1, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 4)) = 2$. Vậy h không là toàn cấu. ■

Ví dụ 4.13. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y) = (x + my, mx + y)$$

Tìm m để f là toàn cấu.

Giải. Ta có $\operatorname{Im} f = \langle (1, m), (m, 1) \rangle$.

Ánh xạ tuyến tính f là toàn cấu khi và chỉ khi $\dim \operatorname{Im} f = 2$ hay

$$\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$$

Vậy với $n \neq \pm 1$ thì f là một toàn cấu. ■

Ví dụ 4.14. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y) = \left(x + my, m^2 x + 2y, x + (m - 1) y \right)$$

Tìm m để f là một toàn ánh.

Giải. Ta giải bài này theo hai cách

Cách 1. Ta có $\operatorname{Im} f = \langle ((1,m), (m^2,2), (1,m-1)) \rangle$. Ánh xạ tuyến tính f toàn ánh khi và chỉ khi

$$\dim \operatorname{Im} f = r\left((1,m), (m^2,2), (1,m-1)\right) = 3$$

Ta lập ma trận vector dòng của hệ vector $\left((1,m), (m^2,2), (1,m-1)\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m^2 & 2 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

Vì A là ma trận cấp 3×2 nên $r(A) \le 2$. Vậy f không thể là một toàn ánh với mọi m.

Cách 2. Ta có $\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Vì $\dim \ker f \ge 0$ nên $\dim \operatorname{Im} f \le 2 < 3$.

Vậy f không thể là toàn ánh với mọi $m \in \mathbb{R}$. ■

4.2.3 Đẳng cấu

Định nghĩa 4.4. *Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ được gọi là đẳng cấu nếu f vừa đơn cấu vừa toàn cấu.*

Định lý 4.6. *Cho $\mathbb{V}$ và $\mathbb{V}'$ là hai không gian vector hữu hạn chiều, ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$. Khi đó, nếu f là đẳng cấu thì $\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{V}'$. Ngược lại, nếu $\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{V}'$ thì f là đẳng cấu khi một trong hai điều kiện sau đây xảy ra:*

- *f là đơn cấu.*
- *f là toàn cấu.*

Ví dụ 4.15. Các ánh xạ tuyến tính nào sau đây là đẳng cấu?

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $g(x, y) = (x + 2y, x + 3y, 2x - y)$.
3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2x + 3z, 2x + 3y + 4z)$$

Giải. Dựa vào kết quả các ví dụ 4.9, 4.12 và định lý 4.6 ta khẳng định ánh xạ f là đẳng cấu, các ánh xạ g, h không phải là đẳng cấu. ■

Ví dụ 4.16. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (mx + y + z, x + my + z, x + y + mz)$$

Tìm m để f là một đẳng cấu.

Giải. Áp dụng định lý 4.6, f là đẳng cấu khi và chỉ khi f là đơn cấu. Theo ví dụ 4.11, f đơn cấu khi và chỉ khi $m \neq 1, m \neq -2$. Vậy f đẳng cấu khi $m \neq 1, m \neq -2$. ■

4.3 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa 4.5. *Cho $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$ là hai không gian vector hữu hạn chiều với $\dim \mathbb{V} = n$, $\dim \mathbb{V}' = m$ và $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ là một ánh xạ tuyến tính. Gọi $P = (X_1, X_2, ..., X_n)$ là cơ sở của $\mathbb{V}$; $P' = (X_1', X_2', \ldots, X_m')$ là cơ sở của $\mathbb{V}'$. Giả sử*

$$\left[f\left(X_j\right)\right]_{P'} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}; j = \overline{1, n}$$

Khi đó, ma trận

$$A = ([f(X_1)]_{P'}[f(X_2)]_{P'} \ldots [f(X_n)]_{P'}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cặp cơ sở (P, P'), ký hiệu $A = [f]_P^{P'}$.

Nếu $\mathbb{V} = \mathbb{V}'$ và $P \equiv P'$ thì ta dùng ký hiệu $A = [f]_P$ thay cho $A = [f]_P^P$.

Nếu $\mathbb{V} = \mathbb{V}' = \mathbb{R}^n$ và $P \equiv P' \equiv E_n$ thì dùng ký hiệu $A = [f]$ thay cho $A = [f]_{E_n}$.

Định lý 4.7. *Cho $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$ là hai không gian vector hữu hạn chiều với $\dim \mathbb{V} = n$, $\dim \mathbb{V}' = m$ và $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ là một ánh xạ tuyến tính. Gọi $P = (X_1, X_2, ..., X_n)$ là cơ sở của $\mathbb{V}$; $P' = (X_1', X_2', \ldots, X_m')$ là cơ sở của $\mathbb{V}'$. Khi đó, $\forall X \in \mathbb{V}$ ta có*

$$[f(X)]_{P'} = [f]_P^{P'} [X]_P$$

và

$$r(f) = \dim \operatorname{Im} f = r([f]_P^{P'})$$

Ví dụ 4.17. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x - y, x + y)$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở $P = ((1, 1), (1, 2))$, từ đó tính số chiều của $\operatorname{Im} f$.

Giải. Ta có

$$f(1, 1) = (0, 2)$$
$$f(1, 2) = (-1, 3)$$

Tiếp theo, ta tìm tọa độ của các vector $(0, 2); (-1, 3)$ đối với cơ sở P.

Xét đẳng thức

$$\begin{aligned} & (0, 2) = \alpha(1, 1) + \beta(1, 2) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $[(0,2)]_P = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Tương tự ta tính được $[(-1,3)]_P = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Vậy ma trận của f đối với cơ sở $P = \{(1,1), (1,2)\}$ là

$$A = [f]_P = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Từ đây ta cũng suy ra $\dim \operatorname{Im} f = r(A) = 2$. ■

Ví dụ 4.18. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x,y,z,t) = (x - 2y, y - 2z, z - 2t)$$

Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở (P, P') xác định như sau:

$$P = ((1,-1,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,1,-1), (0,0,0,1))$$
$$P' = ((1,1,1), (1,1,0), (1,0,0))$$

Giải. Ta có

$$f(1,-1,0,0) = (3,-1,0)$$
$$f(0,1,-1,0) = (-2,3,-1)$$
$$f(0,0,1,-1) = (0,-2,3)$$
$$f(0,0,0,1) = (0,0,-2)$$

Ta tính được

$$[(3,-1,0)]_{P'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; [(-2,3,1)]_{P'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$
$$[(0,-2,3)]_{P'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}; [(0,0,-2)]_{P'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vậy ma trận của f đối với cặp cơ sở (P, P') là

$$A = [f]_P^{P'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -5 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Không khó để chỉ ra rằng $r(A) = 3$ nên f là một toàn cấu. ■

Định lý 4.8. *Cho* $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$ *là hai không gian vector và* $P = (X_1, X_2, ...X_n)$ *là một cơ sở bất kì của* $\mathbb{V}$, *hệ vector* $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ *tùy ý chứa trong* $\mathbb{V}'$. *Khi đó, tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ *thỏa mãn* $f(X_i) = Y_i, i = \overline{1, n}$.

Ví dụ 4.19. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi: $f(1, 2) = (0, 1), f(1, 1) = (1, 0)$. Hãy xác định $f(x_1, x_2)$ và $[f]$.

Giải. Hệ vector $P = ((1, 2), (1, 1))$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Ta tiến hành tìm tọa độ của vector $X = (x_1, x_2)$ đối với cơ sở P. Xét biểu thị tuyến tính

$$\begin{aligned}
& X = \alpha(1, 2) + \beta(1, 1) \\
\Leftrightarrow\ & (x_1, x_2) = (\alpha + \beta, 2\alpha + \beta) \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} \alpha + \beta = x_1 \\ 2\alpha + \beta = x_2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} \alpha = x_2 - x_1 \\ \beta = 2x_1 - x_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= f((x_2 - x_1)(1, 2) + (2x_1 - x_2)(1, 1)) \\
&= (x_2 - x_1) f(1, 2) + (2x_1 - x_2) f(1, 1) \\
&= (x_2 - x_1)(0, 1) + (2x_1 - x_2)(1, 0) = (2x_1 - x_2, x_2 - x_1)
\end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra

$$[f] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Nhận xét 4.1. Ví dụ 4.19 có thể được giải dựa vào kết quả sau đây (suy ra trực tiếp từ định lý 4.7)

Định lý 4.9. *Ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *luôn có dạng tổng quát*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \right)$$

Bây giờ ta sẽ giải ví dụ 4.19 theo hướng sử dụng định lý 4.9.

Vì $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nên biểu thức của $f(x_1, x_2)$ có dạng

$$f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$$

Khi đó

$$\begin{cases} f(1,2) = (a + 2b, c + 2d) = (0,1) \\ f(1,1) = (a + b, c + d) = (1,0) \end{cases}$$

Hệ trên tương đương với

$$\begin{cases} a & + & 2b & = & 0 \\ a & + & b & = & 1 \\ c & + & 2d & = & 1 \\ c & + & d & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases}$$

Vậy $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$ và

$$[f] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 4.20. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(1,-1,2) = (-1,1), f(0,2,3) = (4,5), f(1,0,-2) = (1,-2)$$

Xác định $f(x, y, z)$ và $[f]_{E_3}^{E_2}$.

Giải. Vì $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ nên biểu thức của $f(x, y, z)$ có dạng

$$f(x, y, z) = (a_1 x + b_1 y + c_1 z, a_2 x + b_2 y + c_2 z)$$

Khi đó

$$\begin{cases} f(1,-1,2) = (a_1 - b_1 + 2c_1, a_2 - b_2 + 2c_2) = (-1,1) \\ f(0,2,3) = (2b_1 + 3c_1, 2b_2 + 3c_2) = (4,5) \\ f(1,0,-2) = (a_1 - 2c_1, a_2 - 2c_2) = (1,-2) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Vậy $f(x,y,z) = (x+2y, y+z)$ và

$$[f]_{E_3}^{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Ví dụ 4.21. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận của f đối với cơ sở $P = ((1,1),(1,2))$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Xác định $f(x,y)$.

Giải. Vì $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nên biểu thức của $f(x,y)$ có dạng

$$f(x,y) = (ax + by, cx + dy)$$

Khi đó

$$\begin{cases} f(1,1) = (a+b, c+d) \\ f(1,2) = (a+2b, c+2d) \end{cases}$$

Vì $([f(1,1)]_P [f(1,2)]_P) = A$ nên ta suy ra

$$\begin{cases} (a+b, c+d) = 1(1,1) + 0(1,2) = (1,1) \\ (a+2b, c+2d) = -1(1,1) + 2(1,2) = (1,3) \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = 1, b = 0, c = -1, d = 2$.

Vậy $f(x,y) = (x, -x+2y)$. ■

Định lý 4.10. *Cho $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$ là hai không gian vector hữu hạn chiều và $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ là ánh xạ tuyến tính. Giả sử P_1, P_2 là hai cơ sở của $\mathbb{V}$ và P'_1, P'_2 là hai cơ sở của $\mathbb{V}'$. Khi đó ta có đẳng thức*

$$[f]_{P_2}^{P_2'} = C_{P_1' \to P_2'}^{-1}\left([f]_{P_1}^{P_1'}\right) C_{P_1 \to P_2}$$

Nếu $\mathbb{V} = \mathbb{V}'$, $P_1 \equiv P_1' \equiv P$, $P_2 \equiv P'_2 \equiv P'$ thì $[f]_{P'} = C^{-1}\left([f]_P\right) C$ với $C = C_{P \to P'}$.

Ví dụ 4.22. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ có $[f]_{E_2}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Tìm $[f]_P^{P'}$, biết hai cơ sở P, P' xác định như sau:

$$\begin{aligned} P &= ((1,1),(1,2)) \\ P' &= ((1,0,1),(1,1,1),(1,0,0)) \end{aligned}$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} [f]_P^{P'} = C_{E_3 \to P'}^{-1}[f]_{E_2}^{E_3} C_{E_2 \to P} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \\ -9 & -15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Định lý 4.11. *Cho $\mathbb{V}, \mathbb{V}', \mathbb{V}''$ là ba không gian vector hữu hạn chiều, hai ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$, $g : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}''$. Giả sử P, P', P'' lần lượt là cơ sở của $\mathbb{V}, \mathbb{V}', \mathbb{V}''$. Khi đó ánh xạ $g \circ f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}''$ xác định bởi $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{V}$ tới $\mathbb{V}''$ và $[g \circ f]_P^{P''} = [g]_{P'}^{P''}[f]_P^{P'}$.*

Ví dụ 4.23. Cho hai ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ và $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y) = (x + y, x + 2y)$$
$$g(x, y) = (2x - y, 2x + y)$$

1. Hãy xác định $[g \circ f]$.

2. Biết hệ vector $P = ((1, 1), (0, 1))$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Hãy xác định $[g \circ f]_P$.

Giải. 1. Áp dụng định lý 4.11 ta được

$$[g \circ f] = [g][f] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Tiếp tục áp dụng định lý 4.11 ta được

$$[g \circ f]_P = [g]_P[f]_P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

■

Định nghĩa 4.6. *Cho $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$ là hai không gian vector hữu hạn chiều, $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ là một đẳng cấu tuyến tính. Khi đó, tồn tại ánh xạ tuyến tính $g : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}$ thỏa $f \circ g = Id_{\mathbb{V}'}$ và $g \circ f = Id_{\mathbb{V}}$. Ánh xạ tuyến tính g được gọi là ánh xạ ngược của f, ký hiệu $g = f^{-1}$.*

Định lý 4.12. *Cho $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$ là hai không gian vector hữu hạn chiều, $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ là một đẳng cấu tuyến tính, P, P' lần lượt là cơ sở của $\mathbb{V}$ và $\mathbb{V}'$. Khi đó ta có*

$$\left[f^{-1}\right]_{P'}^{P} = \left([f]_{P}^{P'}\right)^{-1}$$

Ví dụ 4.24. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, x + 2y)$.

1. Tìm ma trận của ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ đối với cơ sở chính tắc. Từ đó xác định biểu thức của $f^{-1}(x, y)$.

2. Tìm ma trận của ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ đối với cơ sở $B = ((1, 1), (0, 1))$.

Giải. 1. Áp dụng định lý 4.12 ta được

$$\left[f^{-1}\right] = [f]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó

$$\left[f^{-1}(x, y)\right] = \left[f^{-1}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + y \end{pmatrix}$$

Ta suy ra $f^{-1}(x, y) = (2x - y, -x + y)$.

2. Áp dụng định lý 4.12 lần nữa ta được

$$\left[f^{-1}\right]_P = [f]_P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

■

4.4 Giá trị riêng, vector riêng của ma trận vuông và toán tử tuyến tính. Vấn đề chéo hóa một ma trận vuông

4.4.1 Hai ma trận đồng dạng

Định nghĩa 4.7. *Hai ma trận $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là đồng dạng với nhau nếu tồn tại ma trận khả nghịch $P \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $B = P^{-1}AP$.*

Ví dụ 4.25. Hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ là đồng dạng với nhau vì $B = P^{-1}AP$ với ma trận $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 4.26. Hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ không đồng dạng với nhau. Thật vậy, nếu A và B đồng dạng thì tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $A = P^{-1}BP$. Khi đó $\det A = \det\left(P^{-1}BP\right) = \det B$. Điều này vô lí vì từ đề bài ta dễ dàng tính được $\det A = 1 \neq \det B = 0$.

4.4.2 Đa thức đặc trưng của ma trận vuông và toán tử tuyến tính

Định nghĩa 4.8. *Cho $\mathbb{V}$ là một không gian vector. Khi đó, ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ được gọi là toán tử tuyến tính trên $\mathbb{V}$.*

Định nghĩa 4.9. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, đa thức $\det(\lambda I_n - A)$ được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận A, ký hiệu $P_A(\lambda)$.*

Ví dụ 4.27. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ có đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

Ví dụ 4.28. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ có đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2$$

Định lý 4.13. *Cho hai ma trận* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$*, nếu* A, B *đồng dạng với nhau thì* $P_A(\lambda) \equiv P_B(\lambda)$.

Định nghĩa 4.10. *Cho* $\mathbb{V}$ *là một không gian vector* n *chiều với* f *là một toán tử tuyến tính trên* $\mathbb{V}$ *và* P *là một cơ sở của* $\mathbb{V}$*, đa thức* $\det(\lambda I_n - [f]_P)$ *được gọi là đa thức đặc trưng của toán tử tuyến tính* f*, ký hiệu* $P_f(\lambda)$.

Chú ý 4.2. Đa thức $P_f(\lambda)$ không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở P. Thật vậy, nếu lấy trong không gian vector $\mathbb{V}$ một cơ sở P' khác P thì theo định lý 4.10 ta được

$$[f]_{P'} = C^{-1}([f]_P)C \tag{4.4}$$

với $C_{P\to P'}$.

Công thức 4.4 chứng tỏ hai ma trận $[f]_P, [f]_{P'}$ đồng dạng với nhau, điều này cho thấy tính xác định của định nghĩa 4.10 đồng thời ta luôn có

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda)$$

với A là ma trận biểu diễn của f đối với một cơ sở P của không gian vector $\mathbb{V}$.

Ví dụ 4.29. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, x - 2y)$. Tìm $P_f(\lambda)$.

Giải. Vì đa thức $P_f(\lambda)$ không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở nên ta sẽ biểu diễn ma trận của toán tử tuyến tính f đối với cơ sở chính tắc E_2. Ta có

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ta suy ra

$$P_f(\lambda) = \det(\lambda I_2 - [f]) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 3$$

■

Ví dụ 4.30. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x, y, z) = (2x, x - y, 2x + y - z)$. Tìm $P_f(\lambda)$.

Giải. Vì đa thức $P_f(\lambda)$ không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở nên ta sẽ biểu diễn ma trận của toán tử tuyến tính f đối với cơ sở chính tắc E_3. Ta có

$$[f] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ta suy ra

$$P_f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - [f]) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

■

Định lý 4.14. ***(Định lý Cayley-Hamilton)***. *Cho f là một toán tử tuyến tính trên không gian $\mathbb{V}$ với số chiều n. Giả sử A là ma trận biểu diễn của f trong một cơ sở P của $\mathbb{V}$. Khi đó, ta có $P_f(A) = O_{n\times n}$ (hoặc $P_A(A) = O_{n\times n}$).*

Hệ quả 4.3. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và $Q(\lambda)$ là một đa thức với hệ số thực. Giả sử đa thức đặc trưng của A là*

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

Thực hiện phép chia $Q(\lambda)$ cho $P_A(\lambda)$ ta được

$$Q(\lambda) = q(\lambda) P_A(\lambda) + R(\lambda)$$

trong đó $R(\lambda)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn n. Áp dụng định lý Caley-Hamilton ta được đẳng thức sau

$$Q(A) = R(A)$$

Hệ quả 4.4. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, giả sử đa thức đặc trưng của A là*

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $a_0 \neq 0$. Khi đó, ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + a_{n-2}A^{n-3} + \dots + a_1 I_n\right)$$

Ví dụ 4.31. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Tính $Q(A)$, biết rằng $Q(x) = -x^8 + 3x^6 - 3x^5 + 3x^3 - x$.
2. Tính A^{-1}.

Giải. 1. Ma trận A có đa thức đặc trưng là

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -5 & -3 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2$$

Chia $Q(\lambda)$ cho $P_A(\lambda)$ ta được thương $q(\lambda) = -\lambda^5 - \lambda^2$ và dư là $R(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda$.

Do đó, $Q(A) = R(A) = 2A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -15 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

2. Áp dụng hệ quả 4.4 ta được

$$\begin{aligned} A^{-1} = \frac{1}{2}\left(3I_3 - A^2\right) &= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}^2\right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

4.4.3 Giá trị riêng, vector riêng của ma trận vuông và toán tử tuyến tính

Định nghĩa 4.11. *Cho f là một toán tử tuyến tính trên không gian vector $\mathbb{V}$. Số λ được gọi là giá trị riêng của f nếu tồn tại một vector $X \in \mathbb{V} \backslash \{0_{\mathbb{V}}\}$ sao cho $f(X) = \lambda X$. Vector X được gọi là vector riêng của f ứng với giá trị riêng λ.*

Ví dụ 4.32. Toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x, x + 2y)$ có $\lambda = 2$ là một giá trị riêng. Thật vậy, lấy $X = (0, 2)$, ta thấy $X \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ và

$$f(X) = f(0,2) = (0,4) = 2(0,2) = 2X$$

Định nghĩa 4.12. *Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$. Số λ được gọi là giá trị riêng của A nếu tồn tại vector $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ sao cho $A[X] = \lambda[X]$. Vector X được gọi là vector riêng của A ứng với giá trị riêng λ.*

Ví dụ 4.33. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ có $\lambda = 4$ là một giá trị riêng. Thật vậy, lấy $X = (2, 1)$, ta thấy $X \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ và

$$A[X] = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4[X]$$

Định lý 4.15. *Cho f là một toán tử tuyến tính trên không gian vector hữu hạn chiều $\mathbb{V}$, P là một cơ sở của $\mathbb{V}$. Khi đó, giá trị riêng λ của toán tử f là nghiệm của đa thức đặc trưng $P_f(\lambda)$. Ngược lại, nếu λ là nghiệm của đa thức đặc trưng $P_f(\lambda)$ thì λ là một giá trị riêng của toán tử f.*

Hệ quả 4.5. *Cho f là một toán tử tuyến tính trên không gian vector hữu hạn chiều $\mathbb{V}$, P là một cơ sở của $\mathbb{V}$. Khi đó tập giá trị riêng của toán tử f và ma trận $[f]_P$ là như nhau.*

Ví dụ 4.34. Tìm các giá trị riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Giải. Lập đa thức đặc trưng của ma trận A

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 5 \end{aligned}$$

Phương trình $P_A(\lambda) = 0$ có hai nghiệm $\lambda = 1, \lambda = 5$. Vậy ma trận A có hai giá trị riêng là $\lambda = 1$ và $\lambda = 5$. ■

Ví dụ 4.35. Tìm các giá trị riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Giải. Lập đa thức đặc trưng của ma trận A

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -3 \\ 0 & -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 4\lambda - 5\right) \end{aligned}$$

Phương trình $P_A(\lambda) = 0$ có ba nghiệm $\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 5$. Vậy ma trận A có ba giá trị riêng là $\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 5$. ■

Ví dụ 4.36. Tìm các giá trị riêng của toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, 3x - y)$.

Giải. Trước hết, ta tìm ma trận biểu diễn của toán tử f đối với cơ sở chính tắc E_2

$$[f] = \begin{pmatrix} [f(1,0)] & [f(0,1)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Lập đa thức đặc trưng của toán tử f

$$P_f(\lambda) = \det(\lambda I_2 - [f]) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$$

Phương trình $P_f(\lambda) = 0$ có hai nghiệm $\lambda = 2, \lambda = -2$. Vậy toán tử f có hai giá trị riêng là $\lambda = 2$ và $\lambda = -2$. ■

Ví dụ 4.37. Tìm các giá trị riêng của toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z)$.

Giải. Trước hết, ta tìm ma trận biểu diễn của toán tử f đối với cơ sở chính tắc E_3

$$[f] = \left([f(1,0,0)] \quad [f(0,1,0)] \quad [f(0,0,1)] \right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Lập đa thức đặc trưng của toán tử f

$$P_f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - [f]) = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda + 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3)^2$$

Phương trình $P_f(\lambda) = 0$ có hai nghiệm $\lambda = 2, \lambda = -2$. Vậy toán tử f có hai giá trị riêng là $\lambda = 2$ và $\lambda = -2$. ■

4.4.4 Không gian con riêng

Định lý 4.16. *Cho f là một toán tử tuyến tính trên không gian vector $\mathbb{V}$ và λ là một giá trị riêng của f. Khi đó, tập hợp $\{X \in \mathbb{V} : f(X) = \lambda X\}$, ký hiệu $E(\lambda)$, là một không gian vector con của $\mathbb{V}$, đồng thời $\dim E(\lambda) \geq 1$. Không gian $E(\lambda)$ được gọi không gian con riêng của $\mathbb{V}$ ứng với giá trị riêng λ.*

Nhận xét 4.2. Dựa vào định lý 4.16 ta suy ra $E(\lambda) \setminus \{0_{\mathbb{V}}\}$ là tập tất cả các vector riêng của f ứng với giá trị riêng λ và $E(\lambda) = \ker(\lambda Id_{\mathbb{V}} - f)$.

Hệ quả 4.6. *Cho f là một toán tử tuyến tính trên không gian vector $\mathbb{V}$ có số chiều n, hệ vector P là cơ sở của $\mathbb{V}$. Giả sử λ là một giá trị riêng của f. Khi đó*

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \{X \in \mathbb{V} : [f]_P[X]_P = \lambda[X]_P\} \\ &= \{X \in \mathbb{V} : (\lambda I_n - [f]_P)[X]_P = O_{n\times 1}\} \end{aligned}$$

Thuật toán tìm giá trị riêng và không gian con riêng của toán tử tuyến tính $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ (ở đây $\mathbb{V}$ là không gian vector có n chiều)

1. Tìm ma trận biểu diễn A của f đối với cơ sở tùy ý $P = (X_1, X_2, ..., X_n)$ của $\mathbb{V}$ (chú ý $A = [f]_P$).
2. Xác định đa thức đặc trưng của toán tử f: $P_f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.
3. Giải phương trình đặc trưng $P_f(\lambda) = 0$ để tìm tất cả các giá trị riêng của toán tử f.
4. Giả sử λ là một giá trị riêng của toán tử f. Ta xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất
$$(\lambda I_n - A)[X]_P = O_{n\times 1} \tag{4.5}$$
Nếu $[X]_P = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ là một nghiệm không tầm thường của hệ 4.5 thì vector $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 ... + \alpha_n X_n$ là vector riêng của f ứng với giá trị riêng λ. Hơn nữa,
$$E(\lambda) = \left\{ \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n : \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{W} \right\}$$
trong đó $\mathbb{W}$ là không gian con nghiệm của hệ 4.5.

Nhận xét 4.3. Sau đây là một số nhận xét rút ra từ thuật toán trên:

- Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất 4.5 có thể viết lại dưới dạng cụ thể hơn như sau

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11})\,x_1 & - & a_{12}x_2 & - & \dots & - & a_{1n}x_n & = & 0 \\ -a_{21}x_1 & + & (\lambda - a_{22})\,x_2 & - & \dots & - & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots \\ -a_{n1}x_1 & - & a_{n2}x_2 & - & \dots & + & (\lambda - a_{nn})\,x_n & = & 0 \end{cases}$$

  với $A = (a_{ij})_n$.

- Nếu $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ thì ta thường chọn $P \equiv E_n$. Khi đó, nếu không gian con nghiệm $\mathbb{W}$ của hệ 4.5 có cơ sở là hệ vector $P = (X_1, X_2, \dots, X_l)$ thì $E(\lambda)$ có cơ sở là hệ vector $P' = (X_1^T, X_2^T, \dots, X_l^T)$.

Định lý 4.17. *Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ và λ là một giá trị riêng của A. Khi đó, tập hợp $\{X \in \mathbb{R}^n : A[X] = \lambda[X]\}$, ký hiệu $E(\lambda)$, là một không gian vector con của $\mathbb{R}^n$, đồng thời* $\dim E(\lambda) \geq 1$. *Không gian $E(\lambda)$ được gọi là không gian con riêng của $\mathbb{R}^n$ ứng với giá trị riêng λ.*

Thuật toán tìm giá trị riêng và không gian con riêng của ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$

1. Xác định đa thức đặc trưng của A: $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.
2. Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$ để tìm tất cả các giá trị riêng của ma trận A.
3. Giả sử λ là một giá trị riêng của ma trận A. Ta xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$(\lambda I_n - A)[X] = O_{n\times 1} \tag{4.6}$$

Nếu $[X] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ là một nghiệm không tầm thường của hệ 4.6 thì vector $X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ là một vector riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ. Hơn nữa,

$$E(\lambda) = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) : \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{W} \right\}$$

trong đó $\mathbb{W}$ là không gian con nghiệm của hệ 4.6.

Nhận xét 4.4. Dựa vào định lý 4.17 ta suy ra $E(\lambda) \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ là tập tất cả các vector riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ.

Ví dụ 4.38. Tìm tất cả các giá trị riêng và vector riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Giải. Lập đa thức đặc trưng của ma trận A

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ có hai nghiệm $\lambda = 1, \lambda = 5$. Vậy ma trận A có hai giá trị riêng là $\lambda = 1$ và $\lambda = 5$.

Để tìm vector riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ ta tìm nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{aligned} & (I_2 - A)[X] = O_{2\times 1} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Giải hệ trên ta được nghiệm $x_1 = 3\alpha, x_2 = \alpha$. Do đó, tập vector riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ có dạng $\{(3\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$.

Một cách tương tự, tập vector riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 5$ có dạng $\{(-\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\backslash \{0\}\}$. ■

Ví dụ 4.39. Tìm tất cả các giá trị riêng và vector riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Giải. Lập đa thức đặc trưng của ma trận A

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 1 \\ -2 & \lambda - 1 & 2 \\ 1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 3)$$

Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$ có hai nghiệm $\lambda = 1, \lambda = 3$. Vậy ma trận A có hai giá trị riêng là $\lambda = 1$ và $\lambda = 3$.

Để tìm vector riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ ta tìm nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{aligned} & (I_3 - A)[X] = O_{3\times 1} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Hệ trên có nghiệm $x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = \alpha$. Do đó, tập vector riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ có dạng $\{(\alpha, \beta, \alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0\}$.

Một cách tương tự, tập vector riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$ có dạng $\{(-\alpha, 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\backslash \{0\}\}$. ■

Ví dụ 4.40. Tìm giá trị riêng, không gian con riêng của toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (2x - y, x + 4y)$.

Giải. Trước hết, ta xác định ma trận biểu diễn A của toán tử f đối với cơ sở chính tắc E_2

$$A = \begin{pmatrix} [f(1,0)] & [f(0,1)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lập đa thức đặc trưng của ma trận A

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2$$

Phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$ có nghiệm duy nhất $\lambda = 3$. Do đó, ma trận A có duy nhất một giá trị riêng $\lambda = 3$.

Tiếp theo, ta xác định không gian con riêng $E(3)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(3) &= \left\{ (x_1, x_2) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 0\} \\ &= \{(-\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ta thấy không gian $E(3)$ có cơ sở là hệ vector $P = ((-1, 1))$. ■

Ví dụ 4.41. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm giá trị riêng và vector riêng của toán tử tuyến tính f trên $\mathbb{R}^3$ có ma trận biểu diễn là A trong

1. Cơ sở chính tắc E_3.
2. Cơ sở $B = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$.

Giải. 1. Lập đa thức đặc trưng của ma trận A

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & 0 \\ -1 & \lambda - 4 & 0 \\ -3 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5) \end{aligned}$$

Đa thức đặc trưng $P_f(\lambda)$ có ba nghiệm $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 5$. Do đó, toán tử f có ba giá trị riêng là $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 5$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$, ta xác định không gian con riêng $E(1)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(1) &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ -x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \\ -3x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \{(0, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ta thấy không gian $E(1)$ có cơ sở là hệ vector $P_1 = ((0,0,1))$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$, ta xác định không gian con riêng $E(2)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(2) &= \left\{ (x_1,x_2,x_3) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \\ -3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \{(-2\alpha, \alpha, -3\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ta thấy không gian $E(2)$ có cơ sở là hệ vector $P_2 = ((-2,1,-3))$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 5$, ta xác định không gian con riêng $E(5)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(5) &= \left\{ (x_1,x_2,x_3) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ -3x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ \left(\alpha, \alpha, \frac{3}{2}\alpha\right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Ta thấy không gian $E(5)$ có cơ sở là hệ vector $P_3 = ((2,2,3))$.

2. Vì giá trị riêng của f không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở nên trong trường hợp này f vẫn có các giá trị riêng là $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 5$.

Để cho tiện cho việc trình bày, ta đặt $X_1 = (1,1,0)$, $X_2 = (1,0,1)$ và $X_3 = (0,1,1)$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$, ta xác định không gian con riêng $E(1)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(1) &= \left\{ x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 : \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ -x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \\ -3x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \{0X_1 + 0X_2 + \alpha X_3 : \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha(0,1,1) : \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ta thấy không gian $E(1)$ có cơ sở là hệ vector $P_1' = ((0,1,1))$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$, ta xác định không gian con riêng $E(2)$. Ta có

$$
\begin{aligned}
E(2) &= \left\{ x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \\ -3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \{-2\alpha X_1 + \alpha X_2 - 3\alpha X_3 : \alpha \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\alpha(-1, -5, -2) : \alpha \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Ta thấy không gian $E(2)$ có cơ sở là hệ vector $P'_2 = ((1, 5, 2))$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 5$, ta xác định không gian con riêng $E(5)$. Ta có

$$
\begin{aligned}
E(5) &= \left\{ x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ -3x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \left\{ \alpha X_1 + \alpha X_2 + \frac{3}{2}\alpha X_3 : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \{\alpha(2, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}) : \alpha \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Ta thấy không gian $E(5)$ có cơ sở là hệ vector $P'_3 = ((4, 5, 5))$. ■

4.4.5 Chéo hóa ma trận vuông và toán tử tuyến tính

Định nghĩa 4.13. *Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là chéo hóa được nếu nó đồng dạng với một ma trận chéo D, tức là tồn tại ma trận $S \in M_n(\mathbb{R})$ không suy biến sao cho $D = S^{-1}AS$. Khi ấy, ta gọi S là ma trận làm chéo hóa ma trận A.*

Định nghĩa 4.14. *Cho $\mathbb{V}$ là không gian vector hữu hạn chiều, f là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{V}$. Toán tử f được gọi là chéo hóa được nếu tồn tại một cơ sở P của $\mathbb{V}$ sao cho $[f]_P$ là một ma trận chéo.*

Định lý 4.18. *Cho f là một toán tử tuyến tính trên không gian vector hữu hạn chiều $\mathbb{V}$. Khi đó, toán tử f chéo hóa được khi và chỉ khi trong $\mathbb{V}$ tồn tại một cơ sở gồm toàn các vector riêng của f.*

Hệ quả 4.7. *Cho f là một toán tử tuyến tính trên không gian vector $\mathbb{V}$ với số chiều n. Giả sử $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ là các giá trị riêng của toán tử f, các vector $X_1, X_2, \ldots, X_k$ lần lượt là các vector riêng của f ứng với các giá trị riêng này. Khi đó, hệ vector $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ là hệ độc lập tuyến tính. Từ đó suy ra nếu toán tử f có n giá trị riêng phân biệt thì chéo hóa được.*

Định lý 4.19. *Nếu đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ của ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ có n nghiệm phân biệt thì ma trận A chéo hóa được.*

Ví dụ 4.42. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ chéo hóa được vì đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$ có hai nghiệm phân biệt $\lambda = 1, \lambda = 4$.

Ví dụ 4.43. Tìm a, b để ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ chéo hóa được.

Giải. Ma trận A có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ được xác định bởi

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & -a \\ 0 & \lambda - 2 & -b \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ có ba nghiệm phân biệt $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$ nên ma trận A chéo hóa được với mọi $a, b \in \mathbb{R}$. ■

Ví dụ 4.44. Chứng tỏ rằng toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (-3x - 5y, x + 3y)$ là chéo hóa được.

Giải. Trước hết, ta tìm ma trận biểu diễn của toán tử f đối với cơ sở chính tắc E_2. Ta có

$$[f] = \left(\ [f\,(1,0)] \quad [f\,(0,1)] \ \right) = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của toán tử tuyến tính f có dạng

$$P_f\,(\lambda) = \det\left(\lambda I_2 - [f]\right) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 5 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$$

Ta thấy phương trình đặc trưng $P_f(\lambda) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\lambda = \pm 2$ nên toán tử tuyến tính f chéo hóa được. ■

Ví dụ 4.45. Chứng tỏ rằng toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f\,(x, y, z) = (x - 2y, x + 4y, -x + y + 4z)$ là chéo hóa được.

Giải. Trước hết, ta tìm ma trận biểu diễn của toán tử f đối với cơ sở chính tắc E_3. Ta có

$$[f] = \left(\ [f\,(1,0,0)] \quad [f\,(0,1,0)] \quad [f\,(0,0,1)] \ \right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của toán tử tuyến tính f có dạng

$$P_f\,(\lambda) = \det\left(\lambda I_3 - [f]\right) = (\lambda - 2)\,(\lambda - 3)\,(\lambda - 4)$$

Ta thấy phương trình $P_f(\lambda) = 0$ có ba nghiệm $\lambda = 2, \lambda = 3, \lambda = 4$ nên toán tử tuyến tính f chéo hóa được. ■

Định nghĩa 4.15. *Cho $P(x)$ là một đa thức và m là một số nguyên dương. Số thực a được gọi là nghiệm bội bậc m (hay gọi tắt là bội m) của $P(x)$ nếu $P(x) = (x - a)^m Q(x)$ với $Q(x)$ là một đa thức không nhận a làm nghiệm.*

Ví dụ 4.46. Cho đa thức $P(x) = (x-1)(x-4)^3$. Ta thấy $x = 1$ là nghiệm bội bậc 1 của đa thức $P(x)$, còn $x = 4$ là nghiệm bội bậc 3 của đa thức $P(x)$.

Định lý 4.20. *Cho $\mathbb{V}$ là một không gian vector có n chiều, f là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{V}$. Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ là tất cả các giá trị riêng đôi một khác nhau của f, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ lần lượt là bội của các nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ trong đa thức $P_f(\lambda)$. Khi đó, toán tử f chéo hóa được khi và chỉ khi $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ và $\dim E(\lambda_1) = n_1, \dim E(\lambda_2) = n_2, \ldots, \dim E(\lambda_k) = n_k$.*

Định lý 4.21. *Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ là tất cả các giá trị riêng đôi một khác nhau của $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ lần lượt là bội của các nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ trong đa thức $P_A(\lambda)$. Khi đó, ma trận A chéo hóa được khi và chỉ khi $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ và $\dim E(\lambda_1) = n_1, \dim E(\lambda_2) = n_2, \ldots, \dim E(\lambda_k) = n_k$.*

Ví dụ 4.47. Chứng tỏ ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ là chéo hóa được.

***Giải*.** Trong ví dụ 4.39 ta đã biết A có hai giá trị riêng $\lambda = 1$ và $\lambda = 3$ với bội lần lượt là 2 và 1.

Mặt khác cũng từ ví dụ 4.39 ta được $\dim E(1) = 2$ và $\dim E(3) = 1$. Áp dụng định lý 4.21 ta suy ra ma trận A chéo hóa được. ■

Ví dụ 4.48. Chứng tỏ rằng toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x, y, z) = (x - 2y, x + 4y, -x + y + 3z)$ là chéo hóa được.

***Giải*.** Trước hết, ta tìm ma trận biểu diễn của toán tử f đối với cơ sở chính tắc E_3. Ta có

$$[f] = \begin{pmatrix} [f(1,0,0)] & [f(0,1,0)] & [f(0,0,1)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của toán tử tuyến tính f có dạng

$$P_f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - [f]) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$$

Phương trình đặc trưng $P_f(\lambda) = 0$ có hai nghiệm $\lambda = 2$ và $\lambda = 3$ với bội lần lượt là 1 và 2. Do đó, toán tử f có hai giá trị riêng $\lambda = 2$ và $\lambda = 3$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$, ta xác định không gian con riêng $E(2)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(2) &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \{(-2\alpha, \alpha, -3\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

  Ta thấy không gian $E(2)$ có cơ sở là hệ vector $P_1 = ((-2, 1, -3))$. Do đó $\dim E(2) = 1$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$, ta xác định không gian con riêng $E(3)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(3) &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \{(-\alpha, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

  Không gian $E(3)$ có cơ sở là hệ vector $P_2 = ((-1, 1, 0), (0, 0, 1))$. Do đó $\dim E(3) = 2$.

Áp dụng định lý 4.20 ta khẳng định toán tử f chéo hóa được. ■

Định lý 4.22. *Cho $\mathbb{V}$ là một không gian vector có n chiều, f là một toán tử tuyến tính chéo hóa được trên $\mathbb{V}$. Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ là tất cả các giá trị riêng đôi một khác nhau của f, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ lần lượt là bội của các nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ trong đa thức $P_f(\lambda)$. Giả sử các hệ vector $P_1, P_2, \ldots, P_k$ lần lượt là cơ sở của các không gian con riêng*

$E(\lambda_1), E(\lambda_2), \ldots, E(\lambda_k)$. Khi đó, hệ vector $P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k$ là một cơ sở gồm các vector riêng của f, đồng thời $[f]_P$ sẽ là một ma trận chéo gồm toàn các giá trị riêng của toán tử f, số lần xuất hiện các giá trị riêng λ bằng với số chiều của không gian con riêng $E(\lambda)$.

Định lý 4.23. *Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ là tất cả các giá trị riêng đôi một khác nhau của ma trận chéo hóa được $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ lần lượt là bội của các nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ trong đa thức $P_A(\lambda)$. Giả sử các hệ vector $P_1, P_2, \ldots, P_k$ lần lượt là cơ sở của các không gian con riêng $E(\lambda_1), E(\lambda_2), \ldots, E(\lambda_k)$. Khi đó, hệ vector $P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và nếu đặt $S = \begin{pmatrix} [X_1] & [X_2] & \ldots & [X_n] \end{pmatrix}$ thì S là ma trận làm chéo hóa ma trận A. Hơn nữa, ma trận chéo $D = S^{-1}AS$ toàn các giá trị riêng của ma trận A, số lần xuất hiện các giá trị riêng λ bằng với số chiều của không gian con riêng $E(\lambda)$.*

Ví dụ 4.49. Chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Giải. Ma trận A có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda + 6)$. Ta thấy phương trình đặc trưng có ba nghiệm phân biệt $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -6$. Do đó, ma trận A chéo hóa được.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$, ta xác định không gian con riêng $E(2)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(2) &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} -5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ -x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ & & 8x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \{(\alpha, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Không gian $E(2)$ có cơ sở là hệ vector $P_1 = ((1, 0, 0))$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$, ta xác định không gian con riêng $E(3)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(3) &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ & & & - & 4x_3 & = & 0 \\ & & & & 9x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \{(5\alpha, \alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Không gian $E(3)$ có cơ sở là hệ vector $P_2 = (-5, 1, 0)$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = -6$, ta xác định không gian con riêng $E(-6)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(-6) &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} -8x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ & - & 9x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ \left(-\frac{7}{72}\alpha, -\frac{4}{9}\alpha, \alpha \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Không gian $E(-6)$ có cơ sở là hệ vector $P_3 = ((-7, -32, 72))$.

Theo định lý 4.23, ma trận $S = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -32 \\ 0 & 0 & 72 \end{pmatrix}$ là ma trận làm chéo của ma trận A. Hơn nữa,

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

■

Ví dụ 4.50. Chéo hóa toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x, y, z) = (x - 2y, x + 4y, -x - 2y + 2z)$.

Giải. Trước hết, ta tìm ma trận biểu diễn của toán tử f đối với cơ sở chính tắc E_3. Ta có

$$[f] = \begin{pmatrix} [f(1,0,0)] & [f(0,1,0)] & [f(0,0,1)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của toán tử tuyến tính f có dạng

$$P_f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - [f]) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)$$

Phương trình đặc trưng $P_f(\lambda) = 0$ có hai nghiệm $\lambda = 2$ và $\lambda = 3$ với bội lần lượt là 2 và 1. Do đó, toán tử f có hai giá trị riêng $\lambda = 2$ và $\lambda = 3$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$, ta xác định không gian con riêng $E(2)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(2) &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \{(-2\alpha, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

  Không gian $E(2)$ có cơ sở là hệ vector $P_1 = ((-2, 1, 0), (0, 0, 1))$. Do đó $\dim E(2) = 2$

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$, ta xác định không gian con riêng $E(3)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(3) &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \{(-\alpha, \alpha, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

  Không gian $E(3)$ có cơ sở là hệ vector $P_2 = ((-1, 1, -1))$. Do đó, $\dim E(3) = 1$.

Ta thấy $\dim E(2) + \dim E(3) = 3$ nên toán tử f chéo hóa được.

Đặt $P = P_1 \cup P_2 = ((-2, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 1, -1))$, ta suy ra P là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ gồm các vector riêng của f. Hơn nữa,

$$[f]_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

■

Bài tập chương 4

Phần tự luận

Bài tập 4.1. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ma trận của f đối với cơ sở $B = ((1,1),(1,0))$ là $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm biểu thức của f.

Bài tập 4.2. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ định bởi $f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, 2x_1 + 4x_2)$. Tìm ma trận của ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ đối với cơ sở chính tắc.

Bài tập 4.3. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ định bởi $f(x, y) = (4x, 4x - y)$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B = ((1,1),\ (-1,1))$.

Bài tập 4.4. Cho hai ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 - x_3)$$

và $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$$

Xác định biểu thức ánh xạ hợp $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Bài tập 4.5. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ định bởi $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B = ((1,1),(1,0))$.

Bài tập 4.6. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ma trận của f đối với cơ sở $B = ((0,1),\ (1,0))$ là $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm biểu thức của f.

Bài tập 4.7. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ định bởi $f(x, y) = (x - y, x - y)$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B = ((1,1),(1,2))$.

Bài tập 4.8. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ma trận của f đối với cơ sở $B = ((0,-1),\ (1,0))$ là $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm biểu thức của f.

Bài tập 4.9. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ma trận của f đối với cơ sở $B = ((1,1),\ (1,-1))$ là $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm biểu thức của f.

Bài tập 4.10. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ma trận của f đối với cơ sở E_2 là $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Tìm biểu thức của ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Bài tập 4.11. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi $f(x, y, z) = (x - y, y - z, -x + z)$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở E_3.

Bài tập 4.12. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi $f(x, y, z) = (x - y, y - z, -x + z)$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc.

Bài tập 4.13. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc.

Bài tập 4.14. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + y + 3z)$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$.

Bài tập 4.15. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, biết ma trận của f đối với cơ sở $B = ((1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (1, 0, 1))$ là $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Tìm biểu thức của f.
2. Tìm biểu thức của f^{-1} (nếu có).

Bài tập 4.16. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, biết ma trận của f đối với cơ sở $B = ((1, 1, -1),\ (-1, 1, 1),\ (1, -1, 1))$ là $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Tìm biểu thức của f.
2. Tìm biểu thức của f^{-1} (nếu có).

Bài tập 4.17. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$$

Tìm ma trận của ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ đối với cơ sở chính tắc.

Bài tập 4.18. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + y - z)$$

Tìm biểu thức của ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Bài tập 4.19. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$$

Tìm biểu thức của ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Bài tập 4.20. Xác định m để ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z) = (mx + y + z, x + my + z, x + y + mz)$$

có ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Bài tập 4.21. Xác định m để ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z) = (mx + y + z, x + my + z, x + y + mz)$$

không có ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Bài tập 4.22. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + z, x + y + 3z)$$

1. Chứng minh f là đẳng cấu.
2. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
3. Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B = ((1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1))$ (giải bằng hai phương pháp).

Bài tập 4.23. Tìm đa thức đặc trưng của các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bài tập 4.24. Tìm giá trị riêng của các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bài tập 4.25. 1. Với giá trị nào của m thì vector $X = (m, 1)$ là vector riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Với giá trị nào của m thì vector $X = (m, m)$ là vector riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Với giá trị nào của m thì vector $X = (m, m, m)$ là vector riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Bài tập 4.26. 1. Tìm các vector riêng ứng với trị riêng $\lambda = -1$ của ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Tìm các vector riêng ứng với trị riêng $\lambda = 2$ của ma trận $A = \begin{pmatrix} 27 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Tìm các vector riêng ứng với trị riêng $\lambda = 0$ của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Tìm các vector riêng ứng với trị riêng $\lambda = 2$ của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bài tập 4.27. Vector $X = (2, -2)$ là vector riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ứng với trị riêng nào?

Bài tập 4.28. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ứng với trị riêng $\lambda = 1$, ma trận A có bao nhiêu vector riêng độc lập tuyến tính?

Bài tập 4.29. Vector $X = (-2, 2)$ là vector riêng của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ứng với trị riêng nào?

Bài tập 4.30. Ma trận $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ có các trị riêng nào?

Bài tập 4.31. Vector $X = (7, 7)$ là vector riêng của $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ứng với trị riêng nào?

Bài tập 4.32. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ma trận A có các trị riêng nào?

Bài tập 4.33. Vector $X = (2, 4)$ là vector riêng của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ứng với trị riêng nào?

Bài tập 4.34. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 28 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ma trận A có các trị riêng nào?

Bài tập 4.35. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ma trận A có các trị riêng nào?

Bài tập 4.36. Chéo hóa các ma trận sau (nếu có):

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b. $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

d. $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Phần trắc nghiệm

Bài tập 4.37. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

a. $f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2 + 1, 2x_1 + 4x_2)$.

b. $f(x_1, x_2) = (x_1x_2, 2x_1 + 4x_2)$.

c. $f(x_1, x_2) = (6x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2)$.

d. $f(x_1, x_2) = \left(x_1{}^2, x_2\right)$.

Bài tập 4.38. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

a. $f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2 + 1,\ 2x_1 + 4x_2)$.

b. $f(x_1, x_2) = (x_1x_2, 2x_1 + 4x_2)$.

c. $f(x_1, x_2) = \left(6x_1 - 2x_2, 2x_1{}^3 - x_2\right)$.

d. $f(x_1, x_2) = (2x_1, x_1 - x_2)$.

Bài tập 4.39. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

a. $f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2 + 1,\ 2x_1 + 4x_2)$.

b. $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 4x_2)$.

c. $f(x_1, x_2) = \left(6x_1 - 2x_2, 2x_1{}^3 - x_2\right)$.

d. $f(x_1, x_2) = (2x_1 + 4, x_1 - x_2)$.

Bài tập 4.40. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}$ với $m \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

a. A chéo hoá được khi và chỉ khi $m = 0$.

b. A không chéo hoá được khi và chỉ khi $m = 0$.

c. A chéo hóa được với mọi m.

d. A chỉ có một trị riêng.

Bài tập 4.41. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{pmatrix}$ với $m \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

a. A chéo hoá được khi và chỉ khi $m = 0$.

b. A không chéo hoá được khi và chỉ khi $m = 0$.

c. A chéo hóa được với mọi m.

d. A không có một trị riêng nào.

Bài tập 4.42. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

a. A chéo hoá được khi và chỉ khi $a = 0, b = 0$.

b. A chéo hoá được khi và chỉ khi $a = 0$.

c. A chéo hóa được với mọi a, b.

d. A không chéo hóa được với mọi a, b.

Bài tập 4.43. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ với $a \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

a. A chéo hoá được khi và chỉ khi $a = 0$.

b. A chéo hoá được khi và chỉ khi $a = 1$.

c. A chéo hóa được với mọi a.

d. A không chéo hóa được với mọi a.

Bài tập 4.44. Giả sử A là một ma trận vuông cấp 3 có 3 vector riêng là $(1, 2, 1); (1, 0, 1); (1, 0, 0)$ lần lượt ứng với các trị riêng là 1, 2 và 3. Đặt $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

a. A được chéo hóa và $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b. A được chéo hóa và $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c. A được chéo hóa và $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d. Các khẳng định trên đều đúng.

Bài tập 4.45. Giả sử A là một ma trận vuông cấp 3 có 3 vector riêng là $(2, 2, 1)$; $(1, 1, 1)$; $(2, 0, 0)$ lần lượt ứng với các trị riêng là 3, 2 và 4. Ma trận P nào sau đây thỏa đẳng thức $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a. $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Bài tập 4.46. Giả sử A là một ma trận vuông cấp 3 có đa thức đặc trưng là $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 4)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

a. A chéo hóa được.

b. A chéo hóa được khi và chỉ khi ứng với trị riêng 0, A có hai vector riêng độc lập tuyến tính.

c. A chéo hóa được khi và chỉ khi ứng với trị riêng 2, A có hai vector riêng độc lập tuyến tính.

d. Achéo hóa được khi và chỉ khi ứng với trị riêng 4, A có hai vector riêng độc lập tuyến tính.

Bài tập 4.47. Giả sử A là một ma trận vuông cấp 3 có đa thức đặc trưng là $\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4)$.Khẳng định nào sau đây đúng?

a. A không chéo hóa được vì A không có hai trị riêng phân biệt.

b. A chéo hóa được.

c. A chéo hóa được khi và chỉ khi ứng với trị riêng 2, A có hai vector độc lập tuyến tính.

d. A Các khẳng định trên đều sai.

Bài tập 4.48. Cho f là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, 2x + 3y)$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

a. f là song ánh.

b. f là đơn ánh nhưng không là toàn ánh.

c. f là toàn ánh nhưng không là đơn ánh.

d. Các câu kia đều sai.

Bài tập 4.49. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a. $(1, 2, 3)$ là vector riêng của A.

b. $(1, 2, 1)$ là vector riêng của A.

c. $(0, 0, 0)$ là vector riêng của A.

d. $(0, 1, 1)$ là vector riêng của A.

Bài tập 4.50. Tìm tất cả các giá trị riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$

b. $\lambda = 2$

c. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

d. $\lambda = 3$

Bài tập 4.51. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm các trị riêng của ma trận A^3.

a. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$

b. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 27$

c. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$

d. Các câu trên đều sai

Bài tập 4.52. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm các trị riêng của ma trận A^3.

a. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 125$

b. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 15$

c. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$

d. Các câu trên đều sai

Bài tập 4.53. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, biết A có ba giá trị riêng thực $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Tìm $I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

a. $I = 6$ b. $I = 7$ c. $I = 8$ d. $I = 9$

Bài tập 4.54. Trong các ánh xạ tuyến tính sau, ánh xạ nào có nhân sinh ra bởi hai vector $(-1, 1, 0)$ và $(-1, 0, 1)$?

i. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y, z) = (x + y + z, 0)$.

ii. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y, z) = (x + y, x + z)$.

iii. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z)$.

a. Chỉ có i. c. Cả ba ánh xạ
b. Chỉ có i và ii d. Không có ánh xạ nào

Bài tập 4.55. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào có ảnh sinh ra bởi hai vector $(1, 1), (1, 2)$?

i. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x, y)$.

ii. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (0, x)$.

iii. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (2x + y, -2x + y)$.

a. Cả ba ánh xạ c. Chỉ có i và ii
b. Chỉ có iii d. Chỉ có i

Bài tập 4.56. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y, x + z)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a. $\dim\ker f = 0, \dim\operatorname{Im} f = 3$ c. $\dim\ker f = 1, \dim\operatorname{Im} f = 2$
b. $\dim\ker f = 0, \dim\operatorname{Im} f = 2$ d. $\dim\ker f = 1, \dim\operatorname{Im} f = 3$

Bài tập 4.57. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ biết

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1) &= (1, 2) \\ f(1, 1, 0) &= (-1, 1) \\ f(1, 0, 0) &= (0, 1) \end{aligned}$$

Tìm $f(2, -1, 1)$.

a. $(1, 1)$ b. $(3, 3)$ c. $(1, 2)$ d. $(-2, 1)$

Bài tập 4.58. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ biết

$$\begin{gathered} f(1,1) = (1,0) \\ f(2,1) = (-1,1) \end{gathered}$$

Tìm $f(8,5)$.

a. $(-1,3)$ b. $(3,1)$ c. $(2,1)$ d. $(-2,1)$

Bài tập 4.59. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ biết

$$\begin{gathered} f(1,1,1) = (1,1,-1) \\ f(1,2,1) = (1,1,0) \\ f(2,2,0) = (2,1,1) \end{gathered}$$

Với giá trị nào của m thì $X = (1,2,m) \in \operatorname{Im} f$?

a. $m \neq 1$ b. $m = 1$ c. $m = 0$ d. $m \neq 0$

Bài tập 4.60. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ biết

$$\begin{gathered} f(1,1) = (-1,1) \\ f(1,0) = (3,-3) \end{gathered}$$

Với giá trị nào của m thì $X = (1,m+1) \in \operatorname{Im} f$?

a. $\forall m$ b. $m \neq -2$ c. $m = -2$ d. $m = 0$

Chương 5

Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương

5.1 Khái niệm dạng song tuyến tính và dạng toàn phương

5.1.1 Dạng song tuyến tính

Định nghĩa 5.1. *Giả sử* $\mathbb{V}$ *là một không gian vector, ánh xạ*

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : \mathbb{V} \times \mathbb{V} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \mapsto & \varphi(X, Y) \end{array}$$

được gọi là dạng song tuyến tính trên $\mathbb{V}$ *nếu* φ *tuyến tính theo từng biến* X, Y*, nghĩa là* $\forall X, Y, X', Y' \in \mathbb{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ta có*

- $\varphi(\alpha X + \beta X', Y) = \alpha\varphi(X, Y) + \beta\varphi(X', Y)$.
- $\varphi(X, \alpha Y + \beta Y') = \alpha\varphi(X, Y) + \beta\varphi(X, Y')$.

Dạng song tuyến tính φ *trên* $\mathbb{V}$ *được gọi là đối xứng nếu*

$$\varphi(X, Y) = \varphi(Y, X)$$

với mọi $X, Y \in \mathbb{V}$.

Ví dụ 5.1. Ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\varphi(X, Y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$ với $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^2$. Thật vậy, nếu lấy hai vector bất kỳ $X' = (x_1', x_2'), Y' = (y_1', y_2')$ thuộc $\mathbb{R}^2$ thì với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned}\varphi\left(\alpha X + \beta X', Y\right) &= \left(\alpha x_1 + \beta x_1'\right) y_1 + 2\left(\alpha x_2 + \beta x_2'\right) y_2 \\ &= \alpha\left(x_1 y_1 + 2x_2 y_2\right) + \beta\left(x_1' y_1 + x_2' y_2\right) \\ &= \alpha\varphi\left(X, Y\right) + \beta\varphi\left(X', Y\right)\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\varphi\left(X, \alpha Y + \beta Y'\right) &= x_1\left(\alpha y_1 + \beta y_1'\right) + 2x_2\left(\alpha y_2 + \beta y_2'\right) \\ &= \alpha\left(x_1 y_1 + 2x_2 y_2\right) + \beta\left(x_1 y_1' + 2x_2 y_2'\right) \\ &= \alpha\varphi\left(X, Y\right) + \beta\varphi\left(X, Y'\right)\end{aligned}$$

Hai đẳng thức trên chứng tỏ φ là một dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$. Hơn nữa, ta thấy $\varphi(X, Y) = \varphi(Y, X)$ nên φ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 5.2. Ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi\left(X, Y\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - 2x_1 y_2$$

với $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3)$ là một dạng song tuyến tính nhưng không đối xứng trên $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 5.3. Ánh xạ $\varphi : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi\left(f, g\right) = \int_a^b f\left(t\right) g\left(t\right) dt$$

với $f, g \in C[a, b]$ là dạng song tuyến tính đối xứng trên $C[a, b]$.

Ví dụ 5.4. Cho $\mathbb{V}$ là một không gian vector Euclide với tích vô hướng $\langle . | . \rangle$. Ánh xạ $\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\varphi(X, Y) = \langle X | Y \rangle$ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{V}$.

Tính chất

Sau đây là một số tính chất của dạng song tuyến tính mà ta suy trực tiếp từ định nghĩa

1. $\varphi(0_{\mathbb{V}}, 0_{\mathbb{V}}) = 0$.

2. Hai điều kiện trong định nghĩa có thể được thay thế bằng điều kiện tương đương sau

$$\begin{aligned}\varphi\left(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2\right) = \ & \alpha_1\beta_1\varphi\left(X_1, Y_1\right) + \alpha_1\beta_2\varphi\left(X_1, Y_2\right) + \\ & \alpha_2\beta_1\varphi\left(X_2, Y_1\right) + \alpha_2\beta_2\varphi\left(X_2, Y_2\right)\end{aligned}$$

   với mọi $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}; X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathbb{V}$.

Ví dụ 5.5. Ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi\left(X, Y\right) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_2 + 1$$

không là dạng song tuyến tính vì $\varphi(0_{\mathbb{R}^2}, 0_{\mathbb{R}^2}) = 1$.

Định lý 5.1. *Cho $\mathbb{V}$ là một không gian vector n chiều và φ là dạng song tuyến tính trên $\mathbb{V}$. Giả sử hệ vector $P = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là một cơ sở của $\mathbb{V}$. Khi đó, với hai vector bất kỳ $X, Y \in \mathbb{V}$ ta có*

$$\varphi\left(X, Y\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{5.1}$$

với $[X]_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; [Y]_P = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *và* $a_{ij} = \varphi\left(X_i, X_j\right); i, j = \overline{1, n}$.

Ma trận $A = (a_{ij})_n$ được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở P, ký hiệu $A = [\varphi]_P$ (trường hợp $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ và $P \equiv E_n$ thì ta ký hiệu $A = [\varphi]$).

Công thức 5.1 được gọi là biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính φ trong cơ sở P.

Ta có thể viết dạng song tuyến tính φ dưới dạng ma trận

$$\varphi\left(X, Y\right) = [X]_P^T\, [\varphi]_P\, [Y]_P$$

Nhận xét 5.1. Một số nhận xét rút ra từ Định lý 5.1:

- Nếu dạng song tuyến tính φ trên $\mathbb{V}$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở P được cho bởi công thức 5.1 thì

$$[\varphi]_P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Ngược lại, nếu ta biết được ma trận của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở P thì φ hoàn toàn được xác định bởi công thức

$$\varphi(X,Y) = [X]_P^T[\varphi]_P[Y]_P; \forall X, Y \in \mathbb{V}$$

Hệ quả 5.1. *Nếu φ là dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$ thì φ được xác định bởi*

$$\varphi(X,Y) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_iy_j \tag{5.2}$$

với $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Hơn nữa, từ công thức 5.2 ta suy ra ma trận của φ đối với cơ sở chính tắc E_n có dạng

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ 5.6. Cho dạng song tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(X,Y) = x_1y_2 + x_2y_1$$

với $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$. Hãy xác định ma trận của φ đối với

1. Cơ sở chính tắc E_2.
2. Cơ sở $P = ((1,1),(2,1))$. Từ đó xây dựng biểu thức tọa độ của φ đối với cơ sở P.

Giải. Để tiện trình bày ta đặt $X_1 = (1,1), X_2 = (2,1)$.

1. Ma trận của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở chính tắc E_2 là

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Ma trận của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở P là

$$[\varphi]_P = \begin{pmatrix} \varphi(X_1, X_1) & \varphi(X_1, X_2) \\ \varphi(X_2, X_1) & \varphi(X_2, X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Biểu thức tọa độ của φ đối với cơ sở P

$$\varphi(X,Y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$$

với $[X]_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; [Y]_P = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. ■

Ví dụ 5.7. Cho dạng song tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ có ma trận đối với cơ sở $P = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$ là

$$[\varphi]_P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Xác định biểu thức tọa độ của φ trong cơ sở P.
2. Tính $\varphi(X,Y)$ với $X = (1,2,3), Y = (1,3,5)$.
3. Xác định biểu thức $\varphi(X,Y)$ với $X = (x_1,x_2,x_3), Y = (y_1,y_2,y_3)$.
4. Xác định ma trận của φ đối với cơ sở chính tắc E_3.

Giải. 1. Biểu thức tọa độ của φ trong cơ sở P có dạng

$$\begin{aligned} \varphi(X,Y) &= [X]_P^T [\varphi]_P [Y]_P \\ &= x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_2 - 2x_3y_3 \end{aligned}$$

với $[X]_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; [Y]_P = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

2. Ta tính được $[(1,2,3)]_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; [(1,3,5)]_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Do đó $\varphi(X,Y) = 6$.

3. Ta có $[X]_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}; [Y]_P = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix}$.

Do đó

$$\begin{aligned} \varphi(X,Y) &= [X]_P^T [\varphi]_P [Y]_P \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1y_1 - 2x_3y_1 + 4x_1y_2 - 6x_2y_2 + \\ &\quad 4x_3y_2 - 3x_1y_3 + 5x_2y_3 - 2x_3y_3 \end{aligned}$$

4. Ma trận của φ đối với cơ sở chính tắc E_3

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

■

5.1.2 Dạng toàn phương

Định nghĩa 5.2. *Ma trận vuông A được gọi là đối xứng nếu $A = A^T$.*

Nhận xét 5.2. Giả sử $A = (a_{ij})_n$, khi đó ma trận A là đối xứng khi và chỉ khi $a_{ij} = a_{ji}; i, j = \overline{1,n}$.

Ví dụ 5.8. Các ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ là các ma trận đối xứng.

Ví dụ 5.9. Ma trận đơn vị I_n là một ma trận đối xứng. Ma trận không $O_{n\times n}$ cũng là một ma trận đối xứng.

Định lý 5.2. *Cho φ là dạng song tuyến tính trên không gian vector hữu hạn chiều $\mathbb{V}$. Khi đó, nếu φ đối xứng thì ma trận của φ đối với cơ sở tùy ý P của không gian $\mathbb{V}$ là một ma trận đối xứng. Ngược lại, nếu tồn tại một cơ sở P của $\mathbb{V}$ sao cho ma trận của φ đối với P là đối xứng thì φ là dạng song tuyến tính đối xứng.*

Định nghĩa 5.3. *Cho φ là dạng song tuyến tính đối xứng trên không gian vector $\mathbb{V}$. Ánh xạ*

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathbb{V} & \to & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & \varphi(X,X) \end{array}$$

được gọi là dạng toàn phương trên $\mathbb{V}$ ứng với φ.

Ví dụ 5.10. Cho dạng song tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(X,Y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2$$

với $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$. Dạng toàn phương q ứng với φ có dạng

$$q(X) = \varphi(X,X) = x_1^2 + 5x_1x_2 - x_2^2$$

với $X = (x_1, x_2)$.

Ví dụ 5.11. Cho dạng song tuyến tính $\varphi : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(f,g) = \int\limits_a^b f(t)\,g(t)\,dt$$

với $f, g \in C[a,b]$. Dạng toàn phương q ứng với φ có dạng

$$q(f) = \varphi(f,f) = \int\limits_a^b f^2(t)\,dt$$

với $f \in C[a,b]$.

Ví dụ 5.12. Gọi $C^{(n)}[a,b]$ là tập hợp tất cả các hàm số khả vi cấp n liên tục trên $[a,b]$. Khi đó, ánh xạ $\varphi : C^{(n)}[a,b] \times C^{(n)}[a,b] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(f,g) = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(t)\, g^{(i)}(t) \right) dt$$

với $f, g \in C^{(n)}[a,b]$ là dạng song tuyến tính trên $C^{(n)}[a,b]$. Dạng toàn phương q ứng với φ có dạng

$$q(f) = \varphi(f,f) = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} \left[f^{(i)}(t) \right]^2 \right) dt$$

với $f \in C^{(n)}[a,b]$.

Ví dụ 5.13. Cho $\mathbb{V}$ là không gian vector Euclide với tích vô hướng $\langle .|. \rangle$. Dạng song tuyến tính $\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(X,Y) = \langle X|Y \rangle ; \forall X, Y \in \mathbb{V}$$

có dạng toàn phương q cho bởi công thức

$$q(X) = \varphi(X,Y) = \langle X|X \rangle = \|X\|^2$$

Nhận xét 5.3. Nếu A là ma trận của dạng song tuyến tính đối xứng φ đối với một cơ sở P nào đó thì A cũng được gọi là ma trận của dạng toàn phương q đối với cơ sở ấy, ký hiệu $A = [q]_P$. Ta thấy $[q]_P$ là một ma trận đối xứng và

$$q(X) = [X]_P^T [q]_P [X]_P ; \forall X \in \mathbb{V}$$

Dạng song tuyến tính đối xứng φ hoàn toàn được xác định nếu ta biết dạng toàn phương q ứng với φ. Thật vậy, với mọi $X, Y \in \mathbb{V}$ ta có

$$\begin{aligned} q(X+Y) = \varphi(X+Y, X+Y) &= \varphi(X,X) + 2\varphi(X,Y) + \varphi(Y,Y) \\ &= q(X) + 2\varphi(X,Y) + q(Y) \end{aligned}$$

Từ đẳng thức trên ta suy ra

$$\varphi(X,Y) = \frac{1}{2}\left[q(X+Y) - q(X) - q(Y) \right]$$

Vì thế, φ còn được gọi là dạng cực của dạng toàn phương q.

Định lý 5.3. *Cho $\mathbb{V}$ là một không gian vector n chiều, φ là dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{V}$ và q là dạng toàn phương ứng với φ. Giả sử hệ vector $P = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là một cơ sở của $\mathbb{V}$. Khi đó,*

$$\begin{aligned} q(X) &= \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned} \tag{5.3}$$

với $a_{ij} = \varphi(X_i, X_j)$ và $[X]_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Công thức 5.3 được gọi là biểu thức tọa độ của dạng toàn phương q trong cơ sở P.

Nhận xét 5.4. Nếu dạng toàn phương q trên $\mathbb{V}$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở P được cho bởi công thức 5.3 thì

- Ma trận của q đối với cơ sở P là

$$[q]_P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Dạng cực φ của dạng toàn phương q có biểu thức tọa độ trong cơ sở P là

$$\varphi(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} \left(x_i y_j + x_j y_i \right)$$

với $[X]_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; [Y]_P = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Hệ quả 5.2. *Nếu q là dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$ thì q được xác định bởi*

$$q(X) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j \tag{5.4}$$

với $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Hơn nữa, từ công thức 5.4 ta suy ra ma trận của q đối với cơ sở chính tắc E_n có dạng

$$[q] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ 5.14. Cho dạng toàn phương q trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$q(X) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

với $X = (x_1, x_2, x_3)$.

1. Xác định ma trận của q đối với cơ sở chính tắc E_3.
2. Xác định ma trận của q đối với cơ sở $P = ((1,1,0), (1,0,1), (0,1,1))$.

Giải. 1. Ma trận của φ đối với cơ sở chính tắc E_3

$$[q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Dạng cực φ của dạng toàn phương q được xác định bởi

$$\varphi(X, Y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1$$

với $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3)$.

Đặt $X_1 = (1,1,0), X_2 = (1,0,1), X_3 = (0,1,1)$, ma trận của q đối với cơ sở P có dạng

$$\begin{aligned}[q]_P = [\varphi]_P &= \begin{pmatrix} \varphi(X_1, X_1) & \varphi(X_1, X_2) & \varphi(X_1, X_3) \\ \varphi(X_2, X_1) & \varphi(X_2, X_2) & \varphi(X_2, X_3) \\ \varphi(X_3, X_1) & \varphi(X_3, X_2) & \varphi(X_3, X_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

■

5.1.3 Đổi cơ sở cho dạng song tuyến tính và dạng toàn phương

Định lý 5.4. *Cho φ là dạng song tuyến tính trên không gian vector hữu hạn chiều $\mathbb{V}$, P và P' là hai cơ sở của $\mathbb{V}$. Khi đó,*

$$[\varphi]_{P'} = C^T_{P\to P'}[\varphi]_P C_{P\to P'}$$

Hệ quả 5.3. *Cho q là dạng toàn phương trên không gian vector hữu hạn chiều $\mathbb{V}$, P và P' là hai cơ sở của $\mathbb{V}$. Khi đó,*

$$[q]_{P'} = C^T_{P\to P'}[q]_P C_{P\to P'}$$

Ví dụ 5.15. Cho dạng toàn phương q trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$q(X) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3$$

với $X = (x_1, x_2, x_3)$.

1. Xác định ma trận của q đối với cơ sở chính tắc E_3.
2. Xác định ma trận của q trong cơ sở $P = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$.

Giải. 1. Ma trận của q đối với cơ sở chính tắc E_3

$$[q] = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Ma trận của q đối với cơ sở P

$$\begin{aligned} [q]_P &= C^T_{E_3 \to P}\,[q]\,C_{E_3 \to P} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -4 & -5 \\ -4 & -6 & -5 \\ -5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Ví dụ 5.16. Cho dạng toàn phương q trên $\mathbb{R}^3$. Biết ma trận của q đối với cơ sở $P = ((1,1,1),(1,2,3),(0,0,1))$ có dạng

$$[q]_P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Xác định biểu thức $q(X)$ với $X = (x_1, x_2, x_3)$.

Giải. Trước hết, ta tìm ma trận của q đối với cơ sở chính tắc E_3. Ta có

$$\begin{aligned} [q] = C^T_{P \to E_3}[q]_P C_{P \to E_3} &= \left(C^{-1}_{E_3 \to P}\right)^T [q]_P C^{-1}_{E_3 \to P} \\ &= \begin{pmatrix} 21 & -21 & 8 \\ -21 & 20 & -7 \\ 8 & -7 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra

$$q(X) = 21x_1^2 + 20x_2^2 + 2x_3^2 - 42x_1x_2 + 16x_1x_3 - 14x_2x_3$$

với $X = (x_1, x_2, x_3)$. ■

5.2 Dạng chính tắc của dạng toàn phương. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

5.2.1 Dạng chính tắc của dạng toàn phương

Định nghĩa 5.4. *Cho $\mathbb{V}$ là không gian vector n chiều, q là dạng toàn phương trên $\mathbb{V}$. Nếu P là một cơ sở của $\mathbb{V}$ sao cho biểu thức tọa độ của q trong cơ sở P có dạng*

$$q(X) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$$

với $[X]_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *thì ta nói q có dạng chính tắc.*

Các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ được gọi là các hệ số chính tắc; cơ sở P được gọi là một cơ sở $q-$chính tắc.

Nhận xét 5.5. Nếu P là một cơ sở $q-$chính tắc thì ma trận của q đối với cơ sở P có dạng chéo, tức là

$$[q]_P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

với $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các hệ số chính tắc.

Ngược lại, nếu tồn tại cơ sở P của $\mathbb{V}$ sao cho $[\varphi]_P$ có dạng chéo thì biểu thức tọa độ của q trong cơ sở P có dạng chính tắc.

Định lý 5.5. *Cho q là dạng toàn phương trên không gian vector n chiều $\mathbb{V}$, B là một cơ sở của $\mathbb{V}$. Khi đó, tồn tại cơ sở P của $\mathbb{V}$ sao cho $C_{B\to P}^{T}\left[\varphi\right]_{B} C_{B\to P}$ là một ma trận chéo, hay biểu thức của q trong cơ sở P có dạng chính tắc.*

Hệ quả 5.4. *Cho q là dạng toàn phương trên không gian vector $\mathbb{R}^n$. Khi đó, tồn tại cơ sở P của $\mathbb{R}^n$ sao cho $C_{E_n\to P}^{T}\left[\varphi\right] C_{E_n\to P}$ là một ma trận chéo, hay biểu thức của q trong cơ sở P có dạng chính tắc.*

5.2.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Theo định lý 5.5, nếu q là dạng toàn phương thì ta luôn tìm được một cơ sở $q-$chính tắc. Việc tìm một cơ sở $q-$chính tắc của $\mathbb{V}$ được gọi là phép đưa dạng toàn phương q về dạng chính tắc. Sau đây ta sẽ tìm hiểu một số phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

Phương pháp Lagrange

Cho $\mathbb{V}$ là không gian vector n chiều, q là dạng toàn phương trên $\mathbb{V}$. Giả sử biểu thức tọa độ của q trong cơ sở $B = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ nào đó có dạng

$$q\left(X\right) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j$$

với $[X]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ý tưởng của phương pháp Lagrange là tìm một cơ sở P_1 của $\mathbb{V}$ sao cho biểu thức tọa độ q đối với P_1 có dạng

$$q\left(X\right) = \lambda_1 {y'_1}^2 + q_1\left(y'_2, y'_3, ..., y'_n\right) \tag{5.5}$$

với $[X]_{P_1}^T = \begin{pmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \end{pmatrix}$.

Tiếp theo, từ biểu thức 5.5 ta tìm cơ sở P_2 của $\mathbb{V}$ sao cho biểu thức tọa độ của q trong cơ sở P_2 có dạng

$$q(X) = \lambda_1 y_1''^2 + \lambda_2 y_2''^2 + q_2\left(y_3'', y_4'', ..., y_n''\right)$$

với $[X]_{P_2}^T = \begin{pmatrix} y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \end{pmatrix}$ và $y_1'' = y_1'$.

Cứ tiếp tục như thế cho các bước tiếp theo, giả sử sau k ($k \leq n$) bước q sẽ có dạng chính tắc. Khi đó, ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở $q-$chính tắc có dạng $C_{B\to P_1}C_{P_1\to P_2}\dots C_{P_{k-1}\to P_k}$. Trong quá trình biến đổi dạng toàn phương q (và cho các dạng toàn phương $q_1, q_2, \dots$) ta sẽ gặp một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $a_{ii} = 0$ **với mọi** i **thuộc tập** $\{1, 2, \dots, n\}$**.**

Nếu $a_{12} = a_{13} = ... = a_{1n} = 0$ thì dạng toàn phương q chỉ có $n-1$ biến và chuyển qua xử lí cho $q_1(x_2, x_3, ..., x_n)$.

Nếu ngược lại thì tồn tại $a_{1i} \neq 0$ với giá trị i nào đó thuộc $\{1, 2, \dots, n\}$. Không giảm tổng quát ta giả sử $a_{12} \neq 0$. Thực hiện phép biến đổi

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' \\ x_3 = x_3' \\ \vdots \\ x_n = x_n' \end{cases} \tag{5.6}$$

Phép biến đổi 5.6 có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Ta thấy ma trận của phép biến đổi 5.6 là không suy biến vì có định thức bằng -2. Do đó, hệ vector $B' = (X_1 + X_2, X_1 - X_2, X_3, \dots, X_n)$ là một cơ sở $\mathbb{V}$, đồng thời

$$C_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Biểu thức tọa độ của q trong cơ sở B' có dạng

$$q(X) = 2a_{12}{x'_1}^2 - 2a_{12}{x'_2}^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x'_i x'_j$$

với $[X]_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$.

Vậy với phép biến đổi 5.6, trường hợp 1 có thể đưa về trường hợp 2.

Trường hợp 2: Có ít nhất một $a_{ii} \neq 0$ với i nào đó thuộc tập $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Không mất tổng quát, giả sử $a_{11} \neq 0$. Khi đó,

$$\begin{aligned} q(X) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right] \\ &\quad -a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{11}(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \\ &\quad \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j \end{aligned}$$

Đặt $\lambda_1 = a_{11}$ và

$$\begin{cases} y'_1 = x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ y'_2 = x_2 \\ y'_3 = x_3 \\ \vdots \\ y'_n = x_n \end{cases} \tag{5.7}$$

Khi đó dạng toàn q có thể viết lại dưới dạng

$$q(X) = \lambda_1 {y'_1}^2 + q_1\left({y'}_2, {y'}_3, \ldots, {y'}_n\right) \tag{5.8}$$

với

$$q_1\left(y'_2, y'_3, \ldots, y'_n\right) = -a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}y'_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}y'_n\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}y'_iy'_j$$

Biến đổi 5.7 về dạng

$$\begin{cases} x_1 = {y'}_1 - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}y'_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}y'_3 - ... - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}y'_n \\ x_2 = y'_2 \\ x_3 = y'_3 \\ \vdots \\ x_n = y'_n \end{cases} \tag{5.9}$$

Phép biến đổi 5.9 có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Ta thấy ma trận của phép biến đổi 5.9 là không suy biến vì có định thức bằng 1. Do đó, hệ vector

$$P_1 = \left(X_1, X_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}X_1, X_3 - \frac{a_{13}}{a_{11}}X_1, \ldots, X_n - \frac{a_{1n}}{a_{11}}X_1\right)$$

là cơ sở của $\mathbb{V}$, đồng thời

$$C_{B\to P_1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Biểu thức tọa độ của q trong cơ sở P_1 có dạng 5.8.

Tiếp tục thuật toán trên, sau tối đa n bước ta sẽ đưa dạng toàn phương q về dạng chính tắc.

Ví dụ 5.17. Cho q là dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$q(X) = x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

với $X = (x_1, x_2, x_3)$.

Đưa dạng toàn phương q về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange và xác định một cơ sở $q-$chính tắc.

Giải. Ta biến đổi q như sau

$$\begin{aligned} q(X) &= \left[x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2\right] + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2 \end{aligned}$$

Ta thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} y_1' = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2' = x_2 \\ y_3' = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1' - y_2' - y_3' \\ x_2 = y_2' \\ x_3 = y_3' \end{cases} \tag{5.10}$$

Phép đổi biến 5.10 có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$$

Do đó, trong cơ sở $P_1 = ((1,0,0), (-1,1,0), (-1,0,1))$ biểu thức tọa độ của q có dạng

$$q(X) = {y_1'}^2 + 2{y_2'}^2 - 4y_2'y_3' + 5{y_3'}^2 \tag{5.11}$$

với $[X]_{P_1}^T = \begin{pmatrix} y_1' & y_2' & y_3' \end{pmatrix}$.

Ta tiếp tục biến đổi biểu thức 5.11

$$\begin{aligned} q(X) &= {y_1'}^2 + 2\left({y_2'}^2 - 2y_2'y_3' + {y_3'}^2\right) + 3{y_3'}^2 \\ &= {y_1'}^2 + 2\left(y_2' - y_3'\right)^2 + 3{y_3'}^2 \end{aligned}$$

Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} y_1'' = y_1' \\ y_2'' = y_2' - y_3' \\ y_3'' = y_3' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1'' \\ y_2' = y_2'' + y_3'' \\ y_3' = y_3'' \end{cases} \tag{5.12}$$

Phép đổi biến 5.12 có thể viết dưới dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \end{pmatrix}$$

Khi đó, trong cơ sở $P_2 = ((1,0,0), (-1,1,0), (-2,1,1))$ biểu thức tọa độ của q có dạng

$$q(X) = (y_1'')^2 + 2(y_2'')^2 + 3(y_3'')^2 \tag{5.13}$$

với $[X]_{P_2}^T = \begin{pmatrix} y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix}$.

Biểu thức 5.13 có dạng chính tắc nên thuật toán dừng ở đây, cơ sở $q-$chính tắc là cơ sở P_2. ∎

Nhận xét 5.6. Ví dụ 5.10 có thể được giải ngắn gọn theo cách sau:

Biến đổi dạng toàn phương q về dạng

$$\begin{aligned} q(X) &= x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ &= \left[x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2\right] + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_2^3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2\left(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2\right) + 3x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 + 3x_3^2 \end{aligned}$$

Ta thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \tag{5.14}$$

Phép đổi biến 5.14 có thể viết dưới dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Với phép biến đổi 5.14, dạng toàn phương q sẽ có dạng chính tắc $q(X) = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2$ và cơ sở $q-$chính tắc chính là cơ sở P_2.

Ví dụ 5.18. Cho q là dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$q(X) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

với $X = (x_1, x_2, x_3)$.

Đưa dạng toàn phương q về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange và xác định một cơ sở $q-$chính tắc.

Giải. Trước hết, ta thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Với phép đổi biến trên thì dạng toàn phương q có biểu thức

$$q(X) = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 4z_1z_3 + 12z_2z_3 \tag{5.15}$$

trong đó $[X]_{P_z}^T = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$; $P_z = ((1,1,0), (1,-1,0), (0,0,1))$.

Ta biến đổi biểu thức 5.15 về dạng

$$\begin{aligned} q(X) &= 2z_1^2 - 2z_2^2 - 4z_1z_3 + 12z_2z_3 \\ &= 2\left(z_1^2 - 2z_1z_3 + z_3^2\right) - 2\left(z_2^2 - 6z_2z_3 + 9z_3^2\right) + 16z_3^2 \\ &= 2(z_1 - z_3)^2 - 2(z_2 - 3z_3)^2 + 16z_3^2 \end{aligned}$$

Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 - 3z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 + 3y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \tag{5.16}$$

Viết dưới dạng ma trận phép đổi biến 5.16

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Với phép đổi biến 5.16, dạng toàn phương q sẽ có dạng chính tắc

$$q(X) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 16y_3^2$$

và cơ sở $q-$chính tắc là $P_y = ((1,1,0), (1,-1,0), (4,-2,1))$. ■

Phương pháp Jacobi

Cho $\mathbb{V}$ là không gian vector n chiều, q là dạng toàn phương trên $\mathbb{V}$. Giả sử biểu thức tọa độ của q trong cơ sở $B = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ có dạng

$$q(X) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}x_ix_j$$

với $[X]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Định nghĩa 5.5. *Cho ma trận $A = (a_{ij})_n \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, các ma trận $A_k = (a_{ij})_k$ với $1 \leq k \leq n$ được gọi là các ma trận con chính của ma trận A.*

Định lý 5.6. ***(Định lý Jacobi)*** *Nếu $\det A_k \neq 0; \forall k = \overline{1, n}$ thì tồn tại một cơ sở P của $\mathbb{V}$ sao cho biểu thức của dạng toàn phương q trong cơ sở P có dạng chính tắc*

$$q\left(X\right) = \det A_1 y_1^2 + \frac{\det A_2}{\det A_1} y_2^2 + \ldots + \frac{\det A_n}{\det A_{n-1}} y_n^2$$

với $[X]_P = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Nhận xét 5.7. Cơ sở P của không gian vector $\mathbb{V}$ thỏa Định lý 5.6 được xác định như sau:

$$C_{B \to P} = \begin{pmatrix} 1 & c_{21} & c_{31} & \ldots & c_{(n-1)1} & c_{n1} \\ 0 & 1 & c_{32} & \ldots & c_{(n-1)2} & c_{n2} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & c_{(n-1)3} & c_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & c_{n(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

trong đó

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{(i-1)j}}{\det A_{i-1}}; 1 \leq j < i \leq n$$

với $A_{(i-1)j}$ là ma trận con của A tạo bởi các dòng thứ $1, 2, \ldots, i-1$ và các cột thứ $1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, i$.

Ví dụ 5.19. Cho q là dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$q(X) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

với $X = (x_1, x_2, x_3)$.

Đưa dạng toàn phương q về dạng chính tắc bằng phương pháp Jacobi và xác định một cơ sở $q-$chính tắc.

Giải. Ma trận của dạng toàn phương q trong cơ sở chính tắc

$$[q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ma trận $[q]$ có ba ma trận con chính

$$A_1 = (1)\,; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; A_3 = [q]$$

Ta thấy $\det A_1 = 1; \det A_2 = 1; \det A_3 = 1$ đều là các số khác không nên phương pháp Jacobi sử dụng được.

Áp dụng Định lý 5.6, tồn tại cơ sở P của $\mathbb{R}^3$ sao cho biểu thức của q trong cơ sở P có dạng chính tắc

$$\begin{aligned} q(X) &= \det A_1 y_1^2 + \frac{\det A_2}{\det A_1} y_2^2 + \frac{\det A_3}{\det A_2} y_3^2 \\ &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \end{aligned}$$

với $[X]_P = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Tiếp theo ta cần xác định cơ sở P. Theo Nhận xét 5.7 ta có

$$C_{E_3 \to P} = \begin{pmatrix} 1 & c_{21} & c_{31} \\ 0 & 1 & c_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

trong đó

- $c_{21} = (-1)^{2+1} \dfrac{\det A_{11}}{\det A_1} = \dfrac{\det(1)}{1} = -1$
- $c_{31} = (-1)^{3+1} \dfrac{\det A_{21}}{\det A_2} = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}{1} = 0$
- $c_{32} = (-1)^{3+2} \dfrac{\det A_{22}}{\det A_2} = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = -1$

Từ đây ta suy ra

$$C_{E_3 \to P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó $P = ((0,0,1), (0,1,-1), (1,-1,0))$. ■

Phương pháp chéo hóa trực giao

Cho $\mathbb{V}$ là không gian vector Euclide n chiều với tích vô hướng $\langle .|. \rangle$ (nếu $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ và tích vô hướng không được nói rõ thì ta hiểu đó là tích vô hướng chính tắc), dạng toàn phương q trong cơ sở B của $\mathbb{V}$ có biểu thức tọa độ

$$q(X) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}x_i x_j$$

với $[X]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Theo Định lý 5.5, luôn tồn tại cơ sở P của $\mathbb{V}$ sao cho $C_{B\to P}^T [\varphi]_B C_{B\to P}$ là một ma trận chéo (hay dạng toàn phương q trong cơ sở P có dạng chính tắc). Vấn đề đặt ra là làm thế nào để xác định ma trận $C_{B\to P}$ (từ đó xác định được cơ sở P), các phương pháp Lagrange và Jacobi đã giúp ta trả lời câu hỏi trên nhưng giờ chúng ta sẽ theo hướng tiếp cận khác dựa vào khái niệm ma trận trực giao.

Định nghĩa 5.6. *Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là ma trận trực giao nếu $AA^T = I_n$. Nói một cách tương đương, ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là ma trận trực giao nếu hệ vector dòng của A là một cơ sở trực chuẩn trong $\mathbb{R}^n$.*

Ví dụ 5.20. Ma trận $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ là ma trận trực giao.

Ví dụ 5.21. Ma trận $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ cũng là ma trận trực giao.

Định lý 5.7. *Cho P và P' là hai cơ sở trực chuẩn của không gian vector Euclide n chiều $\mathbb{V}$. Khi đó, các ma trận chuyển cơ sở $C_{P\to P'}$ và $C_{P'\to P}$ là các ma trận trực giao.*

Định lý 5.8. *Cho ma trận $A = (a_{ij})_n \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, các tính chất sau là tương đương:*

1. *A là ma trận trực giao.*
2. *A khả nghịch và $A^{-1} = A^T$.*
3. *Hệ vector dòng của A là một hệ trực chuẩn trong $\mathbb{R}^n$.*

Ví dụ 5.22. Tìm các giá trị $x, y, z (z > 0)$ để ma trận

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & z & 0 \\ y & 0 & x \end{pmatrix}$$

là ma trận trực giao.

Giải. Xét hệ vector dòng của ma trận A

$$P = (X_1 = (x, 0, x), X_2 = (0, z, 0), X_3 = (y, 0, x))$$

Vì A là ma trận trực giao nên hệ vector P là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$, do đó

$$\begin{cases} \langle X_1 | X_2 \rangle = \langle X_2 | X_3 \rangle = \langle X_1 | X_3 \rangle = 0 \\ \|X_1\|^2 = \|X_2\|^2 = \|X_3\|^2 = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 0 \\ 2x^2 = z^2 = x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $\left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}; y = -\frac{1}{\sqrt{2}}; z = 1\right)$ và $\left(x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; y = \frac{1}{\sqrt{2}}; z = 1\right)$. ■

Tiếp theo ta sẽ tìm hiểu cấu trúc của ma trận $[q]_B$, xác định mối quan hệ của ma trận $[q]_B$ với ma trận trực giao để dẫn tới thuật toán cần tìm. Vì q là dạng toàn phương nên ma trận $[q]_B$ là một ma trận thực, đối xứng. Với các ma trận đối xứng ta có một số kết quả quan trọng sau đây :

Định lý 5.9. *Nếu X, Y là hai vector riêng ứng với hai giá trị riêng khác nhau của ma trận đối xứng A thì $\langle X | Y \rangle = 0$.*

Định lý 5.10. *Nếu $A \in M_n(\mathbb{R})$ là một ma trận đối xứng thì A chéo hóa được. Hơn nữa, luôn tồn tại một ma trận trực giao C sao cho $C^T AC$ là một ma trận chéo với các phần tử nằm trên đường chéo chính là các giá trị riêng của ma trận A.*

Nhận xét 5.8. Ta giả sử ma trận $[q]_B$ có các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ với bội tương ứng là $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Vì ma trận $[q]_B$ chéo hóa được nên

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n \\ \dim E(\lambda_i) = n_i; i = \overline{1, k} \end{cases}$$

Áp dụng Định lý 5.9 chúng ta chứng tỏ được các không gian con riêng $E(\lambda_i); i = \overline{1,k}$ đôi một trực giao với nhau. Giả sử các hệ vector $P_1, P_2, \ldots, P_k$ lần lượt là cơ sở của các không gian con riêng $E(\lambda_i); i = \overline{1,k}$. Khi đó, các cơ sở $P_1, P_2, \ldots, P_k$ cũng đôi một trực giao với nhau.

Tiến hành trực chuẩn hóa Gram-Schmidt các cơ sở $P_i; i = \overline{1,k}$ ta sẽ được các cơ sở trực chuẩn $P_i'; i = \overline{1,k}$. Khi đó, hệ vector

$$P' = \bigcup_{i=1}^{k} P_i' = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$$

bao gồm các vector riêng của ma trận $[q]_B$ đồng thời là cơ sở trực chuẩn của không gian $\mathbb{R}^n$.

Do đó, nếu ta đặt $C = \begin{pmatrix} [Z_1] & [Z_2] & \ldots & [Z_n] \end{pmatrix}$ thì C là ma trận làm chéo của ma trận $[q]_B$ đồng thời là ma trận trực giao. Ta suy ra ma trận $C^T[q]_BC = C^{-1}[q]_BC$ là một ma trận chéo với các phần tử nằm trên đường chéo chính là các giá trị riêng của $[q]_B$.

Vì C khả nghịch nên tồn tại cơ sở P của $\mathbb{V}$ sao cho $C = C_{B\to P}$. Khi đó, ta nhận thấy rằng P là một cơ sở $q-$chính tắc.

Ví dụ 5.23. Cho q là dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$q(X) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

với $X = (x_1, x_2, x_3)$.

Đưa dạng toàn phương q về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao và tìm một cơ sở $q-$chính tắc.

Giải. Ma trận của dạng toàn phương q trong cơ sở chính tắc E_3

$$[q] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của ma trận $[q]$

$$P_{[q]}(\lambda) = \det(\lambda I_3 - [q]) = \lambda(\lambda - 3)^2$$

Đa thức đặc trưng $P_{[q]}(\lambda)$ có hai nghiệm $\lambda = 0$ và $\lambda = 3$ với bội tương ứng là 1 và 2.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$, ta xác định không gian con riêng $E(0)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(0) &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \{(\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Không gian con riêng $E(0)$ có cơ sở là hệ vector $P_1 = ((1,1,1))$. Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở P_1 ta được cơ sở trực chuẩn $P_1' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$, ta xác định không gian con riêng $E(3)$. Ta có

$$\begin{aligned} E(3) &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Không gian con riêng $E(3)$ có cơ sở là hệ vector

$$P_2 = ((-1,1,0), (-1,0,1))$$

Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở P_2 ta được cơ sở trực chuẩn

$$P_2' = \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right)$$

Ta suy ra, biểu thức tọa độ của q trong cơ sở trực chuẩn

$$P = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right)$$

có dạng chính tắc

$$q(X) = 0y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2$$

với $[X]_P = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. ■

5.3 Bài tập chương 5

Bài tập 5.1. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng cả ba phương pháp (phương pháp Lagrange, phương pháp Jacobi, phương pháp chéo hóa trực giao):

1. $q(X) = 2{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 8{x_2}^2$.
2. $q(X) = 3{x_1}^2 + 2{x_2}^2 + {x_3}^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.
3. $q(X) = 7{x_1}^2 + 10{x_2}^2 + 7{x_3}^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3$.
4. $q(X) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$.
5. $q(X) = 6{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3 + 4x_1x_3$.
6. $q(X) = x_1x_2 - x_2x_3 + x_1x_3$.

Bài tập 5.2. Cho dạng toàn phương $q(X) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 4{x_3}^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3$. Đối với cơ sở trực chuẩn

$$f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), f_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), f_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

dạng toàn phương trên có thể đưa về dạng chính tắc nào?