Bài giảng đang được chỉnh sửa

Quy hoạch tuyến tính

Bài giảng

Nguyễn Đức Phương

TP. HCM, Ngày 4 tháng 1 năm 2016

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	Tập số thực
$\mathbf{A}$	Ma trận hệ số vế phải của các ràng buộc
$\mathbf{b}$	Vector hệ số vế phải
$\mathbf{c}$	Vector hệ số hàm mục tiêu
$\mathbf{x}$	Phương án chấp nhận được
$\bar{\mathbf{x}}$	Phương án tối ưu
$\mathbf{x}^T$	Phép chuyển vị
$\lvert\mathbf{A}\rvert$	Định thức ma trận $\mathbf{A}$
$[\mathbf{x}]_T$	Tọa độ của vector theo $\mathbf{x}$ theo cơ sở T
$\mathbf{A}_j$	Cột j của ma trận hệ số $\mathbf{A}$
$\mathbf{e}_j$	Vector đơn vị thứ j
Δ_j	Là ước lượng của vector cột $\mathbf{A}_j$
$\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle$	Tích vô hướng của $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$
$B = \{\mathbf{A}_{k_1}; \ldots; \mathbf{A}_{k_m}\}$	Hệ vector liên kết
$\mathbf{c}^B = \{c_{k_1}; \ldots; c_{k_m}\}$	Hệ số hàm mục tiêu có chỉ số $k_1, \ldots, k_m$
$\mathbf{B}$	Ma trận có các cột là các vector của B
$\mathbf{A}_j^B$	Biểu diễn cột $\mathbf{A}_j$ theo cơ sở B

Mục lục

Chương 1

Giới thiệu quy hoạch tuyến tính

Mục lục chương 1

1.1 Một số ví dụ dẫn đến bài toán quy hoạch tuyến tính

Ví dụ 1.1 (Bài toán lập kế hoạch sản xuất)**.** Một trại cưa cưa các khúc gỗ thành các tấm ván. Có hai loại ván: ván thành phẩm và ván sử dụng trong xây dựng. Giả sử, đối với:

- Ván thành phẩm cần 2 giờ để cưa và 5 giờ để bào 10m ván.
- Ván dùng trong xây dưng cần 3 giờ để cưa và 3 giờ để bào 10m ván.

Máy cưa làm việc tối đa 8 giờ trong ngày, và máy bào làm việc tối đa 15 giờ trong ngày. Nếu lợi nhuận của 10m ván thành phẩm là 120 (ngàn đồng), và lợi nhuận của 10m ván xây dựng là 100 (ngàn đồng). Trong ngày, trại cưa phải cưa bao nhiêu ván mỗi loại để lợi nhuận lớn nhất?

Giải. Gọi $x_1, x_2 \geq 0$ là lượng ván thành phẩm và ván sử dụng trong xây dựng.

Thời gian \ Loại	Thành phẩm - x_1	Xây dựng - x_2	
Cưa	2	3	≤ 8
Bào	5	3	≤ 15
Lợi nhuận	120	100	

Tổng lợi nhuận

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

khi đó x_1, x_2 thỏa điều kiện thời gian làm việc máy cưa

$$2x_1 + 3x_2 \leq 8$$

và điều kiện về thời gian làm việc máy bào

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15$$

Tóm lại cần tìm x_1, x_2 sao cho

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Ví dụ 1.2 (Bài toán khẩu phần ăn)**.** Chuyên gia dinh dưỡng định thành lập một thực đơn gồm 2 loại thực phẩm chính A và B. Cứ một (trăm gram):

- Thực phẩm A chứa 2 đơn vị chất béo, 1 đơn vị carbohydrate và 4 đơn vị protein.
- Thực phẩm B chứa 3 đơn vị chất béo, 3 đơn vị carbohydrate và 3 đơn vị protein.

Nếu một (trăm gram) thực phẩm A giá 20 (ngàn đồng) và một (trăm gram) thực phẩm B giá 25 (ngàn đồng). Nhà dinh dưỡng muốn thức ăn phải cung cấp ít nhất 18 đơn vị chất béo, 12 đơn vị carbohydrate và 24 đơn vị protein. Bao nhiêu (trăm gram) thực phẩm mỗi loại để có giá nhỏ nhất nhưng vẫn cung cấp đủ dinh dưỡng?

Giải. Gọi x_1, x_2 lần lượt là lượng thực phẩm A và B.

Thành phần \ Loại	TP* A - x_1	TP B - x_2	
Chất béo	2	3	≥ 18
Carbohydrate	1	3	≥ 12
Protein	4	3	≥ 24
Giá mua	20	25	

tổng số tiền mua x_1, x_2 thực phẩm A và B là

$$z = 20x_1 + 25x_2 \to \min$$

Yêu cầu lượng thực phẩm phải đảm bảo nhu cầu chất béo

$$2x_1 + 3x_2 \geq 18$$

nhu cầu Carbohydrate

$$x_1 + 3x_2 \geq 12$$

nhu cầu Protein

$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$

Vậy ta cần tìm x_1, x_2 sao cho

$$z = 20x_1 + 25x_2 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 24 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Ví dụ 1.3 (Bài toán vận tải)**.** Một nhà sản xuất có 2 nhà máy: Một nhà máy ở Vĩnh Phúc và một nhà máy ở Bình Dương. Có 3 kho hàng phân phối sản phẩm đặt ở Hà Nội, TP. HCM và Cần Thơ. Nhà máy ở Vĩnh

*TP: Thực phẩm

phúc; Bình Dương, có khả năng cung cấp tối đa 100; 140 tấn mỗi tuần. Lượng cầu của các kho ở Hà Nội, TP. HCM và Cần Thơ lần lượt từ 100; 60 và 80 tấn trở lên. Chi phí vận chuyển (trăm ngàn) mỗi tấn cho như bảng bên dưới. Hỏi cần vận chuyển bao nhiêu tấn hàng hóa từ nhà sản xuất đến các kho hàng ở Hà Nội, TP. HCM và ở cần thơ để chi phí nhỏ nhất nhưng vẫn đáp ứng đủ nhu cầu?

Trạm thu / Trạm phát	Hà Nội W_1:100	TP. HCM W_2:60	Cần Thơ W_3:80
Vĩnh Phúc-Q_1: 100	5	7	9
Bình Dương-Q_2:140	8	7	10

Giải. Gọi x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ trạm phát thứ $i; i = 1, 2$ đến trạm thu thứ $j; j = 1, 2, 3$. Tổng chi phí vận chuyển

$$z = x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{23} \to \min$$

Trạm phát thì phát hết hàng và trạm thu thì nhận đủ hàng:

Trạm phát 1 phát hết hàng	$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100$
Trạm phát 2 phát hết hàng	$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 140$
Trạm thu 1 thu đủ hàng	$x_{11} + x_{21} = 100$
Trạm thu 2 thu đủ hàng	$x_{12} + x_{22} = 60$
Trạm thu 3 thu đủ hàng	$x_{13} + x_{23} = 80$

Vậy ta cần tìm x_{ij} sao cho

$$z = x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{23} \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 140 \\ x_{11} + x_{21} = 100 \\ x_{12} + x_{22} = 60 \\ x_{13} + x_{23} = 80 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

1.2 Các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính

1.2.1 Dạng tổng quát

Từ các ví dụ mục 1.1, bài toán quy hoạch tuyến tính dạng *tổng quát* được phát biểu như sau:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max \text{(hay min)} \quad (1.1)$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \le (\ge)(=) & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \le (\ge)(=) & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \le (\ge)(=) & b_m \end{cases} \quad (1.2)$$

- Hàm tuyến tính (1.1) gọi là hàm mục tiêu.

- Hệ bất phương trình, bất phương trình tuyến tính (1.2) gọi là các ràng buộc. Vế trái của các ràng buộc là các hàm tuyến tính với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các biến số.

1.2.2 Dạng chuẩn

Ta nói bài toán quy hoạch tuyến tính có *dạng chuẩn* nếu nó có dạng như sau:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max, \text{(hay min)} \quad (1.3)$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \le & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \le & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \le & b_m \end{cases} \quad (1.4)$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, \ldots, n \quad (1.5)$$

1.2.3 Dạng chính tắc

Ta nói bài toán quy hoạch tuyến tính có dạng *chính tắc*† nếu nó có dạng như sau:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max, \text{(hay min)} \tag{1.6}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1.7}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.8}$$

Ví dụ 1.4. Nhận dạng các bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

a. $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Có dạng chuẩn.

b. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \geq & -8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Có dạng tổng quát‡.

c. $z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ 6x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & \leq & 4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

Có dạng tổng quát.

---

†Một số sách có định nghĩa khác về dạng chuẩn và dạng chính tắc. Các bạn cần đọc kỹ định nghĩa khi tham khảo các tài liệu khác.

‡Có thể dễ dàng chuyển sang dạng chính tắc bằng cách nhân hai vế ràng buộc thứ 3 với -1

d. $z = 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

Có dạng chính tắc.

e. $z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$

Có dạng tổng quát.

f. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Có dạng tổng quát

Chú ý. Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu có thể viết thành bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu và ngược lại bằng quan hệ:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\min\left(-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \tag{1.9}$$

tương đương

$$\max z = -\min(-z) \tag{1.10}$$

Do đó, không mất tính tổng quát trong phần lý thuyết ta chỉ phát biểu bài toán tìm giá trị lớn nhất hàm mục tiêu ($\max z$). Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất hàm mục tiêu ($\min z$) thì có thể sử dụng (1.10) để chuyển sang bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu .

Ví dụ 1.5. Chuyển các bài toán quy hoạch tuyến tính tìm max hàm mục tiêu thành tìm min hàm mục tiêu hay ngược lại

a. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \geq & -8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

b. $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Giải.

a. Bài toán trong câu a tương đương với

$$-z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \geq & -8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

b. Bài toán trong câu b tương đương với

$$-z = -3x_1 - 2x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

1.3 Chuyển bài toán quy hoạch sang dạng chính tắc

1.3.1 Đổi chiều bất đẳng thức của các ràng buộc

Nếu ta nhân hai vế của bất phương trình

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n \geq b$$

với -1 ta được bất phương trình

$$-k_1x_1 - k_2x_2 - \cdots - k_nx_n \leq -b$$

Ví dụ 1.6. Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chuẩn:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Giải. Ta nhân ràng buộc thứ ba

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8$$

với -1, ta có bài toán quy hoạch dạng chuẩn tương đương:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 13x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

1.3.2 Biến không ràng buộc

Ta biết, một số bất kỳ chính là hiệu của hai số không âm. Giả sử x_j không có ràng buộc không âm, ta có thể thay x_j bằng hai biến $x_j^+ \geq 0$ và $x_j^- \geq 0$ sao cho

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

Với cách này, ta có thể chuyển bài toán không có ràng buộc không âm thành bài toán có ràng buộc không âm.[§]

Ví dụ 1.7. Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chuẩn

$$z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0$$

[§]Ở đây dấu $+, -$ trong x_j^+, x_j^- không thể hiện số lớn, số bé mà chỉ là x_j^+ là số trừ và x_j^- là số bị trừ.

Giải. Biến x_2 không có ràng buộc không âm. Đặt $x_2 = x_2^+ - x_2^-$, $(x_2^+, x_2^- \geq 0)$ bài toán quy hoạch trở thành:

$$z = 2x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2^+ - 9x_2^- \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0$$

1.3.3 Chuyển dạng chuẩn sang dạng chính tắc

Xét ràng buộc thứ i trong bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \tag{1.11}$$

Ta có thể chuyển ràng buộc (1.11) dạng bất phương trình thành phương trình bằng cách thêm vào *biến phụ* $x_{n+i} \geq 0$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \tag{1.12}$$

Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn chuyển thành dạng chính tắc có dạng như sau:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$$

Ví dụ 1.8. Chuyển bài toán sau sang dạng chính tắc

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Giải. Ta thêm hai biến phụ $x_3 \geq 0$ và $x_4 \geq 0$ vào ràng buộc thứ nhất và thứ hai thì được bài toán quy hoạch dạng chính tắc như sau:

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Ví dụ 1.9. Chuyển các bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chính tắc

a. $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Giải. Ta thêm vào hai ẩn phụ x_3 và x_4. Bài toán có dạng chính tắc

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

b. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Giải. Cộng hai ẩn phụ x_4, x_5 vào ràng buộc 1 và 2, riêng ràng buộc thứ 3 trừ ẩn phụ x_6. Bài toán có dạng chính tắc

$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = -8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$

c. $z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

Giải. Thêm ẩn phụ x_5 vào ràng buộc thứ 3

$z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5$

d. $z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$

Giải. Biến x_2 không có ràng buộc không âm. Thay $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ bài toán quy hoạch trở thành:

$z = 2x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2^+ - 9x_2^- \leq 8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0$

Thêm hai ẩn phụ x_3, x_4

$$z = 2x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 9x_2^+ - 9x_2^- + x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

e. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Giải. Biến x_2 không có ràng buộc không âm. Thay $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ bài toán tương đương với

$$z = 2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2^+ - x_2^- - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2^+ - x_2^- = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0$$

1.4 Dạng ma trận của bài toán quy hoạch

Xét bài toán quy hoạch dạng chuẩn:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

Đặt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Ta có thể viết bài toán quy hoạch trên thành dạng ma trận:

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Ví dụ 1.10. Viết bài toán quy hoạch tuyến tính sau dưới dạng ma trận.

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Giải. Đặt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 120 \\ 100 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Bài toán bây giờ là tìm $\mathbf{x}$ sao cho

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

1.5 Phương án chấp nhận được

Định nghĩa 1.1 (Phương án chấp nhận được)**.** *Vector* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *thỏa tất cả các ràng buộc của bài toán quy hoạch tuyến tính được gọi là phương án chấp nhận được.*

Ví dụ 1.11. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 8 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

và các phương án:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Phương án nào là phương án chấp nhận được?

Giải. Ràng buộc được viết lại

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Ta xét lần lượt các phương án $\mathbf{x}_i \geq 0, i = 1, \ldots, 4$.

- Với phương án $\mathbf{x}_1$

  $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

  Vậy $\mathbf{x}_1$ là phương án chấp nhận được.

- Với phương án $\mathbf{x}_2$

  $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

  Vậy $\mathbf{x}_2$ là phương án chấp nhận được.

- Với phương án $\mathbf{x}_3$

  $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

  Vậy $\mathbf{x}_3$ không là phương án chấp nhận được.

- Với phương án $\mathbf{x}_4$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

  Vậy $\mathbf{x}_4$ không là phương án chấp nhận được.

Định nghĩa 1.2 (Phương án tối ưu)**.** *Phương án chấp nhận được làm cho hàm mục tiêu có giá trị lớn nhất (nếu là bài toán* max*) hay nhỏ nhất (nếu là bài toán* min*) thì được gọi là phương án tối ưu.*

1.6 Ý nghĩa hình học của bài toán quy hoạch tuyến tính

Trong phần này ta xét đến phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng hình học. Phương pháp hình học chỉ giải những bài toán quy hoạch tuyến tính hai hoặc ba biến. Tuy nhiên, ý nghĩa của phương pháp này cho ta ý tưởng để xây dựng thuật toán có thể giải được bài toán nhiều biến hơn sẽ được trình bày trong chương 2.

1.6.1 Phương pháp đồ thị giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Ví dụ 1.12. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 4x + 3y \to \max$$

Với các ràng buộc

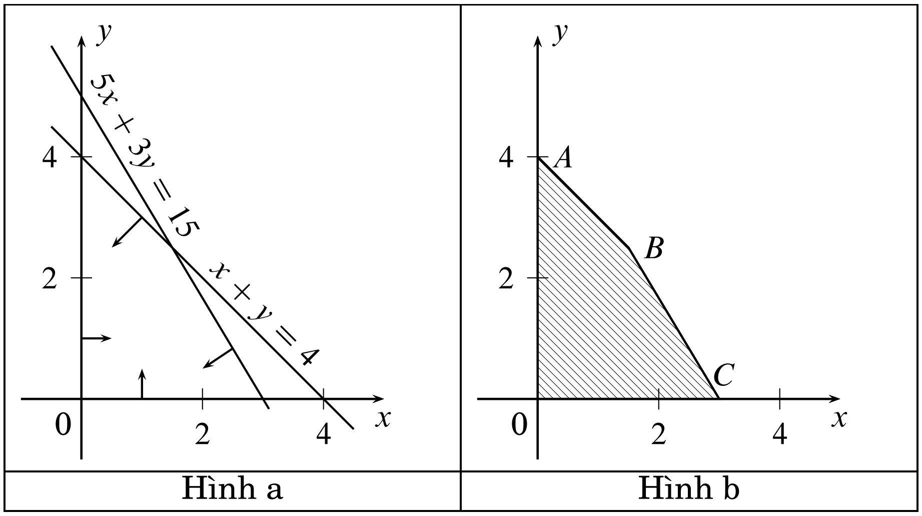
$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 5x + 3y \leq 15 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

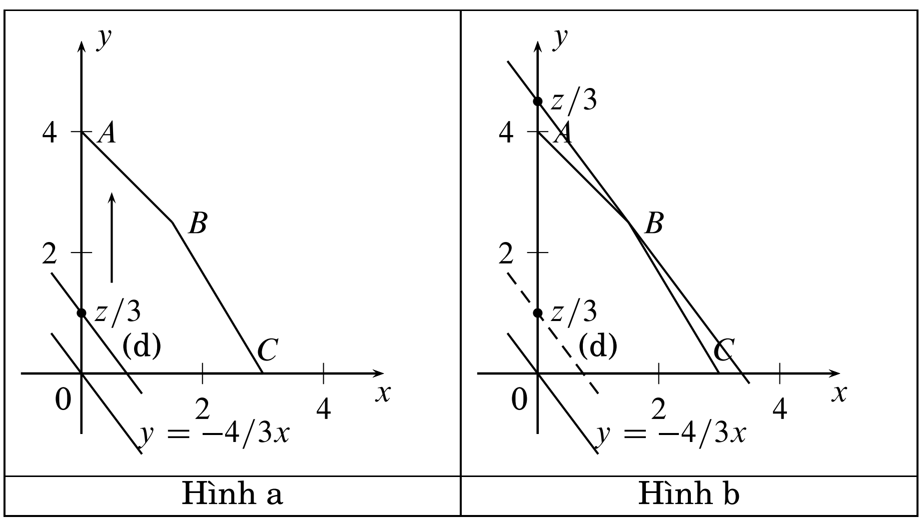
Giải. Tập các phương án chấp nhận được như hình 1.1b. Hàm mục tiêu được viết lại

$$y = -4/3x + z/3 \quad \text{(d)}$$

trong đó (d) là một đường thẳng **song song** với $y = -4/3x$ và cắt **trục tung** tại $z/3$.
Ta nhận thấy $z \to \max$ khi và chỉ khi $z/3 \to \max$. Như hình 1.2a, để tăng giá trị $z/3$ ta tịnh tiến đường (d) theo phương của đường thẳng $y = -4/3x$ sao cho đường (d) vẫn cắt tập chấp nhận được OABC.



Hình 1.1: Tập phương án chấp nhận được ví dụ 1.12



Hình 1.2: Biểu diễn hàm mục tiêu ví dụ 1.12

$z/3 \to$ max khi và chỉ khi (d) đi qua B(3/2;5/2). Vậy phương án tối ưu $x = 3/2, y = 5/2$ và giá trị hàm mục tiêu là $z = 27/2$.

Ví dụ 1.13. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

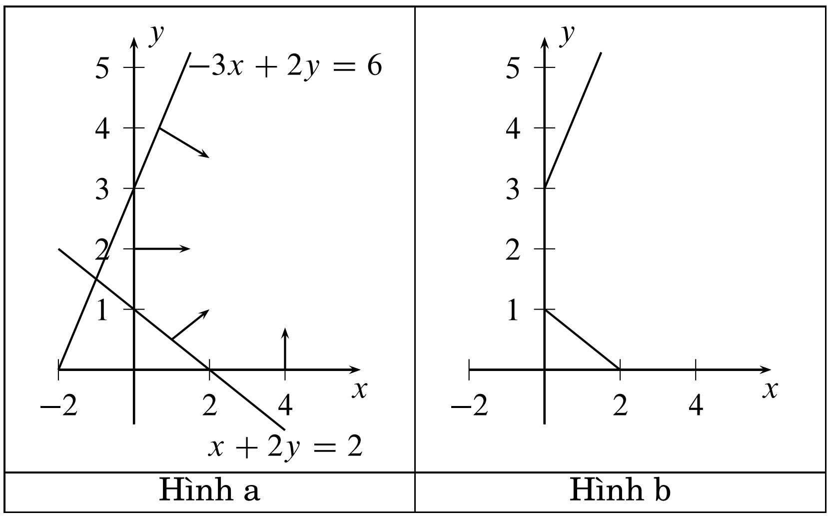
$$z = 2x + 5y \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} -3x + 2y \leq 6 \\ \quad x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Giải. Tập các phương án chấp nhận được như hình 1.3b. Tập các phương



Hình 1.3: Tập các phương án chấp nhận được ví dụ 1.13

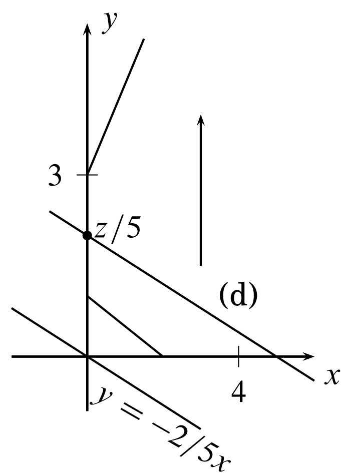
án chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính này là tập không bị chặn. Hàm mục tiêu được viết lại

$$y = -2/5x + z/5 \quad \text{(d)}$$

Đồ thị của (d) là đường thẳng song song với đường

$$y = -2/5x$$

và cắt trục tung tại $z/5$.
Ta nhận thấy $z \to \max$ khi và chỉ khi $z/5 \to \max$. Như hình 1.2, để tăng giá trị $z/3$ ta tịnh tiến đường (d) theo phương của đường thẳng $y = -2/5x$ sao cho đường (d) vẫn còn cắt tập chấp nhận được.
$z/5 \to +\infty$ khi ta tịnh tiến (d) hướng lên theo phương của $y = -2/5x$. Vậy bài toán không có phương án tối ưu



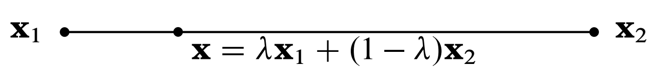
Hình 1.4: Biểu diễn hàm mục tiêu ví dụ 1.13

1.6.2 Tính chất của tập phương án chấp nhận được

Định nghĩa 1.3 (Đoạn thẳng)**.** *Đoạn thẳng nối hai điểm* $\mathbf{x}_1$ *và* $\mathbf{x}_2$ *được định nghĩa*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, \quad 0 \le \lambda \le 1\} \tag{1.13}$$

Theo đó, nếu $\lambda = 0$ ta có $\mathbf{x}_2$, và nếu $\lambda = 1$ ta có $\mathbf{x}_1$. Những điểm thuộc đoạn thẳng với $0 < \lambda < 1$ được gọi là các **điểm trong** của đoạn thẳng, và $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$ được gọi là **điểm biên** của đoạn thẳng.



Hình 1.5: $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ là hai điểm biên, $\mathbf{x}$ là điểm trong

Định lý 1.4. *Cho* $\mathbf{x}_1$ *và* $\mathbf{x}_2$ *là hai phương án chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính, và* $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, 0 \le \lambda \le 1$ *là điểm thuộc đoạn nối hai điểm* $\mathbf{x}_1$ *và* $\mathbf{x}_2$*. Khi đó:*

i. $\mathbf{x}$ *cũng là phương án chấp nhận được.*

ii. Nếu $\mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_2$ *thì* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_2$.

iii. Nếu $\mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 < \mathbf{c}^T\mathbf{x}_2$ *thì* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} < \mathbf{c}^T\mathbf{x}_2$.

Chứng minh. Giả sử bài toán quy hoạch tuyến tính có ràng buộc $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \le \mathbf{b}$. Vì $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$ là hai phương án chấp nhận được cho nên $\mathbf{a}^T\mathbf{x}_1 \le \mathbf{b}$ và $\mathbf{a}^T\mathbf{x}_2 \le \mathbf{b}$.

i. Với $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, 0 < \lambda < 1$ thuộc đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$, ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^T\mathbf{x} &= \mathbf{a}^T\left(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\right)\\ &= \lambda\mathbf{a}^T\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{a}^T\mathbf{x}_2\\ &\le \lambda\mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{b} < \mathbf{b}\end{aligned}$$

Do $\mathbf{x}$ thỏa ràng buộc cho nên $\mathbf{x}$ cũng là phương án chấp nhận được. Vậy các điểm thuộc đoạn nối hai phương án chấp nhận được cũng là các phương án chấp nhận được.

ii. Theo i), $\mathbf{x}$ là phương án chấp nhận được, giá trị hàm mục tiêu

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{c}^T\left(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\right)\\ &= \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x}_2\\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_2 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_1\end{aligned}$$

iii. Với $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, 0 < \lambda < 1$ thuộc đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$, ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{c}^T\left(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\right)\\ &= \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x}_2\\ &< \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{x}_2 + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x}_2 = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_2\end{aligned}$$

Từ định lý này, xét tập các phương án chấp nhận được là đoạn thẳng nối bởi hai điểm $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ thì một điểm biên có giá trị hàm mục tiêu lớn nhất và điểm biên còn lại có giá trị hàm mục tiêu nhỏ nhất. □

Ví dụ 1.14. Xem lại bài toán quy hoạch như ví dụ 1.12 trang 16.

$$z = 4x + 3y \to \max$$

Với các ràng buộc

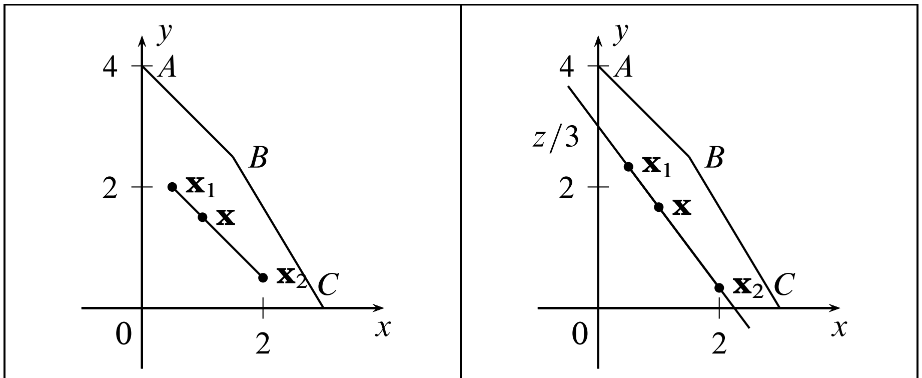
$$\begin{cases} x + y \le 4 \\ 5x + 3y \le 15 \end{cases}$$

$$x \ge 0, y \ge 0$$

a. Ta thấy $\mathbf{x}_1^T = (1/2; 2), \mathbf{x}_2^T = (2; 1/2)$ là phương án chấp nhận được và điểm $\mathbf{x}$ thuộc đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Điểm $\mathbf{x}$ định bởi

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{x}_2, \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

cũng là phương án chấp nhận được, xem hình 1.6a.



Hình a	Hình b

Hình 1.6:

b. Cho hai phương án chấp nhận được $\mathbf{x}_1^T = (1/2; 7/3)$ và $\mathbf{x}_2^T = (2; 1/3)$ có cùng giá trị hàm mục tiêu là $(z/3 = 3)$, thì phương án $\mathbf{x}$ thuộc đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$. Điểm $\mathbf{x}$ định bởi

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\,\mathbf{x}_2, \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

cũng cùng giá trị hàm mục tiêu là $(z/3 = 3)$, xem hình 1.6b. □

Định nghĩa 1.5 (Tập lồi)**.** *Tập $S \in \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu với hai điểm phân biệt bất kỳ $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$ thuộc S thì đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$ cũng nằm trong tập S.*

Ví dụ 1.15. Các tập con của $\mathbb{R}^2$ trong hình 1.7 là các tập lồi. Các tập con của $\mathbb{R}^2$ trong hình 1.8 không phải là tập lồi. □

Định lý 1.6. *Tập tất cả các phương án chấp nhận được $S = \{\mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là một tập lồi.*

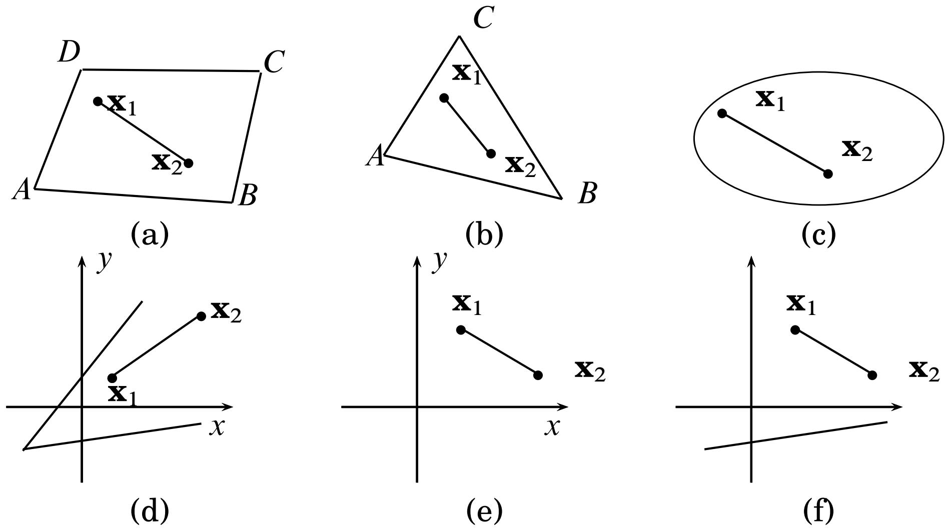
Chứng minh. Gọi $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in S$ là hai phương án chấp nhận được, theo định lý 1.4i thì

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$$

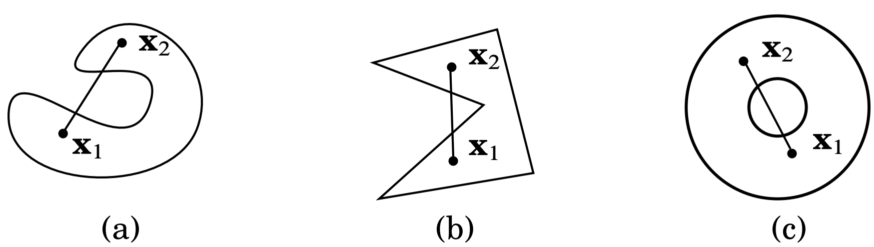
cũng là phương chấp nhận được, hay $\mathbf{x} \in S$. Vậy S là tập lồi. □

1.7 Phương án cực biên

Định nghĩa 1.7 (Tổ hợp lồi)**.** *Điểm $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ là tổ hợp lồi của r điểm $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ trong $\mathbb{R}^n$ nếu tồn tại $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r = 1$ sao cho $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_r\mathbf{x}_r$.*



Hình 1.7: Các tập lồi



Hình 1.8: Các tập không phải tập lồi

Định lý 1.8. *Tập chứa tất các tổ hợp lồi của hữu hạn các điểm trong $\mathbb{R}^n$ là một tập lồi.*

Chứng minh. Gọi S là tập chứa tất cả các tổ hợp lồi của r điểm $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ trong $\mathbb{R}^n$. Lấy $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{x}_r, \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0$$

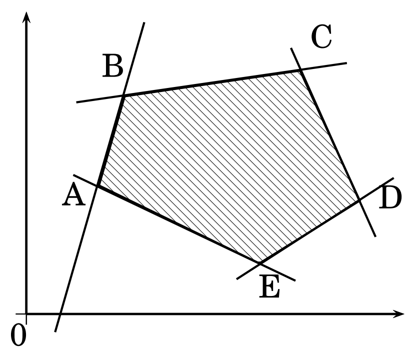
$$\mathbf{y} = \lambda_1' \mathbf{x}_1 + \lambda_2' \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_r' \mathbf{x}_r, \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i' = 1, \quad \lambda_i' > 0$$

Điểm thuộc đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ có dạng

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \\ &= \Big((\lambda\lambda_1 + \lambda_1' - \lambda\lambda_1')\mathbf{x}_1 + (\lambda\lambda_2 + \lambda_2' - \lambda\lambda_2')\mathbf{x}_2 + \cdots + (\lambda\lambda_r + \lambda_r' - \lambda\lambda_r')\mathbf{x}_r\Big)\end{aligned}$$

Ta thấy $\sum_{i=1}^{r} \lambda\lambda_i + \lambda_i' - \lambda\lambda_i' = 1, \quad \lambda\lambda_i + \lambda_i' - \lambda\lambda_i' > 0$, vậy $\mathbf{z} \in S$. Suy ra S là tập lồi. □

Định nghĩa 1.9 (Điểm cực biên của tập lồi)**.** *Điểm* $\mathbf{x}$ *thuộc tập lồi* S *được gọi là điểm cực biên của* S *nếu* $\mathbf{x}$ *không là tổ hợp lồi của hai điểm của* S *khác* $\mathbf{x}$.



Hình 1.9:

Ví dụ 1.16. Tập lồi như hình 1.9, các đỉnh A, B, C, D và E của đa giác là điểm cực biên. □

Nhận xét. Từ định nghĩa điểm cực biên của tập lồi, ta thấy điểm $\mathbf{x} \in S$ là điểm cực biên nếu một đoạn thẳng bất kỳ trong S chứa $\mathbf{x}$ thì $\mathbf{x}$ là điểm biên.

Định nghĩa 1.10 (Phương án cực biên)**.** *Điểm cực biên của tập các phương án chấp nhận được còn gọi là phương án cực biên.*

1.7.1 Thành lập phương án cơ bản chấp nhận

Trong phần này ta sẽ kết hợp ý tưởng của phương pháp hình học và phương án cực biên được trình bày trong phần 1.6 và 1.7 để giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng công cụ đại số.

Do phương án cực biên rất khó xác định bằng phương pháp hình học khi bài toán quy hoạch có từ ba biến trở lên. Cho nên trong phần này tôi sẽ trình bày phương pháp đại số để tìm phương án cực biên. Các khái niệm được trình bày trong phần này là **nghiệm cơ bản, phương án cơ bản chấp nhận được, phương án cực biên**. Để có thể định nghĩa phương án cơ bản, trước hết ta xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max \tag{1.14}$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1.15}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{1.16}$$

Trong đó $\mathbf{A}$ là ma trận cấp $m \times n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, và $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Đặt các cột của ma trận $\mathbf{A}$ là $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$. Ràng buộc (1.15) được viết thành

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{b} \tag{1.17}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử:

- Thứ nhất là $m \leq n$.
- Thứ hai là ma trận $\mathbf{A}$ có m dòng độc lập tuyến tính. Nghĩa là hạng của $\mathbf{A}$ là m, khi đó trong n cột của $\mathbf{A}$ sẽ có m cột độc lập tuyến tính.

Nghiệm cơ bản của $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Nghiệm cơ bản của $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ được xây dựng như sau:

(1) Chọn[¶] tập B gồm m cột $\mathbf{A}_{k_1}, \mathbf{A}_{k_2}, \ldots, \mathbf{A}_{k_m}$ độc lập tuyến tính của A (Chọn cơ sở cho $\mathbb{R}^m$).

(2) $n - m$ biến tương ứng với các cột còn lại cho bằng không.

(3) Phương trình $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ được viết lại

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{b} \tag{1.18}$$

Trong đó $\mathbf{A}_i$ là cột thứ i của $\mathbf{A}$. Đặt $k_1, k_2, \ldots, k_m$ là chỉ số các biến không cho bằng bằng không. Hệ phương trình (1.18) được viết gọn

$$x_{k_1}\mathbf{A}_{k_1} + x_{k_2}\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + x_{k_m}\mathbf{A}_{k_m} = \mathbf{b} \tag{1.19}$$

hệ này có m phương trình, m ẩn có duy nhất một nghiệm.

[¶]Sẽ có nhiều nhất C_n^m tập B

(4) Nghiệm của hệ này kết hợp với $n - m$ thành phần ta cho bằng không ở trên được gọi là nghiệm cơ bản của $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Ví dụ 1.17. Cho hệ phương trình tuyến tính bốn ẩn như sau

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

Tìm tất cả nghiệm cơ bản của hệ phương trình.

Giải. Lần lượt xét các trường hợp:

Trường hợp 1. Chọn $B = \{A_1; A_2\}$ định thức

$$|A_1 \vdots A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

Cho $x_3 = x_4 = 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 15 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x_1 = 3/2; x_2 = 5/2$. Vậy $\mathbf{x}_1^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$ là một nghiệm cơ bản.

Trường hợp 2. Chọn $B = \{A_1; A_3\}$ định thức

$$|A_1 \vdots A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \text{ (T độc lập tuyến tính)}$$

Cho $x_2 = x_4 = 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 5x_1 = 15 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x_1 = 3; x_3 = 1$. Vậy $\mathbf{x}_2^T = (3; 0; 1; 0)$ là một nghiệm cơ bản.

Trường hợp 3. Chọn $B = \{A_1; A_4\}$ định thức

$$|A_1 \vdots A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ (T độc lập tuyến tính)}$$

Cho $x_2 = x_3 = 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ 5x_1 + x_4 = 15 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x_1 = 4; x_4 = -5$. Vậy $\mathbf{x}_3^T = (4; 0; 0; -5)$ là một nghiệm cơ bản.

Trường hợp 4. Chọn $B = \{A_2; A_3\}$ định thức

$$|A_2 \vdots A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \text{ (T độc lập tuyến tính)}$$

Cho $x_1 = x_4 = 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 = 15 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x_2 = 5; x_3 = -1$. Vậy $\mathbf{x}_4^T = (0; 5; -1; 0)$ là một nghiệm cơ bản.

Trường hợp 5. Chọn $B = \{A_2; A_4\}$ định thức

$$|A_2 \vdots A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \text{ (T độc lập tuyến tính)}$$

Cho $x_1 = x_3 = 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_2 = 4 \\ 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x_2 = 4; x_4 = 3$. Vậy $\mathbf{x}_5^T = (0; 4; 0; 3)$ là một nghiệm cơ bản.

Trường hợp 6. Chọn $B = \{A_3; A_4\}$ định thức

$$|A_3 \vdots A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ (T độc lập tuyến tính)}$$

Cho $x_1 = x_2 = 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = 15 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x_3 = 4; x_4 = 15$. Vậy $\mathbf{x}_6^T = (0; 0; 4; 15)$ là một nghiệm cơ bản.

Trong một nghiệm cơ bản bất kỳ, $n - m$ biến có giá trị cho bằng không được gọi là **biến không cơ bản**, và m biến giải được gọi là **biến cơ bản**.

Chú ý. Nghiệm cơ bản là nghiệm của hệ phương trình $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nên nó không cần phải thỏa điều kiện $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, và do đó nghiệm cơ bản không nhất thiết phải là phương án chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính. (1.14), (1.15) và (1.16).

Định nghĩa 1.11. *Cho $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là phương án chấp nhận được của bài toán quy hoạch dạng chính tắc. Tập $B = \{\mathbf{A}_j : x_j > 0\}$ được gọi là hệ vector liên kết.*

Phương án cơ bản chấp nhận được

Định nghĩa 1.12 (Phương án cơ bản chấp nhận được)**.** *Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có tập các ràng buộc* $S = \{\mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$*, nghiệm cơ bản của* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *thỏa điều kiện* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ *được là phương án cơ bản chấp nhận được.*

Ví dụ 1.18. Tìm tất cả các phương án cơ bản chấp nhận được của

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Giải. Theo ví dụ 1.17, ta có nghệm cơ bản của $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ và phương án cơ bản chấp nhận được cho như bảng bên dưới:

Nghiệm cơ bản	Phương án cơ bản cnđ
$\mathbf{x}_1^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$	$\mathbf{x}_1^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$
$\mathbf{x}_2^T = (3; 0; 1; 0)$	$\mathbf{x}_2^T = (3; 0; 1; 0)$
$\mathbf{x}_3^T = (4; 0; 0; -5)$	
$\mathbf{x}_4^T = (0; 5; -1; 0)$	
$\mathbf{x}_5^T = (0; 4; 0; 3)$	$\mathbf{x}_5^T = (0; 4; 0; 3)$
$\mathbf{x}_6^T = (0; 0; 4; 15)$	$\mathbf{x}_6^T = (0; 0; 4; 15)$

1.7.2 Thành lập phương án cực biên

Định lý 1.13. *Giả sử m cột của* $\mathbf{A}$*, được ký hiệu* $\mathbf{A}_{k_1}, \mathbf{A}_{k_2}, \ldots, \mathbf{A}_{k_m}$ *là độc lập tuyến tính và*

$$x_{k_1}\mathbf{A}_{k_1} + x_{k_2}\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + x_{k_m}\mathbf{A}_{k_m} = \mathbf{b} \tag{1.20}$$

và $x_{k_j} \geq 0, \forall j = 1, 2, \ldots, m$*. Khi đó phương án cơ bản chấp nhận được* $\mathbf{x}^T = (x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_m}, 0, 0, \ldots, 0)$ *là phương án cực biên.*

Chứng minh. Dễ dàng ta có $\mathbf{x}$ là phương án chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính (1.14), (1.15) và (1.16).
Giả sử $\mathbf{x}$ không là điểm cực biên của S. Khi đó $\mathbf{x}$ là điểm trong của một đoạn thuộc S. Nghĩa là có hai điểm phân biệt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ khác $\mathbf{x}$ và số $\lambda, 0 < \lambda < 1$ sao cho

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v} \tag{1.21}$$

Trong đó
$$\mathbf{u}^T = (u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots, u_{k_m}, u_{k_{m+1}}, \ldots, u_{k_n}) \geq \mathbf{0}$$
và
$$\mathbf{v}^T = (v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_m}, v_{k_{m+1}}, \ldots, v_{k_n}) \geq \mathbf{0}$$
Từ (1.21) ta có
$$\begin{aligned} 0 &= \lambda u_{k_j} + (1-\lambda) v_{k_j}, \quad m+1 \leq j \leq n \\ x_{k_j} &= \lambda u_{k_j} + (1-\lambda) v_{k_j}, \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned} \tag{1.22}$$
Bởi vì u_{k_j}, v_{k_j} và $\lambda, 1-\lambda$ là các số dương cho nên $u_{k_j} = 0$ và $v_{k_j} = 0$ với $i = m+1, \ldots, n$. $\mathbf{u}$ là phương án chấp nhận được nên
$$u_{k_1}\mathbf{A}_{k_1} + u_{k_2}\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + u_{k_n}\mathbf{A}_{k_n} = \mathbf{b} \tag{1.23}$$
Lấy (1.20) trừ cho (1.23) ta được
$$(x_{k_1} - u_{k_1})\mathbf{A}_{k_1} + (x_{k_2} - u_{k_2})\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + (x_{k_n} - u_{k_n})\mathbf{A}_{k_n} = \mathbf{b}$$
Bởi vì $\mathbf{A}_{k_1}, \mathbf{A}_{k_2}, \ldots, \mathbf{A}_{k_m}$ độc lập tuyến tính nên
$$x_{k_j} = v_{k_j}, \quad \forall 1 \leq j \leq m$$
hay $\mathbf{x} = \mathbf{u}$, suy ra giả sử $\mathbf{x} \neq \mathbf{u}$ là sai. Vậy $\mathbf{x}$ là điểm cực biên của S. □

Nhận xét. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (x_1; \ldots; x_n)$ là phương án cực biên:

- Kiểm $\mathbf{x}$ là phương án chấp nhận được.
- Đặt hệ vector liên kết $B = \{\mathbf{A}_j | x_j > 0\}$, trong đó $\mathbf{A}_j$ là các vector cột của $\mathbf{A}$.
- Nếu B độc lập tuyến tính thì $\mathbf{x}$ là phương án cực biên. □

Ví dụ 1.19. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (1; 2; 3; 0)$ là phương án cực biên của

$$z = -4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 \to \min$$
Với các ràng buộc
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 21 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 15 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Giải. $\mathbf{x}^T = (1; 2; 3; 0)$ là phương án chấp nhận được

- Vì $x_1, x_2, x_3 > 0$ nên ta xét $B = \{A_1; A_2; A_3\}$.
- Lập định thức

$$|A_1 \vdots A_2 \vdots A_3| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

nên $\mathbf{x}^T$ là phương án cực biên. □

Định nghĩa 1.14. *Phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc được gọi là **không suy biến** nếu số thành phần dương của nó là m. Nếu số thành phần dương ít hơn m thì gọi là phương án cực biên **suy biến**.*

Định lý 1.15. *Nếu $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là phương án cực biên của tập các phương án $S = \{\mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ thì các cột của $\mathbf{A}$ tương ứng $x_j > 0$ độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Gọi $\mathbf{A}_{k_1}, \mathbf{A}_{k_2}, \ldots, \mathbf{A}_{k_l}$ là l cột của $\mathbf{A}$ ứng với $x_{k_l} > 0$. Phương trình (1.17), $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ được viết lại:

$$x_{k_1}\mathbf{A}_{k_1} + x_{k_2}\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + x_{k_l}\mathbf{A}_{k_l} = \mathbf{b} \tag{1.24}$$

Ta cần chứng minh rằng $\mathbf{A}_{k_1}, \mathbf{A}_{k_2}, \ldots, \mathbf{A}_{k_l}$ là độc lập tuyến tính. Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử chúng không độc lập tuyến tính. Nghĩa là tồn tại $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \neq 0$ sao cho

$$c_1\mathbf{A}_{k_1} + c_2\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + c_k\mathbf{A}_{k_l} = \mathbf{0} \tag{1.25}$$

Nhân (1.25) với hằng số $d > 0$, đầu tiên ta cộng kết quả với (1.24) ta được phương trình (1.26), sau đó ta trừ kết quả với (1.24) ta được phương trình (1.27).

$$(x_{k_1} + dc_1)\mathbf{A}_{k_1} + (x_{k_2} + dc_2)\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + (x_{k_l} + dc_{k_l})\mathbf{A}_{k_l} = \mathbf{b} \tag{1.26}$$

$$(x_{k_1} - dc_1)\mathbf{A}_{k_1} + (x_{k_2} - dc_2)\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + (x_{k_l} - dc_{k_l})\mathbf{A}_{k_l} = \mathbf{b} \tag{1.27}$$

Bây giờ ta chọn hai điểm trong $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{v}^T = (0, 0, \ldots, 0, x_{k_1} + dc_1, x_{k_2} + dc_2, \ldots, x_{k_l} + dc_k)$$

và

$$\mathbf{w}^T = (0, 0, \ldots, 0, x_{k_1} - dc_1, x_{k_2} - dc_2, \ldots, x_{k_l} - dc_k)$$

Bởi vì d là hằng số dương bất kỳ, ta chọn như sau:

$$0 < d < \min_j \frac{x_{k_j}}{|c_j|}, \quad c_j \neq 0$$

Với cách chọn d như trên, ta thấy k thành phần sau của $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ là các số dương. Mặc khác, từ (1.26) và (1.27) ta cũng có $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ là phương án chấp nhận được. Nhưng ta lại có

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w},$$

trái với giả thiết ban đầu $\mathbf{x}$ là điểm cực biên. Vậy giả sử k cột cuối của $\mathbf{A}$ không độc lập tuyến tính là sai. □

Hệ quả 1.16. *Số phương án cực biên của tập phương án chấp nhận được* $S = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ *là hữu hạn.*

Chứng minh. Bởi vì số hệ có m vector cột độc lập tuyến tính là hữu hạn, nên theo định lý 1.15 thì số phương án cực biên của S là hữu hạn. □

Hệ quả 1.17. *Số thành phần dương của một phương án cực biên tối đa là* m.

Chứng minh. Theo định lý 1.15, các cột của $\mathbf{A}$ tương ứng với các thành phần dương của phương án cực biên $\mathbf{x} \in S$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^m$. Nhưng không thể có nhiều hơn m vector độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^m$. Vậy hệ quả đã được chứng minh. □

Định lý 1.18. $\mathbf{x}$ *là phương án cực biên của* $S = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ *khi và chỉ khi* $\mathbf{x}$ *là phương án cơ bản chấp nhận được.*

Ví dụ 1.20. Tìm tất cả các phương án cực biên của

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Giải. Từ định lý 1.18 ta thấy phương án cơ bản chấp nhận được chính là phương án cực biên. Theo ví dụ 1.18 ta có kết quả:

1.7.3 Tìm phương án tối ưu từ phương án cực biên

Định lý 1.19. *Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì sẽ có một phương án cực biên là phương án tối ưu.*

Phương án cơ bản cnđ	Phương án cực biên
$\mathbf{x}_1^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$	$\mathbf{x}_1^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$
$\mathbf{x}_2^T = (3; 0; 1; 0)$	$\mathbf{x}_2^T = (3; 0; 1; 0)$
$\mathbf{x}_3$ không phải	
$\mathbf{x}_4$ không phải	
$\mathbf{x}_5^T = (0; 4; 0; 3)$	$\mathbf{x}_5^T = (0; 4; 0; 3)$
$\mathbf{x}_6^T = (0; 0; 4; 15)$	$\mathbf{x}_6^T = (0; 0; 4; 15)$

Nhận xét. Nhờ định lý 1.19, nếu ta chứng minh được bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu, thì nó sẽ có phương án cực biên là phương án tối ưu. Trên đây ta có thể tìm được tất cả các phương án cực biên (vì số phương án cực biên là hữu hạn theo hệ quả). Do đó trong số các phương án cực biên vừa chỉ ra, lần lượt thử từng phương án ta được phương án tối ưu. □

Định lý 1.20. *Nếu tập phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát không rỗng và là một đa diện lồi thì bài toán sẽ có ít nhất một phương án tối ưu là phương án cực biên.*

Định lý 1.21. *Điều kiện cần và đủ để bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu là tập các phương án không rỗng và hàm mục tiêu bị chặn trên (nếu là bài toán* max*) hoặc bị chặn dưới (nếu là bài toán* min*).*

Ví dụ 1.21. Tìm phương án tối ưu của

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4$$

Giải. Từ hệ các ràng buộc ta có

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq 3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$$

suy ra $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4$ và hàm mục tiêu bị chặn trên bởi 27, do đó bài toán có phương án tối ưu là phương án cực biên. Trong ví dụ 1.20 ta đã tìm được tất cả các phương án cực biên:

Phương án cực biên	Giá trị z
$\mathbf{x}_1^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$	27/2
$\mathbf{x}_2^T = (3; 0; 1; 0)$	12
$\mathbf{x}_5^T = (0; 4; 0; 3)$	12
$\mathbf{x}_6^T = (0; 0; 4; 15)$	0

Vậy phương án tối ưu là $(3/2; 5/2; 0; 0)$.

1.8 Bài tập chương 1

Bài tập 1.1. Bằng phương pháp hình học giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -4x_1 + 3x_2 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Đáp án: Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (4; 2)$ giá trị hàm mục tiêu $z = -10$.

Bài tập 1.2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 52 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 60 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, 5$$

Chứng minh $\mathbf{x}^T = (0; 34/3; 22/3; 0; 2)$ là phương án cực biên.

Bài tập 1.3. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3$$

a. Tìm tất cả các phương án cực biên.
b. Tìm phương án tối ưu.

Đáp án:

a. Phương án cực biên $\mathbf{x}_1^T = (2; 4; 0)$; $\mathbf{x}_2^T = (6; 0; 8)$
b. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (2; 4; 0)$

Chương 2

Phương pháp đơn hình

Mục lục chương 2

2.1 Phương pháp đơn hình cho bài toán dạng chính tắc có sẵn ma trận đơn vị

2.1.1 Phương pháp đơn hình

Năm 1947, nhà toán học George Bernard Danzig đưa ra phương pháp đơn hình, ý tưởng cơ bản của phương pháp là bắt đầu xét từ một phương án cực biên ban đầu (phương án cơ bản chấp nhận được), ta xem nó có là phương án tốt nhất hay chưa, nếu chưa là phương án tốt nhất ta lần lượt xét đến các phương án cực biên liền kề sao cho làm tăng giá trị hàm mục tiêu. Quá trình tiến hành đến lúc thu được phương án tối ưu hoặc giá trị hàm mục tiêu không hữu hạn. Phương pháp đơn hình có bốn bước:

Bước 1. Thành lập một phương án cực biên.

Bước 2. Xét xem phương án cực biên hiện hành đã là phương án tối ưu hay chưa bằng dấu hiệu tối ưu (xem tiếp trang 52). Nếu phương án cực biên này là phương án tối ưu thì kết thúc. Ngược lại, nếu bài toán có phương án mới tốt hơn (xem tiếp trang 39) thì sang **bước 3**.

Bước 3. Xây dựng một phương án cực biên mới sao cho giá trị hàm mục tiêu lớn hơn hoặc bằng giá trị hàm mục tiêu của phương án cực biên trước đó.

Bước 4. Quay về **bước 2**.

Ta xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc như sau:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max \tag{2.1}$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}_1x_1 + \mathbf{A}_2x_2 + \cdots + \mathbf{A}_nx_n = \mathbf{b} \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n \tag{2.3}$$

Giả sử có phương án cực biên $\mathbf{x}$ có m thành phần dương là $x_{k_1},\ldots,x_{k_m}$ (cực biên không suy biến) và hệ vector cơ sở liên kết là $B = \{\mathbf{A}_{k_1};\ldots;\mathbf{A}_{k_m}\}$. Ta đặt

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{A}_{k_1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}_{k_m}\right); \mathbf{c}^B = (c_{k_1};\ldots;c_{k_m}); \mathbf{x}^B = (x_{k_1};\ldots;x_{k_m})$$

Biểu diễn các cột của hệ các ràng buộc 2.5 theo cơ sở B, ta được hệ ràng buộc tương đương

$$\underbrace{[\mathbf{A}_{k_1}]_B}_{\mathbf{A}^B_{k_1}} x_{k_1} + \underbrace{[\mathbf{A}_{k_2}]_B}_{\mathbf{A}^B_{k_2}} x_{k_2} + \cdots + \underbrace{[\mathbf{A}_{k_m}]_B}_{\mathbf{A}^B_{k_m}} x_{k_m} + \cdots + \underbrace{[\mathbf{A}_{k_n}]_B}_{\mathbf{A}^B_{k_n}} x_{k_n} =^* \underbrace{[\mathbf{b}]_B}_{\mathbf{b}^B}$$

Bài toán được viết lại:

$$z = c_{k_1}x_1 + c_{k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{k_m}x_{k_m} + \cdots + c_{k_n}x_{k_n} \to \max \tag{2.4}$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}^B_{k_1}x_{k_1} + \mathbf{A}^B_{k_2}x_{k_2} + \cdots + \mathbf{A}^B_{k_m}x_{k_m} + \cdots + \mathbf{A}^B_{k_n}x_{k_n} = \mathbf{b}^B \tag{2.5}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n \tag{2.6}$$

$^*[\mathbf{A}_{k_j}]_B$ là tọa độ của cột $\mathbf{A}_{k_j}$ theo cơ sở B

Bài toán được viết tường minh như sau

$$z = c_{k_1}x_{k_1} + c_{k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{k_m}x_{k_m} + \cdots + c_{k_n}x_{k_n} \to \max \tag{2.7}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_{k_1} & & & +a_{1k_{m+1}}x_{k_{m+1}} + \cdots + a_{1k_n}x_{k_n} & = b_1 \\ & x_{k_2} & & +a_{2k_{m+1}}x_{k_{m+1}} + \cdots + a_{2k_n}x_{k_n} & = b_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & x_{k_m} & +a_{mk_{m+1}}x_{k_{m+1}} + \cdots + a_{mk_n}x_{k_n} & = b_m \end{cases} \tag{2.8}$$

$$x_{k_j} \geq 0, j = 1, \ldots, n \tag{2.9}$$

trong đó $0 < \mathbf{b}$.

Chú ý.

- $\mathbf{A}^B_{k_j} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{k_j}$ và $\mathbf{b}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.
- $\mathbf{A}^B_{k_j}, j = 1, \ldots, m$ là các vector đơn vị.

2.1.2 Dấu hiệu tối ưu

Trong phần này, ta sẽ tìm hiểu dấu hiệu để biết một phương án cực biên có là phương án tối ưu hay không. Trước hết, ta nhân ràng buộc thứ i cho c_{k_i}, các ràng buộc trở thành:

$$\begin{pmatrix} c_{k_1}1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c_{k_m}1 \end{pmatrix} x_m + \begin{pmatrix} c_{k_1}a_{1k_{m+1}} \\ c_{k_2}a_{2k_{m+1}} \\ \vdots \\ c_{k_m}a_{mk_{m+1}} \end{pmatrix} x_{k_{m+1}} + \cdots$$
$$+ \begin{pmatrix} c_{k_1}a_{1k_n} \\ c_{k_2}a_{2k_n} \\ \vdots \\ c_{k_m}a_{mk_n} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} c_{k_1}b_1 \\ c_{k_2}b_2 \\ \vdots \\ c_{k_m}b_m \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Lấy tổng của m ràng buộc ở trên ta được

$$\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_1}\rangle^\dagger x_{k_1} + \cdots + \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_m}\rangle x_{k_m} + \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_{m+1}}\rangle x_{k_{m+1}} + \cdots$$
$$+ \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_n}\rangle x_{k_n} = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B\rangle \tag{2.11}$$

chuyển vế trái của 2.11 qua vế phải ta được

$$\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B\rangle - \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_1}\rangle x_{k_1} - \cdots - \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_m}\rangle x_{k_m}$$
$$- \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_{m+1}}\rangle x_{k_{m+1}} - \cdots - \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_n}\rangle x_{k_n} = 0 \tag{2.12}$$

cộng vế trái của 2.12 vào hàm mục tiêu 2.7 ta được

$$\begin{aligned} z = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B\rangle - &\underbrace{\left(\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_1}\rangle - c_{k_1}\right)}_{\Delta_{k_1}} x_{k_1} \\ &- \underbrace{\left(\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_2}\rangle - c_{k_2}\right)}_{\Delta_{k_2}} x_{k_2} - \cdots - \underbrace{\left(\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_m}\rangle - c_{k_m}\right)}_{\Delta_{k_m}} x_{k_m} \\ &- \underbrace{\left(\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_{m+1}}\rangle - c_{k_{m+1}}\right)}_{\Delta_{k_{m+1}}} x_{k_{m+1}} - \cdots - \underbrace{\left(\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_n}\rangle - c_{k_n}\right)}_{\Delta_{k_n}} x_{k_n} \end{aligned}$$

trong đó

$$\Delta_{k_1} = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_1}\rangle - c_{k_1} = (1; 0; \ldots; 0)(c_{k_1}; c_{k_2}; \cdots; c_{k_m}) - c_{k_1} = 0$$

tương tự ta có $\Delta_{k_1} = \Delta_{k_2} = \cdots = \Delta_{k_m} = 0$. Vậy hàm mục tiêu 2.7 tương đương với

$$z = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B\rangle - \Delta_{k_{m+1}} x_{k_{m+1}} - \cdots - \Delta_{k_n} x_{k_n} \tag{2.13}$$

Nhận xét. $\Delta_j = 0$ với mọi $j \in \{k_1; \ldots; k_m\}$.

Định lý 2.1 (Dấu hiệu tối ưu của bài toán max)**.** *Cho* $\mathbf{x}$ *là phương án cực biên có hệ vector cở sở liên kết đơn vị của bài toán dạng chính tắc. Nếu* $0 \le \Delta_{k_j}$, $j = 1, \ldots n$ *thì* $\mathbf{x}$ *là phương án tối ưu.*

Chứng minh. Do $0 \le \Delta_{k_j}$, $j = 1, \ldots n$ và theo 2.13 ta có

$$z = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B\rangle - \Delta_{k_{m+1}} x_{k_{m+1}} - \cdots - \Delta_{k_n} x_{k_n} \le \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B\rangle$$

suy ra $\mathbf{x}$ là phương án tối ưu. □

Ví dụ 2.1. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 5x_1 - x_2 - 19x_3 - 16x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Chứng minh $\mathbf{x}^T = (25/13; 64/13; 0; 8/13)$ là phương án cực biên, tối ưu của bài toán đã cho.

Giải. Ta cần chứng minh hai điều:

Chứng minh $\mathbf{x}^T$ là phương án cực biên

Xét hệ vector liên kết $B = \{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_4\}$. Định thức

$$|\mathbf{A}_1 \vdots \mathbf{A}_2 \vdots \mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -8 \end{vmatrix} \neq 0$$

B độc lập tuyến tính, cho nên $\mathbf{x}^T$ là phương án cực biên.

Chứng minh $\mathbf{x}^T$ là phương án tối ưu:

Để dùng được dấu hiệu tối ưu, ta cần biểu diễn các vector cột theo cơ sở B. Nghĩa là ràng buộc tương đương

$$\begin{cases} x_1 & & + & ?x_3 & & & = & ? \\ & x_2 & + & ?x_3 & & & = & ? \\ & & + & ?x_3 & + & x_4 & = & ? \end{cases}$$

việc này có nghĩa là ta đi giải tìm $x_1; x_2; x_4$ theo các biến còn lại. Hệ các ràng buộc tương đương

$$\begin{cases} x_1 & & + & 7/13x_3 & & & = & 25/13 \\ & x_2 & + & 46/13x_3 & & & = & 64/13 \\ & & & 9/13x_3 & + & x_4 & = & 8/13 \end{cases}$$

Đặt $\mathbf{c}^B = (c_1; c_2; c_4) = (5; -1; -16)$, ta tính

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_1^B \rangle - c_1 = (5; -1; -16)(1; 0; 0) - 5 = 0 \\
\Delta_2 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_2^B \rangle - c_2 = (5; -1; -16)(0; 1; 0) - (-1) = 0 \\
\Delta_3 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_3^B \rangle - c_3 = (5; -1; -16)(7/13; 46/13; 9/13) - (-19) = 92/13 \\
\Delta_4 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_4^B \rangle - c_4 = (5; -1; -16)(0; 0; 1) - (-16) = 0
\end{aligned}$$

Do mọi $0 \leq \Delta_j$ nên phương án cực biên $\mathbf{x}$ là phương án tối ưu. □

2.1.3 Thành lập phương án cực biên mới

Định lý 2.2 (Có phương án mới tốt hơn). *Giả sử tồn tại cột $\mathbf{A}_{k_v}$ ngoài hệ vector cơ sở liên kết đơn vị, $v \in \{m+1; \ldots; n\}$, sao cho $\Delta_{k_v} < 0$:*

i. Nếu trên cột $\mathbf{A}_{k_v}^B$ mọi phần tử đều nhỏ hơn hay bằng 0 thì bài toán không có phương án tối ưu.

ii. Nếu trên cột $\mathbf{A}^B_{k_v}$ tồn tại $a_{ik_v} > 0$ thì ta có thể tìm được một phương án cực biên mới tốt hơn $\mathbf{x}$.

Chứng minh. Hàm mục tiêu 2.13 được viết lại

$$z = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle - \Delta_{k_{m+1}} x_{k_{m+1}} - \cdots - \Delta_{k_v} x_{k_v} - \cdots - \Delta_{k_n} x_{k_n} \to \max \quad (2.14)$$

Phương án hiện thời có $x_{k_{m+1}} = \cdots = x_{k_v} = \cdots = x_{k_n} = 0$. Ta nhận thấy có thể tìm phương án mới tốt hơn bằng cách tăng giá trị của x_{k_v} sao cho phương án mới vẫn thỏa ràng buộc 2.8.

$$\begin{cases} x_{k_1} = b_1 - a_{1k_v} x_{k_v} \geq 0 \\ \cdots \\ x_{k_i} = b_i - a_{ik_v} x_{k_v} \geq 0 \\ \cdots \\ x_{k_m} = b_m - a_{mk_v} x_{k_v} \geq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

i. Vì $a_{ik_v} \leq 0, v = 1, \ldots, m$ và theo 2.15

$$\begin{cases} x_{k_v} \geq b_1/a_{1k_v}; \text{ hay } x_{k_v} \text{ tùy ý khi } a_{1k_v} = 0 \\ \cdots \\ x_{k_v} \geq b_i/a_{ik_v}; \text{ hay } x_{k_v} \text{ tùy ý khi } a_{ik_v} = 0 \\ \cdots \\ x_{k_v} \geq b_m/a_{mk_v}; \text{ hay } x_{k_v} \text{ tùy ý khi } a_{mk_v} = 0 \end{cases}$$

do đó, có thể chọn x_{k_v} lớn một cách tùy ý và khi đó $z \to +\infty$ hay bài toán không có phương án tối ưu.

ii. Do tồn tại $a_{ik_v} > 0$ nên giá trị x_{k_v} phải thỏa

$$0 \leq x_{k_v} \leq \min \left\{ \frac{b_i}{a_{ik_v}} : a_{ik_v} > 0 \right\} = \frac{b_r}{a_{rk_v}}$$

ta chọn $x_{k_v} = \dfrac{b_r}{a_{rk_v}}$, phương án mới có dạng

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' = &(x_{k_1}; \ldots; x_{k_{r-1}}; x_{k_r}; x_{k_{r+1}}; \ldots; x_{k_m}; x_{k_{m+1}}; \ldots; x_{k_v}; \ldots; x_{k_n}) \\ = &(b_1 - a_{1k_v} x_{k_v}; \ldots; b_{r-1} - a_{r-1k_v} x_{k_v}; 0; b_{r+1} - a_{r+1k_v} x_{k_v}; \\ &0; \ldots; x_{k_v}; \ldots; 0) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\mathbf{x}^{'}$ là phương án cực biên tốt hơn phương án $\mathbf{x}$. Thật vậy, hệ vector cơ sở liên kết mới

$$\{\mathbf{A}_{k_1}; \ldots; \mathbf{A}_{k_{r-1}}; \mathbf{A}_{k_v}; \mathbf{A}_{k_{r+1}}; \ldots; \mathbf{A}_{k_m}\}$$

độc lập tuyến tính, hay $\mathbf{x}^{'}$ là phương án cực biên. Mặt khác

$$z^{'} = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle - \Delta_{k_v} x_{k_v} > \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle = z$$

Vậy $\mathbf{x}^{'}$ là phương án cực biên mới tốt hơn $\mathbf{x}$ □

Nhận xét. Do hàm mục tiêu

$$z = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle - \Delta_{k_{m+1}} x_{k_{m+1}} - \cdots - \Delta_{k_n} x_{k_n} \to \max$$

nên khi có nhiều $\Delta_j < 0$ ta sẽ chọn sao cho $-\Delta_j x_j$ lớn nhất. Tuy nhiên, ta thường chọn Δ_j âm nhất (nghĩa là số âm có trị tuyệt đối lớn nhất).

Ví dụ 2.2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -7x_1 + 26x_2 - 9x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ \quad - x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

a. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (5; 0; 7)$ là phương án cực biên.

b. Chứng tỏ $\mathbf{x}^T$ là phương án cực biên tối ưu của bài toán.

Giải.

a. $\mathbf{x}^T = (5; 0; 7)$ là phương án chấp nhận được. Xét hệ vector liên kết

$$B = \{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_3\}$$

có định thức

$$|\mathbf{A}_1 \vdots \mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Vậy B độc lập tuyến tính, suy ra $\mathbf{x}^T$ là phương án cực biên.

b. Các ràng buộc đã có sẵn hệ vector liên kết đơn vị $\{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_3\}$ của phương án cực biên $\mathbf{x}$. Ta đặt $\mathbf{c}^B = (c_1; c_3) = (-7; -9)$, và tính được

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 0\\ \Delta_2 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_2^B\rangle - c_2 = -3\\ \Delta_3 &= 0\end{aligned}$$

Do có $\Delta_2 < 0$ nên phương án cực biên $\mathbf{x}^T = (5; 0; 7)$ không là phương án tối ưu. □

2.2 Bảng đơn hình

Bảng đơn hình có dạng như sau:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_{k_1}^B$	$\cdots$	$\mathbf{A}_{k_m}^B$	$\mathbf{A}_{k_{m+1}}^B$	$\cdots$	$\mathbf{A}_{k_v}^B$	$\cdots$	$\mathbf{A}_{k_n}^B$
			c_{k_1}	$\cdots$	c_{k_m}	$c_{k_{m+1}}$	$\cdots$	c_{k_v}	$\cdots$	c_{k_n}
$\mathbf{A}_{k_1}$	c_{k_1}	b_1	1	$\cdots$	0	$a_{1k_{m+1}}$	$\cdots$	a_{1k_v}	$\cdots$	a_{1k_n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{A}_{k_r}$	c_{k_r}	b_r	0	$\cdots$	0	$a_{rk_{m+1}}$	$\cdots$	(a_{rk_v})	$\cdots$	a_{rk_n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{A}_{k_m}$	c_{k_m}	b_m	0	$\cdots$	0	$a_{mk_{m+1}}$	$\cdots$	a_{mk_v}	$\cdots$	a_{mk_n}
z	min		Δ_{k_1}	$\cdots$	Δ_{k_m}	$\Delta_{k_{m+1}}$	$\cdots$	Δ_{k_v}	$\cdots$	Δ_{k_n}

Bảng 2.1: Bảng đơn hình

Chú ý. Trong bảng đơn hình:

- B là hệ vector cơ sở liên kết của phương án cực biên hiện thời.
- Cột $\mathbf{A}_{k_v}^B$ tương ứng $\mathbf{A}_{k_v}$ vào cơ sở liên kết được gọi là cột xoay.
- Dòng có chỉ số cùng với chỉ số với cột ra khỏi hệ vector cơ sở liên kết gọi là dòng xoay.
- Phần tử nằm trên dòng xoay và cột xoay gọi là phần tử trực.

Tóm tắt thuật toán đơn hình

Để bắt đầu được với thuật toán đơn hình thì các ràng buộc phải có sẵn hệ vector cơ sở liên kết đơn vị (ma trận đơn vị) và $0 < \mathbf{b}$.

Bước 1: Chọn vector vào cở sở liên kết. Nếu $\min\left\{\Delta_{k_j};\Delta_{k_j}<0\right\}=\Delta_{k_v}$ thì vector $\mathbf{A}_{k_v}$ là vector mới vào cơ sở liên kết, sang bước 2. Ngược lại, nếu $\Delta_{k_j}>0$ với mọi j thì phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu, thuật toán kết thúc.

Bước 2: Chọn vector ra khỏi cở sở liên kết. Trong bước 1 đã xác định được $\mathbf{A}_{k_v}$ là vector mới vào cơ sở liên kết.

- Nếu $a_{ik_v}\le 0$ với mọi i thì bài toán không có phương án tối ưu, thuật toán kết thúc.
- Nếu có $a_{ik_v}>0$, ta tính

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik_v}};a_{ik_v}>0\right\}=\frac{b_r}{a_{rk_v}}$$

vector $\mathbf{A}_r$ ra khỏi cơ sở liên kết.

Bước 3: Lập bảng đơn hình mới. [‡]

- Xác định phần tử trực a_{rk_v}.
- Chia dòng chứa phần tử trực cho phần tử trực.
- Các phần tử dòng i cột j khác của bảng được tính

$$a_{ik_j}=\begin{vmatrix}a_{ik_j} & a_{ik_v}\\ a_{rk_j} & a_{rk_v}\end{vmatrix}/a_{rk_v}=\left(a_{ik_j}a_{rk_v}-a_{rk_j}a_{ik_v}\right)/a_{rk_v} \qquad (2.17)$$

- Tính lại $\Delta_{k_j}=\langle\mathbf{c}^B;\mathbf{A}^B_{k_j}\rangle-c_{k_j}$.

Ví dụ 2.3. Giải bài toán quy hoạch sau:

$$z=4x_1+3x_2\to\max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases}x_1+x_2\le 4\\ 5x_1+3x_2\le 15\end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\ j=1,2$$

[‡]Đây chính là phép khử Gauss - Jordan

Giải. Ta chuyển sang dạng chính tắc:

$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 4$

Bước lặp thứ nhất. Phương án cực biên ban đầu $\mathbf{x}^T = (0; 0; 4; 15)$ có hệ vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A_3}; \mathbf{A_4}\}$. Bảng đơn hình của phương án xuất phát $\mathbf{x}$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			4	3	0	0
$\mathbf{A}_3$	0	4	1	1	1	0
$\mathbf{A}_4$	0	15	5	3	0	1
max		Δ	-4	-3	0	0

trong đó $\mathbf{c}^B = (c_3; c_4) = (0; 0)$. Ta tính được:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \Delta_4 = 0 \\ \Delta_1 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_1^B \rangle - c_1 = (0;0)(1;5) - 4 = -4 \\ \Delta_2 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_2^B \rangle - c_2 = (0;0)(1;3) - 3 = -3 \\ z &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle = 0 \end{aligned}$$

Ở đây do có $\Delta_1, \Delta_2 \leq 0$ nên phương án cực biên hiện thời không là phương án tối ưu.

Xác định vector mới vào hệ vector cơ sở liên kết.

$$\min\{\Delta_1; \Delta_2\} = \min\{-4; -3\} = -4 = \Delta_1$$

vậy vector liên kết mới $\mathbf{A}_1$.

Xác định vector ra khỏi hệ vector cơ sở liên kết. Ta lập tỷ số

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{i1}}; a_{i1} > 0\right\} = \left\{\frac{4}{1}; \frac{15}{5}\right\} = \frac{15}{5} = \frac{b_2}{a_{21}}$$

vậy $\mathbf{A}_2$ là vector ra khỏi hệ vector cơ sở liên kết. Hệ vector cơ sở liên kết mới $B = \{\mathbf{A}_3; \mathbf{A}_1\}$ và $\mathbf{c}^B = (c_3; c_1) = (0; 4)$.

Bảng đơn hình cho phương án mới

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			4	3	0	0
$\mathbf{A}_3$	0			?		
$\mathbf{A}_1$	4					
max						

Chia dòng chứa phần tử trực cho phần tử trực, nghĩa là chia dòng 2 cho 5 ta được

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			4	3	0	0
$\mathbf{A}_3$	0			?		
$\mathbf{A}_1$	4	3	1	3/5	0	1/5
max						

các a_{ij} khác được tính dựa vào bảng trước bằng công thức

$$a_{ik_j} = \begin{vmatrix} a_{ik_j} & a_{ik_v} \\ a_{rk_j} & a_{rk_v} \end{vmatrix} / a_{rk_v} = \left(a_{ik_j} a_{rk_v} - a_{rk_j} a_{ik_v}\right) / a_{rk_v}$$

cụ thể phần tử ở ô (?) được tính như sau:

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ (5) & 3 \end{array} : (5) \quad = (1 \times 5 - 1 \times 3)/5 = 2/5$$

tính tương tự cho các a_{ij} còn lại ta được

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			4	3	0	0
$\mathbf{A}_3$	0	1	0	2/5	1	-1/5
$\mathbf{A}_1$	4	3	1	3/5	0	1/5
max						

Tiếp theo ta tính Δ_j

$$\begin{aligned}
\Delta_3 =& \Delta_1 = 0 \\
\Delta_2 =& \langle \mathbf{c}^B ; \mathbf{A}_1^B \rangle - c_1 = (0;4)(2/5;3/5) - 3 = -3/5 \\
\Delta_4 =& \langle \mathbf{c}^B ; \mathbf{A}_2^B \rangle - c_2 = (0;4)(-1/5;1/5) - 0 = 4/5 \\
z =& \langle \mathbf{c}^B ; \mathbf{b}^B \rangle = (0;4)(1;3) = 12
\end{aligned}$$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			4	3	0	0
$\mathbf{A}_3$	0	1	0	2/5	1	-1/5
$\mathbf{A}_1$	4	3	1	3/5	0	1/5
max		Δ	0	-3/5	0	4/5

Bước lặp thứ hai. Do có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời $\mathbf{x}^T = (3;0;1;0)$ không là phương án tối ưu. Ta chọn cột $\mathbf{A}_2$ là cột mới thay cho cột $\mathbf{A}_3$ trong hệ vector cơ sở liên kết. Bảng đơn hình mới làm tương tự như bước trên, ta được kết quả sau:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			4	3	0	0
$\mathbf{A}_2$	3	5/2	0	1	5/2	-1/2
$\mathbf{A}_1$	4	3/2	1	0	-3/2	1/2
max		Δ	0	0	3/2	1/2

Mọi $0 \leq \Delta_j$ nên phương án cực biên hiện thời $\mathbf{x}^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$ là phương án tối ưu. Giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu là $27/2$. $\square$

Ví dụ 2.4. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 20 \\ 4x_1 + x_3 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$$

Giải. Chuyển bài toán sang dạng chính tắc:

$$z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 = 20 \\ 4x_1 + x_3 + x_6 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,6$$

Ta có phương án cực biên ban đầu $\mathbf{x}^T = (0;0;0;15;20;10)$ và hệ các vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5; \mathbf{A}_6\}$. Ứng với hệ vector liên kết này, ta đặt $\mathbf{c}^B = (c_4; c_5; c_6) = (0; 0; 0)$. Ta có bảng đơn hình cho phương án cực biên này như sau

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			2	-3	1	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	15	1	-5	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	20	3	2	-2	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	10	4	0	1	0	0	1
max		Δ	-2	3	-1	0	0	0

Vì có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời không là phương án tối ưu. Ta chọn vector $\mathbf{A}_1$ là vector mới vào hệ vector cơ sở liên kết thay cho vector $\mathbf{A}_6$. Bảng đơn hình mới:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			2	-3	1	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	25/2	0	-5	3/4	1	0	-1/4
$\mathbf{A}_5$	0	25/2	0	2	-11/4	0	1	-3/4
$\mathbf{A}_1$	2	5/2	1	0	1/4	0	0	1/4
max		Δ	0	3	-1/2	0	0	1/2

Vì có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời không là phương án tối ưu. Ta chọn vector $\mathbf{A}_3$ là vector mới vào hệ vector cơ sở liên liên kết thay cho vector $\mathbf{A}_1$. Bảng đơn hình mới:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			2	-3	1	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	5	-3	-5	0	1	0	-1
$\mathbf{A}_5$	0	40	11	2	0	0	1	2
$\mathbf{A}_3$	1	10	4	0	1	0	0	1
max		Δ	2	3	0	0	0	1

Mọi $0 \leq \Delta_j$ nên phương án cực biên hiện thời $\mathbf{x}^T = (0; 0; 10; 5; 40)$ là phương án tối ưu. Giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu là 10. □

Ví dụ 2.5. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \text{max}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Giải. Chuyển bài toán sang dạng chính tắc

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5$$

Ta có phương án cực biên ban đầu $\mathbf{x}^T = (0; 0; 6; 7; 5)$ và hệ các vector cơ sở liên liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5; \mathbf{A}_6\}$. Bảng đơn hình:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			2	3	1	0	0
$\mathbf{A}_3$	1	6	1	-5	1	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	7	2	2	0	1	0
$\mathbf{A}_5$	0	5	-1	2	0	0	1
max		Δ	-1	-8	0	0	0

Vì có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời không là phương án tối ưu. Ta chọn vector $\mathbf{A}_2$ là vector mới vào hệ vector cơ sở liên kết thay cho vector $\mathbf{A}_5$. Bảng đơn hình mới:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			2	3	1	0	0
$\mathbf{A}_3$	1	37/2	-3/2	0	1	0	5/2
$\mathbf{A}_4$	0	2	3	0	0	1	-1
$\mathbf{A}_2$	3	5/2	-1/2	1	0	0	1/2
max		Δ	-5	0	0	0	4

Vì có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời không là phương án tối ưu. Ta chọn vector $\mathbf{A}_1$ là vector mới vào hệ vector cơ sở liên kết thay cho vector $\mathbf{A}_4$. Bảng đơn hình mới:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			2	3	1	0	0
$\mathbf{A}_3$	1	39/2	0	0	1	1/2	2
$\mathbf{A}_1$	2	2/3	1	0	0	1/3	-1/3
$\mathbf{A}_2$	3	17/6	0	1	0	1/6	1/3
max		Δ	0	0	0	5/3	7/3

Mọi $0 \leq \Delta_j$ nên phương án cực biên hiện thời $\mathbf{x}^T = (2/3; 17/6; 39/2; 0; 0)$ là phương án tối ưu. Giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu là $88/3$. □

Ví dụ 2.6. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ \quad - 2x_2 - 7x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ \quad - 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

Giải. Ta có phương án cực biên ban đầu $\mathbf{x}^T = (1; 0; 0; 0; 3; 7)$ và hệ vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_5; \mathbf{A}_6\}$. Bảng đơn hình:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			-2	-1	1	1	0	0
$\mathbf{A}_1$	-2	2	1	1	2	-1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	3	0	-2	-7	3	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	7	0	0	-3	2	0	1
max		Δ	0	-1	-5	1	0	0

Vì có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời không là phương án tối ưu. Ta chọn vector $\mathbf{A}_3$ là vector mới vào hệ vector cơ sở liên kết thay cho vector $\mathbf{A}_1$. Bảng đơn hình mới:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			-2	-1	1	1	0	0
$\mathbf{A}_3$	1	1	1/2	1/2	1	-1/2	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	10	7/2	3/2	0	-1/2	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	10	3/2	3/2	0	1/2	0	1
max		Δ	5/2	3/2	0	-3/2	0	0

Vì có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời không là phương án tối ưu. Ta chọn vector $\mathbf{A}_4$ là vector mới vào hệ vector cơ sở liên kết thay cho vector $\mathbf{A}_6$. Bảng đơn hình mới:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			-2	-1	1	1	0	0
$\mathbf{A}_3$	1	11	2	2	1	0	0	1
$\mathbf{A}_5$	0	20	5	3	0	0	1	1
$\mathbf{A}_4$	1	20	3	3	0	1	0	2

max		Δ	7	6	0	0	0	3

Mọi $0 \leq \Delta_j$ nên phương án cực biên hiện thời $\mathbf{x}^T = (0; 0; 11; 20; 20; 0)$ là phương án tối ưu. Giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu là 31. □

Ví dụ 2.7. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5$$

a. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (0; 1; 2; 0; 1)$ là phương án cực biên không tối ưu.

b. Xây dựng phương án cực biên mới tốt hơn phương án trên.

Giải.

a. Phương án $\mathbf{x}^T = (0; 1; 2; 0; 1)$ có hệ vector liên kết $B = \{\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_3; \mathbf{A}_5\}$.

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{A}_2 \vdots \mathbf{A}_3 \vdots \mathbf{A}_5\right) \Rightarrow |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Vậy $\mathbf{x}$ là phương án cực biên. Để dùng dấu hiệu tối ưu, ta cần biến đổi các ràng buộc tương đương.

$$\begin{cases} -1/12x_1 + x_2 + 1/3x_4 = 1 \\ -5/3x_1 + x_3 - 7/3x_4 = 2 \\ 1/4x_1 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Ta đặt $\mathbf{c}^B = (c_2; c_3; c_5) = (2; 3; -1)$ và tính được

$$\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_5 = 0$$

$$\Delta_1 = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_1^B \rangle - c_1 = (2; 3; -1)(-1/12; -5/3; 1/4) - 0 = -55/6$$

$$\Delta_4 = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_4^B \rangle - c_4 = (2; 3; -1)(1/3; -7/3; 1) - 4 = -28/3$$

Do có $\Delta_j < 0$ nên phương án cực biên $\mathbf{x}$ không là phương án tối ưu.

b. Bảng đơn hình của phương án $\mathbf{x}^T = (0; 1; 2; 0; 1)$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			0	2	3	4	-1
$\mathbf{A}_2$	2	1	-1/12	1	0	1/3	0
$\mathbf{A}_3$	3	2	-5/3	0	1	-7/3	0
$\mathbf{A}_5$	-1	1	1/4	0	0	1	1
		Δ	-65/12	0	0	-34/3	0
$\mathbf{A}_2$	2	2/3	-1/6	1	0	0	-1/3
$\mathbf{A}_3$	3	13/3	-13/12	0	1	0	7/3
$\mathbf{A}_4$	4	1	1/4	0	0	1	1
		Δ	-31/12	0	0	0	34/3

Phương án mới $(0; 2/3; 13/3; 1; 0)$ có giá trị hàm mục tiêu tốt hơn phương án ở câu a. $\square$

Ví dụ 2.8. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$z = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

Giải. Chuyển bài toán min sang bài toán max, hàm mục tiêu trở thành:

$$-z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 \to \max$$

Phương án cực biên ban đầu $x = (0; 0; 0; 5; 4; 2)$ có hệ vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5; \mathbf{A}_6\}$. Bảng đơn hình:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			1	-2	2	-1	1	-2
$\mathbf{A}_4$	-1	5	2	-1	-5	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	1	1	1	-2	2	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	-2	2	-4	1	1	0	0	1
		Δ	6	-1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	-1	7	-2	0	-4	1	0	1
$\mathbf{A}_5$	1	5	-7	0	4	0	1	2
$\mathbf{A}_2$	-2	2	-4	1	1	0	0	1
max		Δ	2	0	4	0	0	1

Mọi $0 \leq \Delta_j$ nên phương án cực biên hiện thời $\mathbf{x}^T = (0; 2; 0; 7; 8; 0)$ là phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu $-z = -3 \rightarrow \max$ hay $z = 3 \rightarrow \min$. □

2.3 Thuật toán đơn hình cho bài toán min

Thuật toán đơn hình cho bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu về cơ bản giống với bài toán tìm giá trị lớn nhất, chỉ khác nhau ở dấu hiệu tối ưu.

Định lý 2.3 (Dấu hiệu tối ưu của bài toán min)**.** *Cho* $\mathbf{x}$ *là phương án cực biên có hệ vector cở sở liên kết đơn vị của bài toán dạng chính tắc. Nếu* $\Delta_{k_j} \leq 0, j = 1, \ldots n$ *thì* $\mathbf{x}$ *là phương án tối ưu.*

Định lý 2.4 (Có phương án mới tốt hơn)**.** *Giả sử tồn tại cột* $\mathbf{A}_{k_v}$ *ngoài hệ vector cơ sở liên kết,* $v \in \{m+1; \ldots; n\}$, *sao cho* $\Delta_{k_v} > 0$:

i. Nếu trên cột $\mathbf{A}_{k_v}^B$ *mọi phần tử đều nhỏ hơn hay bằng 0 thì bài toán không có phương án tối ưu.*

ii. Nếu trên cột $\mathbf{A}_{k_v}^B$ *tồn tại* $a_{ik_v} > 0$ *thì ta có thể tìm được một phương án cực biên mới tốt hơn* $\mathbf{x}$.

Ví dụ 2.9. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ 3x_1 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Giải. Chuyển sang dạng chính tắc

$$z = x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			1	1	-3	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	1	2	-1	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	2	-4	2	-1	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	5	3	0	1	0	0	1
			-1	-1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_3$	-3	1	2	-1	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	3	-2	1	0	1	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	4	1	1	0	-1	0	1
			-7	2	0	-3	0	0
$\mathbf{A}_3$	-3	4	0	0	1	2	1	0
$\mathbf{A}_2$	1	3	-2	1	0	1	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	1	3	0	0	-2	-1	1
min		Δ	-3	0	0	-5	-2	0

Mọi $\Delta_j \leq 0$ nên phương án $\mathbf{x}^T = (0; 3; 4; 0; 0; 1)$ là phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu $z = -6$. □

2.4 Bài toán chính tắc không có sẵn ma trận đơn vị

Giả sử cần giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{array}{l} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max \\ \text{Với các ràng buộc} \\ \quad \begin{array}{rcl} \mathbf{Ax} & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array} \end{array} \tag{2.18}$$

trong đó $\mathbf{A}$ không có ma trận đơn vị (không có sẵn hệ vector cơ sở liên kết đơn vị), $\mathbf{b} \geq 0$. Chẳng hạn cần giải bài toán sau:

Ví dụ 2.10. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 13x_4 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + 14x_4 = 11 \\ \quad\;\; + 3x_2 + x_3 + 14x_4 = 16 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4$$

Giải. Do ma trận các hệ số **A** không có sẵn hệ vector cơ sở liên kết đơn vị nên không xác định được phương án cực biên ban đầu. Vì các ràng buộc là hệ phương trình tuyến tính nên ta có thể biến đổi để có ba vecto cột đơn vị

$$\begin{pmatrix}1&1&1&13&14\\2&1&0&14&11\\0&3&1&14&16\end{pmatrix}\xrightarrow{d_2=d_2-2d_1}\begin{pmatrix}1&1&1&13&14\\0&-1&-2&-12&-17\\0&3&1&14&16\end{pmatrix}\xrightarrow{d_2=-d_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&13&14\\0&1&2&12&17\\0&3&1&14&16\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3=d_3-3d_2]{d_1=d_1-d_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&1&-3\\0&1&2&12&17\\0&0&-5&-22&-35\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3=-1/5d_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&1&-3\\0&1&2&12&17\\0&0&1&22/5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[d_2=d_2-2d_3]{d_1=d_1+d_3}\begin{pmatrix}1&0&0&27/5&4\\0&1&0&16/5&3\\0&0&1&22/5&7\end{pmatrix}$$

Hệ các ràng buộc tương đương

$$\begin{cases}x_1 & & & + & 27/5x_4 & = & 4\\ & x_2 & & + & 16/5x_4 & = & 3\\ & & x_3 & + & 22/5x_4 & = & 7\end{cases}$$

Kế tiếp ta thành lập bảng đơn hình cho bài toán có phương án cực biên $\mathbf{x}^T = (4; 3; 7; 0)$ như sau

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			-3	4	5	-6
$\mathbf{A}_1$	-3	4	1	0	0	27/5
$\mathbf{A}_2$	4	3	0	1	0	16/5
$\mathbf{A}_3$	5	7	0	0	1	22/5
max		Δ	0	0	0	123/5

Phương án tối ưu $\mathbf{x} = (4; 3; 7; 0)$, giá trị tối ưu $z = 35$ □

Nhưng có thể trong quá trình biến đổi sau khi đã có các vector đơn vị mà phương án không thỏa điều kiện không âm thì cách làm trên rất khó gặp một phương án cực biên ban đầu.

Ví dụ 2.11. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max$$
Với các ràng buộc
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Giải. Vì ma trận các hệ số **A** không có ma trận đơn vị nên chưa xác định được phương án cực biên ban đầu. Vì tập các phương án là hệ phương trình tuyến tính nên ta có thể biến đổi để có hai vector đơn vị.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Các ràng buộc tương đương

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 3x_3 = -4 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Đến đây ta gặp khó khăn trong việc tìm phương án cực biên. Để giải quyết triệt để, ta dùng phương pháp sau đây gọi là phương pháp **đánh thuế** để giải cho trường hợp này. □

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max \tag{2.19}$$
Với các ràng buộc
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$

Thêm các ẩn $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \geq 0$ mà ta gọi là **ẩn giả** vào m ràng buộc khi đó bài toán có dạng

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \cdots - Mx_{n+m} \to \max \tag{2.20}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n+m$$

trong đó M là số dương lớn hơn bất kỳ số nào mà ta cần so sánh.

Định lý 2.5. *Bài toán (2.19) có phương án tối ưu* $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$ *khi và chỉ khi bài toán (2.20) có phương án tối ưu*

$$\mathbf{x}^{'T} = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

Chú ý. Khi giải bài toán (2.20) bằng phương pháp đơn hình thì các hệ số hàm mục tiêu có chứa tham số M. Vì M lớn nên khi so sánh các giá trị có tham số M ta có quy ước như sau:

$$aM + b > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 0 \\ a = 0, b > 0 \end{array}\right.$$

$$aM + b < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a = 0, b < 0 \end{array}\right.$$

$$aM + b > cM + d \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > c \\ a = c, b > d \end{array}\right.$$

Ví dụ 2.12. Giải lại bài toán quy hoạch tuyến tính ví dụ 2.11

$$z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Giải. Ta nhân hai vế ràng buộc thứ nhất với -1

$$z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Thêm vào ràng buộc thứ nhất, thứ hai hai biến giả. Bài toán trở thành

$$z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 - Mx_4 - Mx_5 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5$$

Lập bảng đơn hình, khi giải ta coi M là tham số có giá tị lớn hơn bất kỳ hằng số nào cần so sánh. Phương án xuất phát $\mathbf{x}^T = (0; 0; 0; 1; 2)$, hệ vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5\}$.

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			2	-1	-2	-M	-M
$\mathbf{A}_4$	-M	1	-1	-2	1	1	0
$\mathbf{A}_5$	-M	2	1	2	1	0	1
			-2	1	-2M+2	0	0
$\mathbf{A}_3$	-2	1	-1	-2	1	1	0
$\mathbf{A}_5$	-M	1	2	4	0	-1	1
			-2M	-4M+5	0	2M-2	0
$\mathbf{A}_3$	-2	3/2	0	0	1	1/2	1/2
$\mathbf{A}_2$	-1	1/4	1/2	1	0	-1/4	1/4
			-5/2	0	0	M-3/4	M-5/4
$\mathbf{A}_3$	-2	3/2	0	0	1	1/2	1/2
$\mathbf{A}_1$	2	1/2	1	2	0	-1/2	1/2
max		Δ	0	5	0	M-2	M

Mọi $\Delta_j \geq 0$ nên phương án hiện thời $\mathbf{x}^T = (1/2; 0; 3/2; 0; 0)$ là phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu $z = -2$. $\square$

Ví dụ 2.13. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$
\begin{aligned}
& z = 2x_1 + 5x_2 \to \text{max} \\
& \text{Với các ràng buộc} \\
& \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \end{cases} \\
& \quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Giải. Chuyển bài toán sang dạng chính tắc

$$
\begin{aligned}
& z = 2x_1 + 5x_2 \to \text{max} \\
& \text{Với các ràng buộc} \\
& \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 4 \end{cases} \\
& \quad x_1, x_2, X_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

Để xác định được phương án cực biên ban đầu ta thêm vào ràng buộc thứ hai ẩn giả x_5

$$
\begin{aligned}
& z = 2x_1 + 5x_2 - Mx_5 \to \text{max} \\
& \text{Với các ràng buộc} \\
& \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \end{cases} \\
& \quad x_j \ge 0, j = 1, \ldots, 5
\end{aligned}
$$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			2	5	-M	0	0
$\mathbf{A}_3$	-M	6	2	3	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	4	1	2	0	-1	1
max		Δ	-2M-2	-3M-5	0	0	0
$\mathbf{A}_2$	5	2	2/3	1	1/3	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	0	-1/3	0	-2/3	-1	1
max		Δ	4/3	0	M+5/3	0	0

Mọi $\Delta_j \ge 0$ nên phương án hiện thời $(0; 2; 0; 0; 0)$ là phương án tối ưu. □

2.5 Bài tập chương 2

Bài tập 2.1. Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính:

a. $z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (2; 4; 0; 0)$, giá trị hàm mục tiêu $z = -6$

b. $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (125/12; 17/6; 39/4)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 469/12$.

c. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (16; 0; 0; 4)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 44$.

d. $z = 15x_1 + 19x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 7 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (1; 1; 1)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 34$.

Bài tập 2.2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = -4x_1 - 5x_2 - 7x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

a. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (0; 4; 2)$ là phương án cực biên, nhưng không phải là phương án tối ưu.

b. Hãy xây dựng một phương án cực biên mới tốt hơn phướng án cực biên ở câu a.

Bài tập 2.3. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

a. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (0; 2/3; 0; 4/3)$ là phương án cực biên, nhưng không phải là phương án tối ưu.

b. Hãy xây dựng một phương án cực biên mới tốt hơn phướng án cực biên ở câu a.

Bài tập 2.4. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = -4x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 20 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Chứng minh $\mathbf{x}^T = (1; 2; 3; 0)$ là phương án cực biên, tối ưu của bài toán.

Bài tập 2.5. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = x_1 + x_2 + mx_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

a. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (1; 2; 0)$ là phương án cực biên của bài toán.

b. Tìm điều kiện của m để $\mathbf{x}$ là phương án tối ưu.

Bài tập 2.6. Một công ty sản xuất hai loại sơn: sơn nội thất và sơn ngoài trời. Nguyên liệu để sản xuất gồm hai loại A, B với trữ lượng tương ứng là 16 tấn và 18 tấn. Để sản xuất 1 tấn sơn nội thất cần 1 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất 1 tấn sơn ngoài trời cần 2 tấn nguyên liệu A và 3 tấn nguyên liệu B. Qua điều tra thị trường công ty biết rằng nhu cầu sơn nội thất không hơn sơn ngoài trời quá 1 tấn. Giá bán một tấn sơn nội thất là 4000 USD, giá bán một tấn sơn ngoài trời là 3000 USD. Khi sản xuất 1 tấn sơn nội thất phải bỏ ra một chi phí là 1300 USD, khi sản xuất 1 tấn sơn ngoài trời phải bỏ ra một chi phí là 1000 USD. Hỏi cần sản xuất mỗi loại sơn bao nhiêu tấn để có lợi nhuận lớn nhất?

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (21/5; 16/5)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 17740$

Bài tập 2.7. Một công ty sản xuất hai loại sơn nội thất và sơn ngoài trời. Nguyên liệu để sản xuất gồm hai loại A, B với trữ lượng là 6 tấn và 8 tấn tương ứng. Để sản xuất một tấn sơn nội thất cần 2 tấn nguyên liệu A và 1 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất một tấn sơn ngoài trời cần 1 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B. Qua điều tra thị trường công ty biết rằng nhu cầu sơn nội thất không hơn sơn ngoài trời quá 1 tấn, nhu cầu cực đại của sơn nội thất là 2 tấn. Giá bán một tấn sơn nội thất là 2000 USD, giá bán một tấn sơn ngoài trời là 3000 USD. Hỏi cần sản xuất mỗi loại sơn bao nhiêu tấn để có doanh thu lớn nhất?

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (4/3; 10/3)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 38000/3$.

Bài tập 2.8. Một công ty sản xuất hai loại thực phẩm A, B. Nguyên liệu để sản xuất gồm ba loại bột, đường và dầu thực vật. Với trữ lượng dự trự tương ứng là 30 tấn, 12 tấn, 6 tấn. Để sản xuất:

- 1 tấn thực phẩm loại A cần 0,5 tấn bột, 0,5 tấn đường, 0,2 tấn dầu thực vật.
- 1 tấn thực phẩm loại B cần 0,8 tấn bột, 0,4 tấn đường, 0,4 tấn dầu thực vật.

Giá bán một tấn thực phẩm A là 4000 USD, giá bán một tấn thực phẩm B là 4500 USD. Hỏi cần sản xuất mỗi loại thực phẩm bao nhiêu tấn để có doanh thu lớn nhất?

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (20; 5)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 102500$

Bài tập 2.9. Một xí nghiệp dự định sản xuất ba loại sản phẩm A, B và C. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III . Số lượng các nguyên liệu I, II và III mà xí nghiệp có lần lượt là 30, 50, 40. Số lượng các nguyên liệu cần để sản xuất một đơn vị sản phẩm A, B, C được cho ở bảng sau đây:

SP \ NL	I	II	III
A	1	1	3
B	1	2	2
C	2	3	1

Xí nghiệp muốn lập kế hoạch sản xuất để thu được tổng số lãi nhiều nhất (với giả thiết các sản phẩm làm ra đều bán hết), nếu biết rằng lãi 5 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại A, lãi 3,5 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại B, lãi 2 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại C.

a. Lập mô hình bài toán Quy hoạch tuyến tính.

b. Bằng phương pháp đơn hình, hãy giải bài toán trên.

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (5/2; 25/2; 15/2)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 285/4$

Bài tập 2.10. Một Xí nghiệp chăn nuôi cần mua một loại thức ăn tổng hợp T1, T2, T3 cho gia súc với tỷ lệ chất dinh dưỡng như sau:

- 1 kg T1 chứa 4 đơn vị dinh dưỡng D1, 2 đơn vị dinh dưỡng D2, và 1 đơn vị dinh dưỡng D3.
- 1 kg T2 chứa 1 đơn vị dinh dưỡng D1, 7 đơn vị dinh dưỡng D2, và 3 đơn vị dinh dưỡng D3
- 1 kg T3 chứa 3 đơn vị dinh dưỡng D1, 1 đơn vị dinh dưỡng D2, và 4 đơn vị dinh dưỡng D3.

Mỗi bữa ăn, gia súc cần tối thiểu 20 đơn vị D1, 25 đơn vị D2 và 30 đơn vị D3. Hỏi Xí nghiệp phải mua bao nhiêu kg T1, T2, T3 mỗi loại cho một bữa ăn để bảo đảm tốt về chất dinh dưỡng và tổng số tiền mua là nhỏ nhất? Biết rằng 1 kg T1 có giá là 10 ngàn đồng, 1 kg T2 có giá là 12 ngàn đồng, 1 kg T3 có giá là 14 ngàn đồng.

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (5/18; 49/18; 97/18)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 998/9$