Chương 3

Lý thuyết đối ngẫu

Mục lục chương 3

3.1 Định nghĩa bài toán đối ngẫu

Ví dụ 3.1. Có m loại nguyên liệu dự trữ dùng để sản xuất ra n loại sản phẩm. Để làm ra một sản phẩm j cần a_{ij} nguyên liệu i cho như bảng sau:

SP / NL	x_1 1	x_2 2	$\cdots$ $\cdots$	x_n n	NL dự trữ
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
Giá bán	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

Trong đó, lượng nguyên liệu dự trữ thứ i là b_i và giá bán mỗi sản phẩm j là c_j. Yêu cầu tìm số lượng sản phẩm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho tổng doanh thu lớn nhất.

Giải. Tổng doanh thu lớn nhất

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n - \max$$

Khi đó tổng lượng nguyên liệu loại 1 sử dụng phải nhỏ hơn hoặc bằng b_1, nghĩa là

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

tương tự đối với nguyên liệu loại n

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Vậy ta có bài toán tìm $x_1, \ldots, x_n$ sao cho:

$$\begin{aligned} & z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max \\ & \text{Với các ràng buộc} \\ & \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{cases} \\ & \quad x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Bài toán được viết dưới dạng ma trận

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max \\ \text{Với các ràng buộc} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.1}$$

trong đó $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$; $\mathbf{b} \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$; $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$

Ví dụ 3.2. Với giả thiết giống như ví dụ 3.1, giả sử có một người muốn mua lại toàn bộ nguyên liệu trên.

SP / NL	x_1 1	x_2 2	$\cdots$ $\cdots$	x_n n	NL dự trữ
$y_1, 1$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$y_2, 2$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m, m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
Giá bán	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

Tìm giá bán nguyên liệu i, y_i để:

- Tổng giá trị người mua phải trả là nhỏ nhất.
- Người bán không bị thiệt.

Giải. Tổng giá trị người mua phải trả nhỏ nhất được thể hiện:

$$z^{'} = b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m \to \max$$

Khi sản xuất một sản phẩm 1, người ta cần a_{11} nguyên liệu 1, ..., a_{m1} nguyên liệu m.

- Khi bán nguyên liệu thì chủ sở hữu nhận được $a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m$,
- Mặc khác cùng lượng nguyên liệu trên khi sản xuất ra sản phẩm thì bán được với giá c_1.

Vậy để người bán không bị thiệt khi bán nguyên liệu sản xuất sản phẩm 1 thì

$$a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

Tương tự đối với sản phẩm n

$$a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

Vậy bài toán tìm giá bán $y_1, \ldots, y_n$ sao cho

$$\begin{aligned}
&z^{'} = b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m \to \min \\
&\text{Với các ràng buộc} \\
&\quad \begin{cases} a_{11}y_1 & + & \cdots & + & a_{m1}y_m & \geq & c_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}y_1 & + & \cdots & + & a_{mn}y_n & \geq & c_n \end{cases} \\
&\quad y_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned}$$

Bài toán được viết dưới dạng ma trận

$$z^{'} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \min$$

$$\text{Với các ràng buộc}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.2}$$

trong đó $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}); \mathbf{b}, \mathbf{y} \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}); \mathbf{c} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$

Định nghĩa 3.1 (Bài toán đối ngẫu)**.** *Bài toán 3.1 và 3.2 được gọi là các bài toán đối ngẫu. Bài toán 3.1 gọi là bài toán gốc và bài toán 3.2 gọi là bài toán đối ngẫu. Nghĩa là:*

Bài toán gốc	***Bài toán đối ngẫu***
$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$	$z' = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \min$
Với các ràng buộc	*Với các ràng buộc*
$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$

Định lý 3.2. *Bài toán đối ngẫu của bài toán đối ngẫu 3.2 là bài toán gốc 3.1. Nghĩa là:*

Bài toán gốc	***Bài toán đối ngẫu***
$z' = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \min$	$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$
Với các ràng buộc	*Với các ràng buộc*
$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$ (3.3)	$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ (3.4)
$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$	$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$

Chứng minh. Bài toán 3.3 tương đương

$$-z' = -\mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}^T\mathbf{y} &\le -\mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Theo định nghĩa, đối ngẫu của 3.5:

$$-z = -\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} -(\mathbf{A}^T)^T\mathbf{y} &\ge -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.6}$$

tương đương với

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &\le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

□

3.1.1 Đối ngẫu của bài toán max

Định lý 3.3. *Cho bài toán gốc có dạng chính tắc, bài toán gốc và đối ngẫu tương ứng như sau.*

Bài toán gốc	***Bài toán đối ngẫu***
$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$	$z^{'} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \min$
Với các ràng buộc	*Với các ràng buộc*
$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.7)$	$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} & \textit{ tùy ý} \end{aligned} \quad (3.8)$

Chứng minh. Bài toán gốc 3.7 tương đương

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ -\mathbf{Ax} &\leq -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

tương đương

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix}\mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Bài toán đối ngẫu của 3.10

$$z^{'} = \left(\mathbf{b}^T \,|\, -\mathbf{b}^T\right)\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\left(\mathbf{A}^T \,|\, -\mathbf{A}^T\right)\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \geq \mathbf{c} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{v} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

tuong đương

$$z^{'} = \mathbf{b}^T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &\geq \mathbf{c}\\ \mathbf{u} &\geq \mathbf{0}\\ \mathbf{v} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

Đặt $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ ta được kết quả □

Định lý 3.4. *Bài toán gốc*

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$
Với các ràng buộc
$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b}\\ \mathbf{x}&\ \textit{tùy ý}\end{aligned} \tag{3.11}$$

có bài toán đối ngẫu

$$z^{'} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \min$$
Với các ràng buộc
$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T\mathbf{y} &= \mathbf{c}\\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}\end{aligned} \tag{3.12}$$

Chứng minh. Bài toán gốc 3.11 tương đương

$$-z = -\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min$$
Với các ràng buộc
$$\begin{aligned}-\mathbf{Ax} &\geq \mathbf{b}\\ \mathbf{x}&\ \text{tùy ý}\end{aligned} \tag{3.13}$$

Theo định lý 3.3 và định lý 3.2, bài toán đối ngẫu của 3.13

$$-z^{'} = -\mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \max$$
Với các ràng buộc
$$\begin{aligned}-\mathbf{A}^T\mathbf{y} &= -\mathbf{c}\\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

tương đương

$$z^{'} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \min$$
Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}$$
$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Hai bài toán quy hoạch tuyến tính sau gọi là cặp bài toán đối ngẫu. Bài toán 1 gọi là bài toán gốc, bài toán 2 gọi là bài toán đối ngẫu. Một ràng buộc và điều kiện về biến trên cùng một dòng gọi là **cặp ràng buộc đối ngẫu.**

Bài toán gốc (1)	Bài toán đối ngẫu (2)
$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max$	$z' = b_1y_1 + \cdots + b_my_m \to \min$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$	$y_i \leq 0$ $y_i \geq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j$ $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$ $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j$

Nhận xét. Quan sát cặp bài toán đối ngẫu trên ta có các nhận xét:

- Trong cặp bài toán đối ngẫu trên, hệ số của ràng buộc thứ i của bài toán gốc trở thành hệ số của biến y_i trong bài toán đối ngẫu. Ngược lại, hệ số của x_j trong bài toán gốc chính là hệ số của dòng j trong bài toán đối ngẫu.
- Hệ số của hàm mục tiêu của bài toán gốc trở thành hệ số vế phải của ràng buộc và ngược lại. □

Ví dụ 3.3. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và cho biết các cặp ràng buộc đối ngẫu

$$z = 2x_1 + x_2 - 8x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 28 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Giải. Bài toán gốc, đối ngẫu:

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu

$z = 2x_1 + x_2 - 8x_3 \to \max$	$z' = 28y_1 + 10y_2 + 15y_3 \to \min$
$7x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 28$	$y_1 \geq 0$
$3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10$	$y_2 \in \mathbb{R}$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 15$	$y_3 \leq 0$
$x_1 \geq 0$	$7y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 2$
$x_2 \geq 0$	$4y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 1$
$x_3 \in \mathbb{R}$	$2y_1 + 3y_2 - y_3 = -8$

Ví dụ 3.4. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và cho biết các cặp ràng buộc đối ngẫu

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Giải. Bài toán gốc, đối ngẫu:

Bài toán gốc	**Bài toán đối ngẫu**
$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$	$z' = 2y_1 + 5y_2 + y_3 \to \min$
$3x_1 + 2x_2 \leq 2$	$y_1 \geq 0$
$-x_1 + 2x_2 \leq 5$	$y_2 \geq 0$
$4x_1 + x_2 \leq 1$	$y_3 \geq 0$
$x_1 \geq 0$	$3y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 2$
$x_2 \geq 0$	$2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3$

3.1.2 Đối ngẫu của bài toán min

Bài toán gốc (1)	**Bài toán đối ngẫu (2)**
$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \min$	$z' = b_1y_1 + \cdots + b_my_m \to \max$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$	$y_i \geq 0$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$	$y_i \leq 0$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j$
$x_j \in \mathbb{R}$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j$

Hai bài toán quy hoạch tuyến tính này gọi là cặp bài toán đối ngẫu. Bài toán 1 gọi là bài toán gốc, bài toán 2 gọi là bài toán đối ngẫu. Một ràng buộc và điều kiện về biến trên cùng một dòng gọi là **cặp ràng buộc đối ngẫu.**

Ví dụ 3.5. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và cho biết các cặp ràng buộc đối ngẫu

$$z = 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 - 3x_5 \leq 5 \\ x_1 - x_3 - 4x_4 - 5x_5 \leq -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 17 \end{cases}$$

$$x_1, x_3 \geq 0; x_2 \in \mathbb{R}; x_4, x_5 \leq 0$$

Giải. Bài toán gốc, đối ngẫu:

Bài toán gốc	**Bài toán đối ngẫu**
$z = 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5 \to \min$	$z' = 5y_1 - y_2 + y_3 + 17y_4 \to \min$
$12x_1 + 5x_2 - 3x_5 \leq 5$	$y_1 \leq 0$
$x_1 - x_3 - 4x_4 - 5x_5 \leq -2$	$y_2 \leq 0$
$2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 1$	$y_3 \geq 0$
$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 17$	$y_4 \in \mathbb{R}$
$x_1 \geq 0$	$12y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 \leq 4$
$x_2 \in \mathbb{R}$	$5y_1 + y_3 + 4y_4 = 3$
$x_3 \geq 0$	$-y_2 + y_3 - 5y_4 \leq 1$
$x_4 \leq 0$	$-4y_2 - 2y_3 + y_4 \geq 1$
$x_5 \leq 0$	$-y_1 - 5y_2 \geq -1$

Các cặp ràng buộc trên cùng một dòng gọi là cặp ràng buộc đối ngẫu.

Ví dụ 3.6. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và giải bài toán đối ngẫu bằng phương pháp đơn hình

$$z = 10x_1 + 8x_2 + 19x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ 3x_1 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Giải. Bài toán gốc, bài toán đối ngẫu:

Bài toán gốc	**Bài toán đối ngẫu**
$z = 10x_1 + 8x_2 + 19x_3 \to \min$	$z' = 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$	$y_1 \geq 0$
$3x_1 + 2x_3 \geq 2$	$y_2 \geq 0$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 5$	$y_3 \geq 0$
$x_1 \geq 0$	$y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 10$
$x_2 \geq 0$	$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 8$
$x_3 \geq 0$	$y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq 19$

Chuyển bài toán đối ngẫu sang dạng chính tắc

$$z' = 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 = 10 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_5 = 8 \\ y_1 + 2y_2 + 5y_3 + y_6 = 19 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 6$$

Bảng đơn hình:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			6	2	5	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	10	1	3	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	8	1	2	2	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	19	1	2	5	0	0	1
			-6	-2	-5	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	2	0	1	-1	1	-1	0
$\mathbf{A}_1$	6	8	1	2	2	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	11	0	0	3	0	-1	1
max		Δ	0	10	7	0	6	0

Mọi $\Delta_j \geq 0$ nên phương án hiện thời $\mathbf{y}^T = (8; 0; 0)$ là phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu $z^{'} = 48$.

Nhận xét. Bài toán quy hoạch tuyến tính gốc dạng

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min \\ \text{Với các ràng buộc} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

trong đó $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ thì bài toán đối ngẫu có dạng chuẩn

$$\begin{aligned} z^{'} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \max \\ \text{Với các ràng buộc} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

giải trực tiếp bằng phương pháp đơn hình rất đơn giản. □

Chú ý. Các phần sau, ta chỉ xét bài toán gốc dạng min .

3.2 Các định lý về đối ngẫu

Cho cặp bài toán gốc, đối ngẫu như sau:

Bài toán gốc (1)	**Bài toán đối ngẫu (2)**
$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \min$	$z^{'} = b_1y_1 + \cdots + b_my_m \to \max$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$	$y_i \geq 0$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$	$y_i \leq 0$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j$
$x_j \in \mathbb{R}$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j$

Định lý 3.5 (Đối ngẫu yếu)**.** *Nếu* $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$ *là phương án chấp nhận được của bài toán gốc và* $\mathbf{y}^T = (y_1, \ldots, y_n)$ *là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu thì*

$$b_1y_1 + \cdots + b_my_m \leq c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \tag{3.14}$$

(Nghĩa là với cặp bài toán đối ngẫu, giá trị hàm mục tiêu của bài toán min *luôn lớn hơn hoặc bằng giá trị hàm mục tiêu của bài toán* max*.)*

Chứng minh. Ta đặt

$$\begin{aligned} u_i &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0 \\ v_j &= x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \geq 0 \end{aligned}$$

suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} u_i &= \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} v_j &= \sum_{j=1}^{n} x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \geq 0 \end{aligned}$$

và

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = (c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) - (b_1y_1 + \cdots + b_my_m)$$

Ta đã có điều cần chứng minh. □

Hệ quả 3.6 (Dấu hiệu không có phương án chấp nhận được)**.**

i. Nếu hàm mục tiêu của bài toán quy hoạch tuyến tính gốc không giới nội dưới, thì bài toán đối ngẫu không có phương án chấp nhận được.

ii. Nếu hàm mục tiêu của bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu không giới nội trên, thì bài toán gốc không có phương án chấp nhận được.

Chứng minh. Do sự tương tự ta chỉ chứng minh i). Giả sử bài toán gốc không giới nội dưới tức tồn các phương án chấp nhận được $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ sao cho giá trị hàm mục tiêu

$$z = c_1x_1^k + \cdots + c_nx_n^k \to -\infty \text{ khi } k \to \infty$$

Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử bài toán đối ngẫu có phương án chấp nhận được $\mathbf{y}^T = (y_1, \ldots, y_m)$, theo định lý đối ngẫu yếu

$$b_1y_1 + \cdots + b_my_m \leq c_1x_1^k + \cdots + c_nx_n^k \text{ với mọi } \mathbf{x}^T = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$$

Cho $k \to \infty$ ta được điều vô lý

$$b_1y_1 + \cdots + b_my_m \leq -\infty$$

Vậy ta đã có điều cần chứng minh. □

Hệ quả 3.7 (Dấu hiệu cặp phương án tối ưu)**.** *Cho* $\bar{\mathbf{x}}^T = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ *và* $\bar{\mathbf{y}}^T = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$ *là phương án chấp nhận được tương ứng của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu. Nếu giá trị hàm mục tiêu của hai bài toán này bằng nhau, nghĩa là*

$$c_1\bar{x}_1 + \cdots + c_n\bar{x}_n = b_1\bar{y}_1 + \cdots + b_m\bar{y}_m \tag{3.15}$$

thì $\bar{\mathbf{x}}$ *và* $\bar{\mathbf{y}}$ *là phương án tối ưu tương ứng của hai bài toán.*

Chứng minh. Gọi $\bar{\mathbf{x}}^T = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ là một phương án chấp nhận được bất kỳ của bài toán gốc. Theo định lý đối ngẫu yếu 3.5 ta có

$$c_1\bar{x}_1 + \cdots + c_n\bar{x}_n \le b_1\bar{y}_1 + \cdots + b_m\bar{y}_m \le c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

suy ra $\bar{\mathbf{x}}^T = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc. Chứng minh tương tự ta có $\bar{\mathbf{y}}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. □

Định lý 3.8 (Đối ngẫu mạnh)**.** *Nếu một trong hai bài toán quy hoạch tuyến tính gốc hoặc đối ngẫu có phương án tối ưu thì:*

i. Bài toán quy hoạch kia cũng có phương án tối ưu.

ii. Giá trị hàm mục tiêu tối ưu của hai bài toán bằng nhau.

Chứng minh. Bài toán quy hoạch tuyến tính có nhiều dạng tương đương, các bài toán đối ngẫu của dạng tương đương đó cũng là các dạng tương đương. Các bài toán tương đương cũng có cùng giá trị tối ưu. Do đó ta chỉ cần chứng minh định lý cho một trường hợp cụ thể

$$z = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

Bài toán đối ngẫu có dạng

$$z^{'} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\ge \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Giả sử phương án tối ưu $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1; \ldots; \bar{x}_n)$ của bài toán gốc có hệ vector cơ sở liên kết $B = \{\mathbf{A}_{k_1}; \ldots; \mathbf{A}_{k_m}\}$. Ta đặt

$$\mathbf{x}^B = (x_{k_1}; \ldots; x_{k_m}); \mathbf{c}^B = (c_{k_1}; \ldots; c_{k_m}); \mathbf{B} = \left(\mathbf{A}_{k_1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}_{k_m}\right)$$

Các ràng buộc của bài toán đối ngẫu có dạng $\langle \mathbf{A}_{k_j}; \mathbf{y} \rangle \geq c_{k_j}, j = 1, \ldots, n$. Với phương án $\bar{\mathbf{y}} = \left(\mathbf{c}^B\right)^T \mathbf{B}^{-1}$ ta có

$$\langle \mathbf{A}_{k_j}; \bar{\mathbf{y}} \rangle = \left(\mathbf{c}^B\right)^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{k_j} = \left(\mathbf{c}^B\right)^T \mathbf{A}^B_{k_j} = \Delta_{k_j} + c_{k_j} \geq c_{k_j}, \quad j = 1, \ldots, n$$

vì $\bar{\mathbf{x}}$ là phương án tối ưu nên $\Delta_{k_j} \geq 0, j = 1, \ldots, n$. Do đó $\bar{\mathbf{y}}$ là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu. Ta lại có

$$z' = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{b} = \bar{\mathbf{y}} = \left(\mathbf{c}^B\right)^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

chú ý $\mathbf{x}^B$ là nghiệm của hệ $\mathbf{B}\mathbf{x}^B = \mathbf{b}$ hay $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}^B$. Suy ra

$$z' = \mathbf{c}^B \mathbf{x}^B = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = z$$

Theo hệ quả 3.7 ta có $\bar{\mathbf{y}}$ cũng là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. ☐

Định lý 3.9 (Độ lệch bù). *Giả sử $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ tương ứng là phương án chấp nhận được của bài toán gốc, bài toán đối ngẫu. Khi đó $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ là tối ưu khi và chỉ khi*

$$(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i = 0 \quad \forall i \qquad (3.16)$$
$$x_j(a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m - c_j) = 0 \quad \forall j \qquad (3.17)$$

Chứng minh. Ta đặt

$$\begin{aligned} u_i &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0 \\ v_j &= x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} u_i &= \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} v_j &= \sum_{j=1}^{n} x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \geq 0 \end{aligned}$$

và

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = (c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) - (b_1y_1 + \cdots + b_my_m)$$

Theo định lý đối ngẫu mạnh, nếu $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$ và $\mathbf{y}^T = (y_1, \ldots, y_m)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu thì

$$(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) = (b_1y_1 + \cdots + b_my_m).$$

Do đó $u_i = v_j = 0$ với mọi i, j. Ngược lại nếu $u_i = v_j = 0$ với mọi i, j thì

$$(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) = (b_1y_1 + \cdots + b_my_m).$$

Theo hệ quả 3.7 thì $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$ cũng là phương án tối ưu. □

Ví dụ 3.7. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

có phương án tối ưu của bài toán gốc là $\mathbf{x}^T = (0; 1; 2)$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Giải. Viết bài toán đối ngẫu

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \to \min$	$z' = 2y_1 + 5y_2 \to \max$
$x_1 + x_3 = 2$	y_1 tùy ý
$x_2 + 2x_3 = 5$	y_2 tùy ý
$x_1 \geq 0$	$y_1 \leq 4$
$x_2 \geq 0$	$y_2 \leq 3$
$x_3 \geq 0$	$y_1 + 2y_2 \leq 8$

Theo định lý độ lệch bù:

$$\begin{cases}(x_1+x_3-2)y_1=0\\(x_2+2x_3-5)y_2=0\\x_1(y_1-4)=0\\x_2(y_2-3)=0\\x_3(y_1+2y_2-8)=0\end{cases}$$

thay $x_1=0; x_2=1; x_3=2$ vào hệ trên ta được

$$\begin{cases}y_2-3=0\\y_1+2y_2-8=0\end{cases}$$

Giải hệ ta được $y_1=2, y_2=3$. Vậy phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là $\mathbf{y}^T=(2;3)$.

Ví dụ 3.8. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$z=-4x_1+9x_2+16x_3-8x_4-20x_5\to \min$

Với các ràng buộc

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr}5x_1&+&4x_2&-&x_3&+&3x_4&+&x_5&\geq&5\\-x_1&+&2x_2&+&4x_3&-&2x_4&-&5x_5&\geq&-9\\-x_1&-&2x_2&-&x_3&+&2x_4&+&3x_5&=&2\end{array}\right.$$

$x_1,x_2,x_3\geq 0$

a. Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên.

b. Kiểm tra tính tối ưu của phương án $\mathbf{x}^T=(2;0;1;-2;3)$.

Chú ý. Trong ví dụ này ta không dùng được dấu hiệu tối ưu trong chương 2 để kiểm tra tính tối ưu của phương án vì trong phương án có $x_4,x_5\in\mathbb{R}$.

Giải.

a. Bài toán đối ngẫu

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z=-4x_1+9x_2+16x_3-8x_4-20x_5\to\min$	$z'=5y_1-9y_2+2y_3\to\max$
$5x_1+4x_2-x_3+3x_4+x_5\geq 5$	$y_1\geq 0$
$-x_1+2x_2+4x_3-2x_4-5x_5\geq -9$	$y_2\geq 0$
$-x_1-2x_2-x_3+2x_4+3x_5=2$	$y_3\in\mathbb{R}$
$x_1\geq 0$	$5y_1-y_2-y_3\leq -4$

$x_2 \geq 0$	$4y_1 + 2y_2 - 2y_3 \leq 9$
$x_3 \geq 0$	$-y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 16$
$x_4 \in \mathbb{R}$	$3y_1 - 2y_2 + 2y_3 = -8$
$x_5 \in \mathbb{R}$	$y_1 - 5y_2 + 3y_3 = -20$

Bài toán được viết lại:

$$z' = 5y_1 - 9y_2 + 2y_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 - y_3 \leq -4 \\ 4y_1 + 2y_2 - 2y_3 \leq 9 \\ -y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 16 \\ 3y_1 - 2y_2 + 2y_3 = -8 \\ y_1 - 5y_2 + 3y_3 = -20 \end{cases}$$

$y_1, y_2 \geq 0$

b. Kiểm tra tính tối ưu của $\mathbf{x}^T = (2; 0; 1; -2; 3)$. Sử dụng định lý độ lệch bù ta được

$$\begin{cases} (5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 - 5)y_1 = 0 \\ (-x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 5x_5 + 9)y_2 = 0 \\ (-x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 2)y_3 = 0 \\ (5y_1 - y_2 - y_3 + 4)x_1 = 0 \\ (4y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 9)x_2 = 0 \\ (-y_1 + 4y_2 - y_3 - 16)x_3 = 0 \\ (3y_1 - 2y_2 + 2y_3 + 8)x_4 = 0 \\ (y_1 - 5y_2 + 3y_3 + 20)x_5 = 0 \end{cases}$$

và thay $\mathbf{x}$ vào hệ ta được

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ (5y_1 - y_2 - y_3 + 4) = 0 \\ (-y_1 + 4y_2 - y_3 - 16) = 0 \\ (3y_1 - 2y_2 + 2y_3 + 8) = 0 \\ (y_1 - 5y_2 + 3y_3 + 20) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 4 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy có $\mathbf{y}^T = (0; 4; 0)$ thỏa định lý độ lệch bù. Nên $\mathbf{x}^T$ là phương án tối ưu và $\mathbf{y}^T$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

3.3 Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu

Định lý độ lệch bù 3.9 cho ta công cụ tổng quát để tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (gốc) khi biết phương án tối ưu của bài toán gốc (đối ngẫu) của nó. Từ định lý này, ta có hai hệ quả đề tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu khi biết phương án tối ưu của bài toán gốc hoặc bảng đơn hình của phương an tối ưu của bài toán gốc.

3.3.1 Biết phương án tối ưu bài toán gốc

Hệ quả 3.10. *Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu $\bar{\mathbf{x}}$ với hệ vector cơ sở liên kết là $B = \{\mathbf{A}_{k_1}; \ldots; \mathbf{A}_{k_m}\}$. Phương án tối ưu $\bar{\mathbf{y}}$ của bài toán đối ngẫu là nghiệm của hệ phương trình $\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^B$.*

Chứng minh. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$z = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Cặp bài toán gốc, đối ngẫu như sau

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$	$z' = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \min$
$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$

Theo định lý độ lệch bù:

$$\begin{cases} \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{c}) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{3.19}$$

Do $\bar{\mathbf{x}}$ là phương án tối ưu của bài toán gốc cho nên $\bar{\mathbf{y}}^T(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ luôn đúng. Ta còn lại điều kiện

$$\bar{\mathbf{x}}^T\left(\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{c}\right) = \mathbf{0} \tag{3.20}$$

Do $\bar{\mathbf{x}}$ có $x_{k_{m+1}} = \cdots = x_{k_n} = 0$ và $x_{k_1}, \ldots, x_{k_m} > 0$ nên khi thay $\bar{\mathbf{x}}$ vào (3.20) ta được hệ $\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^B$. □

Chú ý. Hệ phương trình $\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^B$ tương đương

$$\begin{cases} \langle \mathbf{A}_{k_1}; \bar{\mathbf{y}} \rangle = c_{k_1} \\ \dots \\ \langle \mathbf{A}_{k_m}; \bar{\mathbf{y}} \rangle = c_{k_m} \end{cases}$$

Ví dụ 3.9. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} \quad - x_2 + x_3 + x_4 \le 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 25 \\ \quad 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 16 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, 4$$

Tìm phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu.

Giải. Chuyển bài toán sang dạng chính tắc

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} \quad - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 25 \\ \quad 2x_2 + x_3 + 5x_4 + x_6 = 16 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, 6$$

Giả bằng phương pháp đơn hình

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			2	-3	4	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	10	0	-1	1	1	1	0
$\mathbf{A}_1$	2	25	1	1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_6$	0	16	0	2	1	5	0	1
			0	5	2	-1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	34/5	0	-7/5	4/5	0	1	-1/5
$\mathbf{A}_1$	2	25	1	1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	1	16/5	0	2/5	1/5	1	0	1/5
max		Δ	0	27/5	11/5	0	0	1/5

Phương án tối ưu của bài toán gốc $\mathbf{x}^T = (25; 0; 0; 16/5; 34/5; 0)$ có hệ vector cơ sở liên kết $B = \{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5\}$. Ta đặt:

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{A}_1 \vdots \mathbf{A}_4 \vdots \mathbf{A}_5\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } \left(\mathbf{c}^B\right)^T = (c_1; c_4; c_5) = (2; 1; 0)$$

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là nghiệm của hệ phương trình $\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^B$ hay

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nhận xét. Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu ở ví dụ 3.9 ở trên có thể làm như sau: Từ phương án tối ưu của bài toán gốc

$$\mathbf{x}^T = (25; 0; 0; 16/5; 34/5; 0)$$

ta xác định được $x_1, x_4, x_5 > 0$. Ta đánh dấu cột 1, 4, 5 của bài toán gốc:

$$\begin{array}{l|c|ccccc|c|c|cccc}
z = & 0x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & & +x_4 & +x_5 & & & & \\
\hline
\text{ràng} & & - & x_2 & + & x_3 & & +x_4 & +x_5 & & & = & 10 \\
\text{buộc} & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & & & & = & 25 \\
 & & & 2x_2 & + & x_3 & & +5x_4 & & + & x_6 & = & 16
\end{array}$$

Lập hệ phương trình ba ẩn với hệ số các phương trình là các cột ở trên:

$$\begin{cases} 0y_1 + y_2 + 0y_3 = 0 \to \text{ cột } 1 \\ y_1 + 0y_2 + 5y_3 = 1 \to \text{ cột } 4 \\ y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 1 \to \text{ cột } 5 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $\mathbf{y}^T = (0; 2; 1/5)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. □

Ví dụ 3.10. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 50 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 \geq 16 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 23 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

có phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (0; 14; 6; 5)$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Giải. Dạng chính tắc

$$z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 50 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 16 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 23 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

Phương án tối ưu của bài toán dạng chính tắc trên

$$\mathbf{x}^T = (0; 14; 6; 5; 0; 0).$$

có $x_2; x_3; x_4 > 0$.

$$\begin{array}{ll|c|c|c|lll}
z = & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +4x_4 & & & \\
\hline
\text{ràng} & 5x_1 & +x_2 & +x_3 & +6x_4 & & & = 50 \\
\text{buộc} & -3x_1 & & +x_3 & +2x_4 & -x_5 & & = 16 \\
 & 4x_1 & & +3x_3 & +x_4 & & +x_6 & = 23
\end{array}$$

Lập hệ phương trình ba ẩn với hệ số các phương trình là các cột 2, 3, 4 ở trên:

$$\begin{cases} y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 2 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 = 1 \\ 6y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $\mathbf{y}^T = (2; -23/5; 6/5)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. □

Ví dụ 3.11. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -6x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

có phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (0; 2; 0; 7)$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Giải. Bài toán có dạng chính tắc

$z = -6x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$

có $\mathbf{x}^T = (0; 2; 0; 7; 8; 0)$ là phương án tối ưu. Trong phương án tồi ưu này, $x_2, x_4, x_5 > 0$.

$$\begin{array}{llc|c|ll|c|c|lll} z = & -6x_1 & +x_2 & - & 3x_3 & +0x_4 & +0x_5 & & & & \\ \hline \text{ràng} & 2x_1 & -x_2 & - & 5x_3 & +x_4 & & & & = & 5 \\ \text{buộc} & x_1 & -2x_2 & + & 2x_3 & & +x_5 & & & = & 4 \\ & -4x_1 & +x_2 & + & x_3 & & & + & x_6 & = & 2 \end{array}$$

Bài toán đối ngẫu có phương án tối ưu là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 = 4 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

suy ra $\mathbf{y}^T = (0; 0; 1)$. □

3.3.2 Có bảng đơn hình của phương án tối ưu

Hệ quả 3.11. *Cho bài toán gốc dạng chính tắc, phương án xuất phát có hệ vector cơ sở liên kết đơn vị*

$$B = \{\mathbf{A}_{k_1}; \ldots; \mathbf{A}_{k_m}\} = \{\mathbf{e}_1; \ldots; \mathbf{e}_m\}^*$$

và phương án tối ưu có các ước lượng $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là

$$\bar{\mathbf{y}} = (\Delta_{k_1} + c_{k_1}; \ldots; \Delta_{k_m} + c_{k_m})$$

*$\mathbf{e}_j = (0; \ldots; 0; 1; 0; \ldots; 0)$ là vector đơn vị thứ j

Chứng minh. Giả sử phương án tối ưu $\bar{\mathbf{x}}$ của bài toán gốc có hệ vector cơ sở liên kết $B' = \{\mathbf{A}_{l_1};\ldots;\mathbf{A}_{l_m}\}$. Ta đặt

$$\mathbf{x}^{\mathbf{B}'} = (x_{l_1};\ldots;x_{l_m}); \mathbf{c}^{\mathbf{B}'} = (c_{l_1};\ldots;c_{l_m}); \mathbf{B}' = \left(\mathbf{A}_{l_1}\vdots\cdots\vdots\mathbf{A}_{l_m}\right)$$

Theo hệ quả 3.10, $\bar{\mathbf{y}} = \left(\mathbf{c}^{\mathbf{B}'}\right)^T \mathbf{B}'^{-1}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Ta xét

$$\langle \mathbf{A}_{l_j};\bar{\mathbf{y}}\rangle = \left(\mathbf{c}^{\mathbf{B}'}\right)^T \mathbf{B}'^{-1}\mathbf{A}_{l_j} = \left(\mathbf{c}^{\mathbf{B}'}\right)^T \mathbf{A}_{lj}^{B'} = \Delta_{l_j} + c_{l_j}, \quad j = 1,\ldots,n$$

với các $i = l_j \in \{k_1;\ldots;k_m\}$

$$y_i = \langle \mathbf{A}_i;\bar{\mathbf{y}}\rangle = \langle \mathbf{e}_i;\bar{\mathbf{y}}\rangle = \Delta_i + c_i \qquad \square$$

Ví dụ 3.12. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} - x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 25 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 16 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,4$$

Tìm phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu.

Giải. Chuyển bài toán sang dạng chính tắc và biến đổi hàm mục tiêu ta được

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} - x_2 + x_3 + x_4 + \boxed{x_5} = 10 \\ \boxed{x_1} + x_2 + 3x_3 = 25 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 + \boxed{x_6} = 16 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,6$$

Tìm phương án tối ưu bài toán gốc

Phương án cực biên xuất phát có hệ vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_5;\mathbf{A}_1;\mathbf{A}_6\}$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			2	-3	4	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	10	0	-1	1	1	1	0
$\mathbf{A}_1$	2	25	1	1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_6$	0	16	0	2	1	5	0	1
			0	5	2	-1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	34/5	0	-7/5	4/5	0	1	-1/5
$\mathbf{A}_1$	2	25	1	1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	1	16/5	0	2/5	1/5	1	0	1/5
max		Δ	0	27/5	11/5	0	0	1/5

Vậy phương án tối ưu của bài toán gốc $\mathbf{x}^T = (25; 0; 0; 16/5)$.

Suy ra phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu

$$\begin{cases} y_1 = c_{k_1} + \Delta_{k_1} = c_5 + \Delta_5 = 0 + 0 \\ y_2 = c_{k_2} + \Delta_{k_2} = c_1 + \Delta_1 = 2 + 0 \\ y_3 = c_{k_3} + \Delta_{k_3} = c_6 + \Delta_6 = 0 + 1/5 \end{cases}$$

Vậy phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu $\mathbf{y}^T = (0; 2; 1/5)$ □

Ví dụ 3.13. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và giải bài toán đối ngẫu bằng phương pháp đơn hình

$$z = 10x_1 + 8x_2 + 19x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ 3x_1 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Giải. Bài toán gốc, bài toán đối ngẫu:

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = 10x_1 + 8x_2 + 19x_3 \to \min$	$z' = 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$	$y_1 \geq 0$
$3x_1 + 2x_3 \geq 2$	$y_2 \geq 0$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 5$	$y_3 \geq 0$
$x_1 \geq 0$	$y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 10$
$x_2 \geq 0$	$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 8$
$x_3 \geq 0$	$y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq 19$

Ta sẽ giải tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu sau đó suy ra phương án tối ưu của bài toán gốc.

Tìm phương án tối ưu bài toán đối ngẫu

Bài toán đối ngẫu có dạng chính tắc

$z^{'} = 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 + \boxed{y_4} = 10 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \boxed{y_5} = 8 \\ y_1 + 2y_2 + 5y_3 + \boxed{y_6} = 19 \end{cases}$$

$y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 6$

Phương án cực biên ban đầu có hệ vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5; \mathbf{A}_6\}$. Bảng đơn hình:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			6	2	5	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	10	1	3	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	8	1	2	2	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	19	1	2	5	0	0	1
max		Δ	-6	-2	-5	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	2	0	1	-1	1	-1	0
$\mathbf{A}_1$	6	8	1	2	2	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	11	0	0	3	0	-1	1
max		Δ	0	10	7	0	6	0

Mọi $\Delta_j \geq 0$ nên phương án hiện thời $\mathbf{y}^T = (8; 0; 0)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Suy phương án tối ưu bài toán gốc

$$\begin{cases} y_1 = c_{k_1} + \Delta_{k_1} = c_4 + \Delta_4 = 0 + 0 = 0 \\ y_2 = c_{k_2} + \Delta_{k_2} = c_5 + \Delta_5 = 0 + 6 = 6 \\ y_3 = c_{k_3} + \Delta_{k_3} = c_6 + \Delta_6 = 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Vậy phương án tối ưu bài toán gốc $\mathbf{y}^T = (0; 6; 0)$. □

3.4 Bài tập chương 3

Bài tập 3.1. Giải các bài toán qui hoạch tuyến tính

a. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 19 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 24 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (7/5; 53/15; 0)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 67/5$

b. $z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 25 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 30 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (131/60; 127/60; 8/3)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 209/30$

Bài tập 3.2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 16 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 8 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$

a. Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên.

b. Hãy giải một trong hai bài toán rồi suy ra phương án tối ưu của bài toán còn lại.

Bài tập 3.3. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 16x_4 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 9 \end{cases}$$

$x_1 \leq 0; x_j \geq 0, \quad j = 2, \ldots, 4$

a. Hỏi $\mathbf{x}^T = (25/13; 64/13; 0; 8/13)$ có phải là phương án tối ưu của bài toán trên không?

b. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Bài tập 3.4. Một Xí nghiệp chăn nuôi cần mua một loại thức ăn tổng hợp T1, T2, T3 cho gia súc với tỷ lệ chất dinh dưỡng như sau:

- 1 kg T1 chứa 4 đơn vị dinh dưỡng D1, 2 đơn vị dinh dưỡng D2, và 1 đơn vị dinh dưỡng D3.
- 1 kg T2 chứa 1 đơn vị dinh dưỡng D1, 7 đơn vị dinh dưỡng D2, và 3 đơn vị dinh dưỡng D3
- 1 kg T3 chứa 3 đơn vị dinh dưỡng D1, 1 đơn vị dinh dưỡng D2, và 4 đơn vị dinh dưỡng D3.

Mỗi bữa ăn, gia súc cần tối thiểu 20 đơn vị D1, 25 đơn vị D2 và 30 đơn vị D3. Hỏi Xí nghiệp phải mua bao nhiêu kg T1, T2, T3 mỗi loại cho một bữa ăn để bảo đảm tốt về chất dinh dưỡng và tổng số tiền mua là nhỏ nhất? Biết rằng 1 kg T1 có giá là 10 ngàn đồng, 1 kg T2 có giá là 12 ngàn đồng, 1 kg T3 có giá là 14 ngàn đồng.

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (5/18; 49/18; 97/18)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 998/9$

Bài tập 3.5. Một Xí nghiệp xử lý giấy, có ba phân xưởng I, II, III cùng xử lý hai loại giấy A, B. Do hai phân xưởng có nhiều sự khác nhau, nên nếu cùng đầu tư 10 triệu đồng vào mỗi phân xưởng thì cuối kỳ

- Phân xưởng I xử lý được 6 tạ giấy loại A, 5 tạ giấy loại B.
- Phân xưởng II xử lý được 4 tạ giấy loại A, 6 tạ giấy loại B.
- Phân xưởng III xử lý được 5 tạ giấy loại A, 4 tạ giấy loại B.

Theo yêu cầu lao động thì cuối kỳ xí nghiệp phải xử lý ít nhất 6 tấn giấy loại A, 8 tấn giấy loại B. Hỏi cần đầu tư vào mỗi phân xưởng bao nhiêu tiền để xí nghiệp hoàn thành công việc với giá tiền đầu tư là nhỏ nhất.

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (5/2; 45/4; 0)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 55/4$(đơn vị 10 triệu)

Bài tập 3.6. Một gia đình cần ít nhất 1800 đơn vị prôtêin và 1500 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Một kilôgam thịt bò chứa 600 đơn vị prôtêin và 600 đơn vị lipit, một kilôgam thịt heo chứa 600 đơn vị prôtêin và 300 đơn vị lipit, một kilôgam thịt gà chứa 600 đơn vị prôtêin và 600 đơn vị lipit. Giá một kilôgam thịt bò là 84 ngàn đồng, giá một kilôgam thịt heo là 71 ngàn đồng, giá một kilôgam thịt gà là 90 ngàn đồng. Hỏi một gia đình nên mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để bảo đảm tốt khẩu phần ăn trong một ngày và tổng số tiền phải mua là nhỏ nhất?

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (2; 1; 0)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 239$.

Bài tập 3.7. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính.

$$z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \text{min}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq -4 \\ x_1 + 3x_3 - 4x_5 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_3, x_5 \geq 0$$

a. Kiểm tra tính tối ưu của phương án $\mathbf{x}^T = (5; -6; 1; -4; 0)$ cho bài toán gốc

b. Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên, chứng tỏa tập phương án của bài toán đối ngẫu là tập rỗng.

c. Chứng tỏa bài toán đã cho không có phương án tối ưu.

Hướng dẫn.

a. Sử dụng định lý độ lệch bù, với phương án $\mathbf{x}^T = (5; -6; 1; -4; 0)$ thì không tồn tại phương án nào của bài toán đối ngẫu thỏa định lý độ lệch bù.

b. Chỉ ra không có phương án nào thỏa các ràng buộc của bài toán đối ngẫu.

c. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử bài toán gốc có phương án tối ưu thì bài toán đối ngẫu cũng có phương án tối ưu (theo định lý đối ngẫu mạnh 3.8). Điều này trái với câu a). Vậy ta được điều phải chứng minh.

Chương 4

Bài toán vận tải

Mục lục chương 4

4.1 Bài toán vận tải cân bằng thu phát

Phát \ Thu	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1j}	$\cdots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2j}	$\cdots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
a_i	c_{i1}	c_{i2}	$\cdots$	c_{ij}	$\cdots$	c_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mj}	$\cdots$	c_{mn}

- Có m nơi cung cấp hàng hóa (trạm phát), trạm phát i chứa a_i đơn vị hàng hóa $i = 1, \ldots, m$.

- Có n nơi tiêu thụ hàng hóa (trạm thu), trạm thu thứ j chứa b_j đơn vị hàng hóa $j = 1, \ldots, n$.
- Tổng lượng phát bằng tổng lượng thu, nghĩa là

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{4.1}$$

- Cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ nơi cung cấp thứ i đến nơi tiêu thụ thứ j là c_{ij}.

Yêu cầu của bài toán là tìm lượng hàng phân phối $x_{ij} \geq 0$ từ trạm phát thứ i đến trạm thu thứ j sao cho:

- Tổng chi phí vận chuyển thấp nhất

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{4.2}$$

- Giải tỏa kho

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{4.3}$$

- Cửa hàng nhận đủ hàng

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.4}$$

Bảng phân phối lượng hàng vận chuyển x_{ij} từ trạm phát thứ i đến trạm thu thứ j thường được trình bày như sau:

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1j} x_{1j}		c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2j} x_{2j}		c_{2n} x_{2n}
$\vdots$						
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}		c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
$\vdots$						
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mj} x_{mj}		c_{mn} x_{mn}

Ma trận

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

thỏa các ràng buộc (4.3) và (4.4) được gọi là phương án chấp nhận được.

Tính chất 4.1. *Bài toán vận tải cân bằng thu phát luôn có phương án tối ưu.*

Chứng minh. Ta cần chứng minh tập các phương án chấp nhận được khác rỗng và hàm mục tiêu luôn bị chặn dưới. Thật vậy ta có

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} \geq 0, \quad \forall i, j \tag{4.6}$$

là phương án chấp nhận được vì

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} = \frac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{4.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} = \frac{b_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j, \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.8}$$

Hàm mục tiêu bị chặn dưới bởi không

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \geq 0 \tag{4.9}$$

Vậy theo tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính, bài toán vận tải luôn có phương án tối ưu.

Tính chất 4.2. *Ma trận hệ số các ràng buộc của bài toán vận tải có hạng bằng* $m + n - 1$.

4.2 Phương án cực biên

Định nghĩa 4.3 (Ô chọn, ô loại)**.**

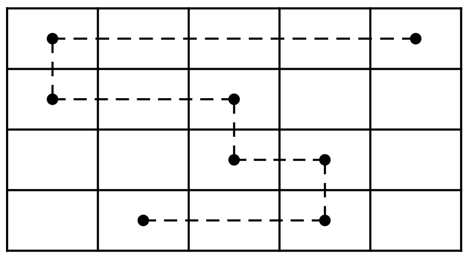
i. Ta viết $(i;j)$ là ô ở dòng i cột j.

*ii. Trong bảng vận tải, những ô có $x_{ij} > 0$ được gọi là **ô chọn**, những ô có $x_{ij} = 0$ gọi là **ô loại**.*

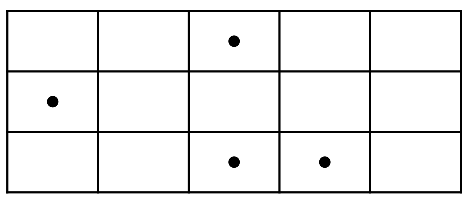
Định nghĩa 4.4 (Đường đi)**.** *Ta gọi một đường đi là tập hợp các ô chọn sao cho:*

- *Trên cùng một dòng hay một cột không có quá hai ô chọn.*
- *Hai ô chọn liên tiếp thì nằm trên cùng một dòng hay một cột.*

Ví dụ 4.1. Dãy các ô chọn sau tạo thành một đường đi:



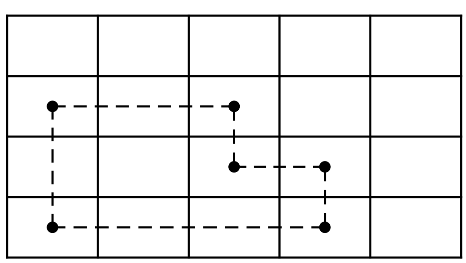
Ví dụ 4.2. Các ô chọn sau có lập thành đường đi không

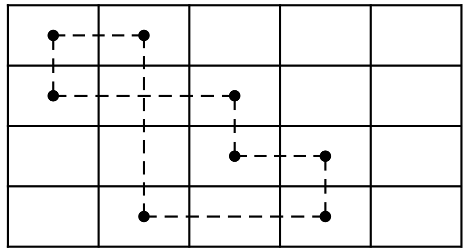


vì không có ô liên tiếp với $(2;1)$.

Định nghĩa 4.5 (Chu trình)**.** *Một đường đi khép kín được gọi là một chu trình.*

Ví dụ 4.3. Dãy các ô chọn sau tạo thành một chu trình

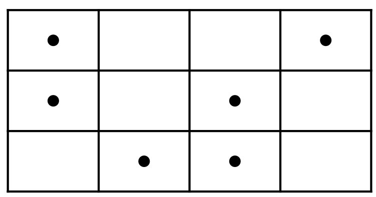




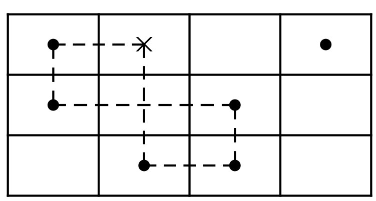
Tính chất 4.6. *Một bảng vận tải có m dòng, n cột thì tập các ô chọn không chứa chu trình có tối đa $m+n-1$ ô.*

Tính chất 4.7. *Với một phương án có đủ $m+n-1$ ô chọn không chứa chu trình, thì với bất kỳ một ô loại nào được đưa vào phương án thì ô loại này cùng với một số ô chọn đã cho để tạo thành chu trình và chu trình này là duy nhất.*

Ví dụ 4.4. Xét bảng vận tải 3 dòng, 4 cột với một phương án có $3+4-1=6$ ô chọn cho như sau



Khi ta thêm một ô loại bất kỳ thì ô loại này kết hợp với một số ô chọn này tạo thành chu trình. Chẳng hạn, ta thêm ô loại $(1,2)$ vào phương án thì ô này sẽ kết hợp với các ô $(3,2)$; $(3,3)$; $(2,3)$; $(2,1)$; $(1,1)$ tạo thành chu trình.



□

Định lý 4.8. *Một phương án được gọi là phương án cực biên của bài toán vận tải khi và chỉ khi tập các ô chọn của nó không chứa chu trình.*

Định nghĩa 4.9. *Một phương án cực biên có $m+n-1$ ô chọn được gọi là phương án cực biên không suy biến. Ngược lại, một phương án cực biên có ít hơn $m+n-1$ ô chọn được gọi là phương án cực biên suy biến.*

Ví dụ 4.5. Phương án sau là phương án cực biên không suy biến

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Ví dụ 4.6. Phương án sau là phương án cực biên suy biến

$a_i \backslash b_j$	**40**	**100**	**60**	**50**
80	1 **40**	2	4 **40**	3
70	2	4	5 **20**	1 **50**
100	4	1 **100**	2	5

Nhận xét. Một phương án cực biên có các cô chọn có thể không lập thành một đường đi.

4.3 Các phương pháp thành lập phương án cực biên

4.3.1 Phương pháp cước phí thấp nhất

Ý tưởng chính của phương pháp này là *phân phối lượng hàng lớn nhất có thể vào ô có cước phí thấp nhất*. Phương pháp phân phối lượng hàng x_{ij} được thực hiện như sau:

$$x_{ij} = \min\{a_i; b_j\} = \begin{cases} a_i & \text{loại dòng } i, b_j = b_j - a_i \\ b_j & \text{loại cột } j, a_i = a_i - b_j \\ a_i = b_j & \text{loại dòng } i \text{ cột j} \end{cases} \tag{4.10}$$

Lặp lại quá trình trên cho các ô tiếp theo đến khi yếu cầu của trạm phát, trạm thu được thỏa mãn. Phương án thu được bằng phương pháp này là phương án cực biên.

Ví dụ 4.7. Bằng phương pháp cước phí thấp nhất, thành lập một phương án cực biên của bài toán vận tải:

a_i \ b_j	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Giải.

Ô $(1;1)$ có cước phí thấp nhất nên ta phân vào ô này một lượng nhiều nhất là 30. Khi đó:

- Trạm thu thứ nhất nhận đủ hàng, xóa cột 1.
- Trạm phát thứ nhất còn dư 50, ta ghi nháp 50.

	a_i \ b_j	**30**	**40**	**50**	**60**
50	**80**	1 **30**	5	7	2
	45	5	7	4	9
	55	12	2	3	6

Trong các ô còn lại, có hai ô: $(1;4)$ và $(3;2)$ có cùng cước phí thấp nhất là 2. Tuy nhiên nếu chọn ô $(1;4)$ làm ô chọn thì lượng hàng phân qua ô này là 50 sẽ nhiều hơn khi chọn ô $(3;2)$

- Trạm phát thứ nhất phát hết hàng, xóa dòng 1.
- Trạm thu thứ 4 thiếu hàng, ta ghi nháp 10.

					10
	a_i \ b_j	**30**	**40**	**50**	**60**
50	**80**	1 **30**	5	7	2 **50**
	45	5	7	4	9
	55	12	2	3	6

Ô $(3;2)$ có cước phí thấp nhất là 2, ta phân một lượng 40 vào ô này:

- Trạm thu thứ 2 nhận đủ hàng, xóa cột 2.
- Trạm phát thứ 3 còn dư 15, ta ghi nháp 15.

					10
	a_i \ b_j	**30**	**40**	**50**	**60**
50	**80**	1 **30**	5	7	2 **50**
	45	5	7	4	9
15	**55**	12	2 **40**	3	6

Ô $(3;3)$ có cước phí thấp nhất là 3, ta phân một lượng 15 vào ô này:

- Trạm phát thứ 3 phát hết hàng, xóa dòng 3.
- Trạm thu thứ 3 còn thiếu 35, ta ghi nháp 35.

				35	**10**
	a_i \ b_j	**30**	**40**	**50**	**60**
50	**80**	1 **30**	5	7	2 **50**
	45	5	7	4	9
15	**55**	12	2 **40**	3 **15**	6

Trạm phát thứ 2 có lượng phát 45, ta phân vào ô $(2;3)$ một lượng 35 và ô $(2;4)$ một lượng 10. Cuối cùng ta được phương án cực biên không suy biến. Tổng cước phí $z = 485$.

a_i \ b_j	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

4.3.2 Phương pháp góc Tây - Bắc

Ta ưu tiên phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô ở góc Tây - Bắc (góc trên bên trái) của bảng vận tải. Khi đó nếu:

- Trạm phát nào đã hết hàng thì ta xóa dòng chứa trạm phát đó.
- Trạm thu nào đã nhận đủ hàng thì ta xóa cột chứa trạm thu đó.

Sau đó lặp lại quá trình trên đối với những ô còn lại. Phương án được thành lập bằng phương pháp góc Tây - Bắc là phương án cực biên

Ví dụ 4.8. Bằng phương pháp góc Tây - Bắc, thành lập phương án cực biên của bài toán vận tải

a_i \ b_j	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Giải.

Phân vào ô (1; 1) một lượng 30, khi đó:

- Trạm thu thứ nhất nhận đủ hàng, ta xóa cột 1
- Trạm phát thứ nhất còn dư 50, ghi nháp 50.

	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
50	**80**	1 **30**	5	7	2
	45	5	7	4	9
	55	12	2	3	6

Phân vào ô (1; 2) một lượng 40, khi đó:

- Trạm thu thứ 2 nhận đủ hàng, xóa cột 2.
- Trạm phát thứ nhất còn dư 10, ghi nháp 10.

	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
10	**80**	1 **30**	5 **40**	7	2
	45	5	7	4	9
	55	12	2	3	6

Phân vào ô (1; 3) một lượng 10, khi đó:

- Trạm phát thứ nhất phát hết hàng, xóa trạm phát 1.
- Trạm thu thứ 3 còn thiếu 40, viết nháp 40.

				40	
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
10	**80**	1 **30**	5 **40**	7 **10**	2
	45	5	7	4	9
	55	12	2	3	6

Phân vào ô (2; 3) một lượng 40, khi đó:

- Trạm thu thứ 3 nhận đủ, xóa trạm thu 3.
- Trạm phát thứ 2 còn dư 5, ta viết nháp 5.

				40	
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
10	**80**	1 **30**	5 **40**	7 **10**	2
5	**45**	5	7	4 **40**	9
	55	12	2	3	6

Cuối cùng phân vào ô $(2;4)$ một lượng 5 và ô $(3;4)$ một lượng 55 thì ta được phương án cực biên. Phương án cực biên này không suy biến, giá trị cước phí của phương án này là $z = 790$.

a_i \ b_j	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5 **40**	7 **10**	2
45	5	7	4 **40**	9 **5**
55	12	2	3	6 **55**

4.3.3 Phương pháp Vogel (Fogel)

Phương pháp Vogel cho ta một phương án cực biên khá tốt, theo nghĩa nó rất gần với phương án tối ưu.

i) Trên mỗi dòng, mỗi cột của ma trận cước phí ta tính hiệu số giữa hai giá trị cước phí nhỏ nhất.

ii) Chọn dòng hay cột có hiệu số này lớn nhất (nếu có nhiều dòng hay cột thỏa điều kiện này thì ta chọn một dòng hay một cột trong các dòng, cột này)

iii) Phân lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí nhỏ nhất trên dòng hay cột vừa chọn được. Khi đó nếu nơi nào đã phát hết hàng thì ta xóa dòng chứa nơi phát đó. Nếu nơi nào nhận đủ hàng thì ta xóa cột chứa nơi nhận đó. Lúc đó cột (dòng) này hiệu số sẽ không tính cho bước sau.

iv) Lặp lại ba bước nói trên với những ô còn lại cho đến hết. Ta thu được phương án cực biên.

Ví dụ 4.9. Bằng phương pháp Vogel tìm phương án cực biên của bài toán vận tải:

a_i \ b_j	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Giải.

Cột 1 có hiệu số lớn nhất (cũng có thể chọn cột 4), ta sẽ phân vào cột 1. Phân vào ô (1; 1) có cước phí thấp nhất một lượng nhiều nhất là 30.

- Trạm thu thứ 1 nhận đủ hàng, xóa cột 2.
- Trạm phát thứ 1 còn dư 50, viết nháp 50.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**	
80	1 **30**	5	7	2	1
45	5	7	4	9	1
55	12	2	3	6	1
	(4)	3	1	4	

Cột 4 có hiệu số lớn nhất , ta sẽ phân hàng vào cột 4. Phân vào ô (1; 4) có cước phí thấp nhất một lượng nhiều nhất là 50.

- Trạm phát thứ 1 hết hàng, xóa trạm phát 1.
- Trạm thu thứ 4 còn thiếu 10, viết nháp 10.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**	
80	1 **30**	5	7	2 **50**	3
45	5	7	4	9	3
55	12	2	3	6	1
		3	1	(4)	

Cột 4 có hiệu số lớn nhất , ta sẽ phân hàng vào cột 5. Phân vào ô (3; 2) có cước phí thấp nhất một lượng nhiều nhất là 40.

- Trạm thu thứ 2 nhận đủ hàng, xóa cột 2.
- Trạm phát thứ 4 còn dư 15, viết nháp 15.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**	
80	1 **30**	5	7	2 **50**	
45	5	7	4	9	3
55	12	2 **40**	3	6	1
		(5)	1	3	

Dòng 2 có hiệu số lớn nhất, ta sẽ phân hàng vào dòng 2. Phân vào ô $(2;3)$ có cước phí thấp nhất một lượng nhiều nhất là 45.

- Trạm phát thứ 2 hết hàng, xóa dòng 2.
- Trạm thu thứ 3 còn thiếu 5, viết nháp 5.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**	
80	1 **30**	5	7	2 **50**	
45	5	7	4 **45**	9	(5)
55	12	2 **40**	3	6	4
			1	3	

Cuối cùng phân vào ô $(3;3)$ một lượng 5 và ô $(3;4)$ một lượng 10 thì ta được phương án cực biên. Phương án cực biên này không suy biến, giá trị cước phí của phương án này là $z = 465$.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **45**	9
55	12	2 **40**	3 **5**	6 **10**

Nhận xét. Phương pháp Vogel cho ta một phương án cực biên khá tốt, theo nghĩa nó gần phương án tối ưu hơn hai phương pháp trước.

4.4 Thuật toán thế vị giải bài toán vận tải

Để giải bài toán vận tải, ta thực hiện bốn bước như sau:

Bước 1. Thành lập phương án cực biên bằng một trong các phương pháp: **cước phí thấp nhất, Tây - Bắc, Vogel**.

Bước 2. Xét xem phương án cực biên hiện thời đã tối ưu hay chưa bằng thuật toán **quy không cước phí ô chọn.** Nếu phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu thì thuật toán kết thúc. Ngược lại sang bước 3.

Bước 3. Xây dựng phương án cực biên mới tốt hơn xem 4.4.2.

Bước 4. Quay về bước 2.

4.4.1 Thuật toán quy không cước phí ô chọn

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án cực biên ban đầu không suy biến (có $m + n - 1$ ô chọn). Nếu bài toán có phương án cực biên suy biến (có ít hơn $m+n-1$ ô chọn) thì ta thêm **ô chọn giả** (i, j) với $x_{ij} = 0$ vào sao cho các ô chọn giả này và các ô chọn ban đầu không tạo thành chu trình.

Ví dụ 4.10. Xét bài toán vận tải có phương án cực biên suy biến

$a_i \backslash b_j$	**40**	**100**	**60**	**50**
80	1 **40**	2	4 **40**	3
70	2	4	5 **20**	1 **50**
100	4	1 **100**	2	5

Ta thêm ô chọn giả $(1,2)$ với $x_{12} = 0$ thì bài toán có $m+n-1$ ô chọn

$a_i \backslash b_j$	**40**	**100**	**60**	**50**
80	1 **40**	2 **0**	4 **40**	3
70	2	4	5 **20**	1 **50**
100	4	1 **100**	2	5

Thuật toán quy không cước phí thực hiện như sau: Lần lượt cộng vào các cước phí ở dòng $1,\dots,m$ một lượng $r_1,\dots,r_m$ và vào cột $1,\dots,n$ một lượng $s_1,\dots,s_n$ sao cho tổng cước phí trên các ô chọn bằng không.

Ví dụ 4.11. Quy không cước phí các ô chọn của bảng vận tải.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Giải. Cần tìm r_i và s_j sao cho trên các ô chon có:

$$r_i + s_j + c_{ij} = 0$$

nghĩa là:

$$\begin{cases} r_1 + s_1 + 1 = 0 \\ r_1 + s_4 + 2 = 0 \\ r_2 + s_3 + 4 = 0 \\ r_2 + s_4 + 9 = 0 \\ r_3 + s_2 + 2 = 0 \\ r_3 + s_3 + 3 = 0 \end{cases}$$

		s_1	s_2	s_3	s_4
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
r_1	**80**	1 **30**	5	7	2 **50**
r_2	**45**	5	7	4 **35**	9 **10**
r_3	**55**	12	2 **40**	3 **15**	6

Hệ có 6 phương trình 7 biến này có vô số nghiệm, do đó có một biến nhận giá trị tùy ý. Ở đây tôi cho $r_1 = 0$ và tính được $s_1 = -1; s_4 = -2; r_2 = -7; s_3 = 3; r_3 = -6; s_2 = 4$

		s_1=-1	s_2=4	s_3=3	s_4=-2
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
r_1=0	**80**	1 **30**	5	7	2 **50**
r_2=-7	**45**	5	7	4 **35**	9 **10**
r_3=-6	**55**	12	2 **40**	3 **15**	6

Ta thay c_{ij} bằng $c^{'}_{ij} = c_{ij} + r_i + s_j$ thì được bài toán mới gọi là bài toán sau khi quy không cước phí ô chọn

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	0 **30**	9	10	0 **50**
45	-3	4	0 **35**	0 **10**
55	5	0 **40**	0 **15**	-2

Định lý 4.10. *Lần lượt cộng vào các cước phí ở dòng $1, \ldots, m$ một lượng $r_1, \ldots, r_m$ và vào cột $1, \ldots, n$ một lượng $s_1, \ldots, s_n$ tức thay c_{ij} bởi*

$$c^{'}_{ij} = r_i + s_j + c_{ij}$$

thì ta được bài toán mới có cùng phương án tối ưu với bài toán cũ.

Nhận xét. Theo định lý 4.10, bài toán vận tải với phương án cực biên

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

và bài toán vận tải sau khi quy không cước phí các ô chọn với phương án cực biên

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	0 **30**	9	10	0 **50**
45	-3	4	0 **35**	0 **10**
55	5	0 **40**	0 **15**	-2

là tương đương nhau. Nghĩa bài toán quy không cước phí tối ưu thì bài toán ban đầu cũng tối ưu và chúng cùng phương án tối ưu.
Ta nhận thấy, trong bài toán quy không cước phí trên dòng 2, có ô $(2,1)$ có cước phí "rẻ" hơn cước phí các ô chọn $(2,3)$ và $(2,4)$ nên phương án hiện thời chưa tối ưu.

Định lý 4.11 (Dấu hiệu tối ưu)**.** *Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí các ô chọn:*

- *Nếu $c'_{ij} \geq 0$ với mọi (i,j) thì phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu.*
- *Nếu tồn tại $c'_{ij} < 0$ thì có thể tìm một phương án mới tốt hơn phương án hiện thời.*

Ví dụ 4.12. Chứng minh phương án cực biên hiện thời của bài toán vận tải sau không phải là phương án tối ưu.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5 **40**	7 **10**	2
45	5	7	4 **40**	9 **5**
55	12	2	3	6 **55**

Giải.

		s_1=-1	s_2=-5	s_3= -7	s_4=-12
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
r_1=0	**80**	1 **30**	5 **40**	7 **10**	2
r_2=3	**45**	5	7	4 **40**	9 **5**
r_3=6	**55**	12	2	3	6 **55**

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	0 **30**	0 **40**	0 **10**	-10
45	7	5	0 **40**	0 **5**
55	17	3	2	0 **55**

$\exists -c'_{14} < 0$ nên phương án cực biên này không là phương án tối ưu. □

Ví dụ 4.13. Chứng minh phương án cực biên hiện thời của bài toán vận tải sau là phương án tối ưu.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **20**	5	7	2 **60**
45	5 **10**	7	4 **35**	9
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Giải.

		s_1=-1	s_2=1	s_3=0	s_4=-2
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
r_1=0	**80**	1 **20**	5	7	2 **60**
r_2=-4	**45**	5 **10**	7	4 **35**	9
r_3=-3	**55**	12	2 **40**	3 **15**	6

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn

$a_i \backslash b_j$	30	40	50	60
80	0 **20**	6	7	0 **60**
45	0 **10**	4	0 **35**	3
55	8	0 **40**	0 **15**	1

$\forall c'_{ij} \geq 0$ nên phương án này là phương án tối ưu. □

4.4.2 Xây dựng phương án cực biên mới

Trên bảng quy không cước phí tìm

Bước 1. Ô chọn mới là ô loại có c'_{ij} âm nhất (là số âm có giá trị tuyệt đối lớn nhất).

Bước 2. Xác định chu trình chứa ô chọn mới vừa xác định bước 1. Ô chọn mới được đánh dấu (+), các ô chọn còn lại trên chu trình đánh dấu xen kẻ dấu (-), (+) trên chu trình.

Bước 3. Xác định phương án cực biên mới.

- Lượng điều chỉnh $q = \min\left\{x_{ij} | (i, j) \text{ có dấu (-)}\right\}$
- Phương án cực biên mới:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + q & \text{Ô có dấu (+)} \\ x_{ij} - q & \text{Ô có dấu (-)} \\ x_{ij} & \text{Ô không có dấu} \end{cases} \tag{4.11}$$

Ví dụ 4.14. Cho bài toán vận tải có phương án cực biên

$a_i \backslash b_j$	30	50	80	40
90	3 **30**	2	5 **20**	1 **40**
70	4	1 **50**	3 **20**	6
40	7	4	2 **40**	5

Chứng minh phương án cực biên hiện thời chưa tối ưu. Xây dựng một phương án khác tốt hơn.

Giải.

		s_1=-3	s_2=-3	s_3=-5	s_4=-1
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**50**	**80**	**40**
r_1=0	**90**	3 **30**	2	5 **20**	1 **40**
r_2=2	**70**	4	1 **50**	3 **20**	6
r_3=3	**40**	7	4	2 **40**	5

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn có $c'_{12} < 0$ nên có phương án mới tốt hơn

Tiếp theo ta xây dựng phương án mới: Ô $(1;2)$ kết hợp với một số ô chọn thành chu trình.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**50**	**80**	**40**
90	0 **30**	-1 +	0 − **20**	0 **40**
70	3	0 − **50**	0 + **20**	7
40	7	4	0 **40**	7

Lượng điều chỉnh

$$q = \min 20; 50 = 20$$

Phương án mới có

$$\begin{cases} x_{12} = x_{12} + 20 = 20 \\ x_{13} = x_{13} - 20 = 0 \\ x_{22} = x_{22} - 20 = 30 \\ x_{23} = x_{23} + 20 = 40 \end{cases}$$

$a_i \backslash b_j$	**30**	**50**	**80**	**40**
90	3 **30**	2 **20**	5	1 **40**
70	4	1 **30**	3 **40**	6
40	7	4	2 **40**	5

Giá trị hàm mục tiêu của phương án mới là $z = 400$, giá trị hàm mục tiêu của phương án trước là $z = 420$.

Ví dụ 4.15. Cho bài toán vận tải có phương án cực biên

$a_i \backslash b_j$	**50**	**40**	**70**
80	5 **50**	5 **30**	12
20	7	9	11 **20**
60	4	2 **10**	3 **50**

Chứng minh phương án cực biên hiện thời chưa tối ưu. Xây dựng một phương án khác tốt hơn.

***Giải.* Quy không cước phí ô chọn**

		s_1=-5	s_2=-5	s_3=-6
	$a_i \backslash b_j$	**50**	**40**	**70**
r_1=0	**80**	5 **50**	5 **30**	12
r_2=-5	**20**	7	9	11 **20**
r_3=3	**60**	4	2 **10**	3 **50**

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn $\exists c'_{21} < 0$ nên phương án cực biên hiện thời không là phương án tối ưu. **Tiếp theo ta xây dựng phương án mới**: Ô (2; 1) kết hợp với một số ô chọn thành chu trình.

$a_i \backslash b_j$	**50**	**40**	**70**
80	0 − **50**	0 + **30**	3
20	-3 * +	-1	0 − **20**
60	2	0 − **10**	0 + **50**

Lượng điều chỉnh

$$q = \min\{10; 20; 50\} = 10$$

Phương án mới có

$$\begin{cases} x_{11} = x_{11} - 10 = 40 \\ x_{12} = x_{12} + 10 = 40 \\ x_{21} = x_{21} + 10 = 10 \\ x_{23} = x_{23} - 10 = 10 \\ x_{33} = x_{33} + 10 = 60 \\ x_{32} = x_{32} - 10 = 0 \end{cases}$$

$a_i \backslash b_j$	**50**	**40**	**70**
80	5 **40**	5 **40**	12
20	7 **10**	9	11 **10**
60	4	2	3 **60**

Phương án mới có giá trị hàm mục tiêu 760 tốt hơn phương án trước có giá trị hàm mục tiêu 790.

Ví dụ 4.16. Cho bài toán vận tải có phương án cực biên

$a_i \backslash b_j$	**25**	**25**	**10**
10	5	3	5 **10**
30	7 **25**	6 **5**	8
20	3	2 **20**	2

Chứng minh phương án cực biên hiện thời chưa tối ưu. Xây dựng một phương án khác tốt hơn.

Giải.

Do phương án cực biên hiện thời suy biến nên ta thêm vào ô chọn giả sao cho ô này với một số ô sẵn có không lập thành chu trình. Ở đây tôi chọn ô $(2, 3)$ với $x_{23} = 0$.

$a_i \backslash b_j$	**25**	**25**	**10**
10	5	3	5 **10**
30	7 **25**	6 **5**	8 **0**
20	3	2 **20**	2

Bước lặp thứ nhất

Quy không cước phí các ô chọn

	$a_i \backslash b_j$	s_1=-7 **25**	s_2=-6 **25**	s_3=-8 **10**
r_1=3	**10**	5	3	5 **10**
r_2=0	**30**	7 **25**	6 **5**	8 **0**
r_3=4	**20**	3	2 **20**	2

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn có $c'_{33} < 0$ nên có phương án khác tốt hơn
Ta xây dựng phương án mới: Ô $(3; 3)$ kết hợp với một số ô chọn sẵn có lập thành chi trình

$a_i \backslash b_j$	**25**	**25**	**10**
10	1	0	0 **10**
30	0 **25**	0 + **5**	0 − **0**
20	0	0 − **20**	-2 +

Lượng điều chỉnh

$$q = \min\{0; 20\} = 0$$

Phương án mới như bảng bên cạnh

$a_i \backslash b_j$	**25**	**25**	**10**
10	5	3	5 **10**
30	7 **25**	6 **5**	8
20	3	2 **20**	2 **0**

Nhận xét. Giá trị hàm mục tiêu của phương án mới giống giá trị hàm mục tiêu phương án cũ (chưa tốt hơn). Ở đây ta thấy hai phương án chỉ

chỉ khác nhau vị trí của ô chọn giả. Ô chọn giả của phương án mới có cước phí thấp nhất trong các ô chọn giả. Do đó khi chọn ô chọn giả nên chọn ô nào có cước phí thấp nhất để quá trình tìm phương án tốt hơn sẽ nhanh hơn.

Bước lặp thứ hai

Quy không cước phí ô chọn

	$a_i \backslash b_j$	25 (s_1=-7)	25 (s_2=-6)	10 (s_3=-6)
r_1=1	**10**	5	3	5 **10**
r_2=0	**30**	7 **25**	6 **5**	8
r_3=4	**20**	3	2 **20**	2 **0**

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn có $c'_{12} < 0$ nên có phương án khác tốt hơn

Ta xây dựng phương án mới: Ô $(1;2)$ kết hợp với một số ô chọn sẵn có lập thành chi trình

$a_i \backslash b_j$	**25**	**25**	**10**
10	-1	-2 * +	0 − **10**
30	0 **25**	0 **5**	2
20	0	0 − **20**	0 + **0**

Lượng điều chỉnh

$$q = \min\{10; 20\} = 0$$

Phương án mới như bảng bên cạnh

$a_i \backslash b_j$	**25**	**25**	**10**
10	5	3 **10**	5
30	7 **25**	6 **5**	8
20	3	2 **10**	2 **10**

Giá trị hàm mục tiêu của phương án mới này $z = 275$ tốt hơn giá trị hàm mục tiêu của phương án ban đầu $z = 295$. □

Ví dụ 4.17. Giải bài toán vận tải

$a_i \backslash b_j$	**50**	**40**	**70**
80	5	5	12
20	7	9	11
60	4	2	3

Giải. Bằng phương pháp Vogel ta có phương án cực biên không suy biến như bảng bên dưới:

		s_1=-5	s_2=-5	s_3=-9
	$a_i \backslash b_j$	**50**	**40**	**70**
r_1=0	**80**	5 **40**	5 **40**	12
r_2=-2	**20**	7 **10**	9	11 **10**
r_3=6	**60**	4	2	3 **60**

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn có $\forall c'_{ij} \geq 0$ nên phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu.

$a_i \backslash b_j$	**50**	**40**	**70**
80	0 **40**	0 **40**	3
20	0 **10**	2	0 **10**
60	5	3	0 **60**

4.5 Một số trường hợp đặc biệt

4.5.1 Bài toán vận tải không cân bằng thu phát

Trường hợp phát lớn hơn thu. Ta thêm trạm thu giả b_{n+1}, với lượng hàng là

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad c_{in+1} = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

Lúc này bài toán cân bằng thu phát.

Trường hợp phát ít hơn thu. Ta thêm trạm phát giả a_{m+1}, với lượng hàng là

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i, \quad c_{m+1i} = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Lúc này bài toán cân bằng thu phát.

Ví dụ 4.18. Giải bài toán vận tải không cân bằng thu phát cho bởi bảng vận tải sau:

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**
80	7	5	2
70	3	4	5
150	9	2	7

Giải.

Tổng lượng phát là 300, tổng lượng thu là 260. Trong bài này ta thêm trạm thu giả với lượng thu là 40.

Bằng phương pháp Vogel tìm phương an cực biên ban đầu nhưng chú ý tính toán trên ô thật trước, sau cùng phần còn dư ta mới phân vào ô giả

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	7	5	2 **80**	0
70	3 **70**	4	5	0
150	9 **30**	2 **65**	7 **15**	0 **40**

Quy không cước phí ô chọn:

		s_1=-9	s_2=-2	s_3=-7	s_4=0
	$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
r_1=5	**80**	7	5	2 **80**	0
r_2=6	**70**	3 **70**	4	5	0
r_3=0	**150**	9 **30**	2 **65**	7 **15**	0 **40**

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn có $\forall c'_{ij} \geq 0$ nên phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu.

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	3	8	0 **80**	5
70	0 **70**	8	4	6
150	0 **30**	0 **65**	0 **15**	0 **40**

4.5.2 Bài toán vận tải có ô cấm

Đây là bài toán vận tải mà vì một lý do no đó có một nơi phát không thể chuyên chở hàng đến một nơi nhận nào đó được. Để giải quyết vấn đề này chúng ta cho cước phí ở ô đó là M, với M là số dương rất lớn, lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh. Sau đó chúng ta giải như những bài toán đã trình bày ở trên.

Ví dụ 4.19. Giải bài toán vận tải với hai ô cấm cho như sau:

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	6	5	11	10
70	10		5	7
150	9	8	7	

Giải.

Bài toán có 2 ô cấm, ta thay ô cấm này thành ô có cước phí M (M là số rất lớn, lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh)
Sử dụng phương pháp Vogel tìm được phương án cực biên ban đầu.

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	6 **15**	5 **65**	11	10
70	10	M	5 **30**	7 **40**
150	9 **85**	8	7 **65**	M

Quy không cước phí ô chọn:

	$a_i \backslash b_j$	s_1=-6 **100**	s_2=-5 **65**	s_3=-4 **95**	s_4=-6 **40**
r_1=0	**80**	6 **15**	5 **65**	11	10
r_2=-1	**70**	10	M	5 **30**	7 **40**
r_3=-3	**150**	9 **85**	8	7 **65**	M

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn có $\forall c'_{ij} \geq 0$ nên phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu của phương án tối ưu này là 2065

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	0 **15**	0 **65**	7	4
70	3	M-6	0 **30**	0 **40**
150	0 **85**	0	0 **65**	M-9

Nhận xét. Phương án tối ưu của ví dụ 4.19 không duy nhất, vì theo bảng sau khi quy không cước phí có ô loại $(3;2)$ có cùng cước phí là 0 với các ô chọn

Xét một chi trình có chứa ô $(3;2)$ như hình bên. Lượng điều chỉnh

$$q = \min\{65; 85\} = 65$$

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	6 + **15**	5 − **65**	11	10
70	10	M	5 **30**	7 **40**
150	9 − **85**	8 + *	7 **65**	M

Phương án tối ưu mới có cùng giá trị tối ưu với phương án trước.

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	6 **80**	5	11	10
70	10	M	5 **30**	7 **40**
150	9 **20**	8 **65**	7 **65**	M

4.6 Bài toán vận tải cực đại cước phí

Bước 1. Thành lập phương án cực biên bằng phương pháp cực đại cước phí, chúng ta phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí lớn nhất.

Bước 2. Xét xem phương án cực biên hiện thời đã tối ưu hay chưa bằng thuật toán **quy không cước phí ô chọn.**

- Nếu $c'_{ij} \leq 0$ với mọi (i, j) thì phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu, thuật toán kết thúc.
- Nếu tồn tại $c'_{ij} > 0$ thì có thể tìm một phương án mới tốt hơn phương án hiện thời, chuyển sang bước 3.

Bước 3. Xây dựng phương án cực biên mới tốt hơn, chú ý ô chọn mới là ô loại có $c'_{ij} > 0$ lớn nhất, các bước tiếp theo làm giống bài toán min .

Bước 4. Quay về bước 2.

Ví dụ 4.20. Giải bài toán vận tải cực đại cước phí sau:

a_i \ b_j	**70**	**55**	**85**	**60**
90	6	5	11	10
80	10	6	5	7
100	9	8	7	4

Giải.

4.7 Bài tập chương 4

Bài tập 4.1. Giải bài toán vận tải

a_i \ b_j	**30**	**50**	**80**	**40**
90	3	2	5	1
70	4	1	3	6
40	7	4	2	5

Đáp án: Phương án tối ưu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 30 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = 400$$

Bài tập 4.2. Giải bài toán vận tải:

$a_i \backslash b_j$	**40**	**100**	**60**	**50**
80	1	2	4	3
70	2	4	5	1
100	4	1	2	5

Đáp án: Phương án tối ưu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 20 & 60 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 40 & 60 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = 390$$

Bài tập 4.3. Giải bài toán vận tải:

$a_i \backslash b_j$	**20**	**30**	**45**	**50**
40	5	8	6	11
30	6	7	7	12
55	8	8	9	10

Đáp án: Phương án tối ưu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 0 \\ 20 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 30 \end{pmatrix}, \quad z = 930$$

Bài tập 4.4. Giải bài toán vận tải có ô cấm

$a_i \backslash b_j$	**45**	**100**	**50**	**60**
70	$\times$	16	15	11
100	10	17	9	$\times$
85	12	14	10	13

Đáp án: Phương án tối ưu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 60 \\ 45 & 5 & 50 & 0 \\ 0 & 85 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = 2995$$

Bài tập 4.5. Cho bài toán vận tải cân bằng thu phát và một phương án:

a_i \ b_j	**40**	**45**	**60**	**65**
90	4 **25**	5	7	2 **65**
65	5	1 **45**	2 **20**	10
55	11 **15**	2	3 **40**	6

a. Tính cước phí vận chuyển của phương án này, chứng minh phương án cực biên đã cho không phải là phương án tối ưu.

b. Xuất phát từ phương án trên hãy xây dựng một phương án mới tốt hơn (chỉ cần một phương án mới tốt hơn).

Bài tập 4.6. Một nhà máy chế biến thịt, sản xuất ba loại thịt: bò, lợn, cừu, với tổng lượng mỗi ngày là 480 tấn bò; 400 tấn lợn; 230 tấn cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt nấu chín để bán trong giờ làm việc là 420 tấn. Ngoài ra nấu thêm ngoài giờ 250 tấn (với giá cao hơn). Lợi nhuận thu được trên một tấn được cho bằng bảng sau: (với đơn vị là triệu đồng)

	Tươi	Nấu chín	Nấu chín Ngoài giờ
Bò	8	11	14
Lợn	4	7	12
Cừu	4	9	13

Mục đích của nhà máy là tìm phương án sản xuất để làm cực đại lợi nhuận. Hãy tìm phương án tối ưu.

Phụ lục A

Đề thi mẫu

A.1 Đề học kì III năm 2010-2011

Câu 1 (2,5 điểm)**.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính mà ta gọi là bài toán (P)

$$z = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 3$$

a. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (0; 4; 2)$ là phương án cực biên, nhưng không phải là phương án tối ưu của bài toán (P).

b. Hãy xây dựng một phương án cực biên mới tốt hơn phương án $\mathbf{x}$ nói ở trên.

Câu 2 (4,5 điểm)**.** Một Xí nghiệp chăn nuôi cần mua một loại thức ăn tổng hợp T1, T2, T3 cho gia súc với tỷ lệ chất dinh dưỡng như sau: 1 kg T1 chứa 4 đơn vị dinh dưỡng D1, 2 đơn vị dinh dưỡng D2, và 1 đơn vị dinh dưỡng D3; 1 kg T2 chứa 1 đơn vị dinh dưỡng D1, 7 đơn vị dinh dưỡng D2, và 3 đơn vị dinh dưỡng D3; 1 kg T3 chứa 3 đơn vị dinh dưỡng D1, 1 đơn vị dinh dưỡng D2, và 4 đơn vị dinh dưỡng D3. Mỗi bữa ăn, gia súc cần tối thiểu 20 đơn vị D1, 25 đơn vị D2 và 30 đơn vị D3. Biết rằng 1 kg T1 có giá là 10 ngàn đồng, 1 kg T2 có giá là 12 ngàn đồng, 1 kg T3 có giá là 14 ngàn đồng. Xí nghiệp muốn mua các loại thức ăn T1, T2, T3 để bảo đảm tốt về chất dinh dưỡng cho một bữa ăn và tổng số tiền mua là nhỏ nhất.

a. Hãy lập bài toán quy hoạch tuyến tính, ta gọi đây là bài toán (P).
b. Viết bài toán đối ngẫu (Q) của bài toán (P).
c. Giải bài toán (Q), từ đó suy ra phương án tối ưu của bài toán (P).

Câu 3 (3 điểm)**.** Cho bài toán vận tải (min hàm mục tiêu cước phí) cân bằng thu phát như sau:

$a_i \backslash b_j$	**25**	**35**	**120**	**50**
110	9	6	5	7
80	2	8	10	6
40	5	7	9	4

a. Hãy xây dựng một phương án ban đầu bằng phương pháp Fogel.
b. Hỏi phương án vừa xây dựng ở câu a) có phải là phương án tối ưu? Nếu chưa tối ưu, hãy xây dựng một phương án mới tối hơn (chỉ cần một phương án mới tốt hơn).

A.2 Đề học kì I năm 2011-2012

Câu 1 (3,5 điểm)**.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính (P)

$$z = 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 34x_4 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4$$

a. Chứng minh phương án $\mathbf{x}^T = (8/3; 0; 0; 7/3)$ là phương án cực biên nhưng không phải là phương án tối ưu của bài toán (P). Từ phương án này hãy xây dựng một phương án cực biên mới tốt hơn.
b. Cho biết $\mathbf{x}^{*T} = (0; 4; 0; 1)$ là phương án tối ưu của bài toán (P). tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu của bài toán (P).

Câu 2 (4 điểm)**.** Một xí nghiệp có thể sử dụng tối đa 590 giờ máy cán, 340 giờ máy tiện, 200 giờ máy mài để sản xuất ba loại sản phẩm. Biết rằng để sản xuất một đơn vị sản phẩm thứ nhất cần 2 giờ máy cán, 5 giờ máy tiện và 1 giờ máy mài. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm thứ hai cần 5 giờ máy cán, 3 giờ máy tiện và 1 giờ máy mài. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm thứ ba cần 8 giờ máy cán, 3 giờ máy tiện và 3 giờ máy mài. Giá bán một đơn vị sản phẩm thứ nhất, thứ hai, thứ ba tương ứng là 140, 130, 180 triệu đồng. Hỏi xí nghiệp nên sản xuất bao nhiêu đơn vị sản phẩm mỗi loại để được doanh thu nhiều nhất.

Câu 3 (2,5 điểm)**.** Giải bài toán vận tải cân bằng thu phát có ô cấm với các số liệu được cho trong bảng sau:

a_i \ b_j	**55**	**65**	**120**	**60**
110	9	7	14	6
110	2	3	8	7
80			4	3

A.3 Đề thi học kỳ II năm 2011-2012

Câu 1 (2 điểm)**.** Một đoàn lữ hành cần thuê những con lạc đà một bứu và hai bứu để chở hàng hóa từ A đến B. Mỗi con lạc đà một bứu có thể chở được 300 kg hàng hóa, và mỗi con lạc đà hai bứu có thể chở được 500 kg hàng hóa. Trong chuyến đi, mỗi con lạc đà:

- Một bứu dùng 4 bó cỏ kho và 8 lít nước.
- Hai bứu dùng 3 bó cỏ khô và 10 lít nước.

Lượng cỏ khô và nước dự trữ lần lượt là 30 bó và 100 lít. Mỗi con lạc đà một bứu thuê với giá 3 đơn vị tiền tệ, và mỗi con lạc đà hai bứu thuê với giá 5 đơn vị tiền tệ, Nếu đoàn lữ hành này chở ít nhất 4000 kg hàng hóa từ A đến B thì cần thuê bao nhiêu con lạc đà một bứu và hai bứu để số tiền thuê là ít nhất. Hãy lập mô hình bài toán quy hoạch tuyến tính.

Câu 2 (5 điểm)**.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính mà ta gọi là bài toán (P)

$$z = 14x_1 + 12x_2 + 14x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 30 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 25 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \geq & 35 \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 3$$

a. Viết bài toán đối ngẫu (Q) của bài toán (P).

b. Giải bài toán đối ngẫu (Q), sau đó suy ra phương án tối ưu (nếu có) của bài toán (P).

Câu 3 (3 điểm)**.** Giải bài toán vận tải (min hàm mục tiêu cước phí) không cân bằng thu phát, với các số liệu được cho trong bảng sau:

$a_i \backslash b_j$	**135**	**125**	**100**
120	12	7	14
150	3	5	7
130	8	9	9

A.4 Đề học kì III năm 2011-2012

Câu 1 (3 điểm)**.** Giải bài toán vận tải (min hàm mục tiêu) cân bằng thu phát với số liệu trong bảng sau

$a_i \backslash b_j$	**100**	**80**	**100**	**40**
200	6	12	7	3
100	13	4	15	3

Câu 2 (4 điểm)**.** Một công ty sản xuất hai loại thực phẩm A, B. Nguyên liệu để sản xuất gồm: bột, đường và dầu thực vật với trữ lượng tương ứng là: 30 tấn, 12 tấn, 6 tấn. Để sản xuất 1 tấn:

- Thực phẩm loại A cần: 0,5 tấn bột, 0,5 tấn đường và 0,2 tấn dầu thực vật.

- Thực phẩm loại B cần: 0,8 tấn bột, 0,4 tấn đường và 0,4 tấn dầu thực vật.

Giá bán một tấn thực phẩm A là 4500 USD, giá bán 1 tấn thực phẩm B là 4000USD. Hỏi cần sản xuất mỗi loại thực phẩm bao nhiêu tiền để có doanh thu lớn nhất?

Câu 3 (3 điểm)**.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 & & & & & & & & & \geq & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & & & \geq & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & \geq & 3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \cdots & & & \vdots & \vdots \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & \geq & n \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$

a. Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên.

b. Hãy giải một trong hai bài toán trên rồi suy ra phương án tối ưu của bài toán còn lại.

Phụ lục B

Bài giải đề mẫu

B.1 Bài giải học kì III năm học 2010-2011

Câu 1.

a. $\mathbf{x}^T = (0; 4; 2)$ có hệ vector liên kết

$$B = \{\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_3\} \Rightarrow |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Vậy $\mathbf{x}$ là phương án cực biên. Hệ các ràng buộc tương đương

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 = 4 \\ -5x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Đặt $\mathbf{c}^B = (c_2; c_3) = (5; 7)$ ta tính được

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \Delta_3 = 0 \\ \Delta_1 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_1 \rangle - c_1 = (5; 7)(8; -5) - 4 = 1 \end{aligned}$$

Do $\exists \Delta_1 = 1 > 0$ nên phương án cực biên hiện thời không là phương án tối ưu.

b. Xây dựng phương án mới tốt hơn.

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$
			4	5	7
$\mathbf{A}_2$	5	4	8	1	0
$\mathbf{A}_3$	7	2	-5	0	1
			1	0	0
$\mathbf{A}_1$	4	1/2	1	1/8	0
$\mathbf{A}_3$	7	9/2	0	5/8	1
min		Δ	0	-1/8	0

Phương án $(1/2; 0; 9/3)$ là phương án tốt hơn.

Câu 2. Gọi x_1, x_2, x_3 là lượng thực phẩm I, II, III

	T1-x_1	T2-x_2	T3-x_3	Tối thiểu
D1	4	1	3	20
D2	2	7	1	25
D3	1	3	4	30
Giá	10	12	14	

a. Ta có bài toán quy hoạch

$$z = 10x_1 + 12x_2 + 14x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 20 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 \geq 25 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 30 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 3$$

b. Bài toán đối ngẫu

$$z' = 20y_1 + 25y_2 + 30y_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 10 \\ y_1 + 7y_2 + 3y_3 \leq 12 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \leq 14 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 3$$

c. Giải bằng phương pháp đơn hình

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			20	25	30	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	10	4	2	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	12	1	7	3	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	14	3	1	4	0	0	1
max		Δ	-20	-25	-30	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	13/2	13/4	7/4	0	1	0	-1/4
$\mathbf{A}_5$	0	3/2	-5/4	25/4	0	0	1	-3/4
$\mathbf{A}_3$	30	7/2	3/4	1/4	1	0	0	1/4
max		Δ	5/2	-35/2	0	0	0	15/2

$\mathbf{A}_4$	0	152/25	18/5	0	0	1	-7/25	-1/25
$\mathbf{A}_2$	25	6/25	-1/5	1	0	0	4/25	-3/25
$\mathbf{A}_3$	30	86/25	4/5	0	1	0	-1/25	7/25
max		Δ	-1	0	0	0	14/5	27/5
$\mathbf{A}_1$	20	76/45	1	0	0	5/18	-7/90	-1/90
$\mathbf{A}_2$	25	26/45	0	1	0	1/18	13/90	-11/90
$\mathbf{A}_3$	30	94/45	0	0	1	-2/9	1/45	13/45
max		Δ	0	0	0	5/18	49/18	97/18

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là

$$\mathbf{y}^T = (76/45; 26/45; 94/45)$$

Ta suy ra được phương án tối ưu của bài toán gốc là

$$\mathbf{x}^T = (5/18; 49/18; 97/18)$$

Câu 3.

a. Phương án xây dựng bằng phân phối Vogel

	r_i \ s_j	s_1=3 **25**	s_2=-3 **35**	s_3=-5 **120**	s_4=-1 **50**
r_1=0	**110**	9	6	5 **110**	7
r_2=-5	**80**	2 **25**	8 **35**	10 **10**	6 **10**
r_3=-3	**40**	5	7	9	4 **4**

b. Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí

a_i \ b_j	**55**	**65**	**120**	**60**
110	12	3	0 **110**	6
110	0 **25**	0 **35**	0 **10**	0 **10**
80	5	1	1	0 **10**

Do $\forall c'_{ij} \geq 0$ nên phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu.

B.2 Bài giải học kì I năm học 2011-2012

Câu 1.

a. Phương án $\mathbf{x}^T = (8/3; 0; 0; 7/3)$ có hệ vector liên kết

$$B = \{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_4\} \Rightarrow |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Vậy $\mathbf{x}$ là phương án cực biên. Hệ các ràng buộc tương đương

$$\begin{cases} x_1 + 2/3x_2 + 10/3x_3 = 8/3 \\ 1/3x_2 - 1/3x_3 + x_4 = 7/3 \end{cases}$$

Đặt $\mathbf{c}^B = (c_1; c_4) = (5; 34)$. Ta tính được

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_4 = 0 \\ \Delta_2 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_2^B \rangle - c_2 = (5; 34)(2/3; 1/3) - 3 = 35/2 \\ \Delta_3 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_3^B \rangle - c_3 = (5; 34)(10/3; -1/3) - 3 = 7/3 \end{aligned}$$

Do có $\Delta_2 = 35/3 > 0$ nên phương án cực biên hiện thời không là phương án tối ưu. Xây dựng phương án mới tốt hơn

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			5	3	3	34
$\mathbf{A}_1$	5	8/3	1	2/3	10/3	0
$\mathbf{A}_4$	34	7/3	0	1/3	-1/3	1
			0	35/3	7/3	0
$\mathbf{A}_2$	3	4	3/2	1	5	0
$\mathbf{A}_4$	34	1	-1/2	0	-2	1
min		Δ	-35/2	0	-56	0

b. Phương án tối ưu $\bar{\mathbf{x}}^T = (0; 4; 0; 1)$ có hệ vector cơ sở liên kết $B = \{\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_4\}$. Đặt

$$\mathbf{c}^B = (c_2; c_4) = (3; 34); \quad \mathbf{B} = (\mathbf{A}_2 \vdots \mathbf{A}_4) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 3 \\ 4y_1 + y_2 = 34 \end{cases}$$

	SPI-x_1	SPII-x_2	SPIII-x_3	
Cán	2	5	8	≤ 590
Tiện	5	3	3	≤ 340
Mài	1	1	3	≤ 200
Lợi nhuận	140	130	180	

Câu 2. Ta có mô hình

$$z = 14x_1 + 13x_2 + 18x_3 \to \max \text{ (đơn vị 10 triệu)}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 590 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 340 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 200 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 3$$

Dạng chính tắc

$$z = 14x_1 + 13x_2 + 18x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 590 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_5 = 340 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 200 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			14	13	18	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	590	2	5	8	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	340	5	3	3	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	200	1	1	3	0	0	1
			-14	-13	-18	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	170/3	-2/3	7/3	0	1	0	-8/3
$\mathbf{A}_5$	0	140	4	2	0	0	1	-1
$\mathbf{A}_3$	18	200/3	1/3	1/3	1	0	0	1/3
			-8	-7	0	0	0	6
$\mathbf{A}_4$	0	80	0	8/3	0	1	1/6	-17/6
$\mathbf{A}_1$	14	35	1	1/2	0	0	1/4	-1/4

$\mathbf{A}_3$	18	55	0	1/6	1	0	-1/12	5/12
			0	-3	0	0	2	4
$\mathbf{A}_2$	13	30	0	1	0	3/8	1/16	-17/16
$\mathbf{A}_1$	14	20	1	0	0	-3/16	7/32	9/32
$\mathbf{A}_3$	18	50	0	0	1	-1/16	-3/32	19/32
max		Δ	0	0	0	9/8	35/16	13/16

Mọi $\Delta_j \geq 0$ nên phương án tối ưu là $\mathbf{x}^T = (20; 30; 50)$.

Câu 3. Phương án xuất phát được xây dựng bằng phân phối Vogel

		s_1=-6	s_2=-7	s_3=-14	s_4=-6
	r_i \ s_j	**55**	**65**	**120**	**60**
r_1=0	**110**	9	7 **10**	14 **40**	6 **60**
r_2=4	**110**	2 **55**	3 **55**	8	7
r_3=10	**80**	M	M	4 **80**	3

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí

a_i \ b_j	**55**	**65**	**120**	**60**
110	3	0 + **10**	0 − **40**	0 **60**
110	0 **55**	0 − **55**	-2 +	5
80	M+4	M+3	0 **80**	3

Do $\exists c'_{23} = -2 < 0$ nên phương án cực biên hiện thời không là phương án tối ưu. Ta xây dựng phương án mới tốt hơn: Lượng điều chỉnh

$$q = \min\{40; 55\} = 40$$

Phương án mới

		s_1=-2	s_2=-3	s_3=-8	s_4=-2
	r_i \ s_j	**55**	**65**	**120**	**60**
r_1=-4	**110**	9	7 **50**	14	6 **60**
r_2=0	**110**	2 **55**	3 **15**	8 **40**	7
r_3=4	**80**	M	M	4 **80**	3

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn:

$a_i \backslash b_j$	**55**	**65**	**120**	**60**
110	3	0 **50**	2	0 **60**
110	0 **55**	0 **15**	0 **40**	5
80	M+2	M+1	0 **80**	5

$\forall c'_{ij} \geq 0$ nên phương án cực biên hiện thời

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 60 \\ 55 & 15 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 \end{pmatrix}$$

là phương án tối ưu.

B.3 Bài giải học kì II năm học 2011-2012

Câu 1. Gọi x_1, x_2 là số con lạc đà một, hai bứu cần thuê:

	Một bứu - x_1	Hai bứu - x_2	Dự trữ
Cỏ khô	4	3	≤ 30
Nước	8	10	≤ 100
Chở	300	500	≥ 4000
Tiền thuê	3	5	

Vậy tìm x_1, x_2 sao cho

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 8x_1 + 10x_2 \leq 100 \\ 300x_1 + 500x_2 \geq 4000 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$

Câu 2.

a. Bài toán đối ngẫu

$$z = 30y_1 + 25y_2 + 35y_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 14 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 12 \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 14 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 3$$

b. Giải bài toán đối ngẫu. Bài toán có dạng chính tắc

$$z = 30y_1 + 25y_2 + 35y_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 = 14 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_5 = 12 \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_6 = 14 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			30	25	35	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	14	1	3	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	12	1	2	3	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	14	3	1	2	0	0	1
			-30	-25	-35	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	10	2/3	7/3	0	1	-1/3	0
$\mathbf{A}_3$	35	4	1/3	2/3	1	0	1/3	0
$\mathbf{A}_6$	0	6	7/3	-1/3	0	0	-2/3	1
			-55/3	-5/3	0	0	35/3	0
$\mathbf{A}_4$	0	58/7	0	17/7	0	1	-1/7	-2/7
$\mathbf{A}_3$	35	22/7	0	5/7	1	0	3/7	-1/7
$\mathbf{A}_1$	30	18/7	1	-1/7	0	0	-2/7	3/7
			0	-30/7	0	0	45/7	55/7
$\mathbf{A}_2$	25	58/17	0	1	0	7/17	-1/17	-2/17
$\mathbf{A}_3$	35	12/17	0	0	1	-5/17	8/17	-1/17
$\mathbf{A}_1$	30	52/17	1	0	0	1/17	-5/17	7/17
max		Δ	0	0	0	30/17	105/17	125/17

Mọi $\Delta_j \geq 0$ nên phương án $\mathbf{y}^T = (52/17; 58/17; 12/17; 0; 0; 0)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Phương án tối ưu của bài toán gốc là $\mathbf{x}^T = (30/17; 105/15; 125/17)$.

Câu 3. Tổng phát là 400, tổng thu là 360 nên ta thêm trạm thu giả với lượng là 40

$a_i \backslash b_j$	**135**	**125**	**100**	**40**
120	12	7	14	0
150	3	5	7	0
130	8	9	9	0

Phương án cực biên xây dựng theo phương pháp Vogel

$a_i \backslash b_j$	**135**	**125**	**100**	**40**
120	12	7 **120**	14	0
150	3 **135**	5 **5**	7 **10**	0
130	8	9	9 **90**	0 **40**

Quy không cước phí

		s_1=-3	s_2=-5	s_3=-7	s_4=3
	$a_i \backslash b_j$	**135**	**125**	**100**	**40**
r_1=-2	**120**	12	7 **120**	14	0
r_2=0	**150**	3 **135**	5 **5**	7 **10**	0
r_3=-3	**130**	8	9	9 **90**	0 **40**

Bài toán sau khi quy không cước phí

$a_i \backslash b_j$	**135**	**125**	**100**	**40**
120	7	0 **120**	5	1
150	0 **135**	0 **5**	0 **10**	3
130	2	1	0 **90**	0 **40**

Mọi $c'_{ij} \geq 0$ nên phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu $z = 2150$.

B.4 Bài giải học kì III năm học 2011-2012

Câu 1. Phương án xuất phát được xây dựng bằng phân phối Vogel

		s_1=-6	s_2=-4	s_3=-7	s_4=-3
	r_i \ s_j	**100**	**80**	**100**	**40**
r_1=0	**220**	6 **100**	12	7 **100**	3 **20**
r_2=0	**100**	13	4 **80**	15	3 **20**

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí

a_i \ b_j	**100**	**80**	**100**	**40**
220	0 **100**	8	0 **100**	0 **20**
100	7	0 **80**	8	0 **20**

Vậy phương án trên là phương án tối ưu.

Câu 2. Gọi x_1, x_2 là số sản phẩm A, B cần sản xuất. Theo đề bài ta có

	Thực phẩm A-x_1	Thực phẩm B-x_2	
Bột	0,5	0,8	≤ 30
Đường	0,5	0,4	≤ 12
Dầu	0,2	0,4	≤ 6
Doanh thu	4500	4000	

Ta có bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 4500x_1 + 4000x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 1/2x_1 & + & 4/5x_2 & \leq & 30 \\ 1/2x_1 & + & 2/5x_2 & \leq & 12 \\ 1/5x_1 & + & 2/5x_2 & \leq & 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			45	40	0	0	0
$\mathbf{A}_3$	0	30	1/2	4/5	1	0	0

$\mathbf{A}_4$	0	12	1/2	2/5	0	1	0
$\mathbf{A}_5$	0	6	1/5	2/5	0	0	1
max		Δ	-45	-40	0	0	0
$\mathbf{A}_3$	0	18	0	2/5	1	-1	0
$\mathbf{A}_1$	45	24	1	4/5	0	2	0
$\mathbf{A}_5$	0	6/5	0	6/25	0	-2/5	1
max		Δ	0	-4	0	90	0
$\mathbf{A}_3$	0	16	0	0	1	-1/3	-5/3
$\mathbf{A}_1$	45	20	1	0	0	10/3	-10/3
$\mathbf{A}_2$	40	5	0	1	0	-5/3	25/6
max		Δ	0	0	0	250/3	50/3

Câu 3. Bài toán đối ngẫu

$$z' = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \cdots + ny_n \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n \leq 1 \\ \quad\;\; y_2 + y_3 + \cdots + y_n \leq 2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \; \vdots \; \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y_n \leq n \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

Bằng cách thêm ẩn phụ chuyển bài toán sang dạng chính tắc. Lập bảng đơn hình ta tìm được phương án tối ưu

$$\mathbf{y}^T = (y_1; \ldots; y_n; y_{n+1}; \ldots; y_{2n}) = (0; \ldots; 0; 1)$$

dùng hệ quả 3.11 suy ra phương án tối ưu của bài toán gốc là

$$\mathbf{x}^T = (n; 0; \ldots; 0)$$

Tài liệu tham khảo

[1] Phan Quốc Khánh, Trần Huệ Nương. (2000). *Quy hoạch tuyến tính*. NXB Giáo dục.

[2] Nguyễn Đình Tùng. (2010). *Quy hoạch tuyến tính*.

[3] Lê Khánh Luận. (2006). *Quy hoạch tuyến tính* . NXB Lao động.

[4] Bùi Phúc Trung. (2003). *Quy hoạch tuyến tính*. NXB Lao động - Xã hội.

[5] Bernard Kolman, Robert E. Beck. (1995). *Elementary Linear Programming with Applications*. Elsevier Science & Technology Books.

[6] Robert J. Vanderbei. (2007). *Linear Programming, Foundations and Extensions Third Edition*. Springer Publication.

[7] George B. Dantzig, Mukund N. Thapa. (1997). *Linear Programming, Introduction*. Springer Publication.