TRƯỜNG ĐẠI HỌC THỦ DẦU MỘT

KHOA ĐIỆN – ĐIỆN TỬ

TÓM TẮT LÝ THUYẾT HÀM PHỨC TOÁN TỬ

BIÊN SOẠN: VĂN HOÀNG PHƯƠNG

LƯU HÀNH NỘI BỘ

CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

1. Dạng đại số của số phức

Số phức là các số có dạng z = x +iy trong đó x, y là các số thực, còn i là **đơn vị ảo**. Tập hợp tất cả các số phức được ký hiệu là C. Vậy

$C = \{ x+iy \mid x, y \in R\}$

Trên tập hợp C, ta định nghĩa các phép toán cộng và nhân số phức như sau

$(x + iy) + (x' + iy') = (x+x') + (y + y')i$

$(x + iy).(x' + iy') = (xx' - yy') + (xy'+x'y)i$

Dễ dàng kiểm tra được các phép toán + và . đều có tính giao hoán và kết hợp. Phép cộng có phần tử trung hoà là 0 và phép nhân có phần tử trung hoà là 1.

Từ định nghĩa ta suy ra $i^2 = (0 + 1.i).(0 + 1.i) = (0.0-1.1) + (0.1+0.1)i = -1$.

Các số phức thường được ký hiệu ngắn gọn bằng chữ cái z. Ta thường viết "Cho số phức z = x + iy".

Với số phức z = x + iy thì a được gọi là **phần thực** của z và được ký hiệu là x = Re(z), y được gọi là **phần ảo** của z và được ký hiệu là y = Im(z).

Với số phức z = x + iy thì số phức $\overline{z} = x - iy$ được gọi là **phức liên hợp** của z. Ta có các tính chất cơ bản sau đây

1) $z + \overline{z} = 2x; z.\overline{z} = x^2 + y^2$

2) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}; \overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$

Đại lượng $\sqrt{a^2 + b^2}$ được gọi là mô-đun của số phức z và được ký hiệu là |z|. Ta có các tính chất cơ bản sau (chứng minh!)

1) $|z.z'| = |z|.|z'|$
2) $|z + z'| \le |z| + |z'|$

Một một số phức z khác 0 đều có nghịch đảo của nó. Cụ thể từ đẳng thức

$z.\overline{z} = |z|^2$

ta dễ dàng suy ra

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Từ đây ta cũng suy ra quy tắc chia hai số phức như sau

$$\frac{z}{z'} = z.z'^{-1} = \frac{z.\overline{z'}}{|z'|^2}.$$

Phép luỹ thừa các số phức được thực hiện bằng phép nhân tuần tự.

Cuối cùng, ta xét bài toán khai căn số phức. Ví dụ, tìm căn bậc hai của số phức 1 + i, tức là tìm số phức z = x + iy sao cho $z^2 = 1 + i$. Ta có

$z^2 = 1 + i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + i.2xy = 1 + i$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - y^2 = 1$, $2xy = 1$. Giải hệ này ta tìm được 2 giá trị của z là

$$z = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\sqrt{-2+2\sqrt{2}})$$

Bằng phương pháp này, ta có thể tìm được căn bậc hai của một số phức z bất kỳ. Tuy nhiên, việc áp dụng phương pháp tương tự cho các căn bậc lớn hơn gặp nhiều khó khăn. Rất may mắn là để giải quyết vấn đề căn bản này, ta có thể sử dụng dạng lượng giác.

2. Dạng lượng giác của số phức

Số phức z = x + iy có thể biểu diễn như điểm M có toạ độ (x, y) trong mặt phẳng Oxy. Ta gọi Ox là **trục thực**, Oy là **trục ảo** và Oxy là **mặt phẳng phức**. Đặt $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ và gọi φ là góc giữa OM và Ox thì ta có

a = rcosφ, b = rsinφ

Từ đó z = r(cosφ + isinφ). Đây chính là **dạng lượng giác** của số phức z. Góc φ được gọi là **argument** của số phức z.

Để thấy rõ sự tiện lợi của dạng lượng giác, ta hãy xem kết quả của phép nhân hai số phức ở dạng lượng giác.

Giả sử z = r(cosφ + isinφ), z’ = r’(cosφ’ + isinφ’) thì

z.z’ = r(cosφ + isinφ)* r’(cosφ’ + isinφ’) = rr’[(cosφcosφ’ - sinφsinφ’) + i(cosφsinφ’ + cosφ’sinφ)] = r[cos(φ+φ’) + isin(φ+φ’)].

Như vậy phép nhân hai số phức ở dạng lượng giác rất đơn giản: các môđun được nhân với nhau và các argument được cộng với nhau. Tương tự với phép nghịch đảo và phép chia:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)),\ \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi'))$$

Nếu áp dụng tuần tự quy tắc nhân nói trên, ta dễ dàng chứng minh được công thức sau

$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi)$

Công thức này được gọi là **công thức Moivre.**

Sử dụng công thức này, ta có thể dễ dàng tính luỹ thừa của một số phức. Chẳng hạn nếu cần tính $(1+i)^{100}$, ta viết

$$1+i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

Từ đó

$$(1+i)^{100}=[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})]^{100}=2^{50}(\cos\frac{100\pi}{4}+i\sin\frac{100\pi}{4})=-2^{50}.$$

Chính sự đơn giản của phép luỹ thừa sẽ giúp chúng ta có thể khai căn được các số phức. Giả sử ta cần tìm căn bậc n của số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Ta tìm căn dưới dạng $w = \rho(\cos\xi + i\sin\xi)$. Theo định nghĩa, w là căn bậc n của z khi và chỉ khi $w^n = z$. Từ đó, áp dụng công thức Moivre, ta được

$$\rho^n(\cos n\xi + i\sin n\xi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Từ đó suy ra

$$\rho=\sqrt[n]{r},\ n\xi=\varphi+2k\pi \Leftrightarrow \xi=\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}$$

với k nguyên. Do tính tuần hoàn của hàm số sinx và cosx, các giá trị k cách nhau một bội số của sẽ cho ta các số phức w bằng nhau, vì vậy chỉ cần chọn k = 0, 1, …, n-1 là đủ. Ta có thể kết luận

Định lý. Cho n là số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với $r \neq 0$ là một số phức. Khi đó có đúng n căn bậc n của z, là

$$\sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n})),\ k=0,1,...,n-1.$$

Chương 2: HÀM BIẾN PHỨC

I. HÀM BIẾN PHỨC

1.1. Định nghĩa

Quy tắc f cho tương ứng mỗi z ∈ A với một hay nhiều giá trị ω = f(z) ∈ C được gọi là một hàm biến phức z

Tập hợp A được gọi là miền xác định (MXĐ) của f

Tập hợp B = $\{\omega | \omega = f(z), z \in A\}$ gọi là tập giá trị của f

Nếu mỗi z ∈ A ứng với một giá trị ω = f(z) ∈ C thì f được gọi là **hàm đơn trị**, nếu mỗi z ∈ A ứng với nhiều giá trị ω = f(z) ∈ C thì f được gọi là **hàm đa trị.**

VD1: f(z) = $\frac{1}{z}$ là hàm đơn trị có MXĐ D = C\\{0}

Trong D = C\\{0}, ω = f(z) = $\sqrt{z}$ là hàm hai trị

Từ đây về sau ta chỉ xét hàm đơn trị

VD2: Cho f(z) = z – 3Im z. Tính f(1), f(-2i), f(1-2i)

VD3: Cho f(z) = 3z + $\bar{z}^2$. Tính f(-1+3i)

1.2. Phần thực và phần ảo của hàm biến phức

Với mỗi z ∈ A, ω = f(z) ∈ C nên ta có thể viết: ω = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)

Các hàm u(x,y) = Re ω và v(x,y) = Im ω lần lượt gọi là phần thực hay phần ảo của hàm f(z)

VD4: Xác định phần thực và phần ảo của $\omega = z^2 + (1-i)\bar{z}$

VD5: Xác định phần thực và phần ảo của f(z) = z - $\frac{1}{z}$

1.3. Giới hạn của hàm biến phức

➢ ***Định nghĩa***

Cho hàm biến phức f(z) xác định trong lân cận của z_0 (có thể trừ điểm z_0). Số phức a ≠ ∞ được gọi là giới hạn của f(z) khi $z \to z_0$, kí hiệu $\lim_{z\to z_0} f(z) = a$,

nếu $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 :\ |z - z_0| < \delta$ => $|f(z) - a| = \varepsilon$

Hàm phức f(z) được gọi là có giới hạn ∞ khi $z \to z_0$, ký hiệu $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, nếu

$\forall M > 0, \exists\delta > 0 :\ |z - z_0| < \delta$ => $|f(z)| = M$

Các giới hạn $\lim_{z\to\infty} f(z) = a, \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ được định nghĩa tương tự.

➢ ***Định lý***

Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + v(x,y), $z_0 = x_0 + iy_0$ và a = $\alpha + i\beta$ thì

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = \alpha, \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = \beta$$

Khi đó việc tính giới hạn hàm phức được chuyển thành việc tính giới hạn hai hàm biến thực. Do đó, các tính chất và phép tính giới hạn hàm phức tương tự như hàm thực.

1.4. Hàm số liên tục

➢ ***Định nghĩa***

Cho hàm số f(z) xác định trong miền chứa z_0. Hàm f(z) được gọi là liên tục tại điểm z_0 nếu $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Hàm f(z) được gọi là liên tục trong miền B nếu f(z) liên tục tại mọi điểm z ∈ B.

➢ ***Nhận xét***

- Nếu f(z) = u(x,y) + iv(x,y) liên tục tại $z_0 = x_0 + iy_0$ thì u(x,y) và v(x,y) liên tục tại (x_0,y_0)

VD6: a. $\lim_{z\to 1+i}(z^2 + i) = (1+i)^2 + i = 3i$

b.Hàm phức $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$ liên tục trên C\{0}.

II. ĐẠO HÀM CỦA HÀM BIẾN PHỨC

2.1. Định nghĩa

Cho hàm số $\omega = f(z)$ xác định trong miền D chứa điểm z = x +iy. Cho z một số gia $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Gọi $\Delta\omega = f(z+\Delta z) - f(z)$ là số gia tương ứng của f(z). Nếu tỉ số $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ dần tới một giới hạn xác định khi $\Delta z \to 0$ (theo mọi cách) thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $\omega = f(z)$ tại điểm z. Kí hiệu: f'(z).

Ta có: $f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$

Chú ý:

- f(z) có đạo hàm tại điểm z thì được gọi là khả vi tại điểm z
- f(z) có đạo hàm tại điểm z thì được gọi là liên tục tại z
- Đạo hàm của hàm biến phức có các tính chất và quy tắc tương tự như hàm biến số thực

VD1: Tính đạo hàm các hàm biến phức sau:

a) $f(z) = z^2$ b) $f(z) = \bar{z}$

2.2. Điều kiện khả vi Cauchy – Riemann (C-R)

- **Định lý:**

Nếu hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ khả vi tại $z = x + iy$ thì các hàm hai biến thực $u(x,y)$ và $v(x,y)$ khả vi tại (x,y) và có các đạo hàm riêng tại (x,y) thỏa điều kiện C – R:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \qquad \text{(C-R)}$$

Chú ý: *Hàm $u(x,y)$ và $v(x,y)$ khả vi khi đạo hàm cấp 1 của nó liên tục*

Ngược lại, nếu các hàm hai biến thực u(x,y) và v(x,y) có các đạo hàm riêng liên tục tại (x,y) và thỏa điều kiện C – R thì hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ khả vi tại $z = x + iy$ và $f'(z) = u'_x + iv'_x$

Hệ quả: (Công thức tính đạo hàm)

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x = v'_y - iu'_y$$

VD2: Xét sự khả vi của các hàm phức sau:

a) $\omega = z^2$
b) $f(z) = z.Rez$
c) $\omega = 3Rez - \bar{z}$

Chú ý:

- Các quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp và các công thức tính đạo hàm cơ bản của hàm thực vẫn áp dụng được cho hàm phức.
- Với $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ và $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ được xem như hàm 2 biến $z, \bar{z}$. Khi đó, điều kiện Cauchy – Riemann tương đương với $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f'_{\bar{z}} = 0$

VD3: Xét sự khả vi của hàm $f(z) = 2x - 4iy$

2.3. Hàm giải tích và hàm điều hòa

- **Hàm giải tích**

Hàm $\omega = f(z)$ gọi là giải tích trong miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc miềnD

Hàm $\omega = f(z)$ gọi là giải tích tại z_0 nếu tồn tại 1 lân cận nào đó của z_0 sao cho f(z) khả vi trong lân cận đó

VD4: a) Hàm $\omega = \bar{z}$ không giải tích $\forall z \in C$

b) Hàm $\omega = z^n$ khả vi tại $\forall z \in C$ nên giải tích trong C

c) Hàm $\omega = \frac{z}{1+z^2}$ giải tích tại $\forall z \in C\{\pm i\}$

Hai điểm $z = \pm i$ là điểm bất thường của hàm ω

- **Hàm điều hòa**

Hàm biến thực $u(x,y)$ được gọi là hàm điều hòa trong miền D nếu $u(x,y)$ thỏa phương trình Laplace: $\Delta u \equiv u"_{x^2} + u"_{y^2} = 0$

VD5: a) Hàm $u = x^2 - y^2$ là hàm điều hòa vì $u"_{x^2} + u"_{y^2} = 0$

b) Hàm $u = \ln(x^2 + y^2)$ là hàm điều hòa trong toàn mặt phẳng trừ gốc tọa độ.

2.4. Quan hệ giữa hàm giải tích và hàm điều hòa

- *Định lý 1*
- Nếu hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ là hàm giải tích trong miền D thì $u(x,y)$ và $v(x,y)$ là các hàm điều hòa trong miền D

VD7: Cho hàm phức $\omega = e^x\,(\cos y + i\sin y)$ giải tích trong C. CMR: các hàm $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ là các hàm điều hòa.

- *Định lý 2*
- Nếu $u(x,y)$ và $v(x,y)$ là hai hàm điều hòa liên hợp (nghĩa là thỏa điều kiện Cauchy – Riemann) trong D thì hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ giải tích trong D

Chú ý: Cho trước một hàm điều hòa, ta có tìm được hàm điều hòa liên hợp với nó (sai khác 1 hằng số). Vì vậy, khi cho trước phần thực hoặc phần ảo của một hàm giải tích, ta có thể tìm được hàm giải tích đó (sai khác 1 hằng số)

VD8. Tìm hàm giải tích của hàm f(z) biết phần thực $u = x^2 - y^2 + 2x$ và f(0) = 0

VD9: Tìm hàm giải tích f(z) biết phần ảo $v(x,y) = e^x \sin y$

IV. CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP

4.1. Hàm hữu tỉ

$$f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \cdots + b_m}$$

- ***Các trường hợp riêng của hàm hữu tỉ***
- Hàm tuyến tính: $f(z) = az + b, D = C$
- Hàm lũy thừa: $f(z) = z^n, n \in Z, D = C$
- Hàm đa thức: $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n, D = C$
- Hàm phân tuyến tính: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, D = C\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

4.2. Hàm mũ và Logarit

a) Hàm mũ: $e^z = e^{x+iy} = e^x(cosy + isiny)$

- **Tính chất**

- Nếu $z = x$ thì $e^z = e^x$
- $|e^z| = |e^x| > 0$
- $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
- Hàm $\omega = e^z$ tuần hoàn với chu kỳ $2\pi i$
- Hàm $\omega = e^z$ khả vi với mọi z ∈ C và $(e^z)' = e^z$

b) Hàm logarit $\omega = Lnz$

- **Định nghĩa**:

Với $z = r\,(cos\varphi + isin\varphi) = r.e^{i\varphi}$, ta có:

$\ln z = lnr + i(\varphi + k2\pi)\,, (0 \le \varphi \le 2\pi)$

Chọn k = 0 và ký hiệu Lnz ta được

$Lnz = lnr + i\varphi\,, (0 \le \varphi \le 2\pi)$

- **Tính chất:**

- Hàm Lnz là hàm đơn trị xác định C\{0}
- $Ln(z_1.z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$
- Hàm $\omega = Lnz$ khả vi $\forall z \in C\backslash\{0\}$ và $(Lnz)' = \frac{1}{z}$

4.3. Các hàm lượng giác và hyperbol

- Hàm cosin: $cosz = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$
- Hàm sin: $sinz = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$
- Hàm cosin hyperbolic: $chz = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \cos(iz)$
- Hàm sin hyperbolic: $shz = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = -\sin(iz)$

Tất cả các tính chất và công thức lượng giác đã biết cũng đúng với các hàm lượng giác phức

Các hàm lượng hyperbol xác định và liên tục trên C

CHƯƠNG 3: TÍCH PHÂN CỦA HÀM PHỨC

I. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG CỦA HÀM PHỨC

1.1 Định nghĩa

Cho đường cong định hướng Joran C, trơn từng khúc, có phương trình:

$z(t) = x(t) + iy(t), t: a \to b$ và hàm phức $f(z)$ xác định liên tục trên C. Chia C thành n điểm chia liên tiếp: $z(a) = z_0, z_1, \dots\dots, z_n = z(b)$.

Trên mỗi cung $z_{k-1}z_k$ ta chọn tùy ý điểm t_k (k $= \overline{1,n}$) và lập tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(z_k - z_{k-1})$

Nếu khi $|\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}| \to 0$, tổng S_n dần đến giới hạn là I ∈ C (không phụ thuộc vào cách chia và chọn điểm t_k), thì I được gọi là tích phân của f(z) dọc theo C hướng từ z_0 đến z_n. Kí hiệu $\int_C f(z)dz$

$$\text{Vậy } \int_C f(z)dz = \lim_{\substack{\max |\Delta z_k| \to 0 \\ 1 \le k \le n}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(z_k - z_{k-1})$$

Nếu đường cong có điểm đầu và điểm cuối lần lượt là A, B thì ta ký hiệu $\int_{AB} f(z)dz$. Nếu đường cong C có điểm đầu và cuối trùng nhau thì ta ký hiệu $\oint_C f(z)dz$ với chiều của C là chiều dương.

1.2 Tính chất

Tích phân đường hàm phức dọc theo đường cong C có các tính chất như tích phân đường loại 2:

1. $\int_C [f(z) + bg(z)]dz = a\int_C f(z)dz + b\int_C g(z)dz$

2. Nếu $C = C_1 \cup C_2$ và $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ thì $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$

3. $\int_{\widehat{AB}} f(z)dz = -\int_{\widehat{BA}} f(z)dz$

Gọi L là độ dài của đường cong và M = $\max\limits_{z \in C} |f(z)|$, ta có công thức ước lượng tích phân:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz| \le ML$$

1.3 Phương pháp tính

➢ **Đưa về tích phân xác định:**

Nếu phương trình của C: $z(t) = x(t) + iy(t), t: a \to b$

thì: $$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t)).z'(t)dt$$

VD1: Tính tích phân: I = $\int\limits_C \bar{z}dz$ với C là đường thẳng nối từ z = 0 đến z = 4 + 2i trong các trường hợp sau:

a) C là parabol x = y^2
b) C là đường gấp khúc từ 0 đến 2i, rồi từ 2i đến 4 + 2i

➢ **Biểu diễn tích phân theo phần thực và phần ảo của f(z)**

Thay f(ξ_k) = u(ξ_k) + iv(ξ_k) và Δz_k =Δx_k + iΔy_k vào tổng S_n, ta được:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{f}(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k) + iv(\xi_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k)\Delta x_k - v(\xi_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=1}^{n} [v(\xi_k)\Delta x_k + u(\xi_k)\Delta y_k]$$

Qua giới hạn, ta có:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

VD2: Tính tích phân I = $\int\limits_C \bar{z}dz$, trong đó C là đoạn thẳng nối từ điểm z = 0 đến điểm z = 4 + 2i

VD3: Tính tích phân I = $\int\limits_C (1 + i - 2z)dz$, trong đó C là cung parapol y = x^2 nối điểm z = 1 + i.

II. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH CÔNG THỨC NEWTON – LEIBNITZ

2.1 Tích phân bất định

Hàm giải tích F(z) được gọi là nguyên hàm của hàm giải tích f(z) trong miền D nếu $F'(z) = f(z)$.

Khi đó, F(z) + C (với C là hằng số phức) cũng là nguyên hàm của f(z).

Tập tất cả nguyên hàm của f(z) có dạng F(z) + C và được gọi là **tích phân bất định** của f(z).

Ký hiệu là $\int f(z)dz = F(z) + C$

VD1: Tìm nguyên hàm của $f(z) = z^3$

Nguyên hàm của f(z): $\int z^3 dz = \frac{1}{4}z^4 + C$

VD2: Tìm nguyên hàm của $f(z) = ze^{iz^2}$.

2.2 Công thức Newton – Leibnitz

Nếu hàm f(z) giải tích trong miền đơn liên D và F(z) là nguyên hàm của f(z) trong D thì:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1), \forall z_1, z_2 \in D$$

<u>**Chú ý:**</u>

Tích phân hàm f(z) dọc theo đường cong C chỉ được áp dụng công thức Newton – Leibnitz nếu C nằm trong miền đơn liên D và hàm f(z) giải tích trong D.

Các phương pháp tính tích phân đổi biến và từng phần đã biết vẫn đúng cho tích phân phức.

VD3: Tính tích phân I = $\int_C 3z^2 dz,$ trong đó C là đường cong nối điểm z = i và z = 2

$$I = \int_i^2 3z^2 dz = z^3\Big|_1^2 = 7$$

VD4: Tính tích phân I = $\int_0^{i\pi} ze^z dz$

2.3. Công thức Cauchy, đạo hàm cấp cao của hàm giải tích

➢ Công thức tích phân Cauchy

Giả sử hàm f(z) giải tích trong miền đơn liên D bị chặn bởi biên C trơn từng khúc và liên tục trong miền kín $\overline{D} = D \cup C$ thì tại z_0 bất kỳ thuộc D ta có

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

trong đó, chiều đi trên biên C là chiều dương

➢ Đạo hàm cấp cao của hàm giải tích

Giả sử hàm f(z) giải tích trong miền đơn liên bị chặn bởi biên là đường cong C trơn từng khúc và liên tục trong miền kín $\overline{D} = D \cup C$. Khi đó, $\forall z_0 \in D$ hàm f(z) có đạo hàm mọi cấp và

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, n = 1,2,\dots$$

trong đó, chiều đi trên biên C là chiều dương

<u>Ý nghĩa:</u> Nếu hàm f(z) giải tích tại z thì nó có đạo hàm mọi cấp tại z và các đạo hàm đó cũng giải tích tại z.

<u>Hệ quả:</u> Nếu f(z) giải tích trong miền đơn liên D và bị chặn bởi biên C trơn từng khúc và liên tục trong miền kín $\overline{D} = D \cup C$. Với z_0 thuộc D, ta có:

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), n = 0,1,2,\dots$$

Quy ước: 0! = 1, $f^{(0)}(z) = f(z)$

VD5: Tính các tích phân I = $\int_C \frac{\sin(\pi z)}{z^2+1}dz$; C: |z – i| = 1

Đặt f(z) = $\frac{\sin \pi z}{z+i} \Rightarrow I = \oint_C \frac{\sin \pi z}{z^2+1}dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-i}dz = 2\pi i f(i) = \pi \sin \pi i$

VD: Tính các tích phân sau:

1. $I = \int_0^{1+i} (z + \operatorname{Re} z)dz$ dọc theo cung parabol y = x^2
2. $I = \int_{-i}^{i} (z - \frac{1}{z})dz$ dọc theo nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

CHƯƠNG 4: THẶNG DƯ

I. LÝ THUYẾT THẶNG DƯ

1.1. Điểm bất thường cô lập hữu hạn

a) Định nghĩa

Điểm $z = a \neq \infty$ được gọi là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ nếu tồn tại một lân cận của *a* trong đó chỉ có $z = a$ là điểm bất thường.

VD:

$f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ có z = 0 là điểm bất thường cô lập

$f(z) = \dfrac{1}{(z^2 - 4z + 13)^2}$ có z = 2 ± 3i là 2 điểm bất thường cô lập

$f(z) = e^{\frac{z}{z+2}}$ có điểm bất thường cô lập là z = -2

b) Phân loại điểm bất thường cô lập hữu hạn

Giả sử $z = a \neq \infty$ là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$

- Nếu $f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + ...$ thì z = a được gọi là **điểm bất thường bỏ được**.
- Nếu $f(z) = \dfrac{c_{-m}}{(z-a)^m} + ... + \dfrac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + ...$ thì z = a được gọi là **cực điểm cấp m** của f(z)
- Nếu trong khai triển của f(z) có chứa vô số lũy thừa âm của (z – a) thì z = a được gọi là **điểm bất thường cốt yếu** của f(z)

<u>*Chú ý:*</u> - Điểm bất thường bỏ được còn được gọi là *cực điểm cấp 0* hay *không điểm*

- Cực điểm cấp 1 (m = 1) còn được gọi là cực điểm đơn

VD2: Hàm $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ có khai triển Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ....\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...$$

Vậy z = 0 là không điểm của f(z)

VD3: Hàm $f(z)=\frac{e^z}{z^2}$ có khai triển Laurent :

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+....\right)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+...$$

Vậy z = 0 là cực điểm cấp 2.

VD4: Hàm $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ có khai triển Laurent

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+....$$

Vậy z = 0 là điểm bất thường cốt yếu

c) Cách tìm cực điểm bằng giới hạn

Cho $z=a\neq\infty$ là điểm bất thường cô lập của f(z).

- Nếu $\lim_{z\to a}f(z)=L\neq\infty$ thì z = a là cực điểm cấp 0
- Nếu $\begin{cases}\lim_{z\to a}f(z)=\infty\\ \lim_{z\to a}\left[(z-a)^m f(z)\right]=L\in C\setminus\{0\}\end{cases}$ thì z = a là cực điểm cấp m của f(z)
- Nếu $\lim_{z\to a}f(z)$ không tồn tại thì z = a là điểm bất thường cốt yếu

VD5: Tìm và phân loại điểm bất thường cô lập của $f(z)=\frac{sin^2z}{z^2(z-1)^3}$

VD6: Tìm và phân loại các điểm bất thường cô lập hữu hạn của $f(z)=\frac{z}{(z^2+1)(z^2-2z+1)}$

1.2. Thặng dư

a) Định nghĩa

Giả sử $f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+....+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+....$ thì c-1 được gọi là thặng dư của f(z) tại z = a, ký hiệu $\operatorname{Res}\{f(z),a\}$

VD7: Cho $f(z)=\frac{1}{(z+i)^2}-\frac{2}{(z+i)}+3+(z+i),$ ta có Res{f(z),-i} = - 2

b) Phương pháp tính thặng dư

- Nếu $a \neq \infty$ là cực điểm đơn thì $\operatorname{Res}\{f(z),a\} = \lim\limits_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]$
- Nếu $a \neq \infty$ là cực điểm cấp m (m ≥ 2) thì

$$\operatorname{Res}\{f(z),a\} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}$$

Chú ý:

- Nếu $a \neq \infty$ là không điểm của f(z) thì $\operatorname{Res}\{f(z),a\} = 0$
- Nếu $a \neq \infty$ là cực điểm đơn và $f(z) = \dfrac{h(z)}{g(z)}$ thì $\operatorname{Res}\{f(z),a\} = \dfrac{h(a)}{g'(a)}$
- Khi tính giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$, ta có thể dùng quy tắc L'Hospital

VD8: Tính $\operatorname{Res}\{f(z),2\}$ của $f(z) = \dfrac{z^2-2z+3}{z-2}$ -

Cách 1: Ta có: $f(z) = \dfrac{z^2-2z+3}{z-2} = 2+(z-2)+\dfrac{3}{z-2}$ (0< z – 2<∞)

$\Rightarrow \operatorname{Res}\{f(z),2\} = c_{-1} = 3$

Cách 2: Ta có z = 2 là cực điểm đơn của f(z)

$\Rightarrow \operatorname{Res}\{f(z),2\} = \lim\limits_{z\to 2}((z-2)f(z)) = 3$

Hay $\operatorname{Res}\{f(z),2\} = \left.\dfrac{z^2-2z+3}{(z-2)'}\right|_{z=2} = 3$

VD9: Tính $\operatorname{Res}\{f(z),1-2i\}$ của $f(z) = \dfrac{z}{z^2-2z+5}$

VD10: Tính $\operatorname{Res}\{f(z),1\}$ của $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)^2}$

VD11: Tính thặng dư của $f(z) = \dfrac{e^{iz}-\overline{e^{iz}}}{z^4}$ tại các điểm bất thường cô lập

II. ỨNG DỤNG CỦA THẶNG DƯ

2.1. Tính tích phân trên đường cong kín

Nếu hàm *f(z)* giải tích trên miền đơn liên D và liên tục trên biên C trừ một số hữu hạn điểm $a_1,a_2,\ldots,a_n$ bất thường cô lập nằm trong D thì

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\{f(z), a_k\}$$

VD1: Tính tích phân $I = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1} dz$

Hàm $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$ có 2 điểm bất thường cô lập $z = \pm i$ nằm trong hình tròn $\overline{D}: |z| \le 2$

Áp dụng định lý 1 ta có

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1} dz = 2\pi i(\text{Re}\, s\{f(z), i\} + \text{Re}\, s\{f(z), -i\}) = 2\pi i \left(\left. \frac{e^z}{(z^2+1)'} \right|_i + \left. \frac{e^z}{(z^2+1)'} \right|_{-i} \right) = 2\pi i.\text{Sin}1$$

VD2: Tính tích phân $I = \oint_{|z-1|=1} \frac{z+2}{(z-1)^2(z+1)} dz$

Hàm $f(z) = \frac{z+2}{(z-1)^2(z+1)}$ có 1 cực điểm cấp 2 z = 1 nằm trong hình tròn $\overline{D}: |z-1| \le 1$

Áp dụng định lý 1 ta có

$$I = \oint_{|z-1|=1} \frac{z+2}{(z-1)^2(z+1)} dz = 2\pi i.\text{Res}\{f(z), 1\} = 2\pi i.\lim_{z\to 1} \left(\frac{z+2}{(z+1)^2(z+1)} \right)' = -i\frac{\pi}{2}$$

2.2. Tính tích phân thực dạng lượng giác

- *Dạng tích phân*

$$I = \int_0^{2\pi} f(t)dt \quad \text{hay} \quad I = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

trong đó, $f(t) = R(cost, \text{sint})$ là hàm hữu tỉ thực theo sint và cost

- *Phương pháp giải*

Đặt $z = e^{it}$, ta có

$$\text{dz} = ie^{it}dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}$$

$$cost = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{(e^{it})^2 + 1}{2\text{e}^{it}} = \frac{z^2+1}{2z}$$

$$\text{sint} = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{(e^{it})^2-1}{2ie^{it}} = \frac{z^2-1}{2iz}$$

Khi t biến thiên từ 0 đến 2π (hoặc từ -π đến π) thì z biến thiên trên đường tròn đơn vị $|z| = |e^{it}| = 1$

Khi đó, hai tích phân trên có dạng

$$I = \oint_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\{f(z), a_k\}$$

với a_k (k=1,2,….,n) là các điểm bất thường cô lập nằm trong đường tròn $|z| = 1$

VD3: Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$

Đặt $z = e^{it} \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}$ ta có

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{z^2-1}{2iz}} = 2\oint_C \frac{dz}{z^2+4iz-1}$$

Hàm $f(z) = \frac{1}{z^2+4iz-1}$ có điểm a = (-2+$\sqrt{3}$)i là cực điểm đơn nằm trong hình tròn $|z|$ < 1

Vậy $I = 2.2\pi i.\text{Res}\{f(z), a\} = 4\pi i.\lim_{z\to a} \frac{z-a}{z^2+4iz-1} = 4\pi i.\lim_{z\to a} \frac{(z-a)'}{(z^2+4iz-1)'} = \frac{2\pi}{3}$

VD4: Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3-cost}$

2.3. Tính tích phân thực suy rộng

a) Dạng 1: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Cho f(z) giải tích trong nửa mặt phẳng trên (trừ một số hữu hạn điểm bất thường cô lập $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Nếu $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ với bậc P(x)≤ (bậc Q(x) + 2) thì tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\{f(z), a_k\}$

VD5: Tính tích phân $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

Hàm $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}=\frac{1}{\left(z-i\right)^2\left(z+i\right)^2}$ có một cực điểm cấp hai $z=i$ nằm trong nửa mặt phẳng trên

Ta có: $I=2\pi i.\mathrm{Res}[f(z),i]=2\pi i.\lim\limits_{z\to i}\left[\left(z-i\right)^2 f(z)\right]'$

$$=2\pi i.\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]'=2\pi i.\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=2\pi i.\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{2}$$

VD6: Tính tích phân $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}$

Hàm $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$ có 2 cực điểm đơn $a_1=e^{i\frac{\pi}{4}}$ và $a_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}$ nằm trong nửa mặt phẳng phía trên

Ta có:

$$I=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),a_1]+\mathrm{Res}[f(z),a_2]\}$$

$$=2\pi i\left(\lim_{z\to a_1}\frac{z-a_1}{z^4+1}+\lim_{z\to a_2}\frac{z-a_2}{z^4+1}\right)$$

$$=2\pi i\left(\lim_{z\to a_1}\frac{1}{4z^3}+\lim_{z\to a_2}\frac{1}{4z^3}\right)=\frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{a_1^3}+\frac{1}{a_2^3}\right)$$

$$=2\pi i\left(\frac{a_1}{a_1^4}+\frac{a_2}{a_2^4}\right)=-\frac{\pi i}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

b) <u>*Dạng 2:*</u> $I_1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x.dx$ hoặc $I_2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\alpha x.dx$

<u>Phương pháp giải:</u>

- Bước 1: Tính $I_1+iI_2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z)e^{i\alpha z},a_k]$ trong đó, ak là các điểm bất thường nằm trong nửa mặt phẳng trên
- Bước 2: Cân bằng phần thực và phần ảo, ta tìm được I_1 và I_2
- Khi đó, tích phân I1 và I2 sẽ được tính theo công thức sau:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos x\mathrm{dx} = -2\pi \,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left\{ f(z).e^{i\alpha z}, a_k \right\} \right)$$
$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\mathrm{dx} = 2\pi \,\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left\{ f(z).e^{i\alpha z}, a_k \right\} \right)$$

VD7: Tính các tính phân sau:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos\mathrm{x}}{x^2 - 2\mathrm{x} + 10} d\mathrm{x}, I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{x}\sin x}{x^2 - 2\mathrm{x} + 10} d\mathrm{x}$$

Ta có:

$$I_1 + iI_2 = 2\pi i.\mathrm{Res}[f(z)e^{iz}, 1+3i] = 2\pi i \left(\frac{ze^{iz}}{2\mathrm{z} - 2} \right)\Bigg|_{z=1+3i} = \frac{\pi}{2} e^{-3}(1+3i)e^{i}$$

$$= \frac{\pi}{3} e^{-3}(\cos 1\text{-}3\sin 1) + i\frac{\pi}{3} e^{-3}(3\cos 1\text{+}\sin 1)$$

Vậy $I_1 = \frac{\pi}{3} e^{-3}(\cos 1\text{-}3\sin 1), I_2 = \frac{\pi}{3} e^{-3}(3\cos 1\text{+}\sin 1)$

CHƯƠNG 5: PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

I. ĐỊNH NGHĨA

Phép biến đổi Laplace là một quy luật liên kết với hàm f(t) với một hàm F(s) xác định bởi: F(s) = $\mathscr{L}$\{f(t)\} = $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$

Trong đó, f(t) được gọi là hàm gốc

F(s) được gọi là hàm ảnh

Điều kiện đủ để biến đổi Laplace của f(t) tồn tại là:

+ f(t) là hàm liên tục từng khúc (nghĩa là f(t) liên tục ngoại trừ tại một tập hữu hạn các điểm gián đoạn hữu hạn cô lập)

+ f(t) có bậc mũ, nghĩa là tồn tại một hàm mũ M$e^{\sigma t}$ sao cho $|f(t)| \le Me^{\sigma t}$

II. BIẾN ĐỔI LAPLACE CỦA MỘT SỐ HÀM CƠ BẢN

2.1. Hàm bậc thang đơn vị u(t)

Hàm u(t) được định nghĩa bởi

$$u(t) = \begin{cases} 0 & ,t < 0 \\ 1 & ,t > 0 \end{cases}$$

Ta có $\mathscr{L}$\{u(t)\}= $\int_0^{+\infty} 1.e^{-st}dt = \frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$

Vậy biến đổi Laplace của hàm bậc thang đơn vị là

$\mathscr{L}$\{u(t)\} $= \frac{1}{s}$

2.2. Hàm mũ: e^{-at}

Ta có $\mathscr{L}$\{ e^{-at} \}= $\int_0^{+\infty} e^{-at}.e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt = \frac{-1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s+a}$

Vậy biến đổi Laplace của hàm mũ là

$\mathscr{L}$\{ e^{-at} \} $= \frac{1}{s+a}$

2.3. Hàm lượng giác cost, sint

Ta có: $\mathscr{L}$\{sint \}= $\int_0^{+\infty} \sin t.e^{-st}dt = -e^{-st}\cos t\Big|_0^{+\infty} - s\int_0^{+\infty}\cos t.e^{-st}dt = 1 - s\int_0^{+\infty}\cos t.e^{-st}dt$ (1)

$\int_0^{+\infty}\cos t.e^{-st}dt = e^{-st}\sin t\Big|_0^{+\infty} - s\int_0^{+\infty}\sin t.e^{-st}dt$ = -s $\mathscr{L}$\{sint \}

(1) $\Leftrightarrow$ $\mathscr{L}$\{sint \}= 1 – s(-s $\mathscr{L}$\{sint \})

$\Rightarrow$ $\mathscr{L}$\{sint \}= $\dfrac{1}{s^2+1}$

Tương tự, $\mathscr{L}$\{cost \}= $\dfrac{s}{s^2+1}$

Vậy $\mathscr{L}$\{sint \}= $\dfrac{1}{s^2+1}$, $\mathscr{L}$\{cost \}= $\dfrac{s}{s^2+1}$

2.4. Hàm lũy thừa t^n

Ta có: $\mathscr{L}$\{ t^n \}= $\int_0^{+\infty} t^n e^{-st}dt = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

III. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

3.1. Tính chất tuyến tính

Giả sử $\mathscr{L}$\{f(t)\}= F(s), $\mathscr{L}$\{g(t)\}= G(s) và α,β là các số phức. Khi đó

$\mathscr{L}\left\{\alpha f(t) + \beta g(t)\right\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$

3.2. Tính chất đồng dạng

Giả sử $\mathscr{L}$\{f(t)\}= F(s) và α >0. Khi đó

$\mathscr{L}$\{f(αt)\}= $\dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{s}{\alpha}\right)$ và $\mathscr{L}^{-1}$\{F(αs)\}= $\dfrac{1}{\alpha}f\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)$

VD:

a) $\mathscr{L}$\{sinωt\}= $\dfrac{1}{\omega\left[1+\left(\dfrac{s}{\omega}\right)^2\right]} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

b) $\mathscr{L}\{\cos\omega t\} = \dfrac{\dfrac{s}{\omega}}{\omega\left[1+\left(\dfrac{s}{\omega}\right)^2\right]} = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

3.3. Dịch chuyển gốc

Giả sử $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ và a >0. Khi đó

$\mathscr{L}\{f(t - a).u(t - a)\} = e^{-sa}F(s)$

Chú ý: $u(t-a) = \begin{cases} 0 & ,t < a \\ 1 & ,t > a \end{cases} \Rightarrow \mathscr{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-sa}}{s}$

Do đó tính chất dịch chuyển gốc được áp dụng cho những hàm gốc cho bởi nhiều công thức khác nhau trên những đoạn khác nhau

3.4. Dịch chuyển ảnh

Giả sử $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, với a là hằng số phức, thì

$\mathscr{L}\left\{e^{-at}f(t)\right\} = F(s+a)$

3.5. Đạo hàm gốc

Giả sử $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ và các đạo hàm $f^{(k)}(t), k = 1, 2, 3, ..., n$ cũng là các hàm gốc

Khi đó: $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

$\mathscr{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - s f'(0) - f''(0)$

Tổng quát: $\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

3.6. Đạo hàm ảnh

Giả sử $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ thì $\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n.F^{(n)}(s)$

3.7. Ảnh của hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ T

$\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\displaystyle\int_0^T e^{-sT} f(t)dt$

IV. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

4.1. Định nghĩa

Nếu biến đổi Laplace của f(t) là F(s) tức là $\mathscr{L}${f(t)}= F(s) thì f(t) gọi là biến đổi Laplace ngược của F(s) và ta viết f(t) = $\mathscr{L}^{-1}${F(s)} trong đó $\mathscr{L}^{-1}$ gọi là toán tử biến đổi Laplace ngược.

Vd: $\mathscr{L}\{e^{-3t}\}=\dfrac{1}{s+3}$ nên ta viết $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+3}\right\}=e^{-3t}$

Lưu ý: Tính chất của phép Laplace có các tính chất tương tự tính chất của phép biến đổi Laplace.

4.2. Các phương pháp tìm biến đổi Laplace ngược

4.2.1. Sử dụng các tính chất

a) *Tính chất tuyến tính*

$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s)+\beta G(s)\}= \alpha\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}+ \beta\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$

b) *Tính chất dời theo s*

$\mathscr{L}^{-1}\{F(s+a)\} = e^{-at}\,\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$

c) *Tính chất dời theo t*

$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-sT}\, F(s)\}= u(t-T).f(t-T)$

4.2.2. Sử dụng thặng dư

Cho F(s) là phân thức thực sự và sk là những điểm bất thường cô lập của F(s). Khi đó

$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}= \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left\{e^{st}F(s),s_k\right\}$ với s_k là tất cả các điểm bất thường của hàm F(s)

4.2.3. Phân thức ảnh thành tổng các phân thức tối giản

Xét F(s) có dạng $F(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ (bậc của Q(s) lớn hơn bậc của P(s)).

Khi đó để tìm biến đổi Laplace ngược của F(s) ta phân tích F(s) thành tổng của nhiều phân số sơ cấp

Trường hợp 1: Q(s) = 0 chỉ có nghiệm thực đơn a, b, c,…, n

$$F(s)=\frac{P(s)}{(s-a)(s-b)(s-c)....(s-n)}=\frac{A}{s-a}+\frac{B}{s-b}+\frac{C}{s-c}+.....+\frac{N}{s-n}$$

Tìm các hệ số A, B, C,…,N theo công thức sau

$A=\left(\left(s-a\right).F(s)\right)\Big|_{s=a}$; $B=\left(\left(s-b\right).F(s)\right)\Big|_{s=b}$; $C=\left(\left(s-c\right).F(s)\right)\Big|_{s=c}$;

…….. ; $N=\left(\left(s-n\right).F(s)\right)\Big|_{s=n}$.

$\Rightarrow f(t)=Ae^{at}+Be^{bt}+Ce^{ct}+....+Ne^{nt}$

Trường hợp 2: Q(s) = 0 có nghiệm thực kép

$$F(s)=\frac{P(s)}{(s-a)^2}=\frac{A}{s-a}+\frac{B}{\left(s-a\right)^2}$$

Tìm các hệ số A, B theo công thức sau:

$B=\left(\left(s-a\right)^2.F(s)\right)\Big|_{s=a}$; $A=\left(\left(s-a\right)^2.F(s)\right)'\Big|_{s=a}$

$\Rightarrow f(t)=Ae^{at}+Bte^{at}$

Trường hợp 3: Q(s) = 0 có nghiệm phức ta biến đổi Q(s) về dạng $(s+a)^2+\omega^2$ sau đó tra bảng Laplace để tìm hàm tương ứng

Vd: Tìm f(t) biết $F(s)=\dfrac{s-2}{s^2+8s+25}$

Ta có $F(s)=\dfrac{s-2}{s^2+8s+25}=\dfrac{s-2}{\left(s+4\right)^2+3^2}=\dfrac{s+4}{\left(s+4\right)^2+3^2}-\dfrac{6}{\left(s+4\right)^2+3^2}$

$\Rightarrow f(t)=\cos 3t.e^{-4t}-2\sin 3t.e^{-4t}$

BẢNG BIẾN ĐỔI LAPLACE THÔNG DỤNG

Hàm gốc	**Hàm ảnh**
1	$\frac{1}{s}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n . e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\sin\omega t\, e^{\alpha t}$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t\, e^{\alpha t}$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$