CHƯƠNG I.
PHÁN ĐOÁN VÀ CÁC PHÉP LOGIC

§1. PHÁN ĐOÁN VÀ PHỦ ĐỊNH CỦA PHÁN ĐOÁN.

1.1. Phán đoán và câu.

Phán đoán là một khái niệm cơ bản của logic học. *Phán đoán* được diễn đạt dưới dạng ngôn ngữ thành một *câu* phản ánh tính *đúng* hay *sai* một thực tế khách quan.

Câu phản ánh thực tế khách quan đúng, được gọi là phán đoán đúng hoặc cũng gọi là phán đoán nhận *giá trị chân lý đúng*.

Câu phản ánh thực tế khách quan sai, được gọi là phán đoán sai hoặc cũng gọi là phán đoán nhận *giá trị chân lý sai*.

Logic học, mà một phán đoán chỉ nhận một trong hai giá trị chân lý như trên, gọi là logic lưỡng trị. Trong giáo trình của chúng ta chỉ xét logic lưỡng trị mà thôi.

Ví dụ về phán đoán đúng:

Dây đồng dẫn điện.
Tác giả của truyện Kiều là Nguyễn Du.
Số 7 là số nguyên tố.

Ví dụ về phán đoán sai:

Paris là thủ đô của nước Anh.
Tác giả của tác phẩm Chinh Phụ ngâm là Bà Huyện Thanh Quan.
Số 12 là số nguyên tố.

Phán đoán được diễn đạt dưới dạng ngôn ngữ thành một *câu,* nhưng không phải câu nào cũng là một phán đoán. Chẳng hạn những câu sau đây.

Bông hoa này đẹp quá!

Phải tập trung trong giờ họp.

Chủ nhật này bạn có đi chơi không?

Những câu cảm thán, mệnh lệnh, câu hỏi thường không diễn đạt một phán đoán. Vì nội dung không chuyển tải được tính đúng hay sai một thực tế. Tuy nhiên những câu hỏi tu từ thì lại diễn đạt một phán đoán.

"Ớt nào là ớt chẳng cay?" đây là một phán đoán đúng, vì nội dung của nó nói lên tính chất cay của mọi trái ớt.

Thông thường người ta dùng các chữ cái A, B, C,… để ký hiệu một phán đoán. Tính đúng hay sai của phán đóan được ký hiệu là Đ (hoặc 1) hay S (hoặc 0).

Ví dụ: *A=" Tác giả của truyện Kiều là Nguyễn Du"* là một phán đoán đúng.

P=" Tác giả của truyện Quan Âm Thị Kính là Nguyễn Du" là một phán đoán sai.

Hai phán đoán được gọi là bằng nhau nếu có cùng giá trị chân lý.

Với định nghĩa này thì hai phán đoán sau là bằng nhau, mặc dù nội dung không liên quan đến nhau. Ta cũng gọi hai phán đoán bằng nhau là hai phán đoán tương đương logic.

A = "Truyện Quan Âm Thị Kính là một truyện thơ xuất hiện trong dân gian, mà hiện nay chưa rõ tác giả" và *B = "2+2=4"*. Chúng bằng nhau vì cả hai đều phản ánh một thực tế khách quan đúng. Ta viết *A=B*.

Chúng ta chỉ chú ý đến những phán đoán có cùng nội dung và tương đương logic với nhau.

1.2. Phủ định một phán đoán.

Cho phán đoán *P*. Phủ định của phán đoán *P* là một phán đoán, ký hiệu $\sim P$, có nội dung và giá trị chân lý ngược lại với *P*.

Ví dụ: *P = " Tác giả của truyện Quan Âm Thị Kính là Nguyễn Du"* (S). Phủ định của P là $\sim P$ *=" Không phải tác giả của truyện Quan Âm Thị Kính là Nguyễn Du"* (Đ).

Q=" 3+4=7" (Đ). Phủ định của phán đoán *Q* là phán đoán $\sim Q = "3+4 \neq 7"$ (S).

Giá trị chân lý của *P* và $\sim P$ được cho trong bảng sau:

P	$\sim P$
Đ	S
S	Đ

Phủ định của phán đoán *P* có thể diễn đạt nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn phán đoán *P* ở trên có những cách phủ định như sau:

$\sim P$ = *"Tác giả của truyện Quan Âm Thị Kính không phải là Nguyễn Du".*

$\sim P$ = *"Nói rằng tác giả của truyện Quan Âm Thị Kính là Nguyễn Du là sai".*

Bây giờ chúng ta thử xét phán đoán phủ định của phán đoán $\sim P$ ở trên. Khi đó $\sim(\sim P)$ sẽ là: "Nói rằng tác giả của truyện Quan Âm Thị Kính không phải là Nguyễn Du là nói sai". Điều này cũng có nghĩa "Tác giả của truyện Quan Âm Thị Kính là Nguyễn Du" = *P*.

Q = " 3+4=7" hay là: "3 cộng 4 bằng 7". $\sim Q = "3+4 \neq 7"$ = " 3 cộng 4 không bằng 7". Phủ định của phán đoán "3 cộng 4 không bằng 7" là: $\sim(\sim Q)$ ="Không thể 3 cộng 4 không bằng 7". Không thể 3 cộng 4 không bằng 7, tức là 3 cộng 4 bằng 7.

Tóm lại, qua hai ví dụ trên ta có $\sim(\sim P) = P$. Điều này không chỉ đúng cho hai ví dụ trên mà đúng cho mọi phán đoán. Thật vậy chúng ta có thể thấy kết qủa này trong bảng giá trị chân lý sau:

P	$\sim P$	$\sim(\sim P)$
Đ	S	Đ
S	Đ	S

Vậy, $\sim(\sim P) = P$ (*không phải không P bằng P*).

§2. HỘI VÀ TUYỂN CỦA CÁC PHÁN ĐOÁN .

2.1. Phép hội.

2.1.1. Phép hội và liên từ logic "và":

Hội của hai phán đoán *P; Q* là phán đoán *"P và Q"* có giá trị chân lý cho ở bảng sau:

P	Q	P và Q
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	S

Ký hiệu *" P và Q"* là $P \wedge Q$ hoặc *PQ*.

Ví dụ:

1) Hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$, *x* và *y* phải nhận giá trị đúng như vậy thì hệ mới thỏa được. Tất cả các trường hợp khác hệ không thỏa.

2) Cho hai phán đoán sau: P = "Tác giả của truyện Kiều là Nguyễn Du" (Đ); Q = "Tác giả của *Bình Ngô Đại Cáo* là Nguyễn Trãi" (Đ). Khi đó phán đoán hội là:

$P \wedge Q$ = "Tác giả của *Truyện Kiều* là Nguyễn Du *và* tác giả của *Bình Ngô Đại Cáo* là Nguyễn Trãi". Ta thấy phán đoán này đúng, vì P; Q đều đúng.

3) Xét hai phán đoán: A = "3<5" (Đ); B = "3>7" (S). Khi đó phán đoán hội là $A \wedge B$= "3 nhỏ hơn 5 và lớn hơn 7". Ta thấy phán đoán này sai, vì A đúng còn B sai.

2.1.2. Những liên từ khác có ý nghĩa của phép hội.

Trong ngôn ngữ tự nhiên phép hội được diễn đạt bởi một số từ như: *đồng thời, nhưng, mà, song, vẫn, cũng, còn…* thậm chí chỉ bằng *dấu phẩy*.

Ví dụ:

1) Tác giả của *Truyện Kiều* là Nguyễn Du *còn* của *Bình Ngô Đại Cáo* là Nguyễn Trãi.
2) *Tiếu ngạo giang hồ* là tác phẩm mà Kim Dung viết dài *nhưng* rất hay (tác phẩm này qúa dài và tác phẩm này rất hay)
3)

“ Áo chàng đỏ tựa ráng pha,
Ngựa chàng sắc trắng như là tuyết in”

(Chinh phụ ngâm)

(Áo chàng đỏ tựa ráng pha và ngựa chàng sắc trắng như là tuyết in)

4)

“ Vừa tài sắc lại nết na
Đồng thời hiếu với mẹ, cha sinh thành”

(Truyện Quan Âm Thị Kính)

2.2. Phép tuyển.

2.2.1. Phép tuyển và liên từ logic “hay”:

Tuyển của hai phán đoán *P; Q* là phán đoán *“P hay Q”* có giá trị chân lý cho ở bảng sau:

P	*Q*	*P hay Q*
Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
S	S	S

Ký hiệu *“ P hay Q”* là $P \vee Q$.

Ví dụ:

1) Phương trình $(x-2)(y-3)=0 \Leftrightarrow x=2 \vee y=3$. Chỉ cần x=2, hoặc y=3 thế vào phương trình vẫn nghiệm đúng. Nếu thế cả hai thì hiển nhiên. Trong trường hợp $x \neq 2$ và $y \neq 3$ thì không thể $(x-2)(y-3)=0$.
2) Cho hai phán đoán sau: P=“Hôm nay là ngày Chủ nhật”; Q=”Hôm nay là ngày lễ”. Khi đó phán đóan tuyển là:

$P \vee Q$=” Hôm nay là ngày Chủ nhật hay hôm nay là ngày lễ”.

Phán đoán này là đúng nếu có ít nhất một phán đoán P hoặc Q đúng. Tức là "Hôm nay là ngày Chủ nhật" là đúng, hoặc "Hôm nay là ngày lễ" là đúng, hoặc cả hai đều đúng. Phán đoán này là sai nếu cả hai phán đoán P và Q đều sai.

2.2.2. Những liên từ khác có ý nghĩa của phép tuyển trong ngôn ngữ tự nhiên.

Trong ngôn ngữ tự nhiên phép tuyển được diễn đạt bởi một số từ như: *hay, hay là, hoặc…* cũng có thể là *dấu phẩy*. Một số ví dụ minh họa cho điều này.

1) "Hôm nay là ngày Chủ nhật *hoặc* hôm nay là ngày lễ".
2) "Phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ có nghiệm $x = 1$ *hay* $x = 3$".
3) "Trong chuyến đi tham quan dài ngày tới đây chúng ta có thể đến những nơi sau: Vũng Tàu, Đà Lạt, Phan Thiết".

Từ *hay*, hoặc *hay là* ở trong ngôn ngữ tự nhiên thông thường ở dạng câu hỏi.

" Khúc đâu đầm ấm dương hòa,
Ấy là Hồ Điệp, *hay là* Trang Sinh?
Khúc đâu êm ái xuân tình
Ấy hồn Thục Đế, *hay* mình Đỗ Quyên? "
(Truyện Kiều, Nguyễn Du)

2.2.3. Phép tuyển chặt và liên từ logic "hoặc…hoặc":

Tuyển chặt của hai phán đoán *P; Q* là phán đoán *"hoặc P hoặc Q"* có giá trị chân lý cho ở bảng sau:

P	*Q*	*hoặc P hoặc Q*
Đ	Đ	S
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
S	S	S

Ký hiệu *"hoặc P hoặc Q"* là $P + Q$.

Ví dụ:

1) Nếu ta ký hiệu P = "Con cưới cô ấy"; Q="Con đi tu". Khi đó $P + Q$ =" Hoặc con cưới cô ấy, hoặc con đi tu".
2) Anh ấy 20 tuổi hay 21 tuổi.

Ta nhận thấy rằng *"hoặc con cưới cô ấy, hoặc con đi tu"*. Phán đoán này mà đúng thì con cưới cô ấy và con không đi tu, hoặc con không cưới cô ấy và con đi tu. Phán đoán này mà sai thì con vừa cưới cô ấy và con vừa đi tu, hoặc con không cưới cô ấy mà con cũng không đi tu.

Từ điều phân tích ở trên ta có ngay $P+Q=(P\wedge \sim Q)\vee(\sim P\wedge Q)$.

Để chứng minh kết qủa này chúng ta có thể lập bảng giá trị chân lý.

Ví dụ:

1) *"Tỷ lệ học sinh đậu tốt nghiệp phổ thông trung học năm 2008 là 76% hay* [(1)] *78%, muốn biết rõ có thể tìm trong báo tuổi trẻ hay* [(2)] *báo thanh niên."*

   Rõ ràng ở đây từ hay ở (1) tuyển chặt, từ hay ở (2) tuyển không chặt.

2) Phép tuyển chặt cũng được thể hiện bằng một dấu phẩy. Đoạn thơ sau đây trong truyện *Quan Âm Thị Kính* là một ví dụ:

" Nếu con thiệt có chuyện này,
Lòng trần rửa sạch, từ này xin chừa,[(*)]
Nếu không mà phải tiếng ngờ,
Cũng nên gắng gượng làm ngơ kẻo buồn."

Dấu phẩy ở ví trí dấu (*) có ý nghĩa của phép tuyển chặt hai phán đóan.

§3. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP HỘI VÀ PHÉP TUYỂN.

3.1. Tính giao hoán.

Trong ngôn ngữ tự nhiên nếu chúng ta nói " Bạn An học Văn và bạn An học Tóan" thì cũng có thể nói " Bạn An học Tóan và bạn An học Văn". Nếu nói "Hôm nay là ngày Chủ nhật hoặc là ngày lễ " thì cũng có thể nói "Hôm nay là ngày lễ hoặc là ngày Chủ nhật".

Tổng quát, phép hội và phép tuyển đều có tính giao hoán. Nghĩa là ta có các công thức sau:

$$P\vee Q=Q\vee P.$$
$$P\wedge Q=Q\wedge P.$$
$$P+Q=Q+P.$$

Trong logic học thì các công thức trên đúng cho mọi phán đoán. Để chứng minh các công thức này chúng ta chỉ cần lập bảng giá trị chân lý.

Trong ngôn ngữ tự nhiên hằng ngày $P\wedge Q$ và $Q\wedge P$ có khi nội dung khác nhau. Chẳng hạn hai câu sau:

" Mùa xuân đến và những bông hoa đua nở." (1)

"Những bông hoa đua nở và mùa xuân đến." (2)

Nội dung hai câu này là khác nhau. Câu (1) người nghe sẽ hiểu "Mùa xuân mang đến những bông hoa", còn phán đóan (2) người nghe sẽ hiểu "Những bông hoa mang theo mùa xuân".

3.2. Tính kết hợp.

Cho ba phán đóan tùy ý *P; Q; R* chúng ta có các công thức sau:

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R).$$
$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R).$$
$$(P + Q) + R = P + (Q + R).$$

Việc chứng minh các công thức chỉ cần lập bảng giá trị chân lý. Chúng ta chứng minh một công thức $(P+Q)+R = P+(Q+R)$. Tính đúng đắn của công thức chúng ta sẽ thấy trong bảng giá trị chân lý sau:

P	*Q*	*R*	*P+Q*	*Q+R*	$(P+Q)+R$	$P+(Q+R)$
Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ
Đ	Đ	S	S	Đ	S	S
Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	S
Đ	S	S	Đ	S	Đ	Đ
S	Đ	Đ	Đ	S	S	S
S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ
S	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ
S	S	S	S	S	S	S

Vì có các công thức ở trên nên chúng ta thường không phân biệt dấu ngoặc đơn trong các công thức. Do đó ta hiểu $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R) = P \wedge Q \wedge R.$

Trong ngôn ngữ tự nhiên nếu phải dùng đến hội của ba phán đóan (hoặc hơn nữa) thông thường chúng ta hiểu công thức $P \wedge Q \wedge R$. Khi đó chúng ta hiểu P; Q; R xảy ra cùng một lúc, hay xảy ra trên cùng một đối tượng.

"Tất Đạt từ lâu đã sớm dự phần trong các cuộc đàm luận của những bậc trí thức, thường tranh biện với Thiện Hữu và cùng với bạn suy tư quán tưởng."

(Câu chuyện dòng sông, Hermann Hesse).

3.3. Tính phân phối của phép hội và phép tuyển.

Cho ba phán đoán tùy ý *P; Q; R* chúng ta có công thức sau:

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) = PQ \vee PR$$

Việc chứng minh các công thức chỉ cần lập bảng giá trị chân lý. Chúng ta cũng có thể mở rộng công thức với nhiều phán đóan hơn nữa.

Ví dụ:

1) Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ (x-6)(x-8) \ge 0 \end{cases}$$

Hệ trên có thể viết dạng tương đương như sau:

$$\begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 8 \vee x \le 6 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x \ge 1) \wedge (x \ge 8 \vee x \le 6) \Leftrightarrow (x \ge 1 \wedge x \ge 8) \vee (x \ge 1 \wedge x \le 6)$.

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là $x \ge 8 \vee 1 \le x \le 6$.

2) *" Anh ấy đi học hay đi làm đều bằng xe đạp".*

Người nghe sẽ hiểu là: Anh ấy học bằng xe đạp, hoặc anh ấy đi làm cũng bằng xe đạp.

3) *"Mặt chàng thoáng những nét trầm tư mỗi lúc chàng dạo chơi trong khu vườn xoài khi nghe mẹ hát, trong những buổi học với cha, hay khi chuyện trò cùng người thức giả."*

(Câu chuyện dòng sông, Hermann Hesse).

Mở rộng ta có $(A \vee B) \wedge (C \vee D) = AC \vee AD \vee BC \vee BD$.

Chẳng hạn *"Buổi sáng các em đi tham quan ở A hoặc ở B, còn buổi chiều đi tham quan ở C hoặc ở D"*. Câu văn này có hình thức cấu trúc logic ở vế trái của công thức, nhưng người đọc (nghe) thường hiểu theo vế phải.

3.4. Tính lũy đẳng.

Với mọi phán đóan P ta ta dễ dàng chứng minh được:

$$P \wedge P = P,$$
$$P \vee P = P$$

Ví dụ:

1) *" Đây mùa thu tới, mùa thu tới " (Xuân Diệu).*

Dạng công thức $P \wedge P = P$.

2) " *Phận dầu, dầu vậy cũng dầu,"*
(Xót lòng đeo đẳng bấy lâu một lời)

(Truyện Kiều, Nguyễn Du).

Dạng công thức $P \wedge P \wedge P = P$.

3) Hình thức $P \vee P = P$ ta sẽ gặp trong ví dụ: *"Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm kép $x = 2$ "* là viết rút gọn của *"Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm $x = 2 \vee x = 2$ ".*

3.5. Các công thức De Morgan.

Cho hai phán đoán tùy ý *P; Q* chúng ta có các công thức sau:

$$\sim(P \vee Q) = \sim P \wedge \sim Q$$

$$\sim(P \wedge Q) = \sim P \vee \sim Q$$

Chứng minh các công thức ta lập bảng giá trị chân lý.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \wedge \sim Q$	$P \vee Q$	$\sim(P \vee Q)$
Đ	Đ	S	S	S	Đ	S
Đ	S	S	Đ	S	Đ	S
S	Đ	Đ	S	S	Đ	S
S	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ

Ví dụ:

1) Nếu chúng ta đã biết nghiệm phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0$ là $x = 1 \vee x = 4$. Khi đó những *x* làm cho biểu thức $x^2 - 5x + 4$ khác 0 sẽ là $x \neq 1 \wedge x \neq 4$.
2) *" Không phải An và Bình đã đậu môn Toán"* . Điều này có nghĩa là An *không đậu môn Toán hoặc Bình không đậu môn Toán.*
3) Cho biết $A = \{x \in R \ / \ x < 3 \vee x \geq 5\}$, và phần tử $y \notin A$. Vậy y có tính chất: $3 \leq y < 5$.

Bài tập:

1. Bạn hãy cho biết từ "*hoặc", "hay",* dấu phẩy hoặc là cụm từ *"hay là*" trong các phán đoán sau có ý nghĩa của phép tuyển hay phép tuyển chặt.

a) Nếu phạm luật giao thông bạn có thể bị giam xe *hoặc* bị phạt tiền.

b) Bạn không được điều khiển xe hơi, nếu bạn không có giấy phép *hoặc* bạn nhỏ hơn 18 tuổi.

c) Đến dự tiệc sinh nhật của tôi bạn có thể ngồi ở dãy bàn bên trái *hoặc* dãy bàn bên phải.

d) Bạn chỉ được chọn thăm A *hay* thăm B cho lần quay số may mắn này.

e) Chiến tranh có thể kéo dài 5 năm, 10 năm, 20 năm hoặc lâu hơn nữa...*(Hồ Chí Minh, dẫn theo Hoàng Chúng)*

2. Các từ "*và", "hay", "hoặc",* "*nhưng*" dấu *","* trong các phán đoán sau có ý nghĩa của phép logic gì?

a) Công nhân, viên chức khi về hưu, già yếu, bệnh tật hoặc mất sức lao động được hưởng quyền lợi bảo hiểm xã hội.

b) **“**Con người có thể bị tiêu diệt *nhưng* không thể bị khuất phục” *(Hemingway – Ông già và biển cả)*

c) “Con sông tiếp tục chảy về mục đích của nó…Tất cả những làn sóng và nước đều vội vã, khổ đau, đi về mục đích, chảy về nguồn thác, về biển, về đồng, về đại dương và khi mỗi mục đích đạt rồi lại tiếp theo một mục đích khác.” *(Hermann Hesse, Câu chuyện dòng sông).*

3. Trong truyện *Quan Âm Thị Kính*, lúc Kính Tâm (Bà Thị Kính) bị oan, Sư Ông khuyên:

“ Nếu con thiệt có chuyện này,
Lòng trần rửa sạch, từ này xin chừa,
Nếu không mà phải tiếng ngờ,
Cũng nên gắng gượng làm ngơ kẻo buồn.”

a) Cho biết dấu phẩy ở cuối câu thơ thứ hai có ý nghĩa của phép logic gì?

b) Viết lại phán đóan trên ở dạng công thức.

c) Chứng minh công thức viết ở phần b) không hằng đúng.

4. Cho Q; R là các phán đóan Q= “Hoa mai nở”; R= “Hoa đào nở”. Hãy diễn đạt các phán đóan cho bởi công thức sau thành câu văn.

a) $Q \vee R$. b) $Q \wedge R$. c) $\sim(P \vee Q)$ d) $\sim(P \wedge Q)$.

5. *(Dựa theo Hoàng Chúng)* Cho các phán đoán P = “Nó học đàn”, Q = “Nó học bơi”. Viết các phán đoán sau dưới dạng công thức:

a) Nó không học đàn mà cũng không học bơi.
b) Nó học đàn và học bơi.
c) Nó học đàn hoặc học bơi.
d) Nó không học đàn mà lại học bơi.
e) Không phải nó vừa học đàn, vừa học bơi.
f) Nó học ít nhất một trong hai môn.
g) Nó không học ít nhất một trong hai môn
h) Nó học một môn và chỉ một môn mà thôi.
i) Nó học nhiều nhất là một môn.
j) Nó không học nhiều nhất một môn.

6. Phủ định các phán đoán ở bài 5).

7. Dùng các công thức De Morgan, giải các hệ bất phương trình sau

a) $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \le 0 \\ (x-2)(x-4) \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x^2 - 7x + 3 \ge 0 \\ (x+2)(x^2-4) = 0 \end{cases}$

8. Ký hiệu Đ=1 là phán đoán hằng đúng, S=0 là phán đoán hằng sai. Chứng minh các công thức sau:

a) $P \wedge 1 = P$. b) $P \vee 1 = 1$. c) $P \wedge 0 = 0$.

d) $P \vee 0 = P$. e) $P + 1 = \sim P$. f) $P + 0 = P$.

9. Có ba thầy giáo tên là Tóan, Lý, Hóa dạy ba môn khác nhau là Tóan, Lý, Hóa. Thầy giáo dạy môn Hóa nói rằng: *"Chúng ta dạy các môn trùng tên với chúng ta, nhưng không có ai dạy môn trùng với tên chính mình"*. Thầy giáo có tên là Tóan nói: *"Anh nói đúng"*. Dùng các công thức logic hãy cho biết môn dạy của từng thầy giáo.

10. Có năm bạn An, Bái, Can, Dần, Yến quê ở năm địa phương khác nhau. Với câu hỏi: *"Quê các bạn ở đâu?"*, ta nhận được các câu trả lời:

Bạn An: *"Quê tôi ở Hà nội, còn quê Dần ở Nghệ An"*.

Bạn Bái: *"Quê tôi ở Hà nội, còn quê Can ở Sông bé"*.

Bạn Can: *"Quê tôi ở Hà nội, còn quê Dần ở Quảng nam"*.

Bạn Dần: *"Quê tôi ở Nghệ an, còn quê Yến ở Phú thọ"*.

Bạn Yến: *"Quê tôi ở Phú thọ, quê An ở Quảng nam"*.

Biết các câu trên đều là các phán đúng. Hãy xác định quê của từng bạn.

11. Một trong năm anh em đánh vỡ kính cửa sổ.

Chỉ có thể hoặc là Bảo, hoặc là Tuấn. An nói.

Tôi không đánh vỡ. Bảo cãi lại, *và cả Khôi cũng thế.*

Cả hai đều nói không đúng. Tuấn nói.

Không! Tuấn ạ, một người nói đúng, một người nói sai. Đức tiếp lời.

Đức nói không đúng. Khôi can thiệp.

Ba (Bố) của các em (hiển nhiên ta có thể tin tưởng được) tin chắc rằng ba em (trong số năm em) đã nói đúng. Hỏi ai đã đánh vỡ kính cửa sổ?

§4. PHÉP KÉO THEO.

4.1. Phép kéo theo và liên từ logic *" nếu … thì"*.

Cho hai phán đoán P; Q. Phép kéo theo của hai phán đoán, theo thứ tự P; Q là một phán đoán *" Nếu P thì Q"* có giá trị chân lý cho ở bảng sau

P	Q	*Nếu P thì Q*
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	Đ
S	S	Đ

Ký hiệu của phán đoán *" Nếu P thì Q"* là $P \Rightarrow Q$ hay $P \to Q$.

Ví dụ:

1) Đặt P = "có lửa" và Q = "có khói". Khi đó phán đoán $P \Rightarrow Q$ = *" Nếu P thì Q"* là: " Nếu có lửa thì có khói".
2) Nếu có dấu chân trên cát thì có người đi qua.

3) Cho $P =$ "$\sqrt{3^2} = \sqrt{(-3)^2}$" (Đ) và $Q =$ "$3 = -3$" (S). Khi đó $P \Rightarrow Q$ là phán đoán sai.

Trong phán đoán $P \Rightarrow Q$ =*" Nếu P thì Q"*, P được gọi là tiền đề còn Q được gọi là hậu đề.

Phán đoán kéo theo không giống như phép hội hay phép tuyển của hai phán đoán, phép kéo theo không có tính giao hóan. Chẳng hạn ta xét phán đoán *"nếu Trời mưa thì đường phố ướt"*. Ta thấy nếu có Trời mưa thì hiển nhiên là đường phố ướt. Nhưng phán đoán *"nếu đường phố ướt thì Trời mưa"* không phải lúc nào cũng đúng. Nghĩa là

$$P \Rightarrow Q \neq Q \Rightarrow P.$$

4.2. Phán đóan đảo.

Phán đóan *"nếu Q thì P"* được gọi là phán đóan đảo của phán đóan *"nếu P thì Q"*

Ví dụ:

1) *P="Tứ giác ABCD là hình thang cân"; Q="Tứ giác ABCD có hai đường chéo bằng nhau"*. Khi đó phán đoán $P \Rightarrow Q$ là "*Nếu tứ giác ABCD là hình thang cân thì tứ giác ABCD có hai đường chéo bằng nhau"*. Phán đoán đảo $Q \Rightarrow P$ là "*Nếu tứ giác ABCD có hai đường chéo bằng nhau thì tứ giác ABCD là hình thang cân".* Trong trường hợp này không phải lúc nào cả hai phán đoán cũng đều đúng. Hiển nhiên.
2) *P="Hàm số f có đạo hàm tại x=a"; Q=" Hàm số f liên tục tại x=a"*. Khi đó phán đoán $P \Rightarrow Q$ là *"Nếu hàm số f có đạo hàm tại x=a thì f liên tục tại x=a"*. Phán đoán này đúng. Phán đoán đảo $Q \Rightarrow P$ là "*Nếu f liên tục tại x=a thì f có đạo hàm tại x=a".* Phán đoán này sai.

Trong ngôn ngữ tự nhiên câu nói *"Nếu có dấu chân trên bãi biển thì đã có người đi qua đây"* là đúng. Còn câu nói *"Nếu có người đi qua bãi biển này thì phải để lại dấu chân"* không phải lúc nào cũng đúng. Nhưng nếu nói *"Nếu không có người đi qua trên bãi biển này thì không có dấu chân để lại"* là hòan tòan đúng.

4.3. Phán đóan phản đảo.

Phán đóan *"nếu không Q thì không P"* được gọi là phán đóan phản đảo của phán đóan *"nếu P thì Q"* .

Hơn nữa ta có công thức sau: $P \Rightarrow Q = \sim Q \Rightarrow \sim P$.

Ví dụ:

1) *"Nếu hàm số f có đạo hàm tại x=a thì f liên tục tại x=a"* là tương đương logic với "*Nếu f không liên tục tại x=a thì f không có đạo hàm tại x=a*".
2) "*Không hiệp ý thì đã chẳng đến đây; đã đến đây tức là không ai không hiệp ý*"

   (Hoàng Lê Nhất Thống Chí, dẫn theo Hoàng Chúng, tr 61)
3) *"Nếu giặc đánh như vũ bảo thì không đáng sợ, đáng sợ là giặc gặm nhấm như tằm ăn dâu."*

   (Trần Hưng Đạo, dẫn theo Ngữ văn lớp 8, tập 1, tr 119).

4.4. Những liên từ khác có ý nghĩa của phép kéo theo trong ngôn ngữ tự nhiên.

Theo GS. Hòang Phê, trong ngôn ngữ tự nhiên phán đóan *"nếu P thì Q"* có nhiều cách phát biểu khác như sau:

Nếu như P thì Q; Nếu mà P thì Q; Nếu qủa P thì Q; Giả dụ P thì Q; Giá như P thì Q; Giá mà P thì Q; Hễ P thì Q; Hễ mà P thì Q; Hễ cứ P thì Q; Nhược bằng P thì Q; (mà) P thì Q; Đã P là Q; P thì Q; P là Q; P, thành thử Q; P, cho nên Q; P, nên chi Q; Q, nếu như P; Q, nếu qủa P; Q trừ phi không P; v.v…

(Dựa theo Hòang Phê, Tuyển tập ngôn ngữ học, tr 152)

Hoặc: *Khi có P thì có Q; Có Q khi có P; Vì có P nên có Q; Có Q vì có P; Do có P mà có Q; Nhờ có P nên có Q; Có Q nhờ có P; Đã P thì Q…*

Hoặc những dạng giả định: *Phải chi có P để mà có Q; Bao giờ có P để mà có Q; Ước gì có P để cho có Q…*

Ví dụ:

1) P thì Q :

"Ở ăn, thì nết cũng hay,
Nói điều ràng buộc, thì tay cũng già "

(Truyện Kiều, Nguyễn Du) .

2) P là Q:

"Hay nói ầm ĩ, là con vịt bầu. Hay hỏi đâu đâu, là con chó vện…"

(Trần Đăng Khoa)

3) Vì có P nên có Q:

"Vì tằm em phải chạy dâu,
Vì chồng em phải qua cầu gió bay."

(Ca dao)

4) Hễ P thì Q:

"Hễ còn một tên xâm lược trên đất nước ta, thì ta phải tiếp tục chiến đấu, quét sạch nó đi." (Dẫn theo Hòang Chúng, tr 41)

5) Có Q khi có P:

"Người dừng bước đường du khất để ngồi bên tôi khi tôi ngủ thiếp trong rừng."

(Câu chuyện dòng sông, tr 208)

6) Phải chi có P để mà có Q:

"Phải chi ngòai biển có cầu,
Để anh ra đó giải đoạn sầu cho em"

(Ca dao)

7) Bao giờ có P để mà có Q:

"Bao giờ cho mía trổ bông,
Cho chị có chồng em gặm giò heo"

(Ca dao)

8) Ước gì có P để cho có Q:

"Ước gì gần gũi tấc gang,
Giải niềm cay đắng để chàng tỏ hay"
(Chinh phụ ngâm)

9) Q trừ phi không P:

"Chiều nay tôi sẽ đến thăm anh, trừ phi Trời mưa" = "Nếu Trời không mưa thì tôi đến thăm anh".

"Bệnh này không thể qua khỏi, trừ phi có thuốc tiên" = "Nếu không có thuốc tiên thì bịnh này không thể qua khỏi".

Tuần sau tôi sẽ ra khơi, trừ phi trời mưa bão.

Trừ phi có thiên tai, năm nay chắc chắn được mùa.

Hắn sẽ vượt qua được cửa thành, trừ phi hắn bị phế hết võ công.

4.5. Mối liên hệ của phép kéo theo và phép tuyển.

$$\sim P \Rightarrow Q = P \vee Q.$$

Trong ngôn ngữ hằng ngày có rất nhiều câu nói (viết) mà người nghe (đọc) đã dùng công thức ở trên. Chẳng hạn, câu ca dao sau:

"Số cô không giàu thì nghèo.

...

Sinh con đầu lòng chẳng gái thì trai"

Hình thức logíc của câu ca dao là công thức $\sim P \Rightarrow Q$, nhưng người nghe (đọc) thường hiểu là theo cấu trúc logíc $P \vee Q$. Tức là hiểu "*số cô giàu hoặc nghèo*"; "*sinh con đầu lòng là con gái hoặc con trai*".

"Học hỏi hay là để không hiểu biết". Hình thức logíc của câu văn này là $P \vee Q$. Tuy nhiên người đọc sẽ hiểu "*Nếu không học hỏi thì không hiểu biết*", tức là hiểu theo hình thức logíc $\sim P \Rightarrow Q$.

4.6. Phép tương đương.

Cho hai phán đóan P; Q. Phép tương đương của hai phán đóan P; Q là phán đóan *"Nếu P thì Q và nếu Q thì P"*.

Ký hiệu của phán đóan *"Nếu P thì Q và nếu Q thì P"* là $P \Leftrightarrow Q$, và đọc là *" P tương đương Q"*. Theo định nghĩa, rõ ràng ta có:

$$P \Leftrightarrow Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

Từ đó ta có $P \Leftrightarrow Q$ chỉ đúng khi P; Q có cùng giá trị chân lý, và sai khi P; Q khác giá trị chân lý.

Ví dụ:

P="Tứ giác ABCD là hình chữ nhật"; Q="Tứ giác ABCD là hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau". Khi đó phán đóan $P \Leftrightarrow Q$ là: *"Tứ giác ABCD là hình chữ nhật tương đương tứ giác ABCD là hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau"*.

4.7. Điều kiện đủ. Điều kiện cần. Điều kiện cần và đủ.

Xét phán đóan $P \Rightarrow Q$. Khi đó ta nói:

" P là điều kiện đủ để có Q" và, *" Q là điều kiện cần để có P"*.

Hay *"Muốn có Q thì có P là đủ"*. P là điều kiện đủ để có Q, nhưng đó không phải là điều kiện duy nhất để có Q. Chẳng hạn để có $x \neq 7$ có thể từ $x-7 \neq 0$ hoặc $(x-7)^2 > 0$ vẫn rút ra được $x \neq 7$.

"Q là điều kiện cần để có P" hay Q là chứng tỏ để có P. Bởi vì không có Q thì đã không có P rồi ($P \Rightarrow Q = \sim Q \Rightarrow \sim P$).

Từ công thức $P \Leftrightarrow Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$, chúng ta có thể phát biểu rằng: Nếu $P \Leftrightarrow Q$ thì P điều kiện đủ và cũng điều kiện cần để có Q hay ngược lại.

" P tương đương Q" thì P là điều kiện cần và đủ để có Q, và Q cũng là điều kiện cần và đủ để có P.

Điều kiện cần và đủ được dùng nhiều nhất trong các định lý Tóan học. Sau đây là một số liên từ logic có ý nghĩa của liên từ điều kiện cần, điều kiện đủ.

$P \Rightarrow Q$:

P là điều kiện đủ để có Q; Q là điều kiện cần để có P.

P là điều kiện đủ để có Q; Q là điều kiện ***ắt có*** *để có P.*

Chỉ cần có P là có Q; Muốn có P thì cần có Q.

Có Q khi có P; Có P chỉ khi có Q.

Có Q nếu có P; Có P chỉ nếu có Q.

$P \Leftrightarrow Q$:

P là điều kiện cần và đủ để có Q; Q là điều kiện cần và đủ để có P.

Có P khi và chỉ khi có Q; Có Q khi và chỉ khi có P.

Có P nếu và chỉ nếu có Q; Có Q nếu và chỉ nếu có P.

Ví dụ:

1) *"Để được điều khiển xe hơi điều kiện đủ là bạn phải được cấp giấy phép lái xe."*.
2) *"Hàm số f có đạo hàm tại x=a điều kiện cần là f liên tục tại x=a."*.
3) "*Tam giác ABC vuông tại A cần và đủ là* $BC^2 = BA^2 + AC^2$ *"*. Lúc này chúng ta sẽ hiểu là: *"Nếu tam giác ABC vuông tại A thì* $BC^2 = BA^2 + AC^2$*, và ngược lại nếu tam giác ABC có ba cạnh thỏa* $BC^2 = BA^2 + AC^2$ *thì tam giác ABC vuông tại A."*.
4) *"Muốn thắng ở mặt trận này ắt phải có chuẩn bị kế hoạch"*

(Hồ Chí Minh, dẫn theo Hoàng Chúng, tr 45)

Tuy nhiên trong những định nghĩa dạng *"P nếu Q"* chúng ta phải hiểu hai chiều. Có P là có Q và ngược lại có Q là có P. Chẳng hạn:

"Số thực a được gọi là giới hạn của dãy số a_n *khi* $n \to +\infty$ *nếu: Với mọi số dương* ε*, ta luôn tìm được số nguyên dương đủ lớn N, sao cho với mọi n không nhỏ hơn N thì ta có:* $|a_n - a| < \varepsilon$ *."*

Thông thường các điều luật *"P nếu Q"* chúng ta phải hiểu hai chiều. Có P là có Q và ngược lại có Q là có P. Chẳng hạn:

*"Sinh viên được xem là hòan thành môn Logic học **nếu** điểm ba bài kiểm tra không có bài nào dưới 5 điểm".*

*"Giải pháp kĩ thuật được công nhận là mới **nếu** trước ngày nộp đơn đăng kí sáng chế, giải pháp đó hoặc các giải pháp tương tự chưa được bọc lộ công khai ở trong và ngòai nước dưới mọi hình thức đến mức căn cứ vào đó có thể thực hiện được."*

(Nghị định của Chính Phủ; 31/CP ngày 23.1.1981, dẫn theo Hòang Chúng, tr 44)

Bài tập.

1. Viết các phán đóan sau đây dưới dạng *"nếu…thì"*.

a) Trời sẽ trong xanh khi Mùa Thu về.
b) Cần học ít nhất năm tuần nữa mới kết thúc môn học này.
c) Để đi từ TP. Hồ Chí Minh đến Hà Nội trong khỏang 3 giờ đồng hồ cần phải đi bằng máy bay.
d) Bạn sẽ học tốt môn Tóan nếu bạn có kiến thức về môn Logic.
e) Tôi sẽ đi dự sinh nhật của bạn trừ phi ngày đó trùng với ngày thi môn Logic.
f) "Bởi chưng bác mẹ tôi nghèo, cho nên tôi phải băm bèo thái khoai." (Ca dao)
g) "Bao giờ rau diếp làm đình, gỗ lim thái mén thì mình lấy ta." (Ca dao)
h) Nên thợ, nên thầy vì lo học,
i) No ăn, no mặc bởi hay làm. (Nguyễn Trãi)
j) Lý luận sẽ trở thành lực lượng vật chất một khi nó thâm nhập được vào quần chúng (K. Marx).

2. Viết các phán đóan ở bài **1** dưới dạng *"nếu không …thì không",* tức là dạng phản đảo.

3. Viết phán đóan đảo của các phán đóan sau. Cho biết giá trị chân lý của các phán đóan thuận và đảo trong các câu a); b); c).

a) Nếu $\sqrt{x^2} = x$ thì x không âm.
b) Nế n lớn hơn 3 thì n^2 lớn hơn 9.
c) Nếu anh thi môn Tóan được 9 điểm thì anh đã đậu.
d) Gần đèn thì rạng.

4. a) Chứng minh công thức: $\sim(P \Rightarrow Q) = P \wedge \sim Q$.

b) Phủ định phán đoán: *"Nếu ông ấy phạm tội thì ông ấy bị phạt tù"*.
c) Phủ định phán đoán: *"Chiều nay tôi sẽ đến thăm anh trừ phi Trời mưa"*.
d) Phủ định phán đoán: *"Số cô không giàu thì nghèo" (Ca dao).*

5. a) Chứng minh dãy công thức: $\sim P \Rightarrow Q = P \vee Q = \sim Q \Rightarrow P = \sim(\sim P \wedge \sim Q)$.

b) Viết phán đoán: *"Chúng ta tiến lên hay là chúng ta chết"* thành những phán đoán tương đương.

§5. MỘT SỐ QUY LUẬT LOGIC.

Trong bài này, chúng ta sẽ giới thiệu một số quy luật của Logic học. Các quy luật này cũng gọi là quy luật của tư duy. Đó là quy luật đồng nhất, quy luật cấm mâu thuẫn, quy luật bài trung, quy luật nhân qủa.

5.1. Quy luật đồng nhất.

Quy luật: *Mọi vật là chính nó mà không phải là vật khác.*

Công thức của quy luật này là $a = a$.

Trong logic lưỡng trị nguyên lý trên được hiểu là mỗi sự vật, mỗi khái niệm,…trong một điều kiện, một khoảng thời gian nào đó phải được hiểu một cách nhất quán. Quy luật này con người đã biết từ rất sớm. Trang Tử (369-286, tr. CN) đã thể hiện quy luật này trong Nam Hoa Kinh như sau:

"Lấy ngón tay mà thí dụ rằng ngón tay không phải là ngón tay, sao bằng lấy cái không phải là ngón tay để mà thí dụ.

Lấy con ngựa mà thí dụ rằng con ngựa không phải là con ngựa, sao bằng lấy cái không phải là con ngựa để mà thí dụ.".

(Dựa theo Trang Tử, Nam Hoa Kinh. Bản dịch của Thu Giang Nguyễn Duy Cần)

Trong Tóan học quy luật này chính là quy luật bắc cầu: "Nếu $a = b$ và $a = c$ thì $b = c$".

Một số trường hợp vi phạm luật đồng nhất.

Nếu khái niệm ban đầu không được hiểu một cách nhất quán có thể dẫn đến sai lầm rất lớn về sau. Khi một khái niệm được hiểu theo hai nghĩa khác nhau, người ta gọi là đã *đánh tráo khái niệm*. Một khi khái niệm bị đánh tráo có thể dẫn đến nhiều chuyện khó lường.

Chẳng hạn khi nói về Lục Vân Tiên, Nguyễn Đình Chiểu viết: *"Tuổi vừa hai tám nghề chuyên học hành"*. Câu: *"tuổi vừa hai tám"*, nếu người đọc câu này ở quan điểm hiện nay có thể sẽ hiểu là hai mươi tám (28) tuổi. Tuy nhiên câu thơ này thường được hiểu: *"hai tám"* là hai lần tám tức mười sáu (16) tuổi.

Dầu một cây không bán.

Đây là một câu chuyện có thật đã từng xảy ra ở tỉnh Quảng Nam vào khoảng năm 1945, theo lời truyền miệng của dân gian.

Ông A (tên chúng tôi tự đặt vì không nhớ rõ) là người có học và được nhiều người trong làng vị nể, Ông B là người dân lương thiện. Cả hai Ông đều ở chung một làng. Ông A bán đất cho Ông B.

Ông A nói với Ông B:

"Vợ chồng tôi rất thích ăn muối dầu lai mà trong vườn chỉ có một cây dầu, bán đất cho anh thì tôi không có muối dầu ăn nữa, thật tiếc!".

Ông B vốn người dân dã chất phác:

"Có chi mô! Anh cứ để lại cây dầu, coi như là không bán" .

Tuy nhiên khi viết Giấy bán đất thì Ông A viết là: *"Tất cả mọi vật trong vườn đều bán hết, nhưng dầu một cây cũng không bán".* Khi đọc lên cho Ông B nghe, vốn là người chất phác Ông B hiểu :*"dầu một cây cũng không bán"* chính là cây dầu lai không bán như đã nói. Giấy được viết bằng hai tờ giống nhau, mỗi Ông giữ một tờ.

Chuyện xảy ra êm xuôi, Ông B giao tiền cho Ông A, Ông B quản lý đất đai chăm sóc cây trái trong vườn, cho đến mùa thu hoạch. Cụ thể là đến mùa thu hoạch cau, Ông B đến bẻ cau (hái cau), Ông A không cho hái cau. Ông A cho rằng, Ông chỉ bán đất mà không bán cây ăn trái. Điều này đã được ghi rõ trong Giấy bán đất**:** "*dầu một cây cũng không bán"*, nghĩa là không có cây nào bán hết.

Sự việc phải trình lên Làng giải quyết. Làng căn cứ vào Giấy bán đất mà hai Ông đang giữ, xử cho Ông A thắng kiện. Ông B phải đưa thêm một số tiền nữa mới được toàn quyền sử dụng đất.

Như vậy ở đây khái niệm *"dầu một cây cũng không bán"* lúc đầu hiểu là *"một cây dầu lai không bán"*, lúc sau hiểu là *"không có cây nào bán hết"*. Thật là tai hại.

Nhưng cũng có khi khái niệm bị đánh tráo rất tinh vi mà không dễ nhận ra ngay. Trong sách Logic học của GS. Nguyễn Đức Dân có dẫn một câu chuyện như sau.

Có một người tên là Evat xin đến học phép ngụy biện ở Protago. Thầy và trò đã quy định rằng trò sẽ trả học phí làm hai lần, và lần thứ hai sẽ trả sau khi Evat ra tòa lần đầu tiên và được kiện. Học xong, Evat không ra tòa lần nào cả. Vì vậy Protago quyết định khởi kiện Evat. Ông nói với Evat rằng:

Dù tòa án có quy định anh không phải trả tiền cho tôi hay phải trả tiền cho tôi, thì anh vẫn phải trả cho tôi. Này nhé, nếu anh được kiện thì theo quy định giữa chúng ta, anh sẽ phải trả tiền cho tôi; còn như anh thua kiện, thì theo quy định của tòa anh phải trả tiền cho tôi.

Evat, người học trò đã học được phép ngụy biện, đáp:

Thưa thầy, trong cả hai trường hợp tôi đều không phải trả tiền cho thầy. Vì rằng nếu tòa bắt trả, nghĩa là tôi thua kiện lần đầu, thì theo quy định với thầy, tôi không phải trả; còn như tôi được kiện, thì theo quy định của tòa tất nhiên tôi không phải trả.

Ở đây anh học trò Evat đã đánh tráo khái niệm. Bạn đọc thử nghĩ xem khái niệm nào đã bị đánh tráo.

5.2. Quy luật cấm mâu thuẫn.

Quy luật: *Trong cùng một quan hệ và cùng một lúc, một đối tượng không thể vừa là A vừa là không A.*

Nói cách khác mệnh đề $P \wedge \sim P$ hằng sai.

Quy luật đã rõ ràng. Trong cùng một lập luận nếu chúng ta đã công nhận mệnh đề P thì không được công nhận mệnh đề phủ định của P. Nếu vi phạm điều này thì đã phạm luật cấm mâu thuẫn.

Từ mâu thuẫn có nguồn gốc từ câu chuyện *"bán mộc bán giáo"* được chép trong sách Cổ Học Tinh Hoa.

Có người nước Sở vừa bán mộc vừa bán giáo. Khi rao bán mộc thì anh ta rao: *"Mộc này thật chắc không gì đâm thủng"*. Đến khi bán giáo thì anh ta lại rao: *"Giáo này thật sắc cái gì nó đâm cũng thủng"*.

Có người đi đường nghe vậy bèn hỏi: *"Nếu lấy cái giáo của ông đâm vào mộc của ông thì thế nào?"*. Anh ta không đáp được.

Anh ta không đáp được vì đã phạm luật cấm mâu thuẫn. Ở đây anh đã công nhận mệnh đề P=*"Mộc này thật chắc không gì đâm thủng"*. Nghĩa là mộc này thật chắc mọi cái giáo đều đâm không thủng, kể cả cái giáo của anh ta. Trong khi đó anh ta lại công nhận mệnh đề *"Giáo này thật sắc cái gì nó đâm cũng thủng"*. Điều này có nghĩa là cái mộc ở trên, giáo này đâm cũng thủng. Tức là đã công nhận mệnh đề $\sim P$.

Mộc là vật để chống đỡ, gọi là ***thuẫn.*** Giáo là vật dùng để đâm, gọi là ***mâu.***

Chỉ có một mình tao là không nói tiếng nào!

Khoảng thế kỷ XVII, Thiền được truyền vào Nhật bản và được phổ biến trong mọi tầng lớp dân chúng. Tại một trường học Thiền vẫn được dạy cho một số học sinh. Hôm ấy là ngày có bốn học sinh thực hành Thiền. Họ quy định với nhau rằng: sẽ không nói tiếng nào cả và thời gian kéo dài 7 ngày.

Việc im lặng như vậy trôi qua thật dễ dàng suốt ngày đầu cho đến chiều tối. Khi Trời tối một Thiền sinh hộ tịnh thắp lên một ngọn nến giúp họ. Một ngọn gió thổi vào căn phòng làm cho ngọn nến sắp tắt. Thiền sinh thứ nhất không giữ được bình tỉnh buộc miệng nói: *"Hãy giữ ngọn nến đó lại!"*.

Thiền sinh thứ hai nghe vậy liền nhắc: *"Chúng ta đang tịnh khẩu 7 ngày mà!"*.

Thiền sinh thứ ba thắc mắc hỏi: *"Tại sao chúng mày lại nói?"*.

Cuối cùng Thiền sinh thứ tư kết luận: *"Chỉ có mình tao là người không nói tiếng nào"*.

Thiền sinh thứ tư này đã phạm luật cấm mâu thuẫn.

(Dựa theo Góp nhặt cát đá, Tsai Chih Chung, Phạm Cao Hoàn dịch, tr. 28)

5.3. Quy luật bài trung.

Quy luật: *Trong cùng một quan hệ và cùng một lúc, một đối tượng chỉ có thể là A hoặc không là A chứ không có khả năng nào khác.*

Nói cách khác mệnh đề $P \vee \sim P$ hằng đúng.

Trong Toán học mà phần lớn chúng ta đang sử dụng hiện nay, công thức này là hết sức quan trọng. Đến nỗi nhà Toán học người Đức là Hilbert đã nói rằng: "*Lấy đi luật bài trung ở nhà Toán học không khác gì lấy mất kính thiên văn của nhà Thiên văn học, hoặc cấm võ sĩ quyền anh dùng nắm đấm.*" (Dẫn theo Logic học của GS Nguyễn Đức Dân). Điều này hoàn toàn đúng. Chúng ta có thể xét một vài ví dụ sau.

Trong mặt phẳng khi xét hai đường thẳng phân biệt a; b, người ta chỉ xét hai khả năng là: a song song b hoặc a cắt b. Đây chính là mệnh đề P hay $\sim P$, không có trường hợp nào khác.

Trong không gian khi xét hai đường thẳng phân biệt a; b, người ta cũng chỉ xét hai khả năng là: a đồng phẳng với b (tức là a và b cùng nằm trong một mặt phẳng), hay a không đồng phẳng với b. Đây chính là mệnh đề P hay $\sim P$, không có trường hợp nào khác. (Chú ý khi hai đường thẳng nằm trong một mặt phẳng ta quay lại trường hợp trên)

Khi xét một phần tử x và một tập hợp A cũng chỉ có hai khả năng $x \in A$ hay $x \notin A$. Khi xét một phương trình $f(x)=0$ cũng có hai khả năng là phương trình có nghiệm hay phương trình vô nghiệm…

Trong cuộc sống một số sự kiện sau là tuân theo Logic lưỡng trị, tất nhiên phải tuân theo luật bài trung. Bóng đèn có hai khả năng sáng hoặc tối. Dòng điện có hoặc không có…. Như vậy những sự kiện nếu xét nhiều khả năng là không tuân theo luật bài trung. Bóng đèn lúc tỏ lúc mờ. Dòng điện lúc mạnh lúc yếu….

Câu ca dao nói về tình yêu đôi lứa sau đây bị chi phối bởi luật bài trung:

"Có yêu, thì yêu cho chắc,
Bằng như trúc trắc, thì trục trặc cho luôn".

5.4. Quy luật có lý do đầy đủ (Quy luật này do nhà Toán học Leibniz đưa ra)

Quy luật: *Mọi vật tồn tại đều có lý do để tồn tại.*

Chẳng hạn môn Logic được học hôm nay là có lý do của nó. Đây là một lý do: người soạn chương trình muốn người học phải chính xác trong lập luận và suy nghỉ.

Trái táo rơi xuống đất là có lý do của nó. Lý do là nó đã chín mồi, cuốn của trái không thể bám vào cành và nhờ lực hút của Trái đất.

Có thể nói, quy luật có lý do đầy đủ là trường hợp riêng của quy luật Nhân qủa trong Triết học Phật giáo.

Cách đây trên 2500 năm, Đức Phật Thích Ca Mâu Ni nói rằng: mọi sự vật hiện tượng trong thế giới đều do ***nhân*** và ***duyên*** mà hình thành. Cái ***nhân*** nhờ cái ***duyên*** sinh ra làm ***qủa.*** Qủa này đóng vai trò là ***nhân*** nhờ ***duyên*** mới sinh ra ***qủa*** mới, cứ thế tiếp nối nhau mãi. Có thể nhìn vào ví dụ bằng sơ đồ sau:

…CÂY LÚA ....→ .... HẠT LÚA............→…………CÂY LÚA…
(Nhân) (Nhờ nước; phân cây lúa trổ bông) (Qủa) (Rơi xuống đất) (Qủa)

Qua ví dụ trên ta thấy Cây lúa đóng vai trò Nhân, nhờ có duyên là gặp nước phân… mà trổ bông kết hạt lúa gọi là qủa. Qủa này đóng vai trò là ***nhân*** mới, nhờ có ***duyên*** được rơi xuống đất mọc thành cây lúa mới, gọi là qủa…Qúa trình này không gián đọan, và ở đó ta không tìm được nhân ban đầu và qủa cuối cùng. Quá trình nối tiếp nhau xoay vòng như vậy Đức Phật gọi là luân hồi:

"Luật Nhân qủa rõ ràng lời Phật
Kiếp luân hồi quay vật vòng xa".

Với một vài nét trình bày ở trên chúng ta có thể thấy quy luật có lý do đầy đủ của Leibnitz là một phần nhỏ của luật Nhân qủa.

Qua một số phần trình bày ở chuơng 3, chúng ta thấy rằng xuất phát từ quy luật đồng nhất $a = a$ mà ai cũng thấy đúng, sẽ suy ra được luật cấm mâu thuẫn và phủ định luật cấm mâu thuẫn chính là luật bài trung.

CHƯƠNG 2. LOGIC VỊ TỪ.

§1. HÀM PHÁN ĐOÁN. PHÁN ĐÓAN PHỔ BIẾN. PHÁN ĐOÁN TỒN TẠI.

1.1. Hàm phán đoán.

1.1.1. Một số ví dụ mở đầu.

Gọi S=N là tập hợp các số tự nhiên, gọi n là một số nào đó thuộc tập S=N. Xét câu: *n là số nguyên tố.*

Ta ký hiệu câu này là *P(n)*. P(n) không phải là một phán đóan, vì chúng ta không biết được tính đúng hay sai của câu đó.

Nếu ta thay n=5, thì ta được P(5)="5 *là số nguyên tố".* Đây là một phán đóan đúng.

Nếu ta thay n=4, thì ta được P(4)="4 *là số nguyên tố".* Đây là một phán đóan sai.

Gọi S là tập hợp những người Việt Nam, và gọi *x* là một người Việt Nam nào đó. Xét câu: *x là nhà thơ.*

Cũng như trên ta ký hiệu câu này là *P(x). P(x)* không phải là một phán đóan.

Nếu ta thay *x* bởi Ông Nguyễn Du, thì ta được P(Nguyễn Du) *=" Nguyễn Du là nhà thơ".* Đây là một phán đóan đúng.

Nếu ta thay *x* bởi Bà Phùng Há, thì ta được P(Phùng Há) =" *Phùng Há là nhà thơ".* Đây là một phán đóan sai, vì Bà Phùng Há là một nghệ sĩ cải lương.

Qua một số ví dụ ở trên, ta thấy trong thực tế có những câu mà tính đúng hay sai của câu ta chỉ xác định được trong các trường hợp cụ thể.

1.1.2. Biến, Hằng của tập hợp.

Khi chúng ta xét một tập hợp S nào đó, chẳng hạn tập hợp các số tự nhiên, tập hợp những người da vàng, tập hợp những người làm nghề dạy học…. Khi ta gọi chung chung một phần tử nào đó của S, phần tử đó sẽ hiểu là một *biến*. Nếu gọi cụ thể một phần tử của S thì phần tử đó được hiểu là một *hằng.*

Ví dụ:

Gọi S là tập hợp những nhà thơ (người làm thơ) của Việt Nam.

Xét một người nào đó thuộc S, thì "*người nào đó"* là một biến. Thông thường chúng ta hay ký hiệu bằng chữ *x,y,z,…*

Ông Xuân Diệu là một người nằm trong tập S. Ông Xuân Diệu là một hằng.

Nếu *x* là phần tử của S, chúng ta ký hiệu $x \in S$. Nếu *x* không là phần tử của S, chúng ta ký hiệu $x \notin S$. Vậy Ông Xuân Diệu $\in S$, còn như Bà Phùng Há thì không thuộc S. Bà Phùng Há $\notin S$.

1.1.3. Thế nào là một hàm phán đoán?

Ta gọi một hàm phán đoán xác định trên tập S là một câu có chứa biến, và câu này trở thành phán đoán khi ta thay biến đó bởi một hằng cụ thể trong S.

Ký hiệu hàm phán đoán là $P(x), x \in S$.

Hai ví dụ nêu trên mục **1.1.1.** đều là hàm phán đoán.

1.2. Phán đoán phổ biến.

Cho hàm phán đoán $P(x), x \in S$. Ta lập phán đoán sau đây: *"Với mọi x thuộc S, P(x)"* (Hay P(x) đúng với mọi x thuộc S) . Phán đoán này gọi là phán đóan *phổ biến*.

Ký hiệu: $\forall x \in S, P(x)$.

Ví dụ:

1) Xét lại hàm phán đóan ở trên: S là tập hợp những người Việt Nam, và P(x)= *x là nhà thơ*. Phán đóan phổ biến được thành lập từ hàm phán đóan này là: *"Với mọi x thuộc tập S những người Việt Nam, x là nhà thơ"*.

Đã gọi là phán đóan, thì câu này phải nói lên được tính đúng sai của một thực tế mà nó phản ánh. Chúng ta thấy ngay rằng câu trên là sai, tức là phán đoán sai.

Chú ý, câu *"mọi người Việt Nam đều là nhà thơ"* có nhiều cách phát biểu như sau: Tất cả những người Việt Nam đều là nhà thơ; Người Việt Nam ai chẳng là nhà thơ; Người Việt Nam nào chẳng là nhà thơ; Ai nó có người Việt Nam không là nhà thơ...

2) Xét hàm phán đoán $x^2 + 1 > 0, x \in R$ (R là tập số thực). Phán đoán phổ biến được thành lập từ hàm phán đoán này là: *"Với mọi số thực x,* $x^2 + 1 > 0$*"* = "$\forall x \in R, x^2 + 1 > 0$". Đây là một phán đoán đúng.

1.3. Phán đoán tồn tại.

Cho hàm phán đoán $P(x), x \in S$. Ta lập phán đoán sau đây: *"Tồn tại x thuộc S, P(x)"* (Hay P(x) đúng với một x nào đó thuộc S). Phán đoán này gọi là phán đoán *tồn tại*.

Ký hiệu: $\exists x \in S, P(x)$.

Ví dụ:

Xét lại hàm phán đóan ở trên: S là tập hợp những người Việt Nam, và P(x) = *x là nhà thơ*. Phán đóan tồn tại được thành lập từ hàm phán đóan này là: *"Tồn tại x thuộc tập S những người Việt Nam, x là nhà thơ"* (Tồn tại người Việt Nam là nhà thơ).

Đây là phán đóan đúng.

Xét hàm phán đoán $x^2 - 1 = 0, x \in R$ (R là tập số thực). Phán đóan tồn tại được thành lập từ hàm phán đóan này là: *"Tồn tại số thực x,* $x^2 - 1 = 0$*"* = "$\exists x \in R, x^2 - 1 = 0$". Đây là một phán đoán đúng.

1.4. Phủ định của các phán đóan phổ biến, phán đóan tồn tại.

Xét phán đóan phổ biến *"Mọi người Việt Nam đều là nhà thơ"*. Phủ định của phán đoán này là phán đoán: *"Không phải mọi người Việt Nam đều là nhà thơ"*. Điều này có nghĩa là: *"Có người Việt Nam không là nhà thơ"="Tồn tại người Việt Nam không là nhà thơ"*.

Xét phán đóan phổ biến *"Với mọi số thực x,* $x^2 \geq 0$ *"*. Phủ định của phán đóan này là phán đóan: *"Không phải mọi số thực x,* $x^2 \geq 0$ *"*. Điều này có nghĩa là: *"Có số thực x, mà* $x^2 < 0$ *"*. Phán đóan *"Có số thực x, mà* $x^2 < 0$ *"* viết dưới dạng công thức: $\exists x \in R, x^2 < 0$.

Ta có công thức tổng quát sau:

$$\sim (\forall x, P(x)) = \exists x, \sim P(x)$$
$$\sim (\exists x, P(x)) = \forall x, \sim P(x)$$

Ví dụ:

1) Phủ định của phán đoán *"Có người Việt Nam đã được giải Nobel Văn học"* là phán đoán: *"Mọi người Việt Nam đều chưa được giải Nobel Văn học"*.
2) *"Không phải mọi số tự nhiên n, 3n+1 đều là số lẻ"*. Điều này có nghĩa là *"Tồn tại số tự nhiên n, 3n+1 là số chẵn"*.

1.5. Bảng ghi nhớ phán đoán phổ biến và phán đoán tồn tại.

Phán đoán	Khi nào đúng	Khi nào sai
$\forall x \in S, P(x)$	*P(x) đúng với mọi x thuộc S*	*P(x) sai với một x nào đó thuộc S*
$\exists x \in S, P(x)$	*P(x) đúng với một x nào đó thuộc S*	*P(x) sai với mọi x thuộc S*
$\exists x, \sim P(x)$	*Phán đoán* $\forall x \in S, P(x)$ *là sai*	*Phán đoán* $\forall x \in S, P(x)$ *là đúng*
$\forall x, \sim P(x)$	*Phán đoán* $\exists x \in S, P(x)$ *là sai*	*Phán đoán* $\exists x \in S, P(x)$ *là sai*

1.6. Nhận xét.

Nếu tập S là hữu hạn, (có thể liệt kê được) thì phán đóan $\forall x \in S, P(x)$ chính là phán đóan hội $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge ... \wedge P(x_n)$, trong đó $x_1, x_2, ..., x_n \in S$.

$\exists x \in S, P(x)$ chính là phán đoán tuyển $P(x_1) \vee P(x_2) \vee ... \vee P(x_n)$, trong đó $x_1, x_2, ..., x_n \in S$.

Do đó mà các công thức nêu ở mục 1.4. cũng gọi là công thức De Morgan mở rộng.

1.7. Hàm phán đoán nhiều biến.

Ở các phần trên chúng ta đã biết về hàm phán đoán, đó chính là hàm phán đoán một biến. Nhiều vấn đề không thể dùng hàm phán đoán một biến được. Chúng ta hãy xét một vài ví dụ.

"Số thực *x* lớn hơn số thực *y*". Rõ ràng đây là một câu mà chúng ta chưa thấy được tính đúng sai của nó. Nếu thay x=7, và y=5 ta được một phán đoán đúng. Nếu thay x=7, và y=15 ta được một phán đoán sai.

"Ông *x* là ba (cha) của ông *y*". Cũng như trên ta thấy đây không phải là phán đoán. Nhưng nếu thay *x=Nguyễn Phi Khanh*, và *y=Nguyễn Trãi* ta được một phán đoán đúng. Còn nếu thay *x=Nguyễn Phi Khanh*, và *y=Trần Nguyên Đán* ta được một phán đoán sai.

Ta gọi một hàm phán đoán hai (hoặc ba) biến là một câu có chứa hai (hoặc ba) biến, và câu này sẽ trở thành một phán đóan khi ta thay các biến này bởi các hằng trong những tập hợp xác định.

Ký hiệu hàm phán đoán hai biến $P(x, y), x \in S; y \in T$.

Tương tự cho trường hợp nhiều biến hơn.

Ví dụ:

Ký hiệu S là tập hợp những người đàn ông; T là tập hợp những người đàn bà. Xét P(x,y) là câu *"x là chồng của y"*. P(x,y) là một hàm phán đoán. Thay *x = Lưu Quang Vũ*, và *y = Xuân Quỳnh* ta được một phán đoán đúng.

Xét S=T=R (tập hợp số thực). $Q(x, y) =$" $x > y$". Ta có Q(4,3) là phán đoán đúng, và Q(3,4) là phán đoán sai.

1.8. Các loại phán đóan phổ biến và phán đóan tồn tại ở dạng mở rộng.

Cho hàm phán đoán hai biến $P(x, y), x \in S; y \in T$.

Phán đoán *"Với mọi x thuộc S, với mọi y thuộc T, P(x,y) là đúng"* được gọi là phán đoán phổ biến *toàn phần*.

Ký hiệu của phán đoán phổ biến *toàn phần* là $\forall x \in S\ \forall y \in T, P(x, y)$.

Phán đoán *"Với mọi x thuộc S, tồn tại y thuộc T, P(x,y) là đúng"* được gọi là phán đoán phổ biến *bán phần trước*.

Ký hiệu của phán đoán phổ biến *bán phần trước* là $\forall x \in S\ \exists y \in T, P(x, y)$.

Phán đoán *"Tồn tại x thuộc S, với mọi y thuộc T, P(x,y) là đúng"* được gọi là phán đoán phổ biến *bán phần sau*.

Ký hiệu của phán đoán phổ biến *bán phần sau* là $\exists x \in S\ \forall y \in T, P(x, y)$.

Phán đoán *"Tồn tại x thuộc S, tồn tại y thuộc T, P(x,y) là đúng"* được gọi là phán đoán tồn tại *toàn phần*.

Ký hiệu của phán đoán tồn tại *toàn phần* là $\exists x \in S\ \exists y \in T, P(x, y)$.

Ví dụ:

1) Cho S là tập hợp các bạn sinh viên lớp TH4 của Khoa CNTT, và T là tập hợp tất cả các môn học của Khoa CNTT, còn P(x,y) là câu: *"x sẽ học môn y"*. Khi đó câu: *"Mọi sinh viên của lớp TH4 sẽ học tất cả các môn học của Khoa CNTT"* có thể viết dưới dạng công thức: $\forall x \in S\ \forall y \in T, P(x, y)$.

Công thức $\exists x \in S\ \forall y \in T, P(x, y)$ là ký hiệu của câu: *"Có một (hoặc những) sinh viên của lớp TH4 sẽ học tất cả các môn học của Khoa CNTT"* .

2) S là tập hợp mọi chìa khóa, T là tập hợp mọi cái ổ khóa, Q(x,y) là câu *"Chìa khóa x mở được ổ khóa y"*.

Khi đó công thức $\exists x \in S\ \forall y \in T, P(x, y)$ chính là câu *"Chìa khóa vạn năng"* . Đây là một phán đoán sai.

Công thức $\exists x \in S\ \exists y \in T, P(x, y)$ chính là câu *" Có một chìa khóa mở được một ổ khóa nào đó"* .

Cho S=T=R, P(x,y) là câu *"x + y = y + x"*. Khi đó câu "Phép cộng hai số thực có tính chất giao hoán" (câu này đúng) có thể diễn tả dưới dạng công thức: $\forall x \in S\ \forall y \in T, P(x, y)$.

1.9. Phủ định của phán đoán phổ biến và phán đoán tồn tại ở dạng mở rộng.

Trở lại phán đoán *"Mọi sinh viên của lớp TH4 sẽ học tất cả các môn học của Khoa CNTT"*. Phủ định của phán đoán này là phán đoán *"Không phải mọi sinh viên của lớp TH4, sẽ học tất cả các môn học của Khoa CNTT"*. Điều này cũng có nghĩa là : "*Có ít nhất một sinh viên, và một môn học mà sinh viên đó không học môn này"* . Với ký hiệu như trên, câu này có thể diễn tả bằng công thức: $\exists x \in S\ \exists y \in T, \sim P(x, y)$.

Ta có các công thức tổng quát sau:

$$\sim\left(\forall x \in S\ \forall y \in T, P(x, y)\right) = \exists x\ \exists y, \sim P(x, y)$$

$$\sim\left(\forall x \in S\ \exists y \in T, P(x, y)\right) = \exists x\ \forall y, \sim P(x, y)$$

$$\sim\left(\exists x \in S\ \forall y \in T, P(x, y)\right) = \forall x\ \exists y, \sim P(x, y)$$

$$\sim\left(\exists x \in S\ \exists y \in T, P(x, y)\right) = \forall x\ \forall y, \sim P(x, y).$$

1.10. Một số ví dụ: (Tham khảo phần Logic trong sách Tóan rời rạc, của KENNET H. ROSEN)

Cho S=T là tập hợp những người trên thế giới, và L(x,y) là câu *"x yêu y"*.

Khi đó câu *"Mọi người đều yêu Lan"* có thể diễn tả bằng công thức: $\forall x \in S\ L(x, Lan)$.

Câu ***"****Mọi người đều yêu một người nào đó"* có thể diễn tả bằng công thức: $\forall x \in S\ \exists y \in S, L(x, y)$.

Câu ***"****Mọi người đều yêu duy nhất một người nào đó"* có thể diễn tả bằng công thức: $\forall x \in S\ \exists y \in S, \big(L(x, y) \wedge \big(\forall z \neq y \sim L(x, z)\big)\big)$.

Câu ***"Không có ai****, yêu tất cả mọi người"* có thể diễn tả bằng công thức: $\forall x \in S\ \exists y \in S, \sim L(x, y)$. Thật vậy, câu ***"****Không có ai, yêu tất cả mọi người"* có nghĩa là: *"Không thể có người, yêu tất cả mọi người"*. Mà "*có người, yêu tất cả mọi người*" chính là công thức $\exists x \in S\ \forall y \in S, L(x, y)$. Do đó *"Không thể có người, yêu tất cả mọi người"* chính là công thức $\sim \big(\exists x \in S\ \forall y \in S, L(x, y)\big)$ hay $\forall x \in S\ \exists y \in S, \sim L(x, y)$.

Câu *"Mọi người đều yêu chính mình"* có thể diễn tả bằng công thức: $\forall x \in S\ L(x, x)$.

Câu *"Có một người nào đó không yêu ai ngoài chính mình"* có thể diễn tả bằng công thức $\exists x \in S\ \forall y \in S, \big(L(x, y) \Rightarrow x = y\big)$.

Bây giờ vận dụng các công thức ở mục **1.9** và định nghĩa giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ ta chứng tỏ: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq a \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x\big(0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - a| \geq \varepsilon\big)$. Thật vậy, định nghĩa $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ được diễn tả bằng lượng từ logic: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x\big(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\big)$.

Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq a$ chính là dạng phủ định: $\sim \big[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x\big(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\big)\big]$.

Ta áp dụng từng bước các công thức ở mục 1.9.

$$\sim \big[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x\big(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\big)\big]$$

$$= \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \sim \big[\forall x\big(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\big)\big] \text{ (1.9)}$$

$$= \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \sim \big(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\big) \quad \text{(1.4)}$$

$$= \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \sim \big(\sim \big(0 < |x - x_0| < \delta\big) \vee |f(x) - a| < \varepsilon\big) \text{ (Ch 1)}$$

$$= \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x\big(\big(0 < |x - x_0| < \delta\big) \wedge \sim \big(|f(x) - a| < \varepsilon\big)\big) \text{ (De Morgan)}$$

$$= \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x\big(\big(0 < |x - x_0| < \delta\big) \wedge \big(|f(x) - a| \geq \varepsilon\big)\big).$$

1.11. Bảng ghi nhớ phán đoán phổ biến và phán đóan tồn tại ở dạng mở rộng.

Phán đoán	Khi nào đúng	Khi nào sai
$\forall x \in S\ \forall y \in T, P(x,y)$	*P(x,y) đúng với mọi cặp (x,y)*	*P(x,y) sai với một cặp (x,y) nào đó*
$\forall x \in S\ \exists y \in T, P(x,y)$	*Với mọi x, có một y sao cho P(x,y) đúng*	*Có một x sao cho với mọi y P(x,y) là sai.*
$\exists x \in S\ \forall y \in T, P(x,y)$	*Có một x sao cho với mọi y P(x,y) đúng*	*Với mọi x, có một y sao cho P(x,y) là sai.*
$\exists x \in S\ \exists y \in T, P(x,y)$	*P(x,y) đúng với một cặp (x,y)*	*P(x,y) sai với mọi cặp (x,y)*

§2. PHÁN ĐOÁN KHẲNG ĐỊNH CHUNG. PHÁN ĐOÁN KHẲNG ĐỊNH RIÊNG. PHÁN ĐOÁN PHỦ ĐỊNH CHUNG. PHÁN ĐOÁN PHỦ ĐỊNH RIÊNG.

2.1. Phán đoán khẳng định chung.

Cho S và M là hai tập hợp tùy ý. Phán đoán *"Mọi S đều là M"* được gọi là phán đoán khẳng định chung.

Ký hiệu của phán đoán *"Mọi S đều là M"* là $SaM = \forall S, M$ hay A.

Hoặc có thể ký hiệu: $\forall x \in S,\ x \in M$.

Điều này cũng có nghĩa là tập hợp *S* là một tập con của tập *M*.

Ví dụ: S là tập hợp những con sư tử, M là tập hợp những con vật có bốn chân. Khi đó A=SaM là phán đoán: *"Mọi con sư tử đều là con vật có bốn chân"*. Trong khi đó MaS là phán đoán: *"Mọi con vật bốn chân đều là sư tử"*(!) .

2.2. Phán đoán khẳng định riêng.

Cho S và M là hai tập hợp tùy ý. Phán đoán *"Có S là M"* được gọi là phán đoán khẳng định riêng.

Ký hiệu của phán đoán *"Có S là M"* là $SiM = \exists S, M$ hay I.

Có S là M, nghĩa là có phần tử của S là phần tử của M, điều này cũng có nghĩa tập S và tập M có giao khác rỗng. Do đó $SiM = \exists S, M$ cũng có thể ký hiệu theo cách của tập hợp:

$$\exists x \in S,\ x \in M .$$

Ví dụ: S là tập hợp những con sư tử, M là tập hợp những con vật có bốn chân. Khi đó I=SiM là phán đoán: *"Có con sư tử là con vật có bốn chân"*. Trong khi đó MiS là phán đoán: *"Có con vật bốn chân là sư tử"*. Lúc này cả hai phán đoán đều chấp nhận được.

2.3. Phán đoán phủ định chung.

Cho S và M là hai tập hợp tùy ý. Phán đoán *"Mọi S đều không là M"* được gọi là phán đoán phủ định chung.

Ký hiệu của phán đoán *"Mọi S đều không là M"* là $SeM = \forall S, \sim M$ hay E.

Mọi S không là M, nghĩa là mọi phần tử của S không là phần tử của M, điều này cũng có nghĩa tập S và tập M có giao bằng rỗng. Do đó $SeM = \forall S, \sim M$ cũng có thể ký hiệu theo cách của tập hợp:

$$\forall x \in S,\ x \notin M .$$

Ví dụ:

1) S là tập hợp những con sư tử, M là tập hợp những con vật có bốn chân. Khi đó E=SeM là phán đoán: *"Mọi con sư tử đều không phải là con vật có bốn chân"*. Trong khi đó MeS là phán đoán: *"Mọi con vật bốn chân đều không phải là sư tử"*. Lúc này cả hai phán đoán đều sai.
2) S là tập hợp những con sư tử, M là tập hợp những con vật biết bay. Khi đó E=SeM là phán đoán: *"Mọi con sư tử đều không phải là con vật biết bay"*. Trong khi đó MeS là phán đoán: *"Mọi con vật biết bay đều không phải là sư tử"*. Lúc này cả hai phán đoán đều đúng.

2.4. Phán đoán phủ định riêng.

Cho S và M là hai tập hợp tùy ý. Phán đoán *"Có S không là M"* được gọi là phán đoán phủ định riêng.

Ký hiệu của phán đoán *"Có S không là M"* là $SoM = \exists S, \sim M$ hay O.

Có S không là M, nghĩa là một số phần tử của S không là phần tử của M, điều này cũng có nghĩa tập S và tập M có những phần tử riêng. Do đó $SoM = \exists S, \sim M$ cũng có thể ký hiệu theo cách của tập hợp:

$$\exists x \in S,\ x \notin M .$$

Ví dụ: S là tập hợp những con sư tử, M là tập hợp những con vật có bốn chân. Khi đó O=SoM là phán đoán: *"Có con sư tử không là con vật có bốn chân"*. Trong khi đó MoS là phán đoán: *"Có con vật bốn chân không phải là sư tử"*. Ta có một phán đoán đúng và một phán đoán sai.

2.5. Quan hệ giữa các phán đoán A, E, I, O.

Theo **§1,** Chương 2 ta có các công thức sau đây

$$\sim A = O$$
$$\sim I = E .$$

Thật vậy, $\sim A = \sim\left(\forall x \in S,\ x \in M\right) = \exists x \in S,\ x \notin M = O$.

Chúng ta lại thấy rằng nếu *"Mọi con sư tử đều là con vật có bốn chân"* thì hiển nhiên *"Một số con sư tử là con vật có bốn chân"*. Từ phán đoán *"Không có con sư tử nào là con vật có hai chân"* chúng ta cũng có thể nói *"Một số con sư tử không là con vật có hai chân"*.

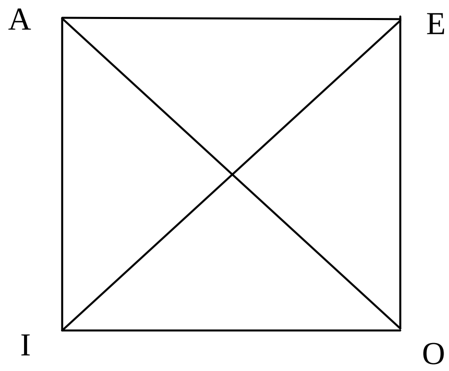
Ví dụ này minh họa cho hai công thức sau đây

$$A \Rightarrow I$$
$$E \Rightarrow O.$$

Bây giờ ta xét hai phán đoán "*Mọi người đều đồng ý*" (A) và "*Không ai đồng ý cả*" (E). Nhận thấy rằng cả hai phán đoán này có thể cùng sai, nhưng không thể đồng thời cùng đúng. Ta gọi hai phán đoán A và E là hai phán đoán *đối chọi trên*.

Hai phán đoán "*Một số người đồng ý*" (I) và "*Một số người không đồng ý*" (O). Nhận thấy rằng cả hai phán đoán này có thể cùng đúng, nhưng không thể đồng thời cùng sai. Ta gọi hai phán đoán I và O là hai phán đoán *đối chọi dưới*.

Nói tóm lại các mối quan hệ giữa các phán đoán A, I, E, O nêu trên có thể biểu diễn bằng hình vuông sau, gọi là hình vuông logic.



2.6. Một số cách phát biểu thường gặp trong ngôn ngữ tự nhiên của các phán đoán dạng A, I, E, O.

Phán đoán khẳng định chung thường là: *Mọi người…; Ai ai…; Ai mà chẳng…; Mọi khi…; mọi lúc…; Mọi vật…; mọi cảnh…;v.v…*

"*Trong thành Thất La,* mọi trẻ con *đều biết đến Đức Phật Đại Giác và* mọi nhà *sẵn sàng đồ cúng dường để đổ vào bình bát của những đồ đệ Ngài lặng lẽ đi khất thực." (Câu chuyện dòng sông, tr 60).*

"Đêm đêm *ra đứng bờ ao,*
Trông cá cá lặn, trông sao sao mờ"
(Ca dao)

Phán đoán phủ định chung thường là: *Không người nào…; Không ai…; Nào ai…; Không khi nào…; Không lúc nào…; Không vật nào…; Không cảnh nào;v.v…*

"Và trong số những bậc hiền triết mà chàng quen biết và nghiền ngẫm lời dạy, cũng không một ai *hòan tòan đạt đến cõi ấy – thế giới thần tiên* – Không một ai *giải được niềm khao khát tối hậu."(Câu chuyện dòng sông , tr 39)*

"Không ai tắm hai lần trong một dòng sông" (Heraclite)

Phán đoán khẳng định riêng thường là: *Một người…; Một số (hay nhiều) người…; Một ai đó…; Một khi (lúc) nào đó…;v.v…*

"Nhiều người *đi qua sông cảm thấy có cái gì tỏa ra từ dòng sông và từ hai người lái đò ấy.* Một đôi khi *còn có hành khách nhìn một trong hai người và bắt đầu kể về cuộc đời mình..." (Câu chuyện dòng sông, tr 168).*

"Khi tựa gối, khi cuối đầu,
Khi vò chín khúc, khi chau đôi mày"
(Truyện Kiều, Nguyễn Du)

Phán đoán phủ định riêng thường là: *Một người…không…; Một số (hay nhiều) người…không…; Một ai đó…không…; Một khi (lúc) nào đó…không…;v.v…*

"Một số người không cho rằng Truyện Kiều mang tính giáo dục, chẳng hạn như Nguyễn Khuyến hay Huỳnh Thúc Kháng."

BÀI TẬP.

1. Đặt S là tập hợp tất cả các con mèo, p(x) là câu *"x thích mỡ"*. Diễn đạt các phán đoán cho bởi các công thức sau thành những câu văn thông thường, và sau đó viết câu văn phủ định của các câu văn này.

a) $\forall x, \sim P(x)$ b) $\exists x, \sim P(x)$ c) $\exists x, P(x)$ d) $\forall x, P(x)$.

2. *(Bài tập – Hoàng Chúng)* Cho phán đoán: "*Trong hội nghị có người tán thành ý kiến ấy*". Hỏi nếu phán đoán này đúng thì trong các phán đoán sau phán đoán nào đúng, phán đoán nào sai?

a) Trong hội nghị rất nhiều người tán thành ý kiến ấy.
b) Trong hội nghị không phải không có người tán thành ý kiến ấy.
c) Trong hội nghị không phải ai cũng không tán thành ý kiến ấy.
d) Trong hội nghị không phải có người tán thành ý kiến ấy.
e) Trong hội nghị không phải có người không tán thành ý kiến ấy.
f) Trong hội nghị không phải không có người không tán thành ý kiến ấy.

3. Cho *P(m,n)* là câu *"n chia hết cho m"* hoặc *"m chia hết n"*, n; m là những số nguyên (Z). Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a) P(4,5) b) P(2,4) c) $\forall m, \forall n,\ P(m,n)$

d) $\exists m, \forall n,\ P(m,n)$ e) $\exists n, \forall m, P(m,n)$ f) $\forall n, P(1,n)$.

4. *(Bài tập - **KENNET H. ROSEN**)* Cho F(x,y) là câu *"x có thể lừa gạt y"*, với x, y thuộc tập hợp tất cả mọi người trên thế giới. Hãy dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau:

a) Mọi người đều có thể lừa gạt Fred.
b) Evelyn có thể lừa gạt được mọi người.
c) Mọi người đều có thể lừa gạt được ai đó.
d) Không ai có thể lừa gạt được tất cả mọi người.
e) Mọi người đều có thể bị lừa gạt bởi một ai đó.
f) Không ai có thể lừa gạt được cả Fred lẫn Jerry.
g) Nancy có thể lừa gạt được chính xác hai người.
h) Có chính xác một người mà ai cũng lừa gạt được.
i) Không ai có thể lừa gạt được chính mình.
j) Có một người nào đó có thể lừa gạt được chính xác một người trừ bản thân mình.

5. Viết câu văn phủ định các câu a), b), c), d), e), f), i).

6. Cho *P(x,y)* là câu *"x+y=3"*, x; y là những số thực **R**. Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a) $\forall x, \forall y, \sim P(x,y)$
b) $\exists x, \exists y, \sim P(x,y)$
c) $\forall x, \forall y, P(x,y)$
d) $\exists x, \exists y, P(x,y)$
e) $\forall x, \exists y, P(x,y)$
f) $\exists x, \forall y, P(x,y)$.

7. Cho P(x,y) là câu *"x biết y"*, với *x, y* thuộc tập hợp S những sinh viên của lớp bạn. Hãy diễn đạt các câu sau bằng công thức:

a) Mọi sinh viên trong lớp bạn đều biết bạn lớp trưởng An.
b) Có sinh viên trong lớp bạn không biết bạn lớp trưởng An.
c) Bạn Lan biết bạn Huệ mà Huệ không biết Lan.
d) Hai bạn Bình, An biết nhau.
e) Mọi sinh viên trong lớp đều biết nhau.
f) Không phải mọi sinh viên trong lớp đều biết nhau.
g) Phủ định các câu ở trên.

8. Trong các phán đoán sau, phán đoán nào là phán đoán khẳng định chung, khẳng định riêng, phủ định chung, phủ định riêng.

a) Mọi trẻ em đều mong Tết đến.
b) Có một số trẻ em không biết tết là gì.
c) Hầu hết mọi trẻ em ở TP. Hồ Chí Minh đều được ăn Tết Trung thu.
d) Không một trẻ em nào ở Mỹ được ăn Tết Trung thu.
e) Có một số trẻ em ở TP. Hồ Chí Minh không được ăn Tết Trung thu.
f) Muôn sông đều đổ về biển.
g) Tất cả các dòng sống đều chảy.
h) Rất nhiều cây cho hoa mà không cho qủa.
i) Có một số ít cây cho qủa mà không cho hoa. (chẳng hạn cây chuối trổ qủa)

9. Phủ định các phán đoán sau:

a) Có những con mèo không thích mỡ.
b) Không con mèo nào là không thích mỡ.

c) Có cái chết hóa thành bất tử.
d) Ớt nào là ớt chẳng cay.
e) Mấy đời bánh đúc có xương.
f) Ở hiền gặp lành (ai ở hiền đều gặp lành).
g) Gieo gió gặp bão (ai gieo gió đều gặp bão).

10. Cho *P(x)* là câu *"x đã đọc một số tác phẩm của nhà văn người Đức Hermann Hesse"*, ở đây *x* thuộc S tập hợp những người Việt nam. Hãy diễn đạt các công thức sau thành những câu thông thường:

a) $\forall x, P(x)$ b) $\exists x, P(x)$ c) $\forall x, \sim P(x)$ d) $\exists x, \sim P(x)$.

11. Cho *P(x)* là câu *"x đã đọc Truyện Kiều"*; *Q(x)* là câu *"x đã đọc Truyện Lục Vân Tiên"* ở đây *x* thuộc S tập hợp những sinh viên trong lớp của bạn. Hãy diễn đạt các câu sau bằng công thức:

a) Mọi sinh viên trong lớp của bạn đều đã đọc truyện Kiều và truyện Lục Vân Tiên.
b) Mọi sinh viên trong lớp của bạn đều chưa đọc truyện Kiều và truyện Lục Vân Tiên.
c) Một số sinh viên trong lớp của bạn đã đọc truyện Kiều hoặc truyện Lục Vân Tiên.
d) Một số sinh viên trong lớp của bạn chưa đọc truyện Kiều hoặc truyện Lục Vân Tiên.
e) Nhiều sinh viên trong lớp của bạn đọc truyện Kiều mà chưa đọc truyện Lục Vân Tiên.
f) Viết các câu phủ định của các câu a); b); c); d); e).

12. Cho *P(x)* là câu *"x đã đọc Truyện Kiều"*; *Q(x)* là câu *"x đã đọc Truyện Lục Vân Tiên"* ở đây *x* thuộc S tập hợp những sinh viên trong lớp của bạn. Hãy diễn đạt các công thức sau thành những câu thông thường:

a) $\forall x, \sim\left(P(x) \vee Q(x)\right)$ b) $\forall x, \sim\left(\sim P(x) \wedge Q(x)\right)$

c) $\exists x, \sim\left(\sim P(x) \vee Q(x)\right)$ d) $\exists x, \sim\left(\sim P(x) \wedge Q(x)\right)$.

13. Cho P(x,y) là câu *"x lớn hơn hay bằng y"*, với *x, y* thuộc tập hợp các số tự nhiên N. Cho biết giá trị chân lý của các phán đoán cho dưới dạng công thức sau:

a) $\forall x \forall y\, P(x,y)$ b) $\exists x \forall y\, P(x,y)$ c) $\forall x \exists y\, P(x,y)$

d) $\exists x \exists y\, P(x,y)$ e) $\forall x \forall y\, P(x,y) \wedge P(y,x)$ f) $\forall x\, P(x,x)$.

g) $\forall x \forall y\, \left(P(x,y) + P(y,x)\right)$.

14. Trong Toán học ta định nghĩa sau: "Tập A được gọi là con của tập B *nếu* mọi phần tử của A cũng là phần tử của B".

a) Từ ***nếu*** trong định nghĩa trên có ý nghĩa của phép logic gì ?
b) Viết định nghĩa trên dưới dạng ký hiệu.

c) Phủ định định nghĩa ở trên.

15. Cho biết mối quan hệ (đối chọi, mâu thuẫn) giữa các phán đoán sau:

a) $\forall x \in R, x^2 - 3x + 2 > 0$ và $\forall x \in R, x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

b) $\exists x \in R, x^2 - 3x + 2 > 0$ và $\exists x \in R, x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

16. Cho biết mối quan hệ (đối chọi, mâu thuẫn) giữa các phán đoán sau:

a) "Ai cũng hiểu" và "Có những người không hiểu".
b) "Ai cũng hiểu" và "Có một số người hiểu".
c) "Ai mà hiểu cho được" và "Có một số người hiểu".
d) "Ai mà hiểu cho được" và "Có một số người chẳng hiểu".

Chương 3. SUY LUẬN DIỄN DỊCH.

§1. SUY LUẬN TỪ MỘT TIỀN ĐỀ.

1.1. Suy luận là gì?

Trong logic luỡng trị chúng ta nói rằng:

Phán đoán kéo theo $A \Rightarrow B$ nhận giá trị chân lý hằng đúng được gọi là một suy luận.

Trong đó *A* được gọi là tiền đề; và *A* là phán đoán đúng đã biết, *B* được gọi là kết luận rút ra từ tiền đề *A*.

Chúng ta ký hiệu suy luận này dưới dạng sơ đồ:

$$\frac{A}{B}$$

(Đọc: có A, vậy có B)

Ví dụ: Đặt $A = P \wedge Q$ và $B = Q$. Khi đó phán đoán $P \wedge Q \Rightarrow Q$ là hằng đúng, bất kể *P; Q* nhận giá trị chân lý gì. Vậy $P \wedge Q \Rightarrow Q$ là một suy luận. Chẳng hạn *"Mùa xuân là hoa đào và hoa mai nở. Vậy thì, mùa xuân là hoa đào nở."*

(Đoạn văn này thì đơn giản. Nhưng để thấy rõ cấu trúc logic của nó ta có thể phân tích như sau: A="Mùa xuân là hoa đào và hoa mai nở". Phán đóan A có dạng $P \Rightarrow Q \wedge R$ *với P="Mùa xuân"; Q="Hoa đào nở"; R="Hoa mai nở" (Xem thêm* §3 *Chương 1). Bạn đọc hãy kiểm tra lại công thức* $P \Rightarrow Q \wedge R = (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$. *Vậy phán đóan A có dạng* $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$, *do đó kết luận được rút ra là* $P \Rightarrow R$. *Nghĩa là* "*mùa xuân là hoa đào nở")*

1.2. Một số hình thức suy luận từ một tiền đề.

1.2.1. Trường hợp tiền đề A và kết luận B bằng nhau.

Nếu $A = B$ thì $A \Rightarrow B$ cũng như $B \Rightarrow A$ đều là hằng đúng. Do đó chúng ta có hai sơ đồ suy luận:

$$\frac{A}{B} \text{ và } \frac{B}{A}.$$

Những kết luận rút ra từ các sơ đồ này thực chất là những phán đóan tương đương logic với phán đóan đã cho.

1.2.2. Từ công thức De Morgan ta có bốn sơ đồ suy luận sau đây:

$$\frac{\sim(P \wedge Q)}{\sim P \vee \sim Q} \text{ (1)}; \qquad \frac{\sim P \vee \sim Q}{\sim(P \wedge Q)} \text{ (2)}; \qquad \frac{\sim(P \vee Q)}{\sim P \wedge \sim Q} \text{ (3)}; \qquad \frac{\sim P \wedge \sim Q}{\sim(P \vee Q)} \text{ (4)}.$$

Ví dụ:

1) *Nếu không phải An và Bình đã đến đúng giờ thì An không đến đúng giờ hay Bình không đến đúng giờ.* (Suy luận theo sơ đồ (1)).
2) *Nếu ở lớp học có bạn hay ở thư viện có bạn đều chẳng phải, thì ở lớp học không có bạn và ở thư viện cũng không có bạn.* (Suy luận theo sơ đồ (3)).
3) *Tôi không đi Đà lạt và tôi cũng không đi Vũng tàu. Vậy nghĩa là tôi đi Đà lạt hay tôi đi Vũng tàu đều không đúng.* (Suy luận theo sơ đồ (4)).

1.2.3. Từ công thức của phán đóan phản đảo $P \Rightarrow Q = \sim Q \Rightarrow \sim P$ ta có hai sơ đồ suy luận:

$$\frac{P \Rightarrow Q}{\sim Q \Rightarrow \sim P} \text{ (5) và } \frac{\sim Q \Rightarrow \sim P}{P \Rightarrow Q} \text{ (6)}.$$

Ví dụ:

1) *Nếu Trời mưa thì đường ướt. Vậy, đường không ướt thì Trời không mưa.*
2) “*Không có sách thì không có tri thức. Vậy, có tri thức là có sách” (Lênin)*

1.2.4. Từ mối quan hệ của phép kéo theo và phép tuyển.

Chúng ta đã biết các công thức sau đây trong Chương 1

$$P \Rightarrow Q = \sim P \vee Q = \sim(P \wedge \sim Q).$$

Do đó ta có một số sơ đồ suy luận sau:

$$\frac{P \Rightarrow Q}{\sim P \vee Q} \text{ (7)}; \quad \frac{P \Rightarrow Q}{\sim(P \wedge \sim Q)} \text{ (8)}\ldots$$

Ví dụ: Trong Truyện Kiều, Thúy Kiều khen Kim Trọng bằng câu:

"(Nàng rằng:) trộm liếc dung quang
Chẳng sân ngọc bội, thời phường Kim Môn"

Ký hiệu P = "Kim Trọng là người có đức quý như ngọc"; Q = "Kim Trọng là người có học thức (phường Kim Môn)". Câu thơ: *Chẳng sân ngọc bội, thời phường Kim Môn* là một phán đoán dạng $\sim P \Rightarrow Q$. Vậy kết luận được rút ra sẽ là $\sim(\sim P) \vee Q$ hay $P \vee Q$ (Suy luận theo sơ đồ (7)). Tức là người đọc sẽ hiểu: Kim Trọng là người có đạo đức hoặc là người có học, thậm chí cả hai.

§2. SUY LUẬN TỪ NHIỀU TIỀN ĐỀ.

2.1. Luật rút gọn.

Nếu tiền đề có dạng $P \wedge Q$ thì có thể rút ra kết luận là *P* hoặc *Q*. Tóm lại ta có hai sơ đồ suy luận:

$$\frac{P \wedge Q}{P} \quad (9)\ ; \quad \frac{P \wedge Q}{Q} \quad (10).$$

Ví dụ:

1) *Nếu n là số tự nhiên chia hết cho 6. Vậy, n chia hết cho 2.* Thật vậy, n chia hết cho 6 thì n vừa chia hết cho 2, vừa chia hết cho 3, do đó kết luận rút ra là n chia hết cho 2. Hoặc chúng ta cũng rút ra kết luận n chia hết cho 3.
2) *Năm trước anh và tôi đã đến Hà nội. Vậy, thì anh đã đến Hà nội.*

2.2. Luật cộng thêm.

Nếu lấy *P* làm tiền đề thì chúng ta có thể rút ra kết luận $P \vee Q$, với *Q* là một phán đoán tùy ý.

Vậy ta có sơ đồ suy luận: $\dfrac{P}{P \vee Q}$ (11).

Ví dụ:

1) *Năm trước anh ấy đã đến Hà nội. Vậy, thì anh ấy đã đến Hà nội hoặc anh ấy đã đến Hà Tây.*
2) *Bất đẳng thức $a \geq a$ là một kết luận hợp logic của luật cộng thêm.*

2.3. Luật modus ponens.

Xuất phát từ hai phán đoán P và $P \Rightarrow Q$ làm tiền đề, thì kết luận được rút ra là *Q*.

Sơ đồ suy luận là: $\dfrac{P \wedge (P \Rightarrow Q)}{Q}$.

Người ta cũng thường viết các sơ đồ suy luận trên dưới các dạng sau:

$$\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array} \quad \text{hoặc} \quad \begin{array}{c} P \\ P \Rightarrow Q \\ \hline Q \end{array} \text{ (12).}$$

Trước tiên chúng ta sẽ chứng minh sơ đồ trên đúng là một suy luận, tức là chứng minh $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ là một phán đoán hằng đúng. Thật vậy, kết qủa này có thể thấy trong bảng giá trị chân lý sau:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$	$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	S	Đ
S	Đ	Đ	S	Đ
S	S	Đ	S	Đ

Ví dụ:

1) *Nếu 97 là số nguyên tố thì 97 không có ước số nào khác ngòai 1 và chính nó. Mà 97 là số nguyên tố. Vậy, 97 không có ước số nào khác ngòai 1 và chính nó.*

Đọan văn lập luận trên có thể viết dưới dạng sơ đồ suy luận:

Nếu 97 là số nguyên tố thì 97 không có ước số nào khác ngòai 1 và chính nó.
97 là số nguyên tố.

Vậy, 97 không có ước số nào khác ngòai 1 và chính nó.

(Dạng sơ đồ suy luận (12))

2) *Nếu bạn vượt đèn đỏ thì bạn phạm luật giao thông. Mà bạn vượt đèn đỏ. Vậy, bạn phạm luật giao thông.*

Trong ngôn ngữ tự nhiên hằng ngày, người ta thường không viết (hay nói) đầy đủ tất cả các tiền đề và kết luận của một lập luận, vì những lý do như tiết kiệm; tế nhị; hoặc điều nói ra nhiều người đã biết…

Nếu 97 là số nguyên tố thì 97 không có ước số nào khác ngòai 1 và chính nó. Vậy, 97 không có ước số nào khác ngòai 1 và chính nó. (Lược bớt phán đóan tiền đề: *số 97 là số nguyên tố).*

Nếu bạn vượt đèn đỏ thì bạn phạm luật giao thông. Mà bạn vượt đèn đỏ. (Lược bớt kết luận: *bạn phạm luật giao thông*)

"Vì Cha không muốn dò những bí mật của các huynh đệ con khi vắng mặt họ, con có thể nói cho Cha nghe những gì con cho là con biết về Cha; Daniel, Cha tu viện trưởng của con."
(Hermann Hesse, Nhà khổ hạnh và gã lang thang,Trí Hải-Vinh Bạch-Lan Nhã; dịch , tr 12)

Đoạn văn ở trên nếu viết đầy đủ có thể viết như sau: *Khi vắng mặt người nào thì không được nói về những bí mật của họ. Bây giờ, không có mặt các huynh đệ của con ở đây, nên Cha không muốn nói về những bí mật của các huynh đệ đó. Vậy, con có thể nói cho Cha nghe những gì con cho là con biết về Cha; Daniel, Cha tu viện trưởng của con.*

Các dịch giả đã lược bớt tiền đề *Khi vắng mặt người nào thì không được nói về những bí mật của họ*, xem như người đọc đã biết.

2.4. Luật modus tollens.

Xuất phát từ hai phán đoán $P \Rightarrow Q$ và $\sim Q$ làm tiền đề, thì kết luận được rút ra là $\sim P$.

Sơ đồ suy luận là: $\dfrac{(P \Rightarrow Q) \wedge \sim Q}{\sim P}$.

Người ta cũng thường viết sơ đồ suy luận trên dưới các dạng sau:

$$\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ \sim Q \\ \hline \sim P \end{array} \quad \text{hoặc} \quad \begin{array}{c} \sim Q \\ P \Rightarrow Q \\ \hline \sim P \end{array} \ (13).$$

Ví dụ:

1) *Nếu số 1996 chia hết cho 6 thì 1996 chia hết cho 3.*
Số 1996 không chia hết cho 3 (Vì 1+9+9+6=25 không chia hết cho 3).

Vậy, 1996 không chia hết cho 6.

2) *Nếu là mùa xuân thì hoa mai nở. Bây giờ không có một cây mai nào có bông cả. Vậy, bây giờ không phải là mùa xuân.*

Những lập luận trong ngôn ngữ tự nhiên hằng ngày, thông thường người ta cũng lược bớt một số phán đoán. Chẳng hạn:

"... Nhưng này anh Tất Đạt, xin lỗi anh, tôi trông anh không giống một khất sĩ chút nào. Anh đang mặc áo quần của một người giàu có, và mái tóc đầy hương của anh không phải là tóc của một khất sĩ hay Sa môn."

(Hermann Hesse – Câu chuyện dòng sông, tr 146) .

Đoạn văn trên đã lược bớt phán đoán làm tiền đề: "*Là khất sĩ hay Sa môn thì tóc không có hương hay áo quần không phải của người giàu có*".

2.5. Luật lựa chọn (hay tam đoạn luận tuyển).

Xuất phát từ hai phán đoán $P \vee Q$ và $\sim P$ làm tiền đề, thì kết luận được rút ra là Q.

Sơ đồ suy luận là: $\dfrac{(P \vee Q) \wedge \sim P}{Q}$ hoặc $\begin{array}{c} P \vee Q \\ \sim P \\ \hline Q \end{array}$ (14).

Tượng tự ta cũng có sơ đồ suy luận:

$$\frac{(P \vee Q) \wedge \sim Q}{P} \text{ hoặc } \begin{array}{c} P \vee Q \\ \sim Q \\ \hline P \end{array} \text{ (15).}$$

Ví dụ:

1) "*Hàng hóa tăng giá là do cung không đủ cầu hoặc do lạm phát. Nhưng vừa qua, hàng hóa tăng giá không phải do cung không đủ cầu. Vậy, hàng hóa vừa qua tăng giá là do lạm phát .*"

2) $\begin{cases} a+b>0 \\ a \le 0 \end{cases} \Rightarrow b>0$.

Suy luận này đã sử dụng sơ đồ lựa chọn. Thật vậy, nếu $a+b>0$ thì $a>0$ hay $b>0$. Mà $a \le 0$. Vậy, $b>0$.

2.6. Quy tắc bắc cầu của phép kéo theo (hay tam đoạn luận giả định).

Xuất phát từ hai phán đoán làm tiền đề là $P \Rightarrow Q$; $Q \Rightarrow R$, thì ta rút ra kết luận là $P \Rightarrow R$.

Sơ đồ suy luận là: $\dfrac{(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)}{P \Rightarrow R}$.

Người ta cũng thường viết sơ đồ suy luận trên dưới các dạng sau:

$$\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ \hline P \Rightarrow R \end{array} \text{ (16).}$$

Ví dụ:

1) *Nếu bạn không tham dự khóa học điều khiển xe hơi thì bạn không được cấp giấp phép lái xe hơi. Nếu bạn không được cấp giấy phép lái xe hơi thì bạn không được điều khiển xe hơi. Vậy, nếu bạn không tham dự khóa học điều khiển xe hơi thì bạn không được điều khiển xe hơi.*

Sơ đồ (16) cũng có một dạng khác như sau:

$$\frac{\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ P \end{array}}{R} \quad (17).$$

2) *Nếu bạn qua sông thì bạn phải nhờ đò chở. Nếu nhờ đò chở thì bạn phải nghe theo sự hướng dẫn của người lái đò. Mà bạn lại qua sông. Vậy, bạn phải nghe theo sự hướng dẫn của người lái đò.*

Trong ngôn ngữ tự nhiên hằng ngày, Tam đoạn luận giả định cũng được lược đi một số phán đoán. Sau đây là một ví dụ:

"Bao giờ cho mía trổ bông
Cho chị có chồng, em gặm giò heo.
Giò heo chị để trên treo,
Chị đưa giò mèo, cứng lắm chị ơi!"
(Ca dao)

Đoạn thơ trên nếu viết đầy đủ có thể viết: *Bao giờ mía trổ bông, thì chị sẽ có chồng. Chị mà có chồng, thì em có giò heo em gặm. Bây giờ mía đã trổ bông nên chị đã có chồng. Vậy, em có giò heo để gặm. Nhưng thật tiếc, giò heo chị lại để ở trên treo (có phải cho chồng?), chị thay giò heo bằng giò mèo, nó cứng lắm chị ơi!*

Như vậy đoạn thơ trên đã lược đi một số tiền đề để người đọc tự hiểu.

2.7. Kết luận rút ra từ phán đoán phổ biến.

Từ phán đoán phổ biến $\forall x \in S, P(x)$ ta rút ra kết luận $P(a)$ với $a \in S$. Sơ đồ suy luận sẽ là:

$$\frac{\forall x \in S, P(x)}{P(a)}.$$

Ta nhận thấy rằng, nếu S hữu hạn thì sơ đồ suy luận trên chính là luật rút gọn 2.1.

Trong các sách logic học đều dẫn ra ví dụ kinh điển sau đây:

1) *Mọi người đều phải chết. Vậy, ông Socract phải chết.*

Dạng sơ đồ suy luận sẽ là:

$$\frac{\textit{Mọi người đều phải chết.}}{\textit{Ông Socract phải chết.}}$$

2)

Muôn sông đều chảy ra biển.

Sông Cửu Long phải chảy ra biển.

3) Trong Toán học khi áp dụng một công thức, một định lý chính là hình thức suy luận này. Chẳng hạn bất đẳng thức $\left(\sqrt{2}-1\right)^2-2\left(\sqrt{2}-1\right)+3>0$ là trường hợp riêng của $x^2-2x+3>0,\ \forall x\in R$.

§3. MỘT SỐ SUY LUẬN TỪ CÁC PHÁN ĐOÁN A, E, I, O.

3.1. Từ trường hợp chung rút ra trường hợp riêng.

Mọi sinh viên đều là những người thích đọc sách. Vậy, có một số sinh viên thích đọc sách.

Mọi sinh viên đèu là những người không thích phải thi lại. Vậy, có một số sinh viên không thích phải thi lại.

Hai ví dụ trên minh họa cho sơ đồ suy luận sau:

$$\frac{A}{I} \text{ và } \frac{E}{O}$$

hay

$$\frac{S\,a\,M}{S\,i\,M} \text{ và } \frac{S\,e\,M}{S\,o\,M}.$$

3.2. Kết luận được rút ra từ việc đổi chỗ hai tập hợp.

Nhận thấy rằng từ phán đoán *một số hoa cúc là hoa có màu đỏ* chúng ta có thể rút ra phán đoán *một số hoa có màu đỏ là hoa cúc.*

Vậy chúng ta có sơ đồ suy luận sau đây:

$$\frac{S\,i\,M}{M\,i\,S}.$$

3.3. Tam đoạn luận.

Tam đoạn luận là một lập luận gồm có ba phán đoán, trong đó có hai phán đoán đúng làm tiền đề và một kết luận hợp logic được rút ra từ hai phán đoán này. Như vậy các lập luận theo sơ đồ modus ponens hay modus tollens đều là các tam đoạn luận. Tuy nhiên theo logic truyền thống của Aristote người ta đặc biệt quan tâm đến các tam đoạn luận mà các tiền đề và kết luận là các phán đoán dạng A, E, I, O.

Cho *S, P, M* là các tập hợp tùy ý. Từ hai phán đoán dạng A, E, I, O có chứa *S, M; P, M* làm tiền đề và ta rút ra kết luận chỉ còn có S và P. Lập luận như vậy tạm gọi là tam đoạn luận dạng A, E, I, O. Có bốn loại hình của tam đoạn luận dạng này là.

$$\frac{\begin{matrix} M\_P \\ S\_M \end{matrix}}{S\_P} \qquad \frac{\begin{matrix} P\_M \\ S\_M \end{matrix}}{S\_P} \qquad \frac{\begin{matrix} M\_P \\ M\_S \end{matrix}}{S\_P} \qquad \frac{\begin{matrix} P\_M \\ M\_S \end{matrix}}{S\_P}.$$

Mỗi loại hình có $4\times4\times4=64$ cách đặt các chữ cái *a, e, i, o* vào các dấu gạch nối. Vậy sẽ có $4\times64=256$ sơ đồ lập luận. Nhưng không phải sơ đồ nào cũng là một lập luận hợp logic, người ta chứng minh được chỉ có 19 trường hợp là đúng một lập luận. Chúng ta lần lượt trình bày các trường hợp đó trong các loại hình.

3.3.1. Các sơ đồ hợp logic trong loại hình 1.

Trong loại hình 1 có 4 sơ đồ hợp logic là:

$$\frac{\begin{matrix} M\ a\ P \\ S\ a\ M \end{matrix}}{S\ a\ P} \qquad \frac{\begin{matrix} M\ e\ P \\ S\ a\ M \end{matrix}}{S\ e\ P} \qquad \frac{\begin{matrix} M\ a\ P \\ S\ i\ M \end{matrix}}{S\ i\ P} \qquad \frac{\begin{matrix} M\ e\ P \\ S\ i\ M \end{matrix}}{S\ o\ P}$$

Người ta thường viết tắt là AAA, EAE, AII, EIO.

Ví dụ:

1) *Gọi M là tập hợp các hình chữ nhật, P là tập hợp các hình bình hành, S là tập hợp các hình vuông.*

$M\ a\ P$	*Mọi hình chữ nhật đều là hình bình hành.*
$S\ a\ M$	*Mọi hình vuông đều là hình chữ nhật.*
$S\ a\ P$	*Mọi hình vuông đều là hình bình hành.*

2) *Gọi M là tập hợp các nhà thơ, P là tập hợp các sinh viên lớp KT2A, S là tập hợp những người ở Câu lạc bộ Trúc xanh.*

$M\ e\ P$	*Mọi nhà thơ đều không phải là các sinh viên lớp KT2A.*
$S\ a\ M$	*Mọi người ở Câu lạc bộ Trúc xanh đều là nhà thơ.*
$S\ e\ P$	*Mọi người ở Câu lạc bộ Trúc xanh không phải là sinh viên lớp KT2A.*

3.3.2. Các sơ đồ hợp logic trong loại hình 2.

Trong loại hình 2 có 4 sơ đồ hợp logic là:

$$\frac{\begin{matrix} P\ e\ M \\ S\ a\ M \end{matrix}}{S\ e\ P} \qquad \frac{\begin{matrix} P\ a\ M \\ S\ e\ M \end{matrix}}{S\ e\ P} \qquad \frac{\begin{matrix} P\ e\ M \\ S\ i\ M \end{matrix}}{S\ o\ P} \qquad \frac{\begin{matrix} P\ a\ M \\ S\ o\ M \end{matrix}}{S\ o\ P}$$

Người ta thường viết tắt là EAE, AEE, EIO, AOO.

Ví dụ: *Gọi M là tập hợp các loài hoa có gai, P là tập hợp các loài hoa cúc, S là tập hợp các loài hoa nở vào mùa thu.*

$$\frac{\begin{array}{l} P\ e\ M \\ S\ i\ M \end{array}}{S\ o\ P}$$

Mọi loài hoa cúc đều không có gai.
Một số hoa nở vào mùa thu có gai.
Một số hoa nở vào mùa thu không phải là hoa cúc.

Chúng ta sẽ chứng minh sơ đồ lập luận ở trên.

$P\ e\ M$ nghĩa là $\forall x \in P,\ x \notin M$, điều này ta cũng suy ra được $\forall x \in M,\ x \notin P$. $S\ i\ M$ nghĩa là $\exists x \in S,\ x \in M$. Vậy chứng tỏ có phần tử $x \in S$ và $x \notin P$, tức là chúng ta có kết luận $S\ o\ P$.

3.3.3. Các sơ đồ hợp logic trong loại hình 3.

Trong loại hình 3 có 6 sơ đồ hợp logic là:

$$\frac{\begin{array}{l} M\ a\ P \\ M\ a\ S \end{array}}{S\ i\ P} \quad \frac{\begin{array}{l} M\ e\ P \\ M\ i\ S \end{array}}{S\ o\ P} \quad \frac{\begin{array}{l} M\ i\ P \\ M\ a\ S \end{array}}{S\ i\ P} \quad \frac{\begin{array}{l} M\ o\ P \\ M\ a\ S \end{array}}{S\ o\ P} \quad \frac{\begin{array}{l} M\ a\ P \\ M\ i\ S \end{array}}{S\ i\ P} \quad \frac{\begin{array}{l} M\ e\ P \\ M\ a\ S \end{array}}{S\ o\ P}$$

Người ta thường viết tắt là AAI, EIO, IAI, OAO, AII, EAO.

Ví dụ: *Gọi M là tập hợp những người viết sách khoa học phổ thông, P là tập hợp những người nghiên cứu Toán học, S là tập hợp những người viết sách (có sách xuất bản).*

$$\frac{\begin{array}{l} M\ o\ P \\ M\ a\ S \end{array}}{S\ o\ P}$$

Một số người viết sách khoa học phổ thông không nghiên cứu Toán học.
Mọi người viết sách khoa học phổ thông đều là những người viết sách.
Có những người viết sách không nghiên cứu Toán học.

3.3.4. Các sơ đồ hợp logic trong loại hình 4.

Trong loại hình 4 có 5 sơ đồ hợp logic là:

$$\frac{\begin{array}{l} P\ a\ M \\ M\ e\ S \end{array}}{S\ e\ P} \quad \frac{\begin{array}{l} P\ e\ M \\ M\ i\ S \end{array}}{S\ o\ P} \quad \frac{\begin{array}{l} P\ i\ M \\ M\ a\ S \end{array}}{S\ i\ P} \quad \frac{\begin{array}{l} P\ a\ M \\ M\ a\ S \end{array}}{S\ i\ P} \quad \frac{\begin{array}{l} P\ e\ M \\ M\ a\ S \end{array}}{S\ o\ P}$$

Người ta thường viết tắt là AEE, EIO, IAI, AAI, EAO.

Ví dụ: *Gọi M là tập hợp những người học logic học, P là tập hợp những người nghiên cứu Toán học, S là tập hợp những người có thể ngụy biện.*

$P\ a\ M$ *Mọi người nghiên cứu Toán học đều học logic học.*

$M\ a\ S$ *Mọi người học logic học đều có thể ngụy biện.*

$S\ i\ P$ *Một số người có thể ngụy biện là người nghiên cứu Toán học.*

Thêm một ví dụ: *Mọi người giàu có đều là người chuyên cần. Mọi người chuyên cần đều đáng khen. Vậy, một số người đáng khen là người giàu có*.(sơ đồ lập luận AAI)

3.4. Phương pháp dùng sơ đồ Ven để nhớ các sơ đồ Tam đoạn luận:

Để nhớ các sơ đồ Tam đoạn luận chúng ta có thể dùng các sơ đồ Ven như sau:

$P\ a\ M$ (tập P là tập con của tập M).

$P\ i\ M$ (tập P và tập M có giao khác rỗng).

$P\ e\ M$ (tập P và tập M có giao bằng rỗng).

$P\ o\ M$ (tập P có phần tử nằm ngoài tập M).

Khi đó để minh họa (chẳng hạn) sơ đồ suy luận

$$\begin{array}{c} P\ a\ M \\ M\ a\ S \\ \hline S\ i\ P \end{array}$$

là hợp logic, chúng ta thực hiện như sau: vẽ tập P chứa trong tập M, vẽ tập M chứa trong tập S. Khi đó chúng ta thấy tập S và tập P có phần chung là M.

§4. MỘT SỐ SUY LUẬN KHÔNG HỢP LOGIC THƯỜNG GẶP.

4.1. Suy luận không hợp logic theo sơ đồ:

$$\frac{\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \end{array}}{P} \quad \text{hay} \quad \frac{P \Rightarrow Q}{Q \Rightarrow P}.$$

Ví dụ sau đây là hai đoạn lập luận không hợp logic:

1) *Nếu cúp điện thì đèn không sáng. Mà hiện tại đèn không sáng. Vậy, điện đã bị cúp.*

2) Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau. Vậy, hai tam giác có diện tích bằng nhau thì bằng nhau.

4.2. Suy luận không hợp logic theo sơ đồ:

$$\frac{\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \sim P \end{array}}{\sim Q} \quad \text{hay} \quad \frac{P \Rightarrow Q}{\sim P \Rightarrow \sim Q}.$$

Ví dụ:

1) *Nếu hai góc đối đỉnh thì bằng nhau. Vậy, hai góc không đối đỉnh thì không bằng nhau.*
2) *Nếu có dấu chân trên bờ biển thì có người đã đi qua đây. Mà sáng nay không có dấu chân nào cả. Vậy, sáng nay không có ai đến bờ biển này.*

Hai đoạn lập luận ở trên chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy là không hợp logic. Những lập luận không hợp logic nếu chúng ta trình bày trong các văn bản khoa học là không thể chấp nhận, vì khi đó người ta áp dụng sẽ dẫn đến sai lầm trong thực tế.

Tuy nhiên những văn bản không có tính pháp lý, hoặc trong ngôn ngữ hằng ngày vẫn hay dùng sơ đồ lập luận 4.2 ở trên. Theo GS. Hoàng Phê trong tuyển tập ngôn ngữ học trang 45 đến 47, GS. Hoàng Phê cho rằng hình thức suy luận

$$\frac{P \Rightarrow Q}{\sim P \Rightarrow \sim Q} \quad \text{hay} \quad \frac{\sim P \Rightarrow \sim Q}{P \Rightarrow Q}$$

là ***suy ý,*** và ở đó khi nói $\sim P \Rightarrow \sim Q$ thì người đọc phải hiểu $P \Rightarrow Q$.

Chẳng hạn trong ngôn ngữ hằng ngày khi nói *chiều nay nếu Trời không mưa thì tôi đi dạo ở Công viên.* Lúc đó người nghe phải hiểu *nếu chiều nay Trời mưa thì tôi không đi dạo ở Công viên.*

Sau đây là một số ví dụ về suy ý trong các tác phẩm văn học.

"Bao giờ cây chuối có cành,
Cây sung có nụ, cây hành có hoa,
Bao giờ chạch đẻ ngọn đa,
Sáo đẻ dưới nước, thì ta lấy mình"
(Ca dao)

Khi đọc bài ca dao trên thì từ xưa đến giờ chúng ta vẫn hiểu, các sự kiện *chuối có cành; sung có nụ; hành có hoa; chạch đẻ ngọn đa; sáo đẻ dưới nước* là không bao giờ có, nên *ta* không thể lấy được *mình*. Mặc dù là suy luận không hợp logic nhưng trong thực tế khi nghe một người nào nói vậy chắc các bạn đã biết nên làm gì.

Hoặc là:

"Bao giờ rau diếp làm đình,
Gỗ lim thái mén, thì mình lấy ta"
(Ca dao)

"Hắn chửi như những người say rượu hát. Giá hắn biết hát thì có lẽ hắn không cần chửi. Khổ cho hắn và khổ cho người, hắn lại không biết hát. Thì hắn chửi, cũng như chiều nay hắn chửi..." .

(Nam Cao, Chí Phèo, dẫn theo Hoàng Chúng, tr.89).

Suy luận ở đây là: Nếu biết hát thì hắn không chửi. Hắn lại không biết hát. Vậy, hắn chửi.

Chu Mạnh Trinh trong một bài tựa cho Truyện Kiều đã viết: *"Giả sử ngay khi trước, Liêu Dương cách trở, duyên chàng Kim đừng dở việc ma chay, quan lại công bằng, án viên ngoại tỏ ngay tình oan uổng, thì đâu đến nỗi son phấn mấy năm lưu lạc, đem thân cho thiên hạ mua cười, mà chắc biên thùy một cõi nghênh ngang, ai xui được anh hùng cởi giáp…"*

(Dẫn theo Nguyễn Hiến Lê, Luyện văn, NXB Văn hóa thông tin, 1993, tr. 182)

Các hình thức suy ý mà chúng ta vừa trình bày ở trên có những giá trị nhất định trong văn học, còn về mặt logic học các lập luận như vậy là không hợp logic. Các văn bản như *nội quy; điều luật; các giấy tờ chứng cứ có tính pháp lý* không được dùng các lập luận như trên.

Bài tập.

1. Cho biết các lập luận sau đây đã dùng quy tắc suy luận nào? Lập luận có hợp logic không?

a) Nếu $0 \le x \le 1$ thì $x \ge 0$.
b) Hiển nhiên $2 > 1$, vậy $2 \ge 1$.
c) Không thể cả hai anh em nó đều 10 tuổi. Vậy nó không phải là 10 tuổi hoặc là em nó không là 10 tuổi.
d) Không thể A hay là B được C tin tưởng. Vậy C không tin tưởng A và C cũng không tin tưởng B.
e) Theo tin dự báo thời tiết, khu vực miền Đông Nam Bộ có mưa rào. Vậy, Tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu có mưa rào.
f) Bé Su bị bệnh cúm. Vậy, bé Su hay em của bé Su bị bệnh cúm.
g) Bạn An học giỏi môn Toán. Do đó bạn An học giỏi môn Toán hoặc môn Lý.
h) Bạn An học giỏi tất cả các môn học. Vậy bạn ấy học giỏi Toán.

2. Cho biết các lập luận sau đây đã dùng quy tắc suy luận nào? Lập luận có hợp logic không?

a) Nếu là số nguyên tố thì không có ước thật sự. Mà 2010 có ước thật sự, vậy 2010 không phải là số nguyên tố.
b) Nếu bạn dưới 18 tuổi thì bạn không được đăng ký kết hôn. Mà bạn dưới 18 tuổi.
c) Tôi suy nghĩ, vậy tôi tồn tại. (Rene Descarter).
d) Học kỳ vừa rồi An không được xếp loại giỏi. Vì nếu được loại giỏi thì điểm môn Toán hoặc môn Văn của An phải trên 8 điểm.
e) Nếu Bệ Hạ muốn hàng, xin hãy chém đầu thần đi đã. (Trần Quang Khải).
f) Nếu Trời mưa thì tôi không đi dạo ở Công viên. Mà Trời mưa, vậy tôi không đi dạo ở Công viên.
g) Nếu chiều thứ bảy mà Trời mưa thì chúng ta không đi cắm trại. Nếu chiều thứ bảy chúng ta không đi cắm trại thì sáng Chúa nhật chúng ta đi sớm. Vậy thì, nếu chiều thứ bảy Trời mưa thì sáng Chúa nhật chúng ta đi cắm trại sớm.

3. Chứng minh quy tắc suy luận sau là hợp logic:

$$\begin{array}{c} P+Q \\ \underline{\sim P} \\ Q \end{array}$$

Áp dụng: Tìm phán đoán đã được lược đi trong lập luận sau: *"Hoặc con cưới cô Ba hoặc con đi tu, nhưng hiện tại con nhận thấy rằng con không thể đi tu được."*

4. Chứng minh quy tắc lựa chọn có thể xem là hệ quả của quy tắc modus ponens.

5. *(Dẫn theo Nguyễn Đức Dân, Logich và Tiếng Việt)* Trong buổi tiệc người chủ mời nhiều khách đến dự. Tiệc sắp khai mà một số người chưa đến đủ. Lúc đó chủ vô tình lại nói lớn: *"Người cần đến thì không đến"*. Vừa nói xong câu này một số người bỏ về mà không chào chủ. Ông chủ tiệc hoảng quá lại nói: *"Người không nên đi thì lại đi"*. Vừa nói xong câu này số người còn lại đi hết, chỉ trừ bạn thân nhất của Ông ở lại. Ông bạn thấy vậy đến nói: *"Khách khứa thế mà anh ăn nói không cẩn thận để người ta về hết"*. Ông chủ lại nói tiếp: *"Những lời tôi nói lúc nảy là đâu có ý nói những người vừa rồi đâu!"*. Sau cùng người bạn đứng bên Ông cũng bỏ đi.

a) Theo bạn những người ra đi sau câu nói thứ nhất là đã suy luận theo sơ đồ nào?
b) Theo bạn những người ra đi sau câu nói thứ hai là đã suy luận theo sơ đồ nào?
c) Theo bạn người bạn thân ra đi sau câu nói thứ ba là đã suy luận theo sơ đồ nào?

6. *(Bài tập - Hoàng Chúng)* Tìm các phán đoán đã được lược đi trong các lập luận sau, và xét xem lập luận có hợp logic không?

a) Anh ấy là người trung thực, có thể tin anh ấy.
b) Bệnh này không thể chữa khỏi, trừ phi có thuốc tiên.
c) Anh mà làm được việc ấy thì tôi đi đằng đầu.
d) Người già thì khó tính, mà chị đã già đâu.
e) "Muốn xây dựng chủ nghĩa xã hội phải làm gì? Nhất định phải tăng gia sản xuất cho nhiều. Muốn sản xuất nhiều thì phải có nhiều sức lao động. Muốn có nhiều sức lao động thì phải giải phóng sức lao động của phụ nữ" *(Hồ Chí Minh)*.

7. *(Bài tập - Hoàng Chúng)* Tìm quy tắc suy luận trong đoạn văn sau đây của K. Marx "Do có những lực lượng sản xuất mới, loài người thay đổi phương thức sản xuất của mình, và do thay đổi phương thức sản xuất, cách làm ăn của mình, loài người thay đổi tất cả những quan hệ xã hội của mình. Cái cối xay quay bằng tay đưa lại xã hội có lãnh chúa, cái cối xay chạy bằng hơi nước đưa lại xã hội có tư bản công nghiệp".

8. Xét xem lập luận sau có hợp logic không.

"Bảo rằng cách trở đò ngang,
Không sang thì cũng đường sang đã đành.
Nhưng đây cách một đầu đình,
Có xa xôi mấy mà tình xa xôi."
(Lỡ bước sang ngang, Nguyễn Bính)

9. Tìm kết luận hợp logic rút ra được từ hai phán đoán làm tiền đề (suy luận bằng cách dùng Tam đoạn luận)

a) "Mọi động vật ăn thịt đều hung dữ" và "Một số loài chó ăn thịt".
b) "Mọi động vật sống dưới nước đều biết bơi" và " Một số lòai gấu không biết bơi".
c) "Mọi người giàu có đều là những người chuyên cần " và " Mọi người chuyên cần đều là người đáng khen".
d) "Một số sinh viên thích học môn logic" và "Mọi sinh viên đều là người nghiên cứu khoa học".

e) "Không một sinh viên nào thích ở lại lớp" và "Nhiều người quanh chúng ta là sinh viên".
f) "Một số trẻ em thích trò chơi điện tử không ham học" và "Mọi trẻ em không ham học đều đến lớp trễ giờ"

§5. LẬP LUẬN HỢP LOGIC VÀ CHỨNG MINH.

5.1. Lập luận như thế nào được xem là hợp logic?

Xuất phát từ các tiền đề đúng chúng ta rút ra một kết luận đúng và hợp logic, một lập luận như vậy được gọi là một lập luận hợp logic.

Ví dụ:

Nếu hôm nay là ngày Quốc tế lao động thì các Công nhân không phải đi làm việc. Mà hôm nay đúng là ngày Quốc tế lao động. Vậy, các Công nhân không phải đi làm việc.

Nếu phán đoán "*Mà hôm nay đúng là ngày Quốc tế lao động*" là đúng thì đoạn lập luận trên đây là hợp logic. Vì phán đoán "*Nếu hôm nay là ngày Quốc tế lao động thì các Công nhân không phải đi làm việc*" là một phán đoán đúng. Đoạn lập luận này hợp logic vì đã dùng sơ đồ suy luận modus ponens.

Thật là điều kỳ diệu, Hoàng tử đã trở về sau bao năm dài biền biệc. Tình yêu hóa giải tất cả. Ngày ấy, mụ dì ghẻ đồng thời là Phù thủy độc ác đã có lời nguyền: "Hoàng tử, ngươi sẽ làm thân cóc xù xì biết nói, trừ phi ngươi được một người con gái xinh đẹp yêu ngươi!"

Đoạn lập luận trên đây nếu theo logic lưỡng trị thì không hợp logic. Khi đọc đoạn văn trên đây chúng ta nhận thấy rằng câu nói của mụ phù thủy nghĩa là "Nếu không có người con gái xinh đẹp yêu ngươi thì ngươi sẽ làm cóc". Nhưng theo cách lập luận trên chúng ta hiểu là nhờ một người con gái nào đó đã yêu con cóc biết nói mà con cóc đã biến lại làm Hoàng tử và Hoàng tử đã về.

Mọi sinh viên khoa Công nghệ thông tin đều học Toán. Vậy mà ở trường Đại học A có một số sinh viên không học Toán. Cho nên ở trường Đại học A có một số sinh viên không phải là sinh viên khoa Công nghệ thông tin.

Đoạn lập luận trên đây là hợp logic vì đó là một Tam đoạn luận dạng

$$\begin{array}{c} PaM \\ \underline{SoM} \\ SoP \end{array}.$$

5.2. Chứng minh là gì ?

Chứng minh một vấn đề là làm cho vấn đề sáng tỏ; rõ ràng mà không ai không công nhận được.

Theo GS. Hoàng Chúng nêu trong giáo trình logic học phổ thông như sau:

"Chứng minh một phán đoán A là vạch rõ rằng A là kết luận logic của những tiền đề đúng".

Phán đoán cần chứng minh được gọi là *Luận đề*.

Những tiền đề đúng được gọi là *Luận cứ*.

Kết luận logic hay các quy tắc suy luận để có kết luận *A* được gọi là *Luận chứng*.

Luận cứ là những tiền đề đúng đã được chứng minh, hoặc tính đúng đắn của nó đã được thực tế kiểm nghiệm. Luận chứng là những quy tắc suy luận như quy tắc modus ponens, modus tollens, đồng nhất,…

Sau đây là một số ví dụ.

1) Chứng minh tam giác ABC cân ở A và có một bằng 60^0 thì đó là tam giác đều.

Giả sử tam giác ABC cân ở A và góc A=60^0 (*Luận cứ*). Vì ABC cân ở A nên góc B bằng góc C (đây là một tiền đề tương đương giả thiết). Vì A+B+C=180^0 (tiền đề đúng).

Nên 60^0 + B+B=180^0 (luật đồng nhất - *Luận chứng*). Suy ra B+B=120^0 (luật đồng nhất - *Luận chứng*). Vì B+B=2.B nên theo luật đồng nhất – (*Luận chứng*) Suy ra 2.B=120^0 . Suy ra B=60^0. Theo trên B=C nên suy ra A=B=C=180^0 (luật đồng nhất - *Luận chứng*). Vậy, *Luận đề* tam giác đều đươc chứng minh.

2) Chứng minh rằng với mọi số nguyên *n* ta luôn có *n(n+1)* chia hết cho 2.

Luận đề cần chứng minh ở đây là *n(n+1)* chia hết cho 2. Luận cứ *n* là số nguyên. Một luận cứ đã biết trong số nguyên nữa là: *"số nguyên có dạng 2.k (k nguyên) thì chia hết cho 2"*.

Số nguyên chỉ có hai khả năng chẵn hoặc lẻ (để rút ra điều này là nhờ luật bài trung). Nếu *n* chẵn, *n* có dạng *2m.* Khi đó *n(n+1)=2m(2m+1)=2.K, trong đó K=m(2m+1).* Vậy *n(n+1)* chia hết cho 2. Luận cứ vừa dùng ở đây là quy tắc modus ponens.

(Số nguyên có dạng 2.k (k nguyên) thì chia hết cho 2.
Mà n(n+1) có dạng 2k.
Vậy, n(n+1) chia hết cho 2.)

Tương tự trường hợp n lẻ tức n=2m+1, lập luận tương tự.

3) Một người A đặt tay trên bàn có để lại dấu vân tay và người A này đã bỏ đi. Hôm sau một người B đến và muốn chứng tỏ A có đến đây. B có thể lập luận như sau:

Có dấu vân tay trên bàn, đem so sánh với dấu vân tay trên giấy Chứng Minh Nhân Dân của A hoàn toàn giống với dấu vân tay trên bàn. Vậy A đã đến đây.

Ở đây *Luận đề* là: A có đến đây, *Luận cứ* là: dấu vân tay để lại trên bàn, và một luận cứ con người biết đúng (do thực tế kiểm nghiệm) là "*Số người có vân tay giống nhau rất hiếm thậm chí trong một thời gian nào đó là không có*". Vậy, dấu vân tay trên bàn là của A (luật đồng nhất *luận chứng*). Điều đó chứng tỏ A có đến đây.

L*uận đề* này thật sự là đúng, nếu luận cứ "*Số người có vân tay giống nhau rất hiếm thậm chí trong một thời gian nào đó là không có*". Tính đúng đắn của mệnh đề này thường do ngành Công An cung cấp. Có thời điểm giấy Chứng Minh Nhân Dân của mỗi người sau 15 năm Công An yêu cầu làm lại.

Ba ví dụ mà chúng ta vừa xét ở trên là những chứng minh mà chúng ta gọi là chứng minh trực tiếp. Sau đây chúng ta nói thêm về chứng minh gián tiếp.

5.3. Chứng minh gián tiếp.

Bài thơ Đất nước của nhà thơ Nguyễn Đình Thi có hai câu thơ:

"Người ra đi đầu không ngoảnh lại,
Sau lưng thềm nắng lá rơi đầy"

Hai câu thơ này thường được phân tích là: Những người con trai Hà Nội ra đi chiến đấu mặc dù có vẽ dửng dưng (đầu không ngoảnh lại), nhưng trong lòng luôn yêu quê hương. Chúng ta có thể chứng minh nhận định này bằng lập luận sau đây: *Nếu một người không yêu quê hương thì họ ra đi không nghĩ gì đến quê hương cả. Mà những người con trai này ra đi có nghĩ đến quê hương (Sau lưng thềm nắng lá rơi đầy). Vậy họ phải yêu quê hương.*

Lập luận trên đã sử dụng sơ đồ suy luận modus tolent. Lập luận chứng minh như vậy được gọi là chứng minh gián tiếp.

Với tiền đề P và kết luận Q cần chứng minh. Ta giả sử không có Q và đi đến không có P. Nói cách khác sơ đồ chứng minh cũng là sơ đồ suy luận modus tolent

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \underline{\sim Q} \\ \ \sim P \end{array}.$$

Ví dụ: *Chứng minh nếu số* n^2 *là số chẵn thì n là số chẵn.*

Ở đây giả thiết P = "n^2 *là số chẵn*" và kết luận cần chứng minh Q = "*n là số chẵn*". Chúng ta có thể lập luận như sau: Giả sử không có Q, nghĩa là n không là số chẵn. Khi đó phải có số nguyên k sao cho $n = 2k+1$. Từ đó $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, hay có thể viết dưới dạng $n^2 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 = 2m + 1$. Điều này chứng tỏ n^2 không phải là số chẵn. Vậy, điều cần chứng minh là đúng.

Để chứng minh một vấn đề Q bằng cách chứng minh gián tiếp chúng ta có thể lập luận như sau: Giả sử không có Q và từ phán đoán $\sim Q$ này chúng ta lập luận hợp logic và đi đến một phán đoán hằng sai $R \wedge \sim R$, khi đó chúng ta kết luận Q đúng. Điều này là hợp logic vì quá trình lập luận có thể viết lại bằng sơ đồ sau:

$$\sim Q \Rightarrow R \wedge \sim R.$$

Phán đoán $\sim Q \Rightarrow R \wedge \sim R$ là đúng (nếu quá trình lập luận là hợp logic) và $R \wedge \sim R$ là luôn sai. Vậy, theo phép *kéo theo* $\sim Q$ phải sai. Tức là Q đúng.

Bài toán "*Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ*" là một ví dụ kinh điển về phương pháp chứng minh này. Thật vậy, giả sử $\sqrt{2}$ không là số vô tỷ, tức là $\sqrt{2}$ có thể viết dưới dạng một phân số tối giản $\frac{m}{n}$. Khi đó $m^2 = 2n^2$, điều này chứng tỏ m^2 là số chẵn. Theo ví dụ ở trên ta có *m* là số chẵn, tức là có thể viết *m=2.k*. Từ đẳng thức $m^2 = 2n^2$ cũng suy ra được *n* là số chẵn. Do vậy, phân số $\frac{m}{n}$ ước giản được cho 2; tức không phải là phân số tối giản. Tóm lại, từ phán đoán: "$\sqrt{2}$ không là số vô tỷ" ta lập luận hợp logic và có được cả hai phán đoán "phân số $\frac{m}{n}$ tối giản" và "phân số $\frac{m}{n}$ không tối giản". Đây là điều phải chứng minh.

Một người điều tra A hỏi một nghi phạm X: "Có phải hôm 30/4 lúc 9 giờ tối anh không ở nhà phải không?".

X trả lời "Không phải. Hôm ấy tôi ở nhà.".

Điều tra viên A không hỏi tiếp. A nhờ B, bảo X viết lại tường trình tối hôm đó lúc 9 giờ tối làm gì. X viết: "Hôm đó là ngày 30/4 tôi ở nhà coi phim với vợ, và đã coi phim: Bao Công". Hai hôm sau A nhờ C, bảo X viết lại tường trình tối 30/4 lúc 9 giờ tối làm gì. X viết: "Hôm đó là ngày 30/4 tôi ở nhà coi phim với vợ, và đã coi phim: Tây Du ký".

Từ hai bản tường trình trên Điều tra viên A kết luận "Ngày 30/4 lúc 9 giờ tối, X không có mặt ở nhà".

5.4. Chứng minh quy nạp.

5.4.1 Loại I.

Chứng minh quy nạp là chứng minh hàm phán đoán $P(n)$ đúng cho mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$. Nghĩa là chứng minh phán đoán phổ biến $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ là phán đoán đúng. Phương pháp chứng minh dựa vào nguyên lý sau gọi là nguyên lý quy nạp.

Bước 1: Chứng minh $P(0)$ đúng (hoặc P(1) hay P(2) … đúng).

Bước 2: Chứng minh phán đoán phổ biến $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ là đúng. Hay là giả sử với mọi số tự nhiên n, $P(n)$ đúng ta chứng minh được $P(n+1)$ đúng.

Sau hai bước chứng minh ta kết luận phán đoán $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ là đúng hay là $P(n)$ đúng cho mọi số tự nhiên n.

Tóm lại chứng minh quy nạp là dựa vào sơ đồ suy luận sau đây

$$\frac{P(0) \wedge\ \forall n \geq 0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)}{\forall n \in \mathbb{N}, P(n)}.$$

Trước tiên ta chứng minh sơ đồ suy luận trên là hợp logic. Thật vậy, nếu $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ là đúng thì không còn điều gì cần chứng minh. Giả sử $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ là phán đoán sai, nghĩa là $\exists n \in \mathbb{N},\ \sim P(n)$ là đúng. Từ đó có $n_0 \in \mathbb{N}$, phán đoán $P(n_0)$ là sai. Xét tập hợp S những số nguyên dương n sao cho $P(n)$ là phán đoán sai. Khi đó $n_0 \in S$. Vậy, S khác rỗng và hiển nhiên là một tập con của tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Vì mọi tập con của tập các số tự nhiên đều có phần tử nhỏ nhất, nên S có phần tử nhỏ nhất, giả sử đó là k. Vì $P(0)$ đúng nên $k > 0$. Từ đó $k-1 \in \mathbb{N}$ và $k-1 \notin S$, vì k là phần tử nhỏ nhất của S. Vậy $P(k-1)$ đúng. Theo bước 2 (bước quy nạp) phán đoán $P(k-1) \Rightarrow P(k)$ là đúng. Mà $P(k-1)$ đúng nên $P(k)$ phải đúng. Điều này mâu thuẫn với phán đoán $P(k)$ sai.

Chú ý chứng minh quy nạp cũng có thể là sơ đồ suy luận sau đây

$$\frac{P(1) \wedge\ \forall n \geq 1,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)}{\forall n \in \mathbb{N}, P(n)}.$$

Ví dụ: Chứng minh rằng với mọi số nguyên *n* ta luôn có *n(n+1)* chia hết cho 2.

Ví dụ: Chứng minh rằng từ một nhóm có *n* con người luôn có thể phân ra $2^n - 1$ nhóm con (bản thân nhóm ban đầu vẫn xem là một nhóm con).

Ví dụ: Hãy chỉ ra sai sót trong lập luận của chứng minh sau:

"Tất cả các con ngựa đều cùng một màu.

Thật vậy, gọi P(n) là mệnh đề tất cả các con ngựa trong một tập có n con ngựa là cùng một màu.

Mệnh đề đúng với n=1, vì một con ngựa hiển nhiên có một màu.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$*, nghĩa là trong tập có k con ngựa bất kỳ luôn có cùng một màu.*

Xét tập có k+1 con ngựa. Ta chia tập này ra làm hai tập con mỗi tập có k con ngựa. Theo giả thiết quy nạp các con ngựa ở hai tập này đều có cùng màu, và vì hai tập này có phần chung (giao khác rỗng) nên từ đó suy ra k+1 con ngựa có cùng màu.

Vậy, tất cả các con ngựa đều cùng một màu".

5.4.1 Loại II (dạng mạnh của phép quy nạp).

Dạng mạnh của phép quy nạp là chứng minh hàm phán đoán $P(n)$ đúng cho mọi số tự nhiên $n \geq n_0,\ n, n_0 \in \mathbb{N}$. Nghĩa là chứng minh phán đoán phổ biến $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ là phán đoán đúng cho mọi $n \geq n_0$. Phương pháp chứng minh dựa vào nguyên lý sau gọi là nguyên lý quy nạp mạnh.

Bước 1: Chứng minh $P(n_0)$ đúng.

Bước 2: Chứng minh phán đoán phổ biến $\forall k \in \mathbb{N},\ n_0 \leq k \leq n, P(k) \Rightarrow P(n+1)$ là đúng.

Hay là giả sử với mọi số tự nhiên $n_0 \leq k \leq n,\ P(k)$ đúng ta chứng minh được $P(n+1)$ đúng.

Sau hai bước chứng minh ta kết luận phán đoán $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ là đúng hay là $P(n)$ đúng cho mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

Tóm lại chứng minh quy nạp là dựa vào sơ đồ suy luận sau đây

$$\frac{P(n_0) \wedge\ \forall n, n_0 \leq k \leq n,\ P(k) \Rightarrow P(n+1)}{\forall n \geq n_0, P(n)}.$$

Cách chứng minh sơ đồ suy luận trên là hợp logic tương tự như trên. Một mệnh đề quan trọng được sử dụng trong cả hai chứng minh trên là: "*Mọi tập con của tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ đều có phần tử nhỏ nhất (tối tiểu)*".

Ví dụ: Chứng minh rằng mọi số tự nhiên $n \geq 12$ đều có thể viết dưới dạng $n = 4x + 5y$ trong đó $x, y \in \mathbb{N}$.

5.5. Sự đúng đắn của một vấn đề và một số sai lầm thường gặp trong một chứng minh.

Bàn về sự đúng đắn của một vấn đề hay một sự việc nào đó là thuộc về lĩnh vực Triết học. Do đó ở đây chỉ nói sơ lược mà không đi sâu vào vấn đề này.

Nhà Toán học và Triết học người Pháp Rene Descarter trong tác phẩm *bàn về phương pháp* đã đưa ra cách xem xét một vấn đề như sau:

"*Thứ nhất, một điều nào đó được tôi (Descarter) coi là đúng khi bản thân tôi nhận thấy hiển nhiên như vậy; tức là tôi hết sức tránh mọi sự hấp tấp hay phỏng chừng và chỉ đưa vào xét đoán của mình cái gì hiện ra trong đầu óc một cách rõ ràng và mạch lạc đến mức không thể có cơ hội hoài nghi nó được.*

Thứ hai, tôi chia mỗi một vấn đề mà tôi khảo sát ra bấy nhiêu phần nhỏ chừng nào còn có thể chia được và đến mức cần thiết phải chia, nhằm giải quyết chúng được tốt hơn.

Thứ ba, tôi dẫn dắt suy nghĩ của mình theo thứ tự, bắt đầu bằng những đối tượng đơn giản nhất và dễ nhận biết nhất, rồi mới dần dần đi lên từng bước cho tới đối tượng đa tạp nhất, đồng thời giả định một trật tự ngay giữa những đối tượng về bản chất không có cái nào đi trước hay đi sau cái khác.

Sau rốt, ở đâu tôi cũng tiến hành việc kiểm kê hoàn chỉnh và rà soát tổng quát để nắm chắc rằng mình không bỏ sót một điều gì. "

(Trương Quang Đệ, dịch và giới thiệu, *René Descarter và Tư duy khoa học*, NXB Giáo dục, năm 2000, tr. 39)

Cách xem xét để nhận biết tính đúng (hoặc sai) một vấn đề được *Descarter* chia thành nhiều vấn đề nhỏ, ở mỗi vấn đề nhỏ Ông nhận thấy nó đúng khi bản thân Ông nhận thấy "hiển nhiên" như vậy và sau đó Ông liên kết các vấn đề nhỏ thành vấn đề cần xét theo một trật tự. Cách xem xét vấn đề của *Descarter* về cơ bản là phương pháp *tiên đề* mà các nhà khoa học đã dùng để xây dựng nhiều lĩnh vực khoa, chẳng hạn Hình học; Luật... Tuy nhiên trong mỗi vấn đề nhỏ điều Ông nhận thấy *hiển nhiên như vậy* là một hạn chế trong cách xem xét vấn đề. Như thế nào là hiển nhiên? Đối với *Descarter* là hiển nhiên còn đối với người khác thì sao?

Trở lại khái niệm *phán đoán* trong logic. Phán đoán là một câu phản ánh một thực tế khách quan. Thực tế khách quan đúng gọi là phán đoán đúng, thực tế khách quan sai gọi là phán đoán sai. Như vậy, vấn đề đúng ở đây phải có tính khách quan tức không phụ thuộc vào ý thức con người.

Trong thực tế cuộc sống, một vấn đề thuộc lĩnh vực tự nhiên là đúng phải có tính khách quan. Chẳng hạn một định luật trong Vật lý, một tiên đề trong Hình học là đúng hoàn toàn khách quan không phụ thuộc vào ý thức con người. Một vấn đề thuộc lĩnh vực xã hội được xem là đúng phụ thuộc vào nhiều yếu tố trong đó có cả tính chủ quan của con người. Như một điều luật nào đó có thể sẽ thay đổi theo từng xã hội. Ví dụ Luật Hôn Nhân Và Gia Đình, theo bộ Luật Gia Long ban hành năm 1813 không cấm chế độ đa thê; một người đàn ông có thể có nhiều vợ, trong khi đó điều 4 Luật Hôn Nhân Và Gia Đình ban hành ngày 9/6/2000 của nước ta quy định: "*Cấm người đang có vợ, có chồng mà kết hôn hoặc chung sống như vợ chồng với người khác hoặc người chưa có vợ, chưa có chồng mà kết hôn hoặc chung sống như vợ chồng với người đang có chồng, có vợ.*" (Dẫn theo Huệ Khải, Gia Đình trong Tân Luật Cao Đài, NXB Tôn Giáo, 2014)

Bây giờ chúng ta xét Hình học trong không gian, một vấn đề thuộc lĩnh vực khoa học tự nhiên. Khi xây dựng Hình học không gian, sách giáo khoa lớp 11, NXB Giáo Dục, năm 2012 xuất phát từ 4 tiên đề đúng (4 tiên đề này độc lập, không mâu thuẫn) rồi suy luận logic để rút ra các mệnh đề đúng khác. Ở đây chúng ta thấy 4 tiên đề mà sách đưa ra là không chứng minh, vậy thì cơ sở nào để khẳng định tính đúng đắn của nó? Ví dụ tiên đề I: "*Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng, có duy nhất một mặt phẳng*", tiên đề này tại sao đúng mà lại không chứng minh? Cố nhiên bây giờ ít ai đặt lại câu hỏi này nữa. Tính đúng đắn của tiên đề này theo thời gian là phù hợp với thực tế cuộc sống, chẳng hạn người ta làm một cái kiền 3 chân đặt là đứng yên. Tức là ba chân này nằm trên một mặp phẳng. Cái kiền ba chân chỉ là một sự kiện để kiểm tra tính đúng (phù hợp) của tiên đề này giống như làm một thí nghiệm để kiểm tra tính đúng đắn của một định luật trong Vật lý. Tính đúng đắn của các tiên đề khác cũng được kiểm tra trong thực tế như vậy. Để có được môn hình học mà chúng ta đã biết hôm nay không phải là có ngay. Từ tác phẩm "*Cơ Bản*" của Euclide khoảng năm 330-275 trước Công nguyên, Euclide đã cố gắng xây dựng Hình học theo phương pháp tiên đề. Ông đã xuất phát từ một hệ thống các mệnh đề đúng (không chứng minh) rồi lập luận hợp logic để rút ra các mệnh đề khác. Tác phẩm này đã được các nhà Toán học sau đó nghiên cứu và chỉ ra những sai sót, trong đó có những tiên đề bị thiếu có những tiên đề thừa. Đến cuối thế kỷ XIX, Hilbert một nhà Toán học lỗi lạc người Đức mới xây dựng được một hệ thống tiên đề "vừa đủ" cho Hình học như bây giờ.

Tương tự như vậy cho những nội quy, điều luật của một Công ty khi mới xây dựng có thể chưa hoàn thiện ngay. Trong quá trình áp dụng vào thực tế người ta mới thêm vào những điều luật cần thiết hay bỏ đi những điều luật không phù hợp.

Xét lại ví dụ môn Hình học như đã nói ở trên, Logic học không bàn về tính đúng; sai của các tiên đề hay sự vừa đủ của một hệ thống tiên đề mà logic chỉ giúp chúng ta rút ra các mệnh đề (phán đoán) mới từ các mệnh đề đúng đã biết theo những quy tắc logic. Quá trình đó trước đây chúng ta gọi là một *chứng minh*. Trong quá trình thực hiện một chứng minh có thể chúng ta gặp một số sai lầm sau.

5.5.1 Sai lầm khi dùng một quy tắc logic (luận chứng sai).

Từ các tiền đề đúng nhưng nếu chúng ta dùng một quy tắc logic không đúng những kết quả mà chúng ta rút ra có thể sai.

Ví dụ:

1) Xuất phát từ một tiền đề đúng: "*Trời mưa thì đường ướt*" nhưng ta rút ra kết luận "*Trời không mưa thì đường không ướt*" là kết luận không đúng. Quy tắc logic không đúng đã áp dụng là

$$\frac{P \Rightarrow Q}{\sim P \Rightarrow \sim Q}.$$

2) Xuất phát từ một tiền đề đúng: "$\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y$ là một số lẻ " nhưng ta rút ra kết luận "*3+5 là số lẻ*" là kết luận không đúng. Quy tắc logic không đúng đã áp dụng là

$$\frac{\exists x,\, \exists y, P(x,y)}{P(a,b)}.$$

3) Giả sử hai tiền đề sau là đúng: "*Mọi người đọc truyện của nhà văn Kim Dung đều thích truyện kiếm hiệp*", "*Một số người thích truyện kiếm hiệp là nhà Văn*". Từ hai tiền đề đó ta rút ra kết luận: "*Một số nhà Văn đã đọc truyện của Kim Dung*". Kết luận này có thể sẽ không đúng vì trong lúc suy luận đã dùng quy tắc không hợp logic

$$\frac{\begin{array}{c} P\,a\,M \\ M\,i\,S \end{array}}{S\,i\,P}.$$

5.5.2 Sai lầm khi dùng một giả thiết không đúng (luận cứ sai).

Nếu chúng ta xuất phát từ một vài luận cứ sai (giả thiết không tồn tại, công thức sai, số liệu không chính xác hay những chứng cứ nguỵ tạo trong thực nghiệm…) khi đó kết luận chúng ta rút ra không có giá trị.

Ví dụ:

1) Xuất phát từ công thức sai $\sqrt{a^2} = a$ ta có thể chứng minh được khối lượng của con muỗi bằng khối lượng của con voi.

2) Xuất phát từ những chứng cứ chưa chính xác dẫn đến kết luận một người nào đó phạm tội sẽ không đúng. Theo Vnexpress (2/10/2014) "*Giữa tháng 8/2003, chị Nguyễn Thị Hoan bị giết hại tại nhà riêng ở thôn Me, xã Nghĩa Trung, huyện Việt Yên, Bắc Giang. Công an xác định ông Chấn (Nguyễn Thanh Chấn), hàng xóm với nạn nhân, là thủ phạm. [...] Trong 10 năm đi tù, ông Chấn liên tục gửi đơn kêu oan, ở bên ngoài vợ ông cũng ròng rã "gõ cửa" nhiều cơ quan công quyền và cho rằng thủ phạm thực sự của vụ án là người cùng làng Lý Nguyễn Chung. Tháng 7/2013, xem xét đơn của bà, Cục điều tra VKSND Tối cao đã vào cuộc. Hai ngày sau khi được VKSND Tối cao tạm tha về nhà sau 10 năm bị bắt, ngày 6/11/2013 TAND Tối cao trong phiên tái thẩm đã hủy hai bản án kết tội ông Chấn giết người với mức phạt tù chung thân. Vụ án được điều tra lại. Trước đó ít ngày, Lý Nguyễn Chung đã ra đầu thú, nhận đã giết chị Hoan để cướp 2 chiếc nhẫn cùng 59.000 đồng rồi bỏ trốn*." Cuối cùng ông Nguyễn Thanh Chấn đã được trả lại sự trong sạch.

5.5.3 Lập luận lòng vòng không lối thoát.

Sai lầm này là khi chứng minh một luận đề A nào đó ta đã dùng một luận cứ B mà sự đúng đắn của B lại phụ thuộc vào A. Loại sai lầm này trong khoa học không dễ nhận ra ngay.

Trong lịch sử môn Hình học chúng ta biết tiên đề Euclide "*Qua một điểm ngoài một đường thẳng cho trước có không quá một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho*" đã làm đau khổ không biết bao nhiêu nhà Toán học mà nó cũng đem lại nhiều niềm vui và vinh quang cho Bolyai người Hungari và Lobasepxki người Nga. Các nhà Toán học sau Euclide nghĩ rằng tiên đề này có thể suy luận logic ra được từ các tiên đề khác. Từ Proclus (410-485) nhà Triết học và Toán học người Hy Lạp đến Saccheri (1667-1733), Lambert (1728-1777), Legendre (1752-1883) đều cố công chứng minh nó, nhưng cuối cùng mỗi nhà Toán học nói trên chỉ tìm được một mệnh đề tương đương với nó mà thôi. Đến nửa sau thế kỷ XIX, Bolyai và Lobasepxki mới chứng tỏ rằng mệnh đề trên là độc lập không thể suy ra từ các tiên đề khác. Hai ông xây dựng được một loại Hình học mới gọi là Hình học phi Euclide trong đó thay tiên đề Euclide nói trên bằng một mệnh đề phủ định của nó. (Bạn đọc có thể xem thêm *Nguyễn Mộng Hy, Xây dựng Hình học bằng phương pháp tiên đề, NXB Giáo Dục, 1993*).

Trong cuộc sống có những vấn đề người ta muốn làm sáng tỏ nó (trong các buổi nói chuyện, tranh luận …) nhưng sau một hồi lập luận lại không nói lên được điều gì cả, thậm chí nói trở lại vấn đề cần chứng minh ban đầu. Để minh họa cho điều này, Antoine de Saint-Exupéry là một nhà văn và phi công người Pháp, trong quyển truyện *Hoàng tử bé* dành cho thiếu nhi có kể một câu chuyện:

> "Hoàng tử bé trong một lần viếng thăm một hành tinh xa xăm *gặp một tay bợm nhậu đang ngồi im lặng trước một bộ sưu tập chai không và một bộ sưu tập chai đầy. Hoàng tử bé hỏi: Anh đang làm gì vậy?*
>
> *– Ta nhậu, bợm nhậu trả lời, vẻ thiểu não.*
>
> *– Tại sao anh nhậu? Hoàng tử bé hỏi lại anh ta.*
>
> *– Để quên, bợm nhậu trả lời.*
>
> *– Để quên cái gì? Hoàng tử bé hỏi trong lúc bắt đầu cảm thấy ái ngại cho hắn.*
>
> *– Để quên nỗi xấu hổ của ta, bợm nhậu cúi đầu thú nhận.*
>
> *– Xấu hổ vì cái gì? Hoàng tử bé hỏi, đã muốn giúp đỡ hắn.*
>
> *– Xấu hổ vì cái nhậu! Bợm nhậu kết thúc và nhất quyết lặng im.*

Và Hoàng tử bé ra đi, sửng sốt.

Những người lớn nhất định là rất kỳ quặc, Hoàng tử bé tự nói thầm trong suốt cuộc hành trình."

(Hoàng tử bé, Vĩnh Lạc dịch, Nhà xuất bản Văn học, 2013)

Antoine de Saint-Exupéry (1900-1944) là một nhà văn và phi công chiến đấu người Pháp viết quyển truyện *Hoàng tử bé* vào năm 1943, trong lúc đang sống lưu vong tại Mỹ. Một năm sau Ông qua đời trước khi quyển sách được xuất bản tại New York và sau đó là tại Pháp. Cho đến nay sách đã được dịch ra khoảng 160 ngôn ngữ và phát hành hơn 50 triệu bản. Rất nhiều thế hệ trẻ em kể cả người lớn đã đọc tác phẩm này với một cảm xúc miên man.

5.6. Một phương pháp chứng minh vấn đề bằng cách dùng *Tam chi tác pháp* của nhân minh học.

Phần này để biết rõ hơn bạn đọc có thể tham khảo các tài liệu [10], [11] hoặc một số sách về Nhân minh học.

Nhân minh học là một môn học lý luận có từ rất sớm ở Ấn Độ do A. Kaspada Gautama; Người Trung Quốc dịch là Túc Mục Tiên Nhơn, tổng kết, vào khoảng thế kỷ 7 hay 6 trước Công nguyên. Sau này Phật giáo tiếp thu và phát triển trong hệ thống Kinh – Luận của mình. Môn học này cũng phân tích vấn đề rất chi tiết, bạn đọc có thể tìm đọc trong một số Kinh – Luận Phật giáo. Nói vắn tắt thì Nhân minh học có ba phần:

Tôn: là vấn đề nêu ra cần làm sáng tỏ.

Nhân: là nguyên nhân hay là lý do để có Tôn.

Dụ: là tỷ dụ, mượn vật để thấy, để biết làm tỷ dụ để làm bằng chứng cho *Nhân*. Từ đó sáng tỏ phần *Tôn*.

Ví dụ: Mọi người đều phải chết (Tôn).
Bởi vì nếu không có tai nạn gì thì già cũng phải chết (Nhân).
Cũng như mọi động vật khác, khi già cũng phải chết (Dụ).

Bài tập

1. Xét bài toán cùng với lời giải của nó (ta xem đây là một đoạn văn): *"Cho $a \neq 0$. Chứng minh rằng phương trình bậc nhất $ax+b=0$ có không quá một nghiệm.*
Giải: Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt u, v, $(u \neq v)$. Khi đó $au+b=0$ và $av+b=0$. Từ đây suy ra $av+b=au+b$ hay $a(u-v)=0$. Vì $a \neq 0$ nên $u-v=0$, hay $u=v$. Vậy, phương trình bậc nhất $ax+b=0$ có không quá một nghiệm".

Hãy chỉ rõ luận đề, những luận cứ và những luận chứng trong lập luận ở trên.

2. Chứng minh quy tắc suy luận sau là hợp logic.

$$\frac{P \Rightarrow R \ \wedge \ Q \Rightarrow R}{P \vee Q \Rightarrow R}$$

Nghĩa là $\left[\ P \Rightarrow R \ \wedge \ Q \Rightarrow R \ \right] \Rightarrow \ P \vee Q \Rightarrow R$ hằng đúng.

a) Áp dụng: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, $n^3 + 2n$ luôn chia hết cho 3.
b) Xét xem lập luận sau có hợp logic hay không: *"Nếu An học giỏi thì An được thưởng. Nếu An tham gia các phong trào trong lớp tốt thì An được thưởng. Vậy, nếu An học giỏi hoặc tham gia các phong trào trong lớp thì An được thưởng".*

3. Hãy chỉ rõ luận đề, những luận cứ và những luận chứng trong lập luận sau:
"Giả sử từ điểm A ngoài đường thẳng a ta kẻ được hai đường thẳng phân biệt b, c cùng vuông góc với đường thẳng a. Đường thẳng b vuông góc với a tại B, đường thẳng c vuông góc với a tại C. Khi đó tam giác ABC có $A + B + C = A + 90^0 + 90^0 = 180^0 + A > 180^0$. *Nhưng, hiển nhiên trong tam giác ABC,* $A + B + C = 180^0$.

Vậy, từ điểm A ngoài đường thẳng a ta không thể kẻ được hai đường thẳng phân biệt b, c cùng vuông góc với đường thẳng a".

4. An đọc truyện Kiều đến đoạn:

Tiểu thư vội thét: " Con Hoa!
Khuyên chàng chẳng cạn, thì ta có đòn!
Sinh càng nát ruột, tan hồn,
Chén mời phải ngậm bồ hòn, ráo ngay!"

An phân tích cho Bình nghe như sau: "*Thuý Kiều không bị Hoạn Thư đánh đòn. Bởi vì, nếu Thúc Sinh không uống cạn chén rượu do Thuý Kiều mời thì Thuý Kiều sẽ bị Hoạn Thư đánh đòn. Nhưng Thúc Sinh trong lòng thì yêu Thuý Kiều còn bản thân là người sợ vợ (Hoạn Thư) nên đã cố uống cạn*."

Bạn hãy cho biết luận đề, những luận cứ và những luận chứng trong lập luận của An ở trên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO TRÍCH DẪN

1. Nguyễn Phú Vinh, Nguyễn Đình Tùng: Logic học và ứng dụng, Trường Đại Học Công Nghiệp Tp. Hồ Chí Minh, năm 2010.
2. Hoàng Chúng: Logic học phổ thông, NXB Giáo dục, năm 1994
3. Nguyễn Đức Dân: Logich và Tiếng việt, NXB Giáo dục, năm 1998.
4. Hoàng Phê: Tuyển tập Ngôn ngữ học, NXB Đà Nẵng, năm 2007.
5. Lê Tử Thành: Tìm hiểu Logich học, NXB Trẻ, năm 1993.
6. Kenneth H. Rosen: Toán học rời rạc ứng dụng trong Tin học, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà nội, năm 2000.
7. Hermann Hesse: Câu chuyện dòng sông, NXB Hội nhà văn, không ghi dịch giả, Nhật Chiêu viết lời giới thiệu, năm 1999. Câu chuyện dòng sông, NXB Văn hóa Sài gòn, Phùng Khánh; Phùng Thăng dịch, Thái Kim Lan giới thiệu, năm 2008.
8. Hermann Hesse: Nhà khổ hạnh và Gã lang thang, Trí Hải; Vinh Bạch; Lan Nhã dịch, không ghi năm và nhà xuất bản.
9. Ernest Hemingway: Ông già và biển cả, Huy Phương dịch và giới thiệu, NXB Văn nghệ Tp. Hồ Chí Minh, năm 2000.
10. Thích Đồng Quán: Nhân Minh luận, Thành hội Phật giáo Tp. Hồ Chí Minh xuất bản, năm 1997.
11. Thích Trung Hậu, Thích Hải Ấn: sưu tầm và giới thiệu tác phẩm của Tâm Minh Lê Đình Thám, (tham khảo phần: *lược giải Nhân minh nhập chánh lý luận* và *Nhân minh tổng luận*)
12. Một số tác phẩm Văn học trong nhà trường: Truyện Kiều; Lục Vân Tiên; Chinh Phụ ngâm; Quan Âm Thị Kính; v.v….