HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG
Khoa Cơ Bản 1

ĐỖ PHI NGA

# BÀI GIẢNG
# TOÁN CAO CẤP 2
# (ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH)

*Hà Nội - 2013*

# LỜI NÓI ĐẦU

Tập " Bài giảng toán cao cấp học phần Đại số tuyến tính" chứa đựng nội dung của học phần Toán cao cấp 2, nằm trong môn học Toán cao cấp, dành cho đối tượng sinh viên đại học chính qui nhóm ngành kinh tế: quản trị kinh doanh, kế toán, đa phương tiện...của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông.

Tập bài giảng này được biên soạn theo Đề cương tín chỉ học phần toán cao cấp 2 đã được Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông ban hành năm 2012, bám sát giáo trình môn Đại số của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông.

Tập bài giảng gồm 5 chương tương ứng với hai tín chỉ, 30 giờ học, 6 giờ bài tập.

**Chương 1**: Lôgic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ.

**Chương 2**: Không gian véc tơ $n$ chiều.

**Chương 3**: Ma trận và định thức.

**Chương 4**: Hệ phương trình tuyến tính.

**Chương 5**: Phép biến đổi tuyến tính và dạng toàn phương trên không gian $\mathbb{R}^n$.

Để dễ dàng cho việc tự học của sinh viên, nội dung tập bài giảng này được tác giả trình bày theo hướng cơ bản là :

Cố gắng giữ lại một phần nào cấu trúc chặt chẽ của môn Đại số, tuy nhiên không thể bao quát đầy đủ nội dung của môn Đại số tuyến tính. Các định lý được phát biểu và chứng minh chính xác.

Tài liệu này có nội dung thuần túy toán học, không lồng ghép khái niệm liên quan đến chuyên ngành vì đối tượng chủ yếu là sinh viên năm thứ nhất Đại học - cao đẳng, chưa được trang bị kiến thức về chuyên ngành. Hầu hết các nội dung đều bắt đầu từ định nghĩa, dẫn đến tính chất, phương pháp tính và thuật toán với nhiều ví dụ minh họa để sinh viên có thể học theo trình tự trong tài liệu, trên lớp không cần ghi chép nhiều, dành thời gian nghe giảng, hướng dẫn.

Qua đó mong muốn người học củng cố và rèn luyện phương pháp tư duy. Chú ý đến việc lập luận chính xác, chặt chẽ, cũng như có kỹ năng tính toán tốt. Mong muốn người học xem môn toán cao cấp 2 nói riêng, toán học nói chung như một công cụ để học môn học chuyên ngành khác, cũng như trong công tác nghiên cứu sau này, khi giải quyết những vấn đề mới nảy sinh….

Tác giả bày tỏ lòng cảm ơn tới các thày cô giáo Bộ môn Toán đã có những nhận xét quí báu cho tài liệu này và mong nhận được những góp ý của các thày cô giáo, đồng nghiệp và các học viên, sinh viên nhằm làm cho việc trình bày nội dung tập bài giảng này được tốt hơn.

*Hà nội, tháng 11 năm 2013.*

# MỤC LỤC

# CHƯƠNG 1

# MỞ ĐẦU VỀ LÔGIC MỆNH ĐỀ , TẬP HỢP, ÁNH XẠ

Những vấn đề được trình bày trong chương này có thể xem như những yếu tố cơ bản, rất cần thiết cho học viên trong việc học tập các môn toán cao cấp nói chung và học phần toán cao cấp 2 nói riêng.

Trong chương này ở phần đại cương về lôgic mệnh đề toán, tập hợp, chúng tôi chỉ trình bày những vấn đề cơ bản, nhằm mục đích củng cố những vấn đề mà học viên đã được trang bị từ đầu cấp học THCS và PTTH; từ đó nhấn mạnh tầm quan trọng của những kiến thức mà hầu như đại đa số học viên không thường xuyên vận dụng, khai thác trong quá trình học tập.

Ánh xạ là một khái niệm được dùng để định nghĩa nhiều khái niệm khác trong toán hoc, chẳng hạn dùng để định nghĩa hàm số, đạo hàm… ở môn Giải tích. Trong môn học Toán cao cấp 2, học viên sẽ thấy ánh xạ còn được sử dụng để định nghĩa hầu hết các khái niệm mới như định nghĩa phép toán hai ngôi, từ đó định nghĩa không gian véc tơ, ánh xạ tuyến tính, dạng toàn phương …

Nắm vững và sử dụng một cách chính xác các luật lôgic mệnh đề, vận dụng triệt để các kiến thức về lý thuyết tập hợp, ánh xạ là một yếu tố quan trọng đối với bất kỳ học viên nào muốn đạt kết quả tốt trong học tập các môn toán nói riêng cũng như trong mọi lĩnh vực nghiên cứu khác.

## 1.1 LÔGIC MỆNH ĐỀ

### 1.1.1 Mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề

Trong mục này, ta chỉ giới hạn nói về các mệnh đề Toán.

Một câu khẳng định, phản ánh một điều có thể hoặc đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai là một mệnh đề.

Lôgic mệnh đề là một hệ thống lôgic đơn giản nhất, với đơn vị cơ bản là các mệnh đề.

Ví dụ: “$7 > 9$” là mệnh đề sai , “tam giác đều là một tam giác cân”, hay “tam giác $ABC$ là tam giác vuông tại đỉnh $A$ khi và chỉ khi $BC^2 = AC^2 + AB^2$ ” là những mệnh đề đúng, “ $x \vdots 3$” không phải là một mệnh đề.

Ta sẽ không quan tâm đến nội dung cụ thể của từng mệnh đề, mà chỉ dừng ở tính chất của nó hoặc đúng hoặc sai.

Ta dùng ký hiệu các chữ cái $p, q, r...$. để chỉ các mệnh đề chưa xác định.

Nếu mệnh đề $p$ đúng ta cho $p$ nhận giá trị 1 và nếu mệnh đề $p$ sai ta cho nhận giá trị 0. Giá trị 1 hoặc 0 được gọi là thể hiện của $p$ .

Phủ định của mệnh đề $p$ là mệnh đề được ký hiệu $\overline{p}$, đọc là không $p$. Mệnh đề $\overline{p}$ đúng khi $p$ sai và $\overline{p}$ sai khi $p$ đúng. Một bảng chân lý ghi lại hai khả năng đó:

| $p$ | $\overline{p}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

Tương tự ngôn ngữ thông thường, người ta dùng các liên từ để nối các câu đơn thành câu phức hợp**,** các liên từ thường gặp như "và", "hay là", "hoặc…hoặc..", "nếu …thì"**…**

Mệnh đề phức hợp được xây dựng từ các mệnh đề đơn giản hơn bằng các phép liên kết lôgic mệnh đề.

**b. Các phép liên kết lôgic mệnh đề**

**1) Phép hội**: Hội của hai mệnh đề $p,q$ là một mệnh đề, được ký hiệu $p \wedge q$ (đọc là $p$ và $q$). Mệnh đề $p \wedge q$ chỉ đúng khi $p$ và $q$ cùng đúng, sai trong các trường hợp còn lại. Có thể ký hiệu là $\begin{cases} p \\ q \end{cases}$.

**2) Phép tuyển**: Tuyển của hai mệnh đề $p,q$ là mệnh đề được ký hiệu $p \vee q$ (đọc là $p$ hoặc $q$). Mệnh đề $p \vee q$ chỉ sai khi $p$ và $q$ cùng sai, đúng trong các trường hợp còn lại. Có thể ký hiệu $\left[\begin{array}{l} p \\ q \end{array}\right.$**.**

Ở đây **"** hoặc $p$ hoặc $q$" không được hiểu theo nghĩa loại trừ, tách biệt trong đó cả $p,q$ không thể cùng đúng, mà tất nhiên $p \vee q$ đúng khi cả $p$, $q$ cùng đúng.

3) **Phép kéo theo**: Mệnh đề $p$ kéo theo $q$, ký hiệu $p \Rightarrow q$, là mệnh đề chỉ sai khi $p$ đúng $q$ sai.

**Chú ý 1.1.**

- Nếu p sai thì mệnh đề này luôn đúng. Hay " từ điều sai suy ra mọi điều tuỳ ý".
- Hai mệnh đề $p,q$ ở đây phải thuộc cùng một vấn đề, không thể là hai mệnh đề "xa lạ" không có liên quan gì với nhau.
- Trong phép kéo theo $p \Rightarrow q$, $p$ được gọi là giả thiết, $q$ là kết luận.
- Phép kéo theo $q \Rightarrow p$ được gọi là đảo hoặc mệnh đề đảo của phép kéo theo $p \Rightarrow q$.

Ta còn diễn tả $p \Rightarrow q$ bằng một trong các cách sau:

- Nếu $p$ thì $q$

- Muốn có $p$ cần có $q$
- Muốn có $q$ thì có $p$ là đủ
- $p$ là một điều kiện đủ của $q$
- $q$ là một điều kiện cần của $p$.

Phép kéo theo là liên kết lôgic mệnh đề thường gặp nhất trong các định lý.

**Ví dụ 1.1.** (tính chất của tam giác đều) Tam giác $ABC$ là tam đều thì đó là một tam giác cân.

**Ví dụ 1.2.** (định lý Vi-et thuận) Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2$ thì $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

(định lý Vi-et đảo) Nếu có hai số $x_1, x_2$ sao cho $x_1 + x_2 = S$; $x_1 x_2 = P$ và $S^2 \geq 4P$, thì $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - Sx + P = 0$.

**Ví dụ 1.3.** (định lý điều kiện cần về cực trị của hàm số)

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D_f$, $a \in D_f$. Nếu hàm số khả vi tại $a$ và đạt cực trị địa phương tại $a$ thì $f'(a) = 0$.

Ta đều đã biết điều ngược lại của các mệnh đề trên chưa chắc đúng.

4) **Phép tương đương**: Mệnh đề $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ được gọi là mệnh đề $p$ tương đương $q$, ký hiệu $p \Leftrightarrow q$.

Như vậy $p \Leftrightarrow q$ là một mệnh đề đúng khi cả hai mệnh đề $p$ và $q$ cùng đúng hoặc cùng sai và mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ sai trong trường hợp ngược lại.

**Ví dụ 1.4. (**định lý Pi-ta-go**)** Tam giác $ABC$ là tam giác vuông tại đỉnh $A$ khi và chỉ khi $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

❖ Từ định nghĩa của các phép liên kết mệnh đề ta có bảng sau:

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $p \vee q$ | $p \wedge q$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $p \Leftrightarrow q$ | $\overline{q} \vee p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Bảng chân lý thể hiện giá trị các mệnh đề.

**Chú ý 1.2**.

- Mỗi định lý sau khi được chứng minh là một mệnh đề đúng.
- Mỗi định lý đã được chứng minh lại là căn cứ để chứng minh định lý khác.
- Có hai loại mệnh đề được sử dụng làm căn cứ để chứng minh một mệnh đề:
  1. Các mệnh đề đã được thừa nhận là đúng : đó là các định nghĩa và tiên đề.
  2. Các mệnh đề đã được chứng minh là đúng.

Một công thức mệnh đề được gọi là hằng đúng là một mệnh đề đúng với bất kỳ các giá trị chân lý của các mệnh đề có trong công thức.

### 1.1.2. Các tính chất (hay còn gọi là các luật lôgic)

Ta ký hiệu mệnh đề tương đương hằng đúng là "$\equiv$" đọc là "đồng nhất bằng" thay cho ký hiệu "$\Leftrightarrow$".

**Tính chất 1.1.** Dùng bảng chân trị ta dễ dàng kiểm chứng các mệnh đề hằng đúng sau:

1) luật phủ định kép $\overline{\overline{p}} \equiv p$

2) luật giao hoán : $p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

3) luật kết hợp : $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

$p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$

4) luật phân phối : $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ .

5) luật bài trung : mệnh đề $p \vee \overline{p}$ luôn đúng

luật mâu thuẫn : mệnh đề $p \wedge \overline{p}$ luôn sai

6) luật De Morgan: $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$ ;

$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$ .

7) $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$.

8) luật phản chứng : $p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

9) luật lũy đẳng : $p \vee p \equiv p$; $p \wedge p \equiv p$ .

10) luật hấp thu : $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ .

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Luật lôgic 7) ở trên còn cho ta cở sở để chứng minh mệnh đề $p \Rightarrow q$ bằng phương pháp suy luận phản chứng.

Nhiều trường hợp chứng minh rằng $p \Rightarrow q$ là đúng bằng cách trực tiếp không thuận lợi, hoặc không thực hiện được thì ta dùng phương pháp suy luận phản chứng.

**Phương pháp suy luận phản chứng:** Để chứng minh rằng $p \Rightarrow q$ là đúng, ta giả thiết là $p$ đúng và $q$ sai, và ta chứng tỏ rằng điều đó dẫn đến mâu thuẫn. Việc đó qui về chứng minh rằng $(p \wedge \overline{q})$ là sai, tức là $(\overline{p} \vee q)$ là đúng, đó chính là $p \Rightarrow q$.

## 1.2 TẬP HỢP

### 1.2.1 Khái niệm tập hợp

Tập hợp và phần tử là khái niệm cơ bản của toán học, không thể định nghĩa qua các khái niệm đã biết. Các đối tượng có chung một số tính chất nào đó có thể xem là một tập hợp. Mỗi đối tượng đó là một phần tử của tập hợp. Một phần tử bất kỳ chỉ có thể hoặc thuộc hoặc không thuộc tập hợp.

Thường ký hiệu các tập hợp bởi các chữ in $A, B, \ldots X, Y, \ldots$ còn các phần tử bởi các chữ thường $x, y, \ldots$ Nếu phần tử $x$ thuộc $A$ ta ký hiệu $x \in A$, nếu $x$ không thuộc $A$ ta ký hiệu $x \notin A$. Ta cũng nói tắt "tập" thay cho thuật ngữ "tập hợp".

Tập rỗng là tập không chứa phần tử nào, ký hiệu $\varnothing$. Chẳng hạn tập nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ nếu xét trong tập hợp số thực.

**Ta thường mô tả tập hợp theo các cách sau:**

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.
- Nêu đặc trưng tính chất của các phần tử tạo thành tập hợp.
- Dùng giản đồ Venn: để có hình ảnh trực quan về tập hợp, người ta thường biểu diễn tập hợp như là miền phẳng giới hạn bởi đường cong khép kín không tự cắt.

Các tập hợp số với qui ước thống nhất trong toán học thường gặp:

- Tập các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- Tập các số nguyên $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.
- Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q} = \{ p/q \mid q \neq 0,\ p, q \in \mathbb{Z} \}$.
- Tập các số thực $\mathbb{R}$.
- Tập các số phức $\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R};\ i^2 = -1 \}$.

**Ví dụ 1.5.**

- Mỗi tập thể lớp là một tập hợp.
- Bộ ba cán bộ lớp : {lớp trưởng, lớp phó, bí thư chi đoàn} là một tập hợp.
- Tập các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 10 là $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
- Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ là $\{-1, 1\}$.

- $\{ x \in \mathbb{R} | \, x^2 + 1 = 0 \} = \varnothing$. Tập các nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập rỗng.
- $W = \{ x, y, z \in \mathbb{R} | \, x + y + z = 0 \}$ là tập các số thực $x, y, z$ thoả mãn $x + y + z = 0$.
- Ký hiệu tập $C_{[a,b]}$ là tập các hàm số liên tục trên $[a,b]$.

**Ví dụ 1.6.** $P = \left\{ p \in \mathbb{Q} \,|\, p = \dfrac{n^3 - 1}{3n^2 + 1}; n \in \mathbb{N} \right\}$ là tập các số hữu tỷ có dạng $p = \dfrac{n^3 - 1}{3n^2 + 1}$ trong đó $n$ là số tự nhiên .

### 1.2.2 Tập con. Các phép tính về tập hợp

**a. Tập con.**

**Định nghĩa 1.1.** Tập $A$ được gọi là tập con của $B$ nếu mọi phần tử của $A$ đều là phần tử của $B$, khi đó ta ký hiệu $A \subset B$ hay $B \supset A$.

Khi $A$ là tập con của $B$ thì ta còn nói $A$ bao hàm trong $B$, hay $B$ bao hàm $A$, hay $B$ chứa $A$.

Ta có: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Một cách hình thức ta có thể xem tập rỗng là tập con của mọi tập hợp, nghĩa là với mọi tập $X$: $\varnothing \subset X$.

Tập hợp tất cả các tập con của $X$ được ký hiệu $\mathscr{P}(X)$. Vậy $A \in \mathscr{P}(X)$ khi và chỉ khi $A \subset X$. Tập $X \subseteq X$ là tập con của chính nó nên là phần tử lớn nhất còn $\varnothing$ là phần tử bé nhất trong $\mathscr{P}(X)$.

**Ví dụ 1.7.** Cho $X = \{a, b, c\} \Rightarrow \mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, X\}$.

Ta thấy $X$ có 3 phần tử thì $\mathscr{P}(X)$ có $2^3 = 8$ phần tử.

Ta có thể chứng minh tổng quát rằng nếu $X$ có $n$ phần tử thì $\mathscr{P}(X)$ có $2^n$ phần tử.

**Định nghĩa 1.2.** Hai tập $A, B$ bằng nhau, ký hiệu $A = B$, khi và chỉ khi $A \subset B$ và $B \subset A$. Nghĩa là: $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$.

Để chứng minh $A \subset B$ ta chỉ cần chứng minh $x \in A \Rightarrow x \in B$ và vì vậy khi chứng minh $A = B$ ta chỉ cần chứng minh $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

**Định nghĩa 1.3.** Tích Đề các của hai tập $X, Y$ là một tập hợp, ký hiệu $X \times Y$, gồm các phần tử có dạng $(x, y)$ trong đó $x \in X$ và $y \in Y$. Nghĩa là:

$$X \times Y = \{ (x, y) | (x \in X) \wedge (y \in Y) \}. \tag{1.1}$$

- Mở rộng cho trường hợp: với $X_1, X_2, ..., X_n$ là n tập hợp nào đó, ta định nghĩa và ký hiệu tích Đề các của $n$ tập hợp này như sau:

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, x_i \in X_i \,,\, i = 1,2,\ldots,n \right\}. \qquad \textbf{(1.2)}$$

- Khi $X_1 = \ldots = X_n = X$ thì ta ký hiệu $X^n$ thay cho $\underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ lần}}$.
- Tích Đề các $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ còn được ký hiệu $\prod_{i=1}^{n} X_i$.

**Ví dụ 1.8.** Cho $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2\}$ $\Rightarrow$ $X \times Y = \{(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)\}$.

**Chú ý 1.3.**

1. Ta dễ dàng chứng minh được rằng nếu $X$ có $n$ phần tử, $Y$ có $m$ phần tử thì $X \times Y$ có $n \times m$ phần tử.
2. Giả sử $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$ ; $(x'_1, \ldots, x'_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$ thì
$$(x_1, \ldots, x_n) = (x'_1, \ldots, x'_n) \Leftrightarrow x_i = x'_i, \forall i = 1, \ldots, n.$$
3. Tích Descartes của các tập hợp không có tính giao hoán.

**Ví dụ 1.9.** $\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R},\, i = 1,2,\ldots,n \right\}$, vậy thì $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ tương ứng lần lượt là ký hiệu của mặt phẳng $Oxy$ và không gian $Oxyz$ quen thuộc.

- $\mathbb{R}^2 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$.
- $\mathbb{R}^3 = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

### 1.2.2 Các phép toán và các tính chất trên các tập hợp

**a. Phép hợp**: Hợp của hai tập $A$ và $B$, ký hiệu $A \cup B$, là tập gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập $A$, $B$. Nghĩa là:

$$A \cup B = \left\{ x \middle| (x \in A) \vee (x \in B) \right\}$$

Vậy $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$

hay $x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$.

**b. Phép giao**: Giao của hai tập $A$ và $B$, ký hiệu $A \cap B$, là tập gồm các phần tử thuộc đồng thời cả hai tập $A$, $B$. Nghĩa là:

$$A \cap B = \left\{ x \middle| (x \in A) \wedge (x \in B) \right\}.$$

Vậy $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$ hay $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$.

**c. Hiệu của hai tập**: Hiệu của hai tập $A$ và $B$, ký hiệu $A \setminus B$ hay $A - B$, là tập gồm các phần tử thuộc $A$ nhưng không thuộc $B$. Nghĩa là:

$$A \setminus B = \left\{ x \middle| \ (x \in A) \wedge (x \notin B) \right\}.$$

Vậy $x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \left( x \,\overline{\in}\, B \right)$ hay $x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$.

**Chú ý 1.4.**

- Phép hợp, phép giao còn được mở rộng cho một họ các tập hợp.

- Trường hợp $B \subset X$ thì tập $X \setminus B$ được gọi là phần bù của $B$ trong $X$, ký hiệu là $C_X^B$.

Áp dụng lôgic mệnh đề ta dễ dàng kiểm chứng lại các tính chất sau:

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$. (tính giao hoán).
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. (tính kết hợp).
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. (tính phân bố).

Giả sử $A, B$ là hai tập con của $X$ thì:

4. $\overline{\overline{A}} = A$; $A \cup \varnothing = A$; $A \cap X = A$.
5. $A \cup \overline{A} = X$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. (luật De Morgan).
7. $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap \left( \overline{A \cap B} \right) = A \setminus (A \cap B) = C_A^{A \cap B}$.

**1.2.3 Hàm mệnh đề. Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại**

**a. Hàm mệnh đề**

Trên tập hợp $D$, ký hiệu $S(x)$ là hàm mệnh đề phụ thuộc vào biến $x \in D$. Khi cho biến $x$ một giá trị cụ thể thì ta được mệnh đề.

Ta gọi tập $D_{S(x)} := \left\{ x \in D \middle| S(x) \right\}$ là miền đúng của hàm mệnh đề $S(x)$.

**Ví dụ 1.10.** $S(x) = x^2 - 5x + 6 \le 0 \ \Rightarrow \ \mathrm{D}_{\mathrm{S(x)}} = [2;3]$.

**b. Lượng từ**

Ký hiệu $\forall$ (đọc là với mọi) được gọi là lượng từ phổ biến.

Ký hiệu $\exists$ (đọc là tồn tại) được gọi là lượng từ tồn tại

Cho $S(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trên tập hợp $D$. Khi đó:

- Mệnh đề $(\forall x \in D)\ S(x)$ (đọc là với mọi $x \in D$, $S(x)$) là một mệnh đề chỉ đúng nếu $D_{S(x)} = D$ và sai trong trường hợp ngược lại. Khi $D$ đã xác định thì ta thường viết tắt $\forall x$, $S(x)$ hay $(\forall x)$, $S(x)$.
- Mệnh đề $(\exists x \in D) S(x)$ (đọc là tồn tại $x \in D$, $S(x)$) là một mệnh đề chỉ đúng nếu $D_{S(x)} \neq \varnothing$ và sai trong trường hợp ngược lại.
- Để chứng minh một mệnh đề với lượng từ phổ biến là đúng thì ta phải chứng minh đúng trong mọi trường hợp, còn với mệnh đề tồn tại ta chỉ cần chỉ ra một trường hợp đúng là đủ.
- Người ta mở rộng khái niệm lượng từ tồn tại nếu $D_{S(x)}$ có đúng một phần tử.

  Với ký hiệu $(\exists! x \in D,\ S(x))$, đọc là: tồn tại duy nhất $x \in D,\ S(x)$ .
- Phép phủ định lượng từ

$$\overline{\forall x \in D,\ S(x)} \Leftrightarrow \left(\exists x \in D,\ \overline{S(x)}\right).$$

$$\overline{\exists x \in D,\ S(x)} \Leftrightarrow \left(\forall x \in D,\ \overline{S(x)}\right).$$

**Ví dụ 1.11.**

- $(\forall x \in [2;3]): x^2 - 5x + 6 \le 0$ ; $(\exists x \in Q): x^2 - 5x + 6 \ge 0$ là các mệnh đề đúng.
- Mỗi một phương trình là một hàm mệnh đề, ví dụ:

$$\left\{ x \in Z \,\middle|\, x^2 - 1 = 0 \right\} = \{-1, 1\}.$$

## 1.3 ÁNH XẠ

### 1.3.1 Các định nghĩa và ví dụ

**Định nghĩa 1.4.** Một ánh xạ từ tập $X$ vào tập $Y$ là một quy luật, ký hiệu $f$, cho tương ứng mỗi một phần tử $x \in X$ với một phần tử xác định $y = f(x)$ của $Y$.

Như vậy ánh xạ phải thoả mãn 2 điều kiện sau:

1) Mọi $x \in X$ đều được tác động qui luật $f$,
2) Mỗi $x \in X$ ứng với duy nhất một phần tử $y = f(x)$

Ta ký hiệu $\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$ hay $\begin{aligned} X &\xrightarrow{f} Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$

- $X$ được gọi là tập nguồn (hay còn gọi là tập xác định của ánh xạ),
- $Y$ được gọi là tập đích.
- Phần tử $x \in X$ gọi là tạo ảnh, phần tử $y = f(x)$ gọi là ảnh của $x$ qua ánh xạ f.

- Với $f, g : X \longrightarrow Y$ ta nói $f$ và $g$ là hai ánh xạ bằng nhau nếu:

$$f(x) = g(x), \text{ với mọi } x \in X.$$

**Ví dụ 1.12.** Mỗi hàm số $y = f(x)$ bất kỳ có thể được xem là ánh xạ từ tập $D_f$ là miền xác định của $y = f(x)$ vào $\mathbb{R}$. Chẳng hạn:

- Hàm số bậc nhất $y = ax + b$, $a \neq 0$ là ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = ax + b$$

- Hàm phân thức $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ là ánh xạ $f : \mathbb{R} \backslash \{2\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = \frac{x+1}{x-2}.$$

**Ví dụ 1.13.**

- Qui tắc xác định quê quán của sinh viên trong một tập thể lớp là một ánh xạ từ tập hợp "tập thể lớp" vào tập " 63 tỉnh thành".
- Qui tắc xác định quan hệ đồng hương của sinh viên trong một tập thể lớp này với sinh viên trong một tập thể lớp khác không là ánh xạ giữa hai tập thể lớp khác nhau.

**Định nghĩa 1.5.** Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và $A \subset X$, $B \subset Y$.

- Ảnh của $A$ qua ánh xạ $f$ là tập: $f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \subset Y$. **(1.3)**

  Nói riêng $f(X) = \operatorname{Im} f$ được gọi là tập ảnh hay tập giá trị của $f$.

  Vậy $y \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists x \in X : y = f(x)$.

- Nghịch ảnh của tập con $B$ của $Y$ là tập:

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \} \subset X. \quad \textbf{(1.4)}$$

❖ Trường hợp $B$ là tập hợp chỉ có một phần tử $\{y\}$ thì ta viết:

$f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(\{y\})$.

khi đó $f^{-1}(y) = \{ x \in X \mid y = f(x) \}$. **(1.5)**

### 1.3.2 Phân loại các ánh xạ

**a. Đơn ánh**

**Định nghĩa 1.6.** Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một đơn ánh nếu ảnh của hai phần tử phân biệt của $X$ là hai phần tử phân biệt của $Y$.

Nghĩa là: $\forall\, x_1, x_2 \in X;\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ hay là

$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \quad \textbf{(1.6)}$$

**b. Toàn ánh**

**Định nghĩa 1.7.** Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là toàn ánh nếu mọi phần tử của $Y$ là ảnh của phần tử nào đó của $X$. Nghĩa là $\operatorname{Im} f = Y$, hay là

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ sao cho } y = f(x). \tag{1.7}$$

c. **Song ánh**

**Định nghĩa 1.8.** Ánh xạ $f: X \to Y$ vừa đơn ánh vừa toàn ánh được gọi là song ánh.

**Chú ý 1.5.**

- Một ánh xạ hoàn toàn xác định khi biết tập nguồn, tập đích, công thức cho ảnh $y = f(x)$.
- Khi ánh xạ $f: X \to Y$ được cho dưới dạng công thức xác định ảnh $y = f(x)$ thì ta có thể xác định tính chất đơn ánh, toàn ánh của ánh xạ $f$ bằng cách giải phương trình

$$y = f(x),\ y \in Y \tag{1.8}$$

trong đó ta xem $x$ là ẩn và $y$ là tham biến. Khi đó

* Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (1.8) luôn có nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ $f$ là toàn ánh.
* Nếu với mỗi $y \in Y$ phương trình (1.8) có không quá 1 nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ $f$ là đơn ánh.
* Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (1.8) luôn có duy nhất nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ $f$ là song ánh.

**Ví dụ 1.14.**

a) Cho ánh xạ: $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = x^2 + x$$

Xét phương trình $y = f(x) = x^2 + x$ hay $x^2 + x - y = 0.\ (*)$.

Biệt số $\Delta = 1 + 4y$ ( $y \in \mathbb{R}$ ).

Nếu $y < -\frac{1}{4}$ thì phương trình $(*)$ không có nghiệm trong $\mathbb{R}$. Vậy $f$ không toàn ánh.

Nếu $y \geq -\frac{1}{4}$, phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt trong $\mathbb{R}$. Vậy $f$ không đơn ánh.

b) Cho ánh xạ

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$x \mapsto y = x^2 + x$$

Xét phương trình $y = f(x) = x^2 + x$ hay $x^2 + x - y = 0 \quad (**)$. ($y \in \mathbb{N}$)

Biệt số $\Delta = 1 + 4y > 0$ (vì $y \in \mathbb{N}$). Phương trình $(**)$ luôn có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2} \; ; \; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+4y}}{2} < 0 .$$

Nhưng $(**)$ chỉ có nhiều nhất một nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy $f$ đơn ánh.

Với $y = 1$, phương trình $(**)$ không có nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy $f$ không toàn ánh.

**Ví dụ 1.15.** Các hàm số đơn điệu chặt là các song ánh từ tập xác định lên miền giá trị của nó.

Đồng biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Nghịch biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

**Ví dụ 1.16.** $Id_X$ gọi là ánh xạ đồng nhất của $X$.

$$\begin{aligned} Id_X : X &\longrightarrow X \\ x &\mapsto Id_X(x) = x. \end{aligned}$$

**1.3.3 Ánh xạ hợp (tích), ánh xạ ngược**

**a. Hợp (tích) của hai ánh xạ**

**Định nghĩa 1.9.** Với hai ánh xạ $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ thì tương ứng $x \mapsto g(f(x))$ xác định một ánh xạ từ $X$ vào $Z$ được gọi là hợp (hay tích) của hai ánh xạ $f$ và $g$, ký hiệu $g \circ f$.

Vậy $g \circ f : X \to Z$ có công thức xác định ảnh :

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \tag{1.9}$$

**Ví dụ 1.17.** Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với công thức xác định ảnh

$$f(x) = x + 2, \quad g(x) = x^4 .$$

Ta có thể thiết lập hai hàm hợp $g \circ f$ và $f \circ g$ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.

$$f \circ g(x) = x^4 + 2 \; ; \; g \circ f(x) = (x+2)^4 .$$

**b. Ánh xạ ngược**

**Định nghĩa 1.10.** Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh khi đó với mỗi $y \in Y$ tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy ta có thể xác định một ánh xạ từ $Y$ vào $X$ bằng cách cho ứng mỗi phần tử $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Ánh xạ này được gọi là ánh xạ ngược của $f$ và được ký hiệu $f^{-1}$.

Vậy

$$f^{-1} : Y \to X \text{ xác định như sau } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) . \tag{1.10}$$

**Ví dụ 1.18.** Hàm số bậc nhất $y = ax + b,\ a \neq 0$ là ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = ax + b$$

Giải phương trình (1.8) tương ứng:

$ax + b = y,\ a \neq 0$ luôn có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$, vậy $f$ là một song ánh.

$f$ có ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \mapsto x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$.

Hay hàm số $y = ax + b,\ a \neq 0$ có hàm ngược là hàm số bậc nhất $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a},\ a \neq 0$.

**Ví dụ 1.19.** Hàm mũ cơ số $a$: $y = a^x$, $a > 0,\ a \neq 1$

là một song ánh (vì hàm mũ đơn điệu chặt) có hàm ngược là hàm lôgarit cơ số $a$:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

**Ví dụ 1.20.** Các hàm số lượng giác ngược

a) Xét hàm số

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$$
$$x \mapsto \sin x$$

Hàm số này tăng nghiêm ngặt và là toàn ánh nên là một song ánh. Có hàm số ngược:

$$\arcsin : [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$
$$y \mapsto \arcsin y$$

Như vậy $x = \arcsin y \Leftrightarrow \sin x = y,\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],\ \forall y \in [-1; 1]$.

Đối với hàm số sơ cấp, để phù hợp với qui ước ký hiệu của hàm số là $y$ còn đối số ký hiệu là $x$, ta viết $y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x, \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],\ \forall x \in [-1; 1]$.

Người ta thường nói hàm $y = \arcsin x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \sin x$ là để phù hợp với qui ước nói trên.

b) Tương tự

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x,\ \forall y \in [0; \pi],\ \forall x \in [-1; 1].$$

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x, \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),\ \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \cot y = x, \forall y \in (0; \pi),\ \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

**Chú ý 1.6.**

- Nói chung $f \circ g \neq g \circ f$, nghĩa là phép hợp ánh xạ không có tính giao hoán.
- Để phù hợp với qui ước ký hiệu của hàm số là $y$ còn đối số ký hiệu là $x$, ta thường thấy đồ thị của hai hàm số ngược đối xứng nhau qua đường phân giác $y = x$.
- Nếu $f : X \to Y$ là một song ánh có ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \to X$, khi đó ta dễ dàng kiểm chứng rằng $f^{-1} \circ f = Id_X$ và $f \circ f^{-1} = Id_Y$.
- Chỉ ánh xạ là song ánh mới có ánh xạ ngược. Có thể chứng minh được $f^{-1}$ cũng là một song ánh.

## BÀI TẬP CHƯƠNG 1

**1.1)** Tìm mối liên hệ giữa hai tập hợp sau

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x^2 - 3x > -4 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x < \sqrt{3} - 4 \right\}$.

b) $A$ là tập mọi số thực $\geq 0$, $B$ là tập mọi số thực $\geq$ trị tuyệt đối của chính nó.

**1.2)** $A, B, C, D$ là tập con của $E$. Chứng minh rằng:

a) $A \setminus B = \varnothing$ khi và chỉ khi $A \subset B$.

b) Nếu $A \subset B, C \subset D$ thì $A \cup C \subset B \cup D,\ A \cap C \subset B \cap D$.

c) Nếu $A \cup C \subset A \cup B,\ A \cap C \subset A \cap B$ thì $C \subset B$.

**1.3)** Cho $A, B$ là hai tập con của $E$, Chứng minh rằng:

a) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = E$.

c) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow \overline{B} \cap A = \varnothing$.

d) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

e) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

f) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

**1.4)** $A, B, C, D$ là tập con của $E$. Chứng minh rằng:

a) $A \cap B \neq \varnothing \Leftrightarrow (A \times B) \cap (B \times A) \neq \varnothing$.

b) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

**1.5)** Chứng tỏ các ánh xạ với công thức xác định ảnh sau là đơn ánh nhưng không toàn ánh

a) $f(x) = \dfrac{x+4}{2x+1}$ ; b) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-5}$.

**1.6)** Chứng tỏ các ánh xạ với công thức xác định ảnh sau là toàn ánh nhưng không đơn ánh

a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ ; b) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$.

**1.7)** Chứng tỏ ánh xạ với công thức xác định ảnh sau là song ánh

$$f(x) = \frac{x^3+4x+1}{x^2+1}.$$

**1.8)** Cho hai ánh xạ $f; g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh như sau

$$f(x,y,z) = (2x+y-z, -x+3y-2z, x+4y+2z)$$

$$g(x,y,z) = (x+y-z, 2x+3y+z, x+2y+2z)$$

a) Chứng tỏ ánh xạ $f$ với công thức xác định ảnh trên là song ánh.

b) Ánh xạ $g$ với công thức xác định ảnh trên có phải là một song ánh không.

c) Viết công thức xác định $f^{-1}$.

d) Tìm tập ảnh của mỗi ánh xạ.

e) Xác định các tập $f^{-1}(\theta)$; $g^{-1}(\theta)$. Với ký hiệu $\theta = (0,0,0)$.

**1.9)** Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ , $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh như sau

$$f(x,y,z) = (2x+y-z, -x+3y-2z, x+4y+2z, x-y)$$

$$g(x,y,z,t) = (x+y-z+t, x+2y-z+3t, 4x+y+2z)$$

a) Viết công thức xác định $f \circ g$; $g \circ f$.

b) Tìm tập ảnh của ánh xạ $f, g$.

**1.10)** Cho ánh xạ $f : X \to Y$ cho $A, B \subset X$ và $C, D \subset Y$. Chứng minh rằng:

a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

Tìm ví dụ chứng tỏ $f(A) \subset f(B)$ nhưng $A \not\subset B$.

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Tìm ví dụ chứng tỏ $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

e) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

f) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Nếu $f$ đơn ánh thì

g) $f(A) \subset f(B) \Rightarrow A \subset B$.

h) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

**1.11)** Ký hiệu $h = g \circ f$ là hợp của hai ánh xạ $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ .Chứng minh:

a) $f, g$ đơn ánh thì $h$ đơn ánh.

b) $f, g$ toàn ánh thì $h$ toàn ánh.

c) $h$ toàn ánh thì $g$ toàn ánh.

d) $h$ đơn ánh thì $f$ đơn ánh.

e) $h$ đơn ánh và $f$ toàn ánh thì $g$ đơn ánh.

f) $h$ toàn ánh và $g$ đơn ánh thì $f$ toàn ánh.

**1.12)** Cho hai song ánh $\sigma$, $\mu$ của tập $\{1,2,3,4\}$, ký hiệu như sau:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

hàng dưới là ảnh của ánh xạ.

a) Xác định $\sigma \circ \mu$, $\mu \circ \sigma$ .

b) Xác định $\sigma^{-1}$, $\mu^{-1}$.

c) Chứng minh $(\sigma \circ \mu)^{-1} = \mu^{-1} \circ \sigma^{-1}$.

**1.13)** Xác định tập hợp tất cả các hàm số $f$ khả vi trên $[a,b]$ và thoả mãn $f' - 5f = 0$ .

# CHƯƠNG 2

# KHÔNG GIAN VÉC TƠ $n$ CHIỀU

Ở Phổ thông trung học ta đã dùng véc tơ để nghiên cứu hình học, vật lý. Đó là một đại lượng có hướng. Bằng phương pháp toạ độ ta có thể xem một véc tơ trong mặt phẳng là một bộ hai số thực với hai thành phần là hoành độ và tung độ của véc tơ. Mỗi véc tơ trong không gian đồng nhất với một bộ ba số thực với ba thành phần. Các phép toán như cộng hai véc tơ, nhân một số với véc tơ được thực hiện tương ứng với các bộ số này. Ứng dụng của véc tơ là không ít, mặt khác chúng ta cũng thấy một số đối tượng khác như một số tập hợp số, đa thức, hàm số, v.v... cũng có các phép toán thoả mãn các tính chất tương tự như các phép toán cộng hai véc tơ, nhân số với véc tơ. Điều này dẫn đến việc khái quát hoá khái niệm véc tơ, khái niệm không gian véc tơ ra đời. Ngày nay lý thuyết không gian véc tơ nhiều chiều được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học và các ngành khoa học khác. Trong vật lý: lực, mômen động lực được biểu diễn dưới dạng véc tơ, trong cơ học có véc tơ vận tốc…Khái niệm véc tơ được sử dụng trong các mô hình kinh tế và các bài toán về qui hoạch tuyến tính. Học tốt chương này sẽ giúp sinh viên ngành quản trị kinh doanh có kiến thức để học tốt môn toán kinh tế.

Không gian véc tơ (còn gọi là không gian tuyến tính) là nền tảng của môn đại số tuyến tính. Trong khuôn khổ học phần toán cao cấp này ta xét không gian véc tơ thực $n$ chiều. Bản thân nó mang tính chất khái quát và mức độ trừu tượng cao.Với công cụ minh hoạ chưa được cung cấp đầy đủ vì vậy để học tốt chương này đòi hỏi người học phải hết sức nỗ lực. Có thể dựa vào các mô hình cụ thể và liên hệ với những phép toán và tính chất của véc tơ trong mặt phẳng và trong không gian ta đã biết ở phổ thông để nắm kiến thức chương này dễ dàng hơn.

Mặc dù phạm vi áp dụng của chương đối với sinh viên ngành kinh tế chỉ giới hạn trong không gian $\mathbb{R}^n$, nhưng chúng tôi vẫn trình bày chương này một cách tương đối đầy đủ để cung cấp cho người học những kiến thức cơ bản về không gian véc tơ.

## 2.1 KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CỦA KHÔNG GIAN VÉC TƠ

### 2.1.1 Định nghĩa không gian véc tơ

**Định nghĩa 2.1**. Tập $V$ là tập khác $\varnothing$ được gọi là không gian véc tơ thực nếu :

1. Trên $V$ có phép toán trong $(+)$: $V \times V \to V$
$$(u,v) \mapsto u+v$$

2. Trên $V$ có phép toán ngoài $(.)$ : $\mathbb{R} \times V \to V$
$$(\alpha,u) \mapsto \alpha u$$

3. Hai phép toán trên thoả mãn 8 tiên đề sau với mọi $u, v, w \in V$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   V1) $(u+v)+w = u+(v+w)$

   V2) Tồn tại phần tử không $\theta \in V$ sao cho $u+\theta = \theta + u = u$

   V3) Với mỗi $u \in V$ có phần tử đối $-u \in V$ sao cho $u+(-u) = (-u)+u = \theta$

   V4) $u+v = v+u$

   V5) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

   V6) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

   V7) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

   V8) $1u = u$.

Các phần tử của $V$ được gọi là các véc tơ, các phần tử của $\mathbb{R}$ được gọi là các phần tử vô hướng. Ta cũng không cần sử dụng ký hiệu mũi tên cho các véc tơ.

Bốn tiên đề V1-V4 chứng tỏ phép cộng $(+)$ có 4 tính chất của phép cộng hai véc tơ hình học. Bốn tiên đề V5-V8 chứng tỏ phép nhân $(.)$ có 4 tính chất của phép nhân một số với véc tơ hình học .

**Ví dụ 2.1.** Tập $\mathbb{R}$ là không gian véc tơ thực trên chính nó . Tập $\mathbb{C}$ là không gian véc tơ phức trên $\mathbb{R}$.

**Ví dụ 2.2.** Tập $R_2$ là tập hợp các véc tơ tự do trong không gian (trong đó ta đồng nhất các véc tơ tương đẳng: các véc tơ cùng phương, cùng hướng, cùng độ dài). Xét phép cộng hai véc tơ theo quy tắc hình bình hành và phép nhân một số thực với một véc tơ theo nghĩa thông thường thì $R_2$ là không gian véc tơ thực. Tương tự thì $R_3$ các véc tơ tự do trong mặt phẳng cũng là không gian véc tơ thực.

**Ví dụ 2.3.** Không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^n = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n} \right\}$.

Khái quát hoá từ phép cộng véc tơ và phép nhân một số với véc tơ hình học ta có hai phép toán xác định như sau:

- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- $k(x_1, \dots, x_n) = (kx_1, \dots, kx_n)$, $\forall k \in \mathbb{R}$
- véc tơ không là $\theta = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ phần tử}}$.

**Ví dụ 2.4.** Đặt $P_n\left[x\right]$ là tập các đa thức bậc $\le n$, $n$ là số nguyên dương cho trước: $P_n\left[x\right]=\left\{p(x)\middle|p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n;\, a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{R}\right\}$.

Với phép cộng hai đa thức và phép nhân một số với một đa thức. Vì tổng hai đa thức, tích một số với một đa thức bậc $\le n$ cũng là một đa thức bậc $\le n$. Véc tơ không tương ứng là đa thức $\theta$ (đa thức với các hệ số đều bằng $0$) nên $P_n\left[x\right]$ là một không gian véc tơ thực.

**Chú ý 2.1.** Từ đây ta qui ước chỉ nói gọn là không gian véc tơ mà không nói đầy đủ là không gian véc tơ thực nữa.

### 2.1.2 Tính chất cơ bản của không gian véc tơ

**Định lý 2.1.**

1) Trong không gian véc tơ, véc tơ $\theta$ là duy nhất.

2) Với mọi $u\in V$, véc tơ đối $-u$ của $u$ là duy nhất.

3) $ku=\theta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ u=\theta \end{array}\right.$.

4) $-ku=k(-u)=-(ku),\ \ \forall k\in\mathbb{R},\ \forall u\in V$. Đặc biệt $(-1)u=-u$.

**Chứng minh 1) :**

Thật vậy : Giả sử có hai véc tơ $\theta_1,\ \theta_2$, khi đó từ V2) ta có $\theta_1=\theta_1+\theta_2=\theta_2$

Giả sử u có hai véc tơ đối $u_1,\ u_2$, khi đó

$$u_1=u_1+\theta=u_1+\left(u+u_2\right)=\left(u_1+u\right)+u_2=\theta+u_2=u_2.$$

**Chứng minh 2) :**

$(\Leftarrow)$ + Nếu $k=0$

$$0u=0u+\theta=0u+\left(u+(-u)\right)=0u+1u+(-u)=\left(0+1\right)u+(-u)=u+(-u)=\theta.$$

+ Nếu $u=\theta$

$$k\theta=k\theta+\left(k\theta+(-k\theta)\right)=k\theta+k\theta+\left(-k\theta\right)=k\left(\theta+\theta\right)+\left(-k\theta\right)=k\theta+\left(-k\theta\right)=\theta.$$

$(\Rightarrow)$ Giả sử có $ku=\theta$

Nếu $k\ne 0\ \Rightarrow \exists\,\dfrac{1}{k}\in\mathbb{R}\ \Rightarrow u=1.u=(\dfrac{1}{k}k).u=\dfrac{1}{k}.\left(ku\right)=\dfrac{1}{k}.\theta=\theta.$

**Chứng minh 3)** bạn đọc tự chứng minh.

Từ định nghĩa và tính chất của không gian véc tơ ta có thể mở rộng các khái niệm sau:

- Ta định nghĩa hiệu $u-v:=u+(-v)$.
- Luật chuyển vế: $u+v=w \Leftrightarrow u=w-va$.

Luật giản ước: $u+v=u+w \Rightarrow v=w$.

**5**) Một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1,...,u_n$ của không gian véc tơ $V$ cũng là một véc tơ của không gian véc tơ $V$.

Với $u_1,...,u_n \in V$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ thì $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n \in V$. Thật vậy

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = (\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_{n-1} u_{n-1}) + \alpha_n u_n \in V,\ \alpha_i \in \mathbb{R};$$

biểu thức này được gọi là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1,...,u_n$.

**Định nghĩa 2.2.** Véc tơ $u$ bất kỳ được gọi là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1,...,u_n$, nếu $u$ có thể viết dưới dạng

$$u = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k = a_1 u_1 + ... + a_n u_n,\ \ a_1,\ ...,a_n \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(2.1)}$$

## 2.2 KHÔNG GIAN VÉC TƠ CON

### 2.2.1 Khái niệm không gian véc tơ con

**Định nghĩa 2.3.** Giả sử $(V,+,.)$ là không gian véc tơ. Tập con $W \neq \varnothing$ của $V$; $W$ được gọi là một không gian véc tơ con của không gian véc tơ $V$ (hay nói tắt: không gian con của $V$) nếu $W$ là một không gian véc tơ với hai phép toán trong $V$ thu hẹp vào $W$.

**Ví dụ 2.5.** Giả sử $(V,+,.)$ là không gian véc tơ. Khi đó $V$ là không gian con của $V$ và $\{\theta\}$ là không gian con của $V$.

Định lý sau đây chỉ ra rằng nếu 2 phép toán trong $V$ có thể thu hẹp được vào $W$ thì các tiên đề V1-V8 luôn thoả mãn, do đó $W$ là không gian véc tơ con của $V$.

**Định lý 2.2.** Giả sử $W$ là tập con khác rỗng của $V$. Hai mệnh đề sau đây tương đương:

(i) $W$ không gian véc tơ con của $V$.

(ii) $W$ ổn định với hai phép toán của $V$. Nghĩa là

Với mọi $u,v \in W$, thì $u+v \in W$, (ổn định với phép cộng)

Với mọi $u \in W$, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\alpha u \in W$, (ổn định với phép nhân).

**Chứng minh**

(i) $\Rightarrow$ (ii): Hiển nhiên theo định nghĩa.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Do $W \neq \varnothing \Rightarrow \exists u \in W$, và do tính ổn định $\Rightarrow \theta = 0u + 0u \in W$ (tiên đề V2), với mọi $u \in W$, $-u = 0u + (-1)u \in W$ (tiên đề V3), các tiên đề còn lại hiển nhiên đúng. Vậy $W$ là không gian véc tơ con của $V$.

**Ví dụ 2.6.** a) Tập $W_1 = \left\{ u = (x_1, x_2, 0) \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

b) Tập $W_2 = \left\{ v = (0, x_2, x_3) \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

c) Tập $W_3 = \left\{ w = (x_1, 0, 0) \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

**Ví dụ 2.7.** Tập $W_4 = \left\{ w = (x_1, x_2, x_3) \middle| x_1 + 2x_2 = 0;\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

$W_5 = \left\{ w = (x_1, x_2, x_3) \middle| x_1 - x_2 = 0;\ x_1 + 3x_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

$W_4, W_5$ đều là các không gian con của $\mathbb{R}^3$.

**Ví dụ 2.8.** $W_5 = \left\{ w = (x_1, x_2, 1) \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ không phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

### 2.2.2 Sự hình thành không gian véc tơ con

Ta sẽ chỉ ra một vài cách hình thành nên các không gian con của $V$.

#### a. Không gian con sinh bởi hệ véc tơ

**Định lý 2.2.** Cho hệ $S = \left\{ u_1, u_2, ..., u_m \right\};\ u_i \in V;\ i = 1, 2, ...m$. Tập hợp $W$ gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính của $S$ là một không gian con của $V$**.** Đó là không gian con nhỏ nhất của $V$ chứa hệ $S$.

$$W = \left\{ v \in V \mid v = \sum_{k=1}^{m} a_k u_k = a_1 u_1 + ... + a_n u_m,\ \ a_1,\ ..., a_m \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Chứng minh:**

Gọi $W$ là tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của $S$. Ta chứng minh $W$ là không gian con bé nhất chứa $S$.

(i) Với mọi $u \in S$ thì $u = 1u \in W$ vậy $\varnothing \neq S \subset W$.

(ii) $u \in W, v \in W, u = \alpha_{11} + ... + \alpha_n u_n, v = \beta_1 u_1 + ... + \beta_n u_n \in W$

Với mọi $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$:

$\gamma u + \delta v = \gamma \alpha_1 u_1 + ... + \gamma \alpha_n u_n + \delta \beta_{11} + ... + \delta_{nn}$

$= (\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1)u_1 + ... + (\gamma\alpha_n + \delta\beta_n)u_n \in W$ vậy $W$ ổn định với hai phép toán của $V$.

Do đó $W$ là không gian con của $V$ chứa $S$. Giả sử $W'$ là không gian con của $V$ chứa $S$. Với mọi $u \in W$, $u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$, $u_1, ..., u_n \in S$. Vì $W'$ chứa $S$ nên $u_1, ..., u_n \in W'$ $\Rightarrow$ $u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n \in W'$. Do đó $W \subset W'$. Nói cách khác $W$ là không gian con nhỏ nhất của $V$ chứa $S$.

**Định nghĩa 2.4.** $W = Span\, S$ được gọi là không gian véc tơ con của $V$ sinh bởi hệ véc tơ $S$. Đồng thời $S$ được gọi là hệ sinh của $W$.

**Ví dụ 2.9.**

- $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$ vì
  $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$.
- $\{e_1 = (1,0,..,0), e_2 = (0,1,...,0), .., e_n = (0,..,0,1)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^n$.
- Ta chứng tỏ tập $W_1 = \{ u = (x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ ở Ví dụ 2.6. là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ theo cách biểu diễn $W_1$ thành một không gian sinh bởi một hệ véc tơ:

$$W_1 = \{ u = (x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{ u = x_1(1,1,0) + x_2(0,1,0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

  Hay $W_1 = Span\{ (1,1,0); (0,1,0) \} \subset \mathbb{R}^3$.

- Tương tự, $W_2 = \{ v = (0, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ ở Ví dụ 2.6.

$$W_2 = \{ v = (0, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{ v = x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$= Span\{(0,1,0); (0,0,1)\}.$$

**Chú ý 2.2.**

- Giả sử $S = \{ v_1, ..., v_n \}$ là hệ sinh của $V$ thì $v_i \in V$, $\forall i = 1,2,..,n$. Đồng thời với mọi
  $u \in V : u = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k = x_1 u_1 + ... + x_n u_n$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.
- Cuốn bài giảng này chỉ hạn chế xét các không gian có hệ sinh hữu hạn gọi là không gian hữu hạn sinh.

**b. Giao của các không gian con**

**Định lý 2.3.** Nếu $W_1$, $W_2$ là các không gian con của $V$ thì $W_1 \cap W_2$ cũng là không gian con của $V$. Ta gọi không gian véc tơ con này là giao của các không gian con $W_1, W_2$.

**Chứng minh:** Áp dụng Định lý 2.1. ta dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

**Ví dụ 2.10.** Ở Ví dụ 2.6 thì:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (v \in W_1) \wedge (v \in W_2) \right\} = \{(0,y,0)\};$$

Tương tự $W_2 \cap W_3 = \left\{ v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (v \in W_2) \wedge (v \in W_3) \right\} = \{(0,0,0)\};$

Ở Ví dụ 2.7 thì $W_4 \cap W_5 = \{\theta = (0,0,0)\}$.

## 2.3 ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

### 2.3.1 Các khái niệm

**a. Biểu diễn véc tơ thành tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ bất kỳ**

Theo định nghĩa 2.2. Véc tơ $u$ bất kỳ được gọi là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1,...,u_n$, nếu $u$ có thể viết dưới dạng $u = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k = a_1u_1 + ... + a_nu_n,\ a_1,\ ...,a_n \in \mathbb{R}$. Khi đó còn nói $u$ biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1,...,u_n$. Hay $u$ biểu thị tuyến tính qua các véc tơ $u_1,...,u_n$.

**Nhận xét 2.1**

- Từ định lý 2.4 ta thấy rằng véc tơ $u$ biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1,...,u_n$ khi và chỉ khi $u \in Span\{u_1,u_2,..u_n\}$.
- Khi véc tơ $u$ có thể biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1,...,u_n$ thì cách biểu diễn lại có thể duy nhất hoặc không duy nhất, điều này phụ thuộc vào đặc điểm của từng hệ véc tơ cụ thể.
- Véc tơ $\theta$ luôn có một cách biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính qua mọi hệ các véc tơ $u_1,...,u_n$ bất kỳ như sau $\theta = 0u_1 + ... + 0u_n$, ta gọi đây là một cách biểu diễn tầm thường của véc tơ $\theta$. Từ đó suy ra cách biểu diễn không tầm thường của véc tơ $\theta$: nếu tồn tại một hệ số $a_i \neq 0$ *sao cho* $\theta = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$.

**Ví dụ 2.11.** Trên $\mathbb{R}^2$ cho hệ véc tơ $\{u_1 = (0,-1),\ u_2 = (1,4)\}$, và $u = (a,b)$.

Giả sử $u = (a,b) = xu_1 + yu_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = a \\ -x + 4y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4a - b \\ y = a \end{cases}$.

Hệ phương trình có duy nhất nghiệm với mọi $a,b$.

Như vậy véc tơ $u=(a,b)$ bất kỳ nào cũng chỉ có duy nhất một cách biểu diễn qua hệ véc tơ $\{u_1=(0,-1),\, u_2=(1,4)\}$.

Do đó véc tơ $\theta \in \mathbb{R}^2$ cũng chỉ có duy nhất một cách biểu diễn tầm thường qua hệ véc tơ đã cho. Nghĩa là chỉ có thể viết $\theta=(0,0)=0u_1+0u_2$.

**Ví dụ 2.12.** Trên $\mathbb{R}^2$ xét hệ $\{u_1=(0,-1),\, u_2=(1,4),\, u_3=(2,3)\}$, và $u=(a,b)$

$$u=(a,b)=xu_1+yu_2+zu_3 \Leftrightarrow \begin{cases} y+2z=a \\ -x+4y+3z=b \end{cases} \text{ hệ có vô số nghiệm với } \forall(a,b).$$

$$\theta=(0,0)=0u_1+0u_2+0u_3=5u_1+2u_2-u_3=\ldots$$

$$v=(1,6)=3u_1+3u_2-u_3=-2u_1+u_2+0u_3=\ldots$$

Trong ví dụ này ta thấy các véc tơ $v=(1,6),\theta,\ldots$ lại có nhiều hơn một cách biểu diễn thành một tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ đã cho.

**Ví dụ 2.13.** Trên $\mathbb{R}^2$ cho hệ véc tơ $\{u_1=(1,-3),u_2=(-2,6)\}$. Ta kiểm tra được kết quả sau: Bất kỳ véc tơ $u=(a,b),\ 3a+b\neq 0$ không thể có cách nào biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của hệ $\{u_1,u_2\}$. Nhưng véc tơ $\theta=(0,0)$ và các véc tơ $v=(a,b)$ thỏa mãn điều kiện $3a+b=0$, lại có vô số có cách biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của hệ $\{u_1,u_2\}$:

$\theta=(0,0)=0u_1+0u_2=2u_1+1u_2=-4u_1-2u_2=\ldots$

**b. Độc lập tuyến tính**

**Định nghĩa 2.5.** Cho hệ $S=\{u_1,\ldots,u_n\}$ gồm n véc tơ (các véc tơ có thể trùng nhau) của không gian véc tơ $V$. Hệ $S$ được gọi là hệ độc lập tuyến tính nếu:

$$\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_nu_n=\theta;\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1=\ldots=\alpha_n=0.$$

Nói cách khác hệ $S$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu: véc tơ $\theta$ chỉ có duy nhất một cách biểu diễn thành một tổ hợp tuyến tính tầm thường qua hệ $S$.

**c. Phụ thuộc tuyến tính**.

**Định nghĩa 2.6.** Hệ không độc lập tuyến tính được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Vậy hệ $S=\{u_1,\ldots,u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi ta có thể tìm được $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ không đồng thời bằng $0$, $(\exists a_i\neq 0)$, sao cho $\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_nu_n=\theta$.

Nói cách khác hệ $S$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu: Ngoài cách biểu diễn tầm thường, véc tơ $\theta$ còn có ít nhất một cách biểu diễn không tầm thường qua hệ $S$.

**Ví dụ 2.14.**

1) Hệ chứa véc tơ $\theta$ là hệ phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy $0u_1 + ... + 0u_n + 1\theta = \theta$.

2) Hệ chứa một véc tơ $u \neq \theta$ là hệ độc lập tuyến tính.

3) Hệ hai véc tơ $\{u_1, u_2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng tỷ lệ, nghĩa là

$u_1 = \alpha u_2$ hoặc $u_2 = \alpha u_1; \alpha \in \mathbb{R}$.

**Ví dụ 2.15.**

1) Trong $R_2$, hai véc tơ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi hai véc tơ đó cùng phương.

2) Trong $R_3$, ba véc tơ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng đồng phẳng.

3) Trong Ví dụ 2.12. hệ véc tơ $\{u_1 = (1,-3), u_2 = (-2,6)\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính.

4 ) Trong Ví dụ 2.11. hệ véc tơ $\{u_1 = (0,-1), u_2 = (1,4)\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

5 ) Hệ $\{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,-1,-1), v_3 = (1,3,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ là hệ độc lập tuyến tính.

### 2.3.2 Tính chất của các hệ độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

1) Hệ véc tơ chứa hệ con phụ thuộc tuyến tính là hệ phụ thuộc tuyến tính. Vì vậy, mọi hệ con của hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.

2) Một hệ véc tơ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại.

3) Giả sử hệ véc tơ $\{v_1, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính, và $u$ là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $\{v_1, ..., v_n\}$, khi đó cách biểu diễn của $u$ qua $\{v_1, ..., v_n\}$ là duy nhất.

Nghĩa là: $\exists! (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho $u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. .

4) Giả sử véc tơ $u \notin \{v_1, ..., v_n\}$. Khi đó hệ $\{v_1, ..., v_n, u\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi các véc tơ $\{v_1, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính đồng thời $u \notin Span\{v_1, ..., v_n\}$.

**Chứng minh:** Ta chứng minh 3). Bạn đọc tự chứng minh các tính chất còn lại xem như những bài tập.

Giả sử tồn tại các số $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ sao cho $u = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$, vì hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính nên:

$$\theta = u - u = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + ... + (\alpha_n - \beta_n)v_n \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = ... = \alpha_n - \beta_n = 0 .$$

Do đó $\alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_n = \beta_n$.

## 2.4 CƠ SỞ - CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VÉC TƠ

### 2.4.1 Hạng của hệ véc tơ

#### a. Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ hữu hạn véc tơ

**Định nghĩa 2.7.** Cho hệ $S$ gồm hữu hạn các véc tơ của không gian véc tơ $V$. Hệ con $S'$ của hệ $S$ được gọi là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $S$ nếu $S'$ là hệ độc lập tuyến tính và không nằm trong bất kỳ hệ độc lập tuyến tính nào khác của $S$.

Nói cách khác $S'$ là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $S$ nếu: $S'$ độc lập tuyến tính đồng thời thêm bất kỳ véc tơ nào của $S$ vào $S'$ thì ta nhận được hệ phụ thuộc tuyến tính.

**Ví dụ 2.16.** Trên $\mathbb{R}^2$ cho hệ véc tơ $\{ u_1 = (0,-1), u_2 = (1,4), u_3 = (2,3), u_4 = (3,8) \}$.

- Các hệ một véc tơ khác không đều độc lập tuyến tính.

- Xét các hệ hai véc tơ, chẳng hạn $\{u_1, u_2\}$, đây là hệ độc lập tuyến tính. Nhưng $\{u_1, u_2, u_3\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính vì $u_3 = -2u_1 - 11u_2$, và $\{u_1, u_2, u_4\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính vì $u_4 = 4u_1 + 3u_2$. Tất nhiên $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính. Mọi hệ con của hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ chứa $\{u_1, u_2\}$ đều phụ thuộc tuyến tính. Vậy $\{u_1, u_2\}$ là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ đã cho.

- Tương tự các hệ $\{u_1, u_3\}$, $\{u_1, u_4\}$, $\{u_2, u_3\}$, $\{u_2, u_4\}$, $\{u_3, u_4\}$ cũng là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ đã cho.

**Tính chất của hệ con độc lập tuyến tính tối đại**

1) Nếu $S'$ là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $S$ thì mọi véc tơ của $S$ là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của $S'$ và cách biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính là duy nhất.

2) Giả sử $\{ v_1, ..., v_n \}$ là hệ con độc lập tuyến tính của một hệ hữu hạn $S$. Khi đó ta có thể bổ sung thêm để được một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $S$ chứa $\{ v_1, ..., v_n \}$.

Thật vậy, nếu $\{ v_1, ..., v_n \}$ không tối đại thì: tồn tại một véc tơ của $S$, ký hiệu $v_{n+1}$, sao cho hệ $\{ v_1, ..., v_n, v_{n+1} \}$ độc lập tuyến tính. Lập luận tương tự và vì hệ $S$ hữu hạn nên quá trình bổ sung thêm này sẽ dừng lại, cuối cùng ta được hệ $\{ v_1, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_{n+k} \}$ độc lập tuyến tính tối đại của $S$.

Định lý dưới đây cho ta một tính chất quan trọng của các hệ con độc lập tuyến tính tối đại trong một hệ hữu hạn véc tơ.

**Định lý 2.4.** Mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ hữu hạn $S$ các véc tơ của $V$ đều có số phần tử bằng nhau.

**Bổ đề 2.1.** (Định lý thế Steinitz, hay còn gọi là Định lý tráo véc tơ)

Nếu hệ $S$ độc lập tuyến tính có $n$ véc tơ và mỗi véc tơ của $S$ là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ $R$ có $k$ véc tơ thì $n \le k$.

**Chứng minh**: Giả sử $S = \{v_1, ..., v_n\}$, $R = \{u_1, ..., u_k\}$. Ta sẽ chứng minh rằng có thể thay dần các véc tơ của hệ $R$ bằng các véc tơ của hệ $S$ để có các hệ $R^1$, $R^2$,...

mà mỗi véc tơ của hệ $S$ vẫn còn là tổ hợp tuyến tính của $R^1$, $R^2$,...

Thật vậy, ta có $v_1 = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k$, $v_1 \ne 0$ (vì $S$ độc lập) nên $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0, ta giả sử $\alpha_1 \ne 0$ (có thể đánh lại số thứ tự của $R$), suy ra

$$u_1 = \frac{1}{\alpha_1} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} u_2 - ... - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} u_k.$$

Xét hệ $R^1 = \{v_1, u_2, ..., u_k\}$. Rõ ràng mọi véc tơ của $S$ vẫn còn là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của $R^1$.

Tương tự ta có $v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + ... + \beta_k u_k$, vì $\{v_1, v_2\}$ độc lập tuyến tính, nên $\beta_2, ..., \beta_k \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0, ta giả sử $\beta_2 \ne 0$.

Khi đó $$u_2 = \frac{1}{\beta_2} v_2 - \frac{\beta_1}{\beta_2} v_1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} u_3 - ... - \frac{\beta_k}{\beta_2} u_k.$$

Xét hệ $R^2 = \{v_1, v_2, u_3 ..., u_k\}$, mọi véc tơ của $S$ cũng là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của $R^2$.

Nếu $n > k$, tiếp tục quá trình này cuối cùng ta được mọi véc tơ của $S$ là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ $R^k = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$, là hệ con của $S$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết hệ $S$ độc lập tuyến tính. Vậy $n > k$.

**Chứng minh định lý.** (Đây chính là hệ quả của bổ đề 2.1)

Giả sử $\{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\}$ và $\{v_{j_1}, ..., v_{j_n}\}$ là hai hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $S$. Từ tính tối đại của mỗi hệ, suy ra rằng mọi véc tơ của hệ này là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ kia. Do đó $n \le k$ và $k \le n$, vậy $n = k$.

**Chú ý 2.4.**

- Khái niệm hệ con ĐLTT tối đại còn được mở rộng sang không gian véc tơ có hệ sinh hữu hạn. Đó là một hệ véc tơ: độc lập tuyến tính không nằm trong bất kỳ hệ độc lập tuyến tính nào khác của không gian véc tơ.

- Hơn nữa từ đó còn suy ra rằng: trong không gian véc tơ, mọi véc tơ đều biểu thị tuyến tính một cách duy nhất qua hệ con độc lập tuyến tính tối đại của không gian véc tơ đó.

**b. Hạng của hệ véc tơ**

**Định nghĩa 2.8.** Số các véc tơ của một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $S$ được gọi là hạng (rank) của $S$**,** ký hiệu $r(S)$.

❖ Qui ước hệ chỉ có véc tơ $\theta$ có hạng là 0. Hay $r(\theta) = \theta$.

**Ví dụ 2.17.** Hệ véc tơ ở Ví dụ 2.16. có hạng bằng 2.

**Tính chất của hạng hệ véc tơ:** Hạng của hệ véc tơ không đổi nếu thực hiện một số hữu hạn các phép biến đổi (gọi là phép biến đổi sơ cấp) sau lên hệ $S$:

1) Đổi chỗ các véc tơ của hệ (hạng của hệ véc tơ không phụ thuộc vào thứ tự các véc tơ trong hệ) .
2) Thêm (bớt) một số véc tơ là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ .
3) Nhân một số khác 0 với một véc tơ của hệ $S$;
4) Cộng vào một véc tơ của hệ $S$ $S$ một tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của $S$; thì hệ $S$ biến thành hệ $S'$ có $r(S) = r(S')$.

Vì các phép biến đổi sơ cấp này không làm thay đổi số véc tơ trong một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ, do đó hạng của hệ véc tơ không thay đổi.

**c. Một số phương pháp tìm hạng của hệ véc tơ**

Để tìm hạng của hệ véc tơ $\{v_1, {}_2, ..., v_n\}$ ta có thể sử dụng 2 cách sau:

**Cách 1.** Áp dụng định nghĩa: chỉ ra hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ đó, theo từng bước như sau:

1) Loại các véc tơ $v_i = \theta$,
2) Giả sử $v_1 \neq \theta$, loại các véc tơ $v_i$ tỉ lệ với $v_1$,
3) Giả sử $\{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\}$ độc lập, khi đó $\{v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_j\}$ độc lập khi và chỉ khi $v_j$ không biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\}$.

**Cách 2.** Áp dụng tính chất của hạng hệ véc tơ, bằng cách thực hiện các phép biến đổi sơ cấp lên hệ véc tơ đã cho để đưa về hệ véc tơ mà ta dễ dàng nhận được hạng của nó. Khi thực hành ta có thể viết tọa độ các véc tơ thành một bảng, mỗi véc tơ nằm trên một hàng (hoặc một cột), sau đó biến đổi để bảng số này có dạng bậc thang theo hàng (hoặc theo cột).

**Ví dụ 2.18.** Tìm hạng của hệ véc tơ sau:

$$\{\, v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (1,-1,1,-1),\ v_3 = (1,3,1,3),\ v_4 = (1,2,0,2),\ v_5 = (1,2,1,2) \,\}.$$

**Giải:**

- Cách 1: $v_1$, $v_2$ không tỉ lệ nên độc lập. Nếu $v_3 = xv_1 + yv_2$ thì

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \\ x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow\ x=2,\ y=-1;$$ Vậy $v_3 = 2v_1 - v_2$. Nghĩa là $\{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc.

Nếu $v_4 = xv_1 + yv_2$ thì

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \\ x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$$, hệ vô nghiệm. Vậy $\{v_1, v_2, v_4\}$ độc lập tuyến tính.

Nếu $v_5 = xv_1 + yv_2 + zv_4$ thì $$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=2 \\ x+y=1 \\ x-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow\ x=\frac{3}{2},\ y=-\frac{1}{2},\ z=0.$$

Vậy $v_5 = \frac{3}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$. Nghĩa là $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ phụ thuộc tuyến tính.

Suy ra $\{v_1, v_2, v_4\}$ là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Do đó hệ véc tơ có hạng là 3.

- Cách 2: Viết các véc tơ thành một bảng số (mỗi hàng ứng với một véc tơ)

$$\begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{cases}$$

- hàng 1 $\rightarrow$ hàng 1( giữ lại véc tơ $v_1 \neq \theta$)
- hàng 2 - hàng1 $\rightarrow$ hàng 2 ( thay véc tơ $v_2$ bởi véc tơ $-v_1 + v_2$, hay nói cách khác là thêm vào hệ một véc tơ là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ khác trong hệ, rồi loại véc tơ $v_2$). Tương tự :
- hàng 3 - hàng1 $\rightarrow$ hàng 3; hàng 4 - hàng1 $\rightarrow$ hàng 4; hàng 5 - hàng4 $\rightarrow$ hàng 5.

$$\to \left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right. \quad \to \left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right.$$

- Hàng 3 + hàng 2 $\to$ hàng 3; hàng 4 +(1/2) hàng 2 - hàng 5 $\to$ hàng 4.
- -1/2hàng 2 $\to$ hàng 2; hàng 5 $\to$ hàng 3.

Bảng số này có dạng bậc thang theo hàng. Có 3 hàng có số khác không, ứng với 3 véc tơ độc lập tuyến tính tối đại của $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Vậy hệ véc tơ có hạng là 3.

❖ Ta có thể viết các véc tơ thành cột, rồi biến đổi thành bảng có dạng bậc thang cột.

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \end{matrix}\right. \xrightarrow{\substack{v_1-v_2\to u_2 \\ -v_1+v_3\to u_3 \\ -v_4+v_5\to u_5 \\ -v_1+v_4\to u_4}} \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}\right. \to$$

$$\xrightarrow{\substack{-u_2+u_3\to v'_3 \\ -2u_4+u_2\to v'_2 \\ u_4\leftrightarrow u_2, u_5\leftrightarrow u_4}} \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right. \xrightarrow{-v'_3+2v'_4} \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right. .$$

Bảng số này có dạng bậc thang theo cột. Có 3 cột có số khác không, ứng với 3 véc tơ độc lập tuyến tính tối đại của $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ sau khi biến đổi.

**Chú ý 2.5.**

- Khi sử dụng các phép biến đổi sơ cấp đối với một hệ véc tơ để đưa bảng số về bảng có dạng bậc thang hàng (hoặc bậc thang cột) còn gọi là sử dụng phép biến đổi Gauus.
- Sau khi học xong chương ma trận, định thức ta sẽ có thêm phương pháp tìm hạng của hệ véc tơ.

### 2.4.2 Cơ sở, số chiều của không gian véc tơ

**a. Cơ sở của không gian véc tơ**

**Định nghĩa 2.9.** Mỗi hệ sinh, độc lập tuyến tính của không gian véc tơ $V$ được gọi là một cơ sở của không gian $V$.

**Ví dụ 2.19.**

▫ $\{e_1 = (1,0,0);\ e_2 = (0,1,0);\ e_3 = (0,0,1)\}$ gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

- Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ là $\mathscr{B} = \{ e_1, ..., e_n \}$ trong đó:

$$e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,...,0), ..., e_n = (0,0,...,1).$$

**Định lý 2.8.** Giả sử $\{ e_1, ..., e_n \}$ là một hệ các véc tơ của $V$.

Ba mệnh đề sau là tương đương:

(i) Hệ $\{ e_1, ..., e_n \}$ là một cơ sở của $V$.

(ii) Hệ $\{ e_1, ..., e_n \}$ là hệ độc lập tuyến tính tối đại của $V$.

(iii) Mọi véc tơ $u \in V$ tồn tại một cách viết duy nhất :

$$u = x_1 e_1 + ... + x_n e_n, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(2.2)}$$

**Chứng minh**: (i)⇒(ii): Hiển nhiên từ định nghĩa của cơ sở.

(ii)⇒(iii): Suy từ tính chất của hệ ĐLTT tối đại.

(iii)⇒(i): Rõ ràng $\{ e_1, ..., e_n \}$ là hệ sinh. Ngoài ra nếu $x_1 e_1 + ... + x_n e_n = \theta$, mặt khác $\theta = 0e_1 + ... + 0e_n$. Do cách viết duy nhất suy ra $x_1 = ... = x_n = 0$. Do đó $\{ e_1, ..., e_n \}$ là một cơ sở của $V$.

**Định lý 2.9.** Giả sử $V$ là không gian hữu hạn sinh và $\{ v_1, ..., v_k \}$ là hệ độc lập tuyến tính các véc tơ của $V$. Khi đó có thể bổ sung thêm để có được hệ $\{ v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+m} \}$ là một cơ sở của $V$.

**Chứng minh**: Giả sử $V$ có một hệ sinh có n véc tơ. Nếu $S = \{ v_1, ..., v_k \}$ không phải là cơ sở thì $S$ không phải là hệ sinh, do đó tồn tại một véc tơ, ta ký hiệu $v_{k+1}$, sao cho hệ $\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}\}$ độc lập tuyến tính. Tiếp tục quá trình này cuối cùng ta có hệ:

$\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+m}\}$ độc lập tuyến tính và là hệ sinh, $k + m \le n$ (theo Bổ đề 2.1). Vậy $\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+m}\}$ là một cơ sở cần tìm.

**Hệ quả 2.1.** Mọi không gian hữu hạn sinh đều tồn tại cơ sở.

**Định lý 2.10.** Số phần tử của mọi cơ sở của đều bằng nhau.

**Chứng minh**: Áp dụng Bổ đề 2.1 ta có hai cơ sở bất kỳ của $V$ đều có số phần tử bằng nhau.

Định lý 2.12 dẫn đến định nghĩa số chiều của không gian véc tơ.

**b. Số chiều của không gian véc tơ**.

**Định nghĩa 2.10.** Số véc tơ của một cơ sở của $V$ được gọi là số chiều của $V$, ký hiệu $\dim V$

- Khi một cơ sở của $V$ có $n$ véc tơ thì ta gọi $V$ là không gian $n$ chiều.
- Viết $\dim V = n$ .

❖ Quy ước $\dim\{\theta\} = 0$.

**Ví dụ 2.20.** Trong không gian $\mathbb{R}^n$ , hệ gồm $n$ véc tơ $\mathscr{B} = \{ e_1, ..., e_n \}$ trong đó:

$$e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,...,0), e_n = (0,0,...,1) \qquad \textbf{(2.3)}$$

là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gọi là cơ sở chính tắc. Vậy $\dim\mathbb{R}^n = n$ .

**Định lý 2.11.** Giả sử $\dim V = n$ và $S = \{v_1, ..., v_m\}$ là hệ $m$ véc tơ của $V$ . Khi đó:

(i) Nếu hệ $S$ độc lập tuyến tính thì $m \le n$ .

(ii) Nếu hệ $S$ là hệ sinh của thì $m \ge n$ .

(iii) Nếu $m = n$ thì hệ $S$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $S$ là hệ sinh.

**Chứng minh**: Gọi $\mathscr{B}$ là một cơ sở của $V$ . Áp dụng bổ đề 2.1 cho hai hệ $\mathscr{B}$ và $S$ suy ra các điều cần chứng minh.

**Hệ quả 2.2.** Trong không gian véc tơ $n$ chiều $V$ , mọi hệ gồm $n$ véc tơ độc lập tuyến tính đều là cơ sở của $V$ .

**Nhận xét 2.2.**

- Theo Định lý 2.11. thì trong không gian $n$ chiều $V$ , mọi hệ có nhiều hơn $n$ véc tơ đều là hệ phụ thuộc tuyến tính.
- Hệ quả 2.2 cho một kết quả quan trọng dùng để xác định một hệ gồm $n$ véc tơ của không gian $n$ chiều $V$ có phải là cơ sở của $V$ hay không.

**Ví dụ 2.21.**

- $\{ v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (1,-1,-1),\ v_3 = (1,3,1) \}$ gồm 3 véc tơ độc lập tuyến tính nên là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
- $\{ v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (1,-1,-1) \}$ hệ độc lập tuyến tính chỉ có 2 véc tơ nên không là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

## 2.5 TỌA ĐỘ CỦA VÉC TƠ TRONG CƠ SỞ

Giả sử $\mathscr{B} = \{ e_1, ..., e_n \}$ là một cơ sở của không gian vectơ $V$ , khi đó $\forall u \in V$ đều viết được một cách duy nhất $u = x_1e_1 + ... + x_ne_n,\quad x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. (công thức (2.2) Định lý 2.8. chương 2)

**Định nghĩa 2.11.** Bộ gồm $n$ số thực $(x_1,...,x_n)$ được gọi là toạ độ của véc tơ $u$ trong cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$.

Ta ký hiệu $[u]_{\mathscr{B}}$ là toạ độ của véc tơ $u$ trong cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$.

Vậy nếu $u$ thỏa mãn (2.2) thì $[u]_{\mathscr{B}}=(x_1,...,x_n)$ (véc tơ hàng).

Có thể còn dùng ký hiệu $[u]_{\mathscr{B}}=\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ (véc tơ cột). **(2.4)**

**Nhận xét 2.3.**

- Như vậy trong hai cơ sở khác nhau thì một véc tơ sẽ có toạ độ không giống nhau.

$$[u]_{\mathscr{B}} \neq [u]_{\mathscr{B}'}$$

- Dù trong không gian vectơ nào, véc tơ thuộc loại nào thì ta thấy toạ độ của véc tơ cũng là một bộ các số thực, số thành phần toạ độ là số chiều của không gian véc tơ đó.

Sau khi học chương 3 ta sẽ có công thức liên hệ giữa hai toạ độ của cùng một véc tơ trong hai cơ sở khác nhau.

**Ví dụ 2.22.** Trên $\mathbb{R}^2$ xét véc tơ $v=(1,6)$.

a) $v=(1,6)=(1,0)+6(0,1)\Rightarrow(1,6)$ là toạ độ của $u$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

b) $v=(1,6)=-2e_1+1e_2\Rightarrow(-2,1)$ là toạ độ của $u$ trong cơ sở $\{e_1=(0,-1),e_2=(1,4)\}$

c) Trên $\mathbb{R}^3$ véc tơ $u=(2,2,6)=6v_1-2v_2-2v_3\Rightarrow(6,-2,-2)$ gọi là toạ độ của $u$ trong cơ sở $\{v_1=(1,1,1),\ v_2=(1,-1,-1),\ v_3=(1,3,1)\}$ (xem Ví dụ 2.21).

## BÀI TẬP CHƯƠNG 2

**2.1)** Với các phép toán được định nghĩa trong $\mathbb{R}^n$. Hãy chứng tỏ các tập hợp sau là không gian véc tơ

a) $W=\{u=(x_1,x_2,...x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1=x_2=...=x_n\}$.

b) $W=\{u=(0,x_2,...x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1+x_2+...+x_n=0\}$.

c) $W=\{u=(x_1,x_2,...x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1+x_n=0\}$.

**2.2)** Các tập hợp sau trong $\mathbb{R}^n$ có phải là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^n$ không? Vì sao?

a) $W = \{u = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 = x_2 = ... = x_n = 1\}$.

b) $W = \{u = (0, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n | x_2 > 0\}$.

c) $W = \{u = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_n = 1\}$.

**2.3)** Tập $\mathbb{R}^3$ với các phép toán được định nghĩa trong các trường hợp sau có phải là không gian véc tơ không? Chỉ rõ tiên đề mà phép toán không thoả mãn.

a) $\begin{cases}(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z) \\ \alpha(x,y,z)=(\alpha x,y,z)\ ; \qquad \alpha \in \mathbb{R}.\end{cases}$

b) $\begin{cases}(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z') \\ \alpha(x,y,z)=(2\alpha x,2\alpha y,2\alpha z)\ ; \qquad \alpha \in \mathbb{R}.\end{cases}$

c) $\begin{cases}(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x'+1,y+y'+1,z+z'+1) \\ \alpha(x,y,z)=(0,0,0)\ ; \qquad \alpha \in \mathbb{R}.\end{cases}$

**2.4)** Xét các hàm số xác định trên đoạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$ với các phép cộng hai hàm số và phép nhân hàm số với số thực. Tập các hàm số sau có phải là không gian vectơ không?

a) Tập $C_{[a,b]}$ các hàm liên tục trên $[a,b]$.

b) Tập các hàm số khả vi trên $[a,b]$ (có đạo hàm tại mọi điểm).

c) Tập các hàm số bị chặn trên $[a,b]$.

d) Tập các hàm số trên $[a,b]$ sao cho $f(b) = 0$.

e) Tập các hàm số trên $[a,b]$ sao cho $f(b) = 1$.

f) Tập các hàm số không âm trên $[a,b]$.

**2.5)** Hãy biểu diễn véc tơ $v$ thành tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, u_3$:

a) $v = (7,-2,15);\ u_1 = (2,3,5),\ u_2 = (3,7,8),\ u_3 = (1,-6,1)$.

b) $v = (1,3,5);\ u_1 = (3,2,5),\ u_2 = (2,4,7),\ u_3 = (5,6,0)$.

**2.6)** Hãy xác định $\lambda$ sao cho $u$ là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, u_3$:

a) $u = (7,-2,\lambda);\ u_1 = (2,3,5),\ u_2 = (3,7,8),\ u_3 = (1,-6,1)$

b) $u = (1,3,5);\ u_1 = (3,2,5),\ u_2 = (2,4,7),\ u_3 = (5,6,\lambda)$

**2.7)** Chứng minh hệ véc tơ $\{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, tìm toạ độ của $u$ trong cơ sở này.

a) $u=(6,9,14)$; $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,1,2)$, $v_3=(1,2,3)$

b) $u=(6,9,14)$; $v_1=(1,1,2)$, $v_2=(1,2,3)$, $v_3=(1,1,1)$

c) $u=(6,2,-7)$, $v_1=(2,1,-3)$, $v_2=(3,2,-5)$, $v_3=(1,-1,1)$

**2.8)** Mỗi hệ véc tơ sau có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không?

a) $u=(1,1,1)$, $v=(2,2,0)$, $w=(3,0,0)$

b) $u=(3,1,4)$, $v=(2,-3,5)$, $w=(5,-2,9)$, $s=(1,4,-1)$

**2.9)** Các hệ véc tơ dưới đây độc lập hay phụ thuộc tuyến tính.

a) $u=(4,-2,6)$, $v=(6,-3,9)$ trong $\mathbb{R}^3$.

b) $u=(2,-3,1)$, $v=(3,-1,5)$, $w=(1,-4,3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

c) $u=(5,4,3)$, $v=(3,3,2)$, $w=(8,1,3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

d) $u=(4,-5,2,6)$, $v=(2,-2,1,3)$, $w=(6,-3,3,9)$, $s=(4,-1,5,6)$ trong $\mathbb{R}^4$.

**2.10)** Tìm chiều và một cơ sở của không gian con của $\mathbb{R}^4$

a) Các véc tơ có dạng $(a,b,c,0)$.

b) Các véc tơ có dạng $(a,b,c,d)$ với $d=a+b$ và $c=a-b$.

c) Các véc tơ có dạng $(a,b,c,d)$ với $a=b=c=d$.

**2.11)** Tìm chiều và một cơ sở của không gian con sinh bởi hệ các véc tơ sau:

a) $v_1=(2,4,1), v_2=(3,6,-2), v_3=(-1,2,-1/2)$.

b) $v_1=(1,0,0,-1), v_2=(2,1,1,0), v_3=(1,1,1,1), v_4=(1,2,3,4), v_5=(0,1,2,3)$.

**2.12)** Chứng minh rằng tập các hàm khả vi trên $[a,b]$ và thoả mãn $f'-5f=0$ tạo thành không gian con của $C[a,b]$. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con này.

**2.13)** Cho 3 véc tơ $v_1,v_2,v_3$ của không gian véc tơ $V$. Chứng minh:

a) Nếu $\{v_1, v_2\}$ độc lập thì $\{v_1+v_2, v_1-v_2\}$ cũng độc lập.

b) Nếu $\{v_1,v_2,v_3\}$ độc lập thì $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_1\}$ cũng độc lập.

**2.14)** Chứng minh nếu hai hệ véc tơ $\{v_1,...,v_n\}$ và $\{u_1,...,u_m\}$ của không gian véc tơ $V$ mà mỗi véc tơ của hệ này đều biểu thị được thành tổ hợp tuyến tính của hệ kia thì hai hệ đó có cùng hạng.

**2.15)** Chứng minh rằng các tập con sau là các không gian con của $\mathbb{R}^3$.

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ x + y + z = 0 \right\},\ W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x - y - z = 0 \right\}.$$

a) Tìm một cơ sở của $V$, $W$, $V \cap W$.

b) Tìm số chiều của các không gian $V$, $W$, $V \cap W$.

**2.16)** Chứng minh rằng các tập con sau là các không gian con của $\mathbb{R}^3$.

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ x + 2y - z = 0 \right\},\ W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ 3x - y + z = 0 \right\}.$$

a) Tìm một cơ sở của $V$, $W$, $V \cap W$.

b) Tìm số chiều của các không gian $V$, $W$, $V \cap W$.

# CHƯƠNG 3
# MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

Kiến thức về ma trận và định thức tưởng như độc lập, nhưng thực tế đó lại là một phần công cụ quan trọng dùng để giải các hệ phương trình tuyến tính và các chương sau của tài liệu này. Một số khái niệm của chương không gian véc tơ như hạng của hệ véc tơ, tọa độ của véc tơ trong các cơ sở khác nhau…sẽ được làm rõ thêm nhờ ma trận, định thức.

Để nắm vững chương này yêu cầu người học phải chú đến các ký hiệu, các định nghĩa, ý nghĩa của các phép biến đổi ma trận tùy theo mục đích công việc : tìm hạng hay tính định thức. Đặc biệt cần rèn luyện kỹ năng tính toán nhanh, chính xác, xác định quan hệ giữa các phần tử của các hàng hay các cột của ma trận và vận dụng một cách linh hoạt các tính chất của ma trận, định thức để tìm ra phương án tối ưu cho các bài toán trong chương này.

## 3.1 MA TRẬN

### 3.1.1 Khái niệm ma trận

**Định nghĩa 3.1.** Một ma trận cấp $m\times n$ là bảng chữ nhật gồm $m\times n$ số được xếp thành $m$ hàng $n$ cột ($1\le n,m\in\mathbb{N}$) . Mỗi ma trận được ký hiệu bởi chữ cái in hoa.

Ma trận $A$ được ký hiệu là

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \qquad \textbf{(3.1)}$$

Ma trận $A$ cấp $m\times n$ có thể được viết tắt là $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ hay $A=\left[a_{ij}\right]_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$ . **(3.2)**

Tuỳ theo $a_{ij}$ là số nguyên, thực, phức tương ứng ta có ma trận nguyên, thực hoặc phức. Nếu không chỉ rõ $a_{ij}$ thì ta quy ước $A$ là ma trận thực, nghĩa là $a_{ij}\in\mathbb{R}$ .

$a_{ij}$ là phần tử ở hàng thứ $i$ và cột $j$ của ma trận $A$ ;

$i$ gọi là chỉ số chỉ hàng, $i=1,2,...m$ ;

$j$ gọi là chỉ số chỉ cột , $j=1,2,...m$ .

- Hai ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m'\times n'}$ goi là bằng nhau, viết là $A=B$ , nếu chúng có cùng cấp, đồng thời các phần tử ở vị trí tương ứng bằng nhau.

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[b_{ij}\right]_{m'\times n'} \Leftrightarrow \begin{cases} m = m' \\ n = n' \\ a_{ij} = b_{ij}, \forall i = \overline{1,m}\ ;\ j = \overline{1,n} \end{cases} \quad \textbf{(3.3)}$$

- Khi $m = n$ ta nói $A$ là ma trận vuông cấp $n$. Các $a_{ii}$ là phần tử ở hàng thứ $i$ và cột $i$ gọi là các phần tử trên đường chéo chính.
- Tập hợp tất cả các ma trận cấp $m\times n$ được ký hiệu $\mathcal{M}_{m\times n}$.
- Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp $n$ được ký hiệu $\mathcal{M}_n$.

**Ví dụ 3.1.** $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 9 & -4 \\ 8 & 7 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 6 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ là ma trận cấp $3\times 4$.

Ta có $a_{11} = 8$ , $a_{12} = 1$ , $a_{23} = \frac{1}{2}$ , $a_{31} = 0$ , $a_{34} = -6$ ………

**Chú ý 3.1.** Tên gọi riêng của từng ma trận phụ thuộc vào hình thức, đặc điểm của các phần tử trong ma trận, sau này ta còn thấy người ta đưa ra các định nghĩa, tên gọi ma trận tuỳ theo các phép toán mà ma trận đó thoả mãn.

Dưới đây là tên các ma trận thường gặp được định nghĩa thông qua hình thức của ma trận.

Ma trận hàng là ma trận có 1 hàng. Ma trận cột là ma trận có 1 cột.

Ma trận không là ma trận có mọi phần tử là $0$, ký hiệu là $\theta$.

Ma trận đối của ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ là

$$-A = \left[b_{ij}\right]_{m\times n},\ b_{ij} = -a_{ij}, \forall i = 1,...m; \forall j = 1,...n.$$

Ma trận chuyển vị của ma trận $A$: Cho ma trận $A$ cấp $m\times n$, nếu ta đổi các hàng của ma trận $A$ thành các cột (và do đó các cột thành các hàng) thì ta được ma trận mới cấp $n\times m$, gọi là ma trận chuyển vị của ma trận trên $A$, ký hiệu là $A^t$

$$A^t = \left[c_{ij}\right]_{n\times m} : c_{ij} = a_{ji},\ \forall\ i = \overline{1,n}\ ; j = \overline{1,m}\ .$$

**Một số ma trận vuông cấp $n$ có dạng đặc biệt**

- ma trận đường chéo $D = \left[d_{ij}\right]_{n\times n}$ : $d_{ij} = 0\ \ khi\ \ i \neq j.$
- ma trận đơn vị cấp $n$, ký hiệu $I_n$, $I_n = \left[\delta_{ij}\right]_{n\times n}$ : $\begin{cases} \delta_{ij} = 1\ \ khi\ \ i = j \\ \delta_{ij} = 0\ \ khi\ \ i \neq j \end{cases}$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}.$$

- ma trận tam giác trên (tam giác dưới) : $a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$; $\left( a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j \right)$.
- ma trận đối xứng : Nếu $A = A^t$ thì $A$ được gọi là ma trận đối xứng ( $A$ là ma trận vuông có các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo chính).
- ma trận phản đối xứng : Nếu $A = -A^t$ thì $A$ được gọi là phản đối xứng ( $A$ là ma trận vuông có các phần tử đối xứng và trái dấu qua đường chéo thứ nhất, các phần tử trên đường chéo chính bằng 0).

**Ví dụ 3.2.** Với $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ thì $-A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$; $A^t = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow B = B^t$ . Đây là một ma trận vuông cấp 3, đối xứng.

### 3.1.2 Phép toán ma trận

**1. Phép cộng ma trận**

**Định nghĩa** : Cho hai ma trận cùng cấp $A = \left[ a_{ij} \right]_{m \times n}$, $B = \left[ b_{ij} \right]_{m \times n}$.

Tổng của hai ma trận $A, B$ là ma trận cùng cấp được ký hiệu và định nghĩa bởi

$$A + B = \left[ c_{ij} \right]_{m \times n}, \ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ với mọi } i = \overline{1,m} \ ; \ j = \overline{1,n} . \qquad \textbf{(3.4)}$$

**Tính chất 3.1.** Các tính chất sau đây đúng đối với các ma trận cùng cấp:

1) $A + (B + C) = (A + B) + C$ ;
2) $A + \theta = \theta + A = A$ ;
3) $A + (-A) = \theta$ ;
4) $A + B = B + A$ .

**Ví dụ 3.3.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 9 & 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

**2. Phép nhân một số với ma trận**

**Định nghĩa** : Cho ma trận $A = \left[ a_{ij} \right]_{m \times n}$, và số thực $k$ . Tích của số số thực $k$ với ma trận $A$ là một ma trận cùng cấp với A.

Ta định nghĩa và ký hiệu:

$$kA = \left[ ka_{ij} \right]_{m \times n} \qquad \textbf{(3.5)}$$

**Tính chất 3.2.**

Ta cũng kiểm chứng được các tính chất sau đúng với mọi $\forall k, h \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

1) $k(A+B) = kA + kB$ ;
2) $(k+h)A = kA + hA$ ;
3) $k(hA) = (kh)A$;
4) $1A = A$.

❖ Với 8 tính chất của hai phép toán nói trên, tập $\mathcal{M}_{m\times n}$ là một không gian véc tơ thực.

**Ví dụ 3.4.**

a) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 12 & -1 & 0 \\ 3 & -9 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1/3 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 25 & -15 & 0 \\ -5 & 50 & 35 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -1 & 10 & 7 \end{bmatrix}$.

**Ví dụ 3.5.** Tìm $x, y, z$ và $w$ nếu: $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$.

**Giải**: Theo (3.4) và (3.5) ta được $\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+w-1 & 2w+3 \end{bmatrix}$.

Theo (3.3) ta có $\begin{cases} 3x = x+4 \\ 3y = x+y+6 \\ 3z = z+w-1 \\ 3w = 2w+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ 2y = x+6 \\ 2z = w-1 \\ w = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ w = 3 \end{cases}$.

**3. Phép nhân ma trận**

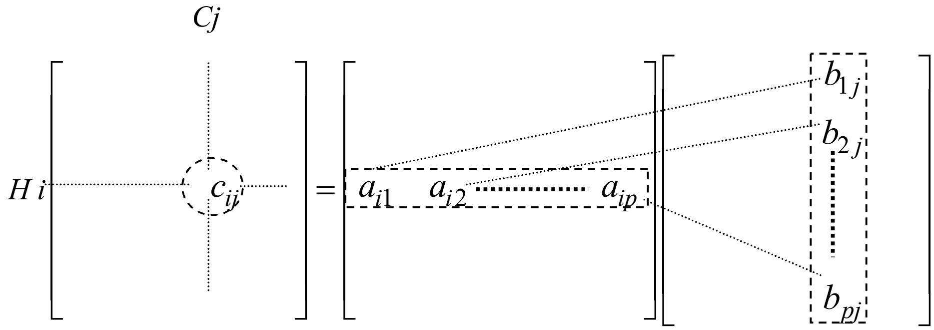
**Định nghĩa** : Tích hai ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ và $B = \left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ là ma trận cấp $m \times n$,

được ký hiệu và định nghĩa bởi $AB = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$, trong đó:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} \text{ với mọi } i = \overline{1,m}\ ;\ j = \overline{1,n}. \qquad \textbf{(3.6)}$$

Vậy phần tử ở hàng thứ $i$ cột thứ $j$ của $AB$ bằng tổng của tích các phần tử của hàng thứ $i$ của $A$ với các phần tử tương ứng của cột thứ $j$ của $B$.

Ta xem cách thực hiện việc tìm phần tử ở hàng thứ $i$ cột thứ $j$ của $AB$ dưới đây :




**Nhận xét 3.1.**

- Ta thấy rằng tích của hai ma trận $A$ và $B$ định nghĩa được khi số cột của $A$ bằng số hàng của $B$. Vì vậy có thể định nghĩa $AB$ nhưng không định nghĩa được $BA$ nếu số cột của $B$ không bằng số hàng của $A$.

**Tính chất 3.3.** Giả sử $A, B, C$ là các ma trận với số cột số hàng thích hợp để các phép toán sau xác định được thì ta có các đẳng thức:

1) $A(BC) = (AB)C$ tính kết hợp.

2) $A(B+C) = AB + AC$ tính phân phối bên trái phép nhân ma trận với phép cộng.

3) $(B+C)A = BA + CA$ tính phân phối bên phải phép nhân ma trận với phép cộng.

4) Với mọi $k \in \mathbb{R}$, $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

5) $I_m A = A = AI_n$ với mọi ma trận $A$ cấp $m \times n$ **(3.7)**

6) Phép nhân hai ma trận không có tính giao hoán.

❖ Ta có thêm các định nghĩa:

- Ma trận $A, B$ được gọi là hai ma trận giao hoán nếu $AB = BA$.
- Ma trận $A$ được gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận $B$ sao cho $AB = BA = I$. Khi đó $B$ gọi là ma trận nghịch đảo của $A$, ký hiệu là $A^{-1}$.

  Vậy $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

**Ví dụ 3.7.** a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$.

Các phần tử được tính như sau:

$$c_{11} = 1.1 + (-2).(-1) + 3.2 = 9; \quad c_{12} = 1.3 + (-2).0 + 3.4 = 15.$$

$$c_{21} = (-1).1 + 2.(-1) + 5.2 = 7; \quad c_{22} = (-1).3 + 2.0 + 5.4 = 17.$$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 18 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & 26 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 3 & 12 & -6 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ta nói $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ là một ma trận khả nghịch và $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận nghịch đảo của $A$.

**Đa thức của ma trận**

**Định nghĩa 3.2.**

Giả sử $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ là một đa thức bậc $k$.

Với mọi ma trận $A$ vuông cấp $n$. Ta định nghĩa đa thức của ma trận $A$ như sau:

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_k A^k \qquad \textbf{(3.8)}$$

Như vậy $p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_k A^k \subset \mathcal{M}_n$. Qui ước $A^0 = I$, $A^1 = A$.

**Ví dụ 3.8.** Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ và đa thức $p(x) = x^2 + 4x + 4$. Tìm $p(A)$.

Ta có: $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$;

$$p(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^2 + 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ta cũng có thể viết $p(x) = (x+2)^2 \Rightarrow p(A) = (A + 2I)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$.

**Tính chất của ma trận chuyển vị**

Sử dụng định nghĩa của ma trận chuyển vị, các phép toán ma trận ta có các tính chất sau đối với ma trận chuyển vị.

**Tính chất 3.4.**

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$.

2) $(kA)^t = kA^t$.

3) $(AB)^t = B^t A^t$.

### 3.1.3 Ma trận chuyển cơ sở

**a. Ma trận của một hệ véc tơ trong một cơ sở**

$\mathscr{B} = \{ e_1, ..., e_n \}$ là một cơ sở của không gian vectơ $V$, khi đó $\forall u \in V$ đều viết được một cách duy nhất $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$, $x_1, x_2, .., x_n \in \mathbb{R}$.

Ta ký hiệu $[u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ là tọa độ của véc tơ $u$ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

Bây giờ ta xét một hệ gồm $m$ các véc tơ $\{ u_1, ..., u_m \}$ của không gian véc tơ $V$, ta có:

$$u_j = a_{1j} e_1 + a_{2j} e_2 + ... + a_{nj} e_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \ \text{ hay } [u_j]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{bmatrix}; \quad j = \overline{1, m}.$$

**Định nghĩa 3.3.** Ma trận $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ có các cột lần lượt là toạ độ của các véc tơ của hệ $\{ u_1, ..., u_m \}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ được gọi là ma trận của hệ véc tơ $\{ u_1, ..., u_m \}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

**Ví dụ 3.9.** Trên $\mathbb{R}^2$, tìm ma trận của hệ véc tơ $\{ v_1 = (3, -2); v_2 = (1, 2); v_3 = (0, 5) \}$ trong cơ sở chính tắc.

**Giải:** ta biểu diễn các véc tơ đã cho trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 = (3, -2) = 3(1, 0) - 2(0, 1);$$

$$v_2 = (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1);$$

$$v_3 = (0, 5) = 0(1, 0) + 5(0, 1).$$

Do đó hệ véc tơ $\{ v_1, v_2, v_3 \}$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

**Ví dụ 3.10.** Trên $\mathbb{R}^3$, cho hệ véc tơ $S = \{ u_1 = (2, 2, 6), \ u_2 = (1, 1, 0), \ u_3 = (0, 1, 0) \}$.

Tìm ma trận của hệ véc tơ đó trong cơ sở $\mathscr{B}$, và trong cơ sở $\mathscr{B}'$.

$$\mathscr{B}=\{\, e_1=(1,0,0),\, e_2=(0,1,0),\, e_3=(0,0,1)\,\} \text{ (cơ sở chính tắc)}$$

$$\mathscr{B}'=\{\, v_1=(1,1,1),\, v_2=(1,-1,-1),\, v_3=(1,3,1)\,\} \text{ (đã chứng minh ở Ví dụ 2.22).}$$

**Giải:** Trong cơ sở chính tắc, hệ $S$ có ma trận là $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 6 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Trong cơ sở $\mathscr{B}'$, ta đã biết $u_1=(2,2,6)=6v_1-2v_2-2v_3 \Rightarrow [u_1]_{\mathscr{B}'}=\begin{bmatrix} 6\\ -2\\ -2\end{bmatrix}$.

tương tự $[u_2]_{\mathscr{B}'}=\begin{bmatrix} 0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$; $[u_3]_{\mathscr{B}'}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

Do đó hệ $S$ có ma trận trong cơ sở $\mathscr{B}'$ là $A'=\begin{bmatrix} 6 & 0 & -\frac{1}{2}\\ -2 & \frac{1}{2} & 0\\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

**Nhận xét 3.2.** Trong hai cơ sở khác nhau của một không gian véc tơ, ma trận của hệ véc tơ $\{u_1,...,u_m\}$ là hai ma trận cùng cấp nhưng không giống nhau vì toạ độ của một véc tơ trong hai cơ sở khác nhau thì khác nhau.

**b. Ma trận chuyển cơ sở**

**Định nghĩa 3.4.** Giả sử $\mathscr{B}=\{e_1,.....e_n\}$, $\mathscr{B}'=\{e'_1,.....e'_n\}$ là hai cơ sở của $V$. Ma trận của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$.

Nghĩa là nếu $\quad e'_j=\sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i$ , $j=\overline{1,n}$ thì $T=\left[t_{ij}\right]_{n\times n}$

hay
$$e'_1=t_{11}e_1+t_{21}e_2+....+t_{n1}e_n$$
$$e'_2=t_{12}e_1+t_{22}e_2+....+t_{n2}e_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e'_n=t_{1n}e_1+t_{2n}e_2+....+t_{nn}e_n.$$

Thì ma trận của hệ véc tơ cơ sở $\mathscr{B}'$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ là ma trận sau:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & . & . & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & . & . & t_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ t_{n1} & t_{n2} & . & . & t_{nn} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.9)}$$

Ma trận T được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$.

Ký hiệu $\mathscr{B} \xrightarrow{T} \mathscr{B}'$.

Hoàn toàn tương tự, ta định nghĩa ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang cơ sở $\mathscr{B}$ là ma trận của hệ véc tơ $\mathscr{B}$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$.

Ký hiệu $\mathscr{B}' \xrightarrow{P} \mathscr{B}$. **(3.10)**

**Ví dụ 3.11.** Trên $\mathbb{R}^2$, tìm ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$ và ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang cơ sở $\mathscr{B}$. Trong đó:

$$\mathscr{B} = \{ e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \} \text{ và } \mathscr{B}' = \{ e'_1 = (4,3), e'_2 = (1,1) \}.$$

**Giải :** Áp dụng định nghĩa

ta có $e_1' = (4,3) = 4(1,0) + 3(0,1)$, $e_2' = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$,

nên ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ là $T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Có $e_1 = (1,0) = (4,3) - 3(1,1)$, $e_2 = (0,1) = -(4,3) + 4(1,1)$,

nên ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang $\mathscr{B}$ là $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

**Ví dụ 3.12.** Trên $\mathbb{R}^3$, tìm ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$ và ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang cơ sở $\mathscr{B}$. Trong đó:

$$\mathscr{B} = \{ e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1) \}$$

$$\mathscr{B}' = \{ v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,-1,-1), v_3 = (1,3,1) \}.$$

**Giải :** ta có ma trận của $\mathscr{B}'$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ là $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; nên đây chính là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$.

Bạn đọc tự kiểm tra lại kết quả sau: $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang cơ sở $\mathscr{B}$.

**c. Công thức đổi tọa độ của một véc tơ trong hai cơ sở khác nhau**

Định lý sau cho ta công thức liên hệ giữa hai toạ độ của cùng một véc tơ trong hai cơ sở khác nhau**.**

**Định lý 3.1.** Giả sử $\mathscr{B} = \{ e_1, .....e_n \}$, $\mathscr{B}' = \{ e'_1, .....e'_n \}$ là hai cơ sở của $V$.

với véc tơ bất kỳ $u \in V$ ; Giả sử $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i$ .

và $T$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$.

$P$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang $\mathscr{B}$.

Khi đó

$$[u]_{\mathscr{B}} = \mathrm{T}[u]_{\mathscr{B}'} \qquad \textbf{(3.11)}$$

Tương tự ta cũng có công thức

$$[u]_{\mathscr{B}'} = P[u]_{\mathscr{B}} \qquad \textbf{(3.12)}$$

(3.11), (3.12) được gọi là công thức đổi tọa độ của véc tơ.

**Chứng minh** công thức (3.11).

Giả sử $u = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ ( 1 )

và $u = y_1 e'_1 + ... + y_n e'_n$, $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ ( 2 )

Theo giả thiết ta có

$$e'_1 = t_{11} e_1 + t_{21} e_2 + .... + t_{n1} e_n$$

$$e'_2 = t_{12} e_1 + t_{22} e_2 + .... + t_{n2} e_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$e'_n = t_{1n} e_1 + t_{2n} e_2 + .... + t_{nn} e_n,$$

thay các $e'_i$, $i = 1, 2, ..., n$ vào ( 2 ) ta có

$$\begin{aligned} u = {} & y_1 (t_{11} e_1 + t_{21} e_2 + .... + t_{n1} e_n ) + \\ & + y_2 (t_{12} e_1 + t_{22} e_2 + .... + t_{n2} e_n) + \\ & + .................................... \\ & + y_n (t_{1n} e_1 + t_{2n} e_2 + .... + t_{nn} e_n). \end{aligned}$$

Viết lại biểu thức trên ta nhận được :

$$\begin{aligned} u = {} & (t_{11} y_1 + t_{12} y_2 + .... + t_{1n} y_n ) e_1 + \\ & + (t_{21} y_1 + t_{22} y_2 + .... + t_{2n} y_n) e_2 + \\ & + .................................... \\ & + (t_{n1} y_1 + t_{n2} y_2 + .... + t_{nn} y_n) e_n. \end{aligned} \qquad (3)$$

Do trong một cơ sở thì một véc tơ chỉ có duy nhất một cách biểu diễn, so sánh (1) và (3) ta có

$$\begin{cases} x_1 = t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + .... + t_{1n}y_n \\ x_2 = t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + .... + t_{2n}y_n \\ ...................................... \\ x_n = t_{n1}y_1 + t_{n2}y_2 + .... + t_{nn}y_n \end{cases}$$

Điều này tương đương với

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & . & . & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & . & . & t_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ t_{n1} & t_{n2} & . & . & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

hay $[u]_{\mathscr{B}} = \mathrm{T}[u]_{\mathscr{B}'}$.

Ta có thể chỉ ra ma trận chuyển cơ sở nhờ công thức (3.11) và (3.12) mà không sử dụng định nghĩa của ma trận chuyển cơ sở qua ví dụ sau.

**Ví dụ 3.13.** Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$ và ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang cơ sở $\mathscr{B}$.

Với $\mathscr{B} = \{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ và $\mathscr{B}' = \{e'_1 = (4,3),\ e'_2 = (1,1)\}$.

**Giải :** $\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$: giả sử $[u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; $[u]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$;

Nghĩa là $u = xe_1 + ye_2 = x'e'_1 + y'e'_2$

Ta có $u = x(1,0) + y(0,1) = x'(4,3) + y'(1,1)$, suy ra

$$\begin{cases} x = 4x' + y' \\ y = 3x' + y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -3x + 4y \end{cases}$$

hay

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{ đồng thời } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Theo công thức (3.11) và (3.12) ta có

ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ là $T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,

và ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang $\mathscr{B}$ là $P = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Kết quả này ta đã có bằng cách dùng định nghĩa ở Ví dụ 3.11. .

**Ví dụ 3.14.** Xem Ví dụ 3.10. Hệ $S = \{ u_1 = (2,2,6),\ u_2 = (1,1,0),\ u_3 = (0,1,0) \}$.

có ma trận trong cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vì $S$ là một cơ sở (bạn đọc tự chứng minh), nên A cũng chính là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $S$.

Và ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang cơ sở $S$ là :

$$A' = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

## 3.2 ĐỊNH THỨC

### 3.2.1 Hoán vị và phép thế bậc $n$

**Định nghĩa 3.5.**

**1)** Mỗi song ánh $\sigma : \{ 1,2,...,n \} \to \{ 1,2,...,n \}$

$$i \mapsto \sigma(i)$$

được gọi là một phép thế bậc $n$ trên tập $\{1,2,...n\}$.

- Ta thường ký hiệu một phép thế bằng một ma trận có hàng thứ nhất là các số 1,2,...,n sắp theo thứ tự tăng dần còn hàng thứ hai là ảnh của nó:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(3.13)}$$

- Ký hiệu $S_n$ là tập tất cả các phép thế bậc $n$ trên tập $\{1,2,...n\}$.
- Với $\sigma, \mu \in S_n \Rightarrow \sigma_\circ \mu \in S_n$ .

Trong chương 1 ta đã biết tập $S_n$ có đúng $n!$ phần tử, gọi $S_n$ là nhóm đối xứng bậc $n$.

**2)** Ảnh của một phép thế là một hoán vị của tập $\{1,2,...n\}$. Với phép thế $\sigma$ ta có ảnh của $\sigma$ là hoán vị tương ứng:

$$[\sigma(1) \quad \sigma(2) \quad ... \quad \sigma(n)].$$

**3)** Nghịch thế của phép thế:

Xét phép thế $\sigma$ với ảnh là hoán vị $[\sigma(1) \quad \sigma(2) \quad ... \quad \sigma(n)]$.

Nếu có cặp $i < j$ mà $\sigma(i) > \sigma(j)$ thì ta nói có một nghịch thế của phép thế $\sigma$.

**Cách tìm số k – số các nghịch thế của phép thế $\sigma$**

Trong tập $[1 \quad 2 \quad \dots \quad n]$ có $i_1$ là giá trị sao cho $\sigma(i_1)=1$ là một phần tử trong hoán vị $[\sigma(1) \quad \sigma(2) \quad \dots \quad \sigma(n)]$;

Gọi $k_1$ là số các số trong $[\sigma(1) \quad \sigma(2) \quad \dots \quad \sigma(n)]$ đứng trước $\sigma(i_1)=1$;

Xoá số $\sigma(i_1)=1$, tồn tại $i_2$ sao cho $\sigma(i_2)=2$, gọi $k_2$ là số các số còn lại trong $[\sigma(1) \quad \sigma(2) \quad \dots \quad \sigma(n)]$ đứng trước $\sigma(i_2)=2$;

Xoá số $\sigma(i_2)=2$ và tiếp tục đếm như thế ...

Cuối cùng số các nghịch thế của $\sigma$ là: $k=k_1+k_2+\dots+k_{n-1}$

**4)** Dấu của phép thế: Giả sử $k$ là số các nghịch thế của $\sigma$, ta định nghĩa và ký hiệu dấu của phép thế $\sigma$ là:

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^k \tag{3.14}$$

Nếu $k$ chẵn, khi đó $\operatorname{sgn}\sigma=1$, người ta gọi $\sigma$ là phép thế chẵn,

Nếu $k$ lẻ người ta gọi $\sigma$ là phép thế lẻ, $\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^k$.

**5)** Chuyển vị (còn gọi là chuyển trí) $\sigma=[i_0 \quad j_0]$ là phép thế chỉ biến đổi hai phần tử $i_0, j_0$ cho nhau và giữ nguyên các phần tử còn lại:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & i_0 & \dots & j_0 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & j_0 & \dots & i_0 & \dots & n\end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Hay $\sigma=[i_0 \quad j_0]$ là phép thế có tính chất $\begin{cases}\sigma(i_0)=j_0, & i_0\neq j_0\\ \sigma(j_0)=i_0 & \\ \sigma(k)=k, & k\neq i_0, j_0\end{cases}$.

Dễ dàng tính được: $k_1=\dots=k_{i_0-1}=0$, $k_{i_0}=j_0-i_0$,

$k_{i_0+1}=\dots=k_{j_0-1}=1$, $k_{j_0}=\dots=k_n=0 \quad \Rightarrow \quad k=2(j_0-i_0)-1$.

Vậy $\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^k=-1$ nói cách khác chuyển trí là một phép thế lẻ.

**6)** Với mọi $\sigma, \mu\in S_n$ : $\operatorname{sgn}(\sigma\circ\mu)=\operatorname{sgn}\sigma.\operatorname{sgn}\mu$. **(3.16)**

**7)** Với mọi chuyển vị $[i_0 \ j_0]$ và phép thế $\sigma$ ta có:

$$\operatorname{sgn}\sigma\circ[i_0 \ j_0]=-\operatorname{sgn}\sigma. \tag{3.17}$$

**Ví dụ 3.15.**

Nhóm đối xứng $S_2$ có 2 phần tử là

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \text{ và } \sigma_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Nhóm đối xứng $S_3$ có 6 phần tử là

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \ \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

có dấu $\operatorname{sgn}\sigma_1 = \operatorname{sgn}\sigma_4 = \operatorname{sgn}\sigma_5 = 1$, $\operatorname{sgn}\sigma_2 = \operatorname{sgn}\sigma_3 = \operatorname{sgn}\sigma_6 = -1$.

**Ví dụ 3.16.** Hoán vị $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ứng với phép thế $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ có một nghịch thế,

$k_2 = 1$, Vậy $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^1 = -1$, đây là một chuyển trí $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$ và là một phép thế lẻ.

**Ví dụ 3.17.** Hoán vị $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ứng với phép thế $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; có $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$

$k_1 = 3$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$. Vậy $k = 5$ và $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^5 = -1$.

### 3.2.2 Định nghĩa định thức

Khi giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

ta đã biết cách tính các định thức $D, D_x, D_y$.

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba', \ D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc', \ D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'.$$

Các định thức này gọi là định thức cấp hai.

Như vậy định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ vuông cấp 2 là

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Liên hệ cách viết trên qua nhóm đối xứng $S_2$ có 2 phần tử là $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, và $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

với dấu của chúng là $\operatorname{sgn}\sigma_1 = 1$, $\operatorname{sgn}\sigma_2 = -1$. Do đó:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}\sigma_1\, a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}\sigma_2\, a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)} = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$$

Định nghĩa định thức của ma trận vuông cấp $n$ bất kỳ được mở rộng như sau:

**Định nghĩa 3.6.** Định thức của ma trận vuông cấp $n$ gọi là định thức cấp $n$.

Với ma trận vuông $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ định thức của $A$ được ký hiệu là $\det A$ hay $|A|$ và định nghĩa bởi biểu thức:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma . a_{1\sigma(1)} . a_{2\sigma(2)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \qquad \textbf{(3.18)}$$

- Khi $n = 1$, $A = \left[a_{11}\right] \Rightarrow \det A = a_{11}$, gọi là định thức cấp một.
- Khi $n = 2$, định thức cấp hai của ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Khi $n = 3$, định thức cấp ba:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

**Nhận xét 3.3.**

- Định thức của ma trận vuông $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ là tổng gồm $n!$ số hạng.
- Mỗi số hạng ứng với một phép thế của tập $S_n$, gồm hai phần:

  - Phần dấu: $\operatorname{sgn}\sigma$

  - Phần số: $a_{1\sigma(1)} . a_{2\sigma(2)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)}$ là tích gồm $n$ nhân tử, đó là $n$ phần tử trên $n$ hàng, mà ở trên $n$ cột khác nhau của ma trận $A$. Trong mỗi tích đó không có hai phần tử nào cùng hàng, cũng như không có hai phần tử nào cùng cột.

- Định thức của ma trận vuông $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ là một số, có thể khác hoặc bằng $0$.

**Định nghĩa 3.7.** $A$ là ma trận không suy biến nếu $\det A \neq 0$.

Nếu $\det A = 0$ ta nói $A$ là ma trận suy biến.

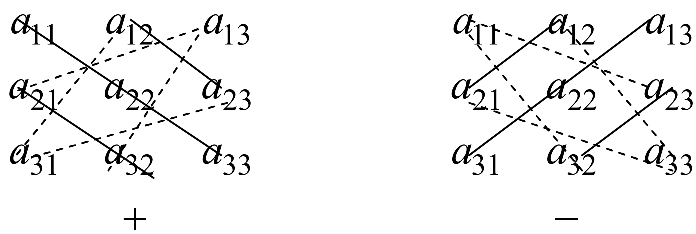
❖ Đối với định thức cấp ba người ta còn có các thuật toán để tính định thức. Như thuật toán Sarus và qui tắc hình sao.

✍ Thuật toán Sarus

$$\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ -a_{31} & a_{32} & a_{33} & + \\ -a_{11} & a_{12} & a_{13} & + \\ -a_{21} & a_{22} & a_{23} & + \end{array} \qquad \text{hoặc} \qquad \begin{array}{lllll} +a_{11} & +a_{12} & +a_{13} - & a_{11} - & a_{12} - \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

✍ Qui tắc hình sao




$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

**Ví dụ 3.18.**

$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 8(-3) - 6(-4) = 0$. Vậy $A$ là ma trận suy biến.

$B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = 7.9 - 8(-4) = 95 \neq 0$. Vậy $B$ không suy biến.

**Ví dụ 3.19.** Tính định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.6.2 + 4.1.(-1) + 3.2.1 - 6.1.(-1) - 1.2.2 - 3.4.2 = 4.$$

**Ví dụ 3.20.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 7 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10a + 46b - 17c.$

**Định nghĩa 3.8.** Trong không gian véc tơ $n$ chiều $V$. Giả sử hệ véc tơ $\{v_1, ..., v_n\}$ có ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ ứng với cơ sở $\mathscr{B}$. Khi đó:

Định thức của hệ véc tơ $\{v_1, ..., v_n\}$ ứng với cơ sở $\mathscr{B}$, ký hiệu $D_{\mathscr{B}}\{v_1, ..., v_n\}$ là định thức của ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$.

$$D_{\mathscr{B}}\{v_1, ..., v_n\} = \det A. \qquad \textbf{(3.19)}$$

**Ví dụ 3.21.** Hệ gồm 3 véc tơ $v_1 = (2,4,1)$, $v_2 = (3,6,1)$, $v_3 = (-1,2,2)$ có ma trận trong cơ sở chính tắc $\mathscr{B}$ của $\mathbb{R}^3$ là:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ có $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$. Vậy $D_{\mathscr{B}}\{v_1, v_2, v_3\} = \det A = 4.$

### 3.2.3 Các tính chất cơ bản của định thức

Từ định nghĩa định thức, ta có thể trực tiếp suy ra một số tính chất cơ bản của định thức. Dùng tính chất của phép thế bậc $n$ người ta cũng chứng minh được một số tính chất rất quan trọng của định thức. Bạn đọc có thể xem một số chứng minh chi tiết trong $[1]$. Ta tạm chia các tính chất của định thức thành hai loại.

**a. Các tính chất được chứng minh nhờ tính chất của phép thế $\sigma$**

**Tính chất 1.** $\det A^t = \det A$

**Hệ quả:** Tính chất nào đúng với hàng thì cũng đúng với cột.

**Chú ý:** Từ tính chất 2 các kết quả luôn được phát biểu với hàng đồng thời với cột.

**Ví dụ 3.22.** ở Ví dụ 3.20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\det A = 4$; $\Rightarrow \det A^t = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$.

**Tính chất 2.** Định thức đổi dấu nếu đổi chỗ hai hàng ( hoặc hai cột) của ma trận.

**Hệ quả :** Định thức bằng $0$ nếu có hai hàng (hoặc hai cột) giống nhau.

**Ví dụ 3.23.** a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}$, hàng 1 đổi chỗ cho hàng 3. $(H_1 \leftrightarrow H_3)$

b) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. $(H_2 = H_4)$

**Tính chất 3.** Định thức của ma trận tam giác trên (hoặc ma trận tam giác dưới) bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}...a_{nn}.$$

Ta có kết quả tương tự với ma trận tam giác dưới.

**b. Các tính chất suy trực tiếp từ định nghĩa và tính chất của phép toán cộng và nhân**

Để chứng minh các tính chất đơn giản tiếp theo bạn đọc chỉ cần chú ý rằng ở cả $n!$ số hạng trong khai triển định thức, ngoài phần dấu $\operatorname{sgn}\sigma$, thì chúng đều có dạng sau:

$$a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}....a_{i\sigma(i)}....a_{n\sigma(n)}.$$

Dễ dàng chứng minh được các tính chất sau.

**Tính chất 4.** Định thức bằng $0$ nếu có một hàng (hoặc một cột) là các số $0$.

Vì khi đó ngoài phần dấu $\operatorname{sgn}\sigma$, thì mỗi số hạng trong khai triển định thức có dạng

$$a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}....0....a_{n\sigma(n)}.$$

**Tính chất 5.** Định thức gấp lên $k$ lần nếu nhân số $k$ vào một hàng nào đó (hoặc một cột) của ma trận.

Vì khi đó mỗi số hạng trong khai triển định thức có dạng

$$a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}....ka_{i\sigma(i)}....a_{n\sigma(n)}.$$

**Hệ quả:**

- Có thể đưa thừa số chung ở một hàng (hoặc một cột) ra ngoài dấu định thức.
- Định thức bằng $0$ nếu có hai hàng (hoặc hai cột) tỷ lệ .

**Tính chất 6.** Định thức được tách thành tổng $n$ định thức tương ứng nếu các phần tử trên một hàng thứ $i$ nào đó (hoặc một cột thứ $i$) là tổng của $n$ số hạng.

Vì khi đó mỗi số hạng trong khai triển định thức có dạng

$$a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}....\left(b_{i\sigma(i)}+...+c_{i\sigma(i)}\right)....a_{n\sigma(n)}.$$

**Ví dụ 3.24.** Khi mỗi phần tử trên hàng thứ 3 đều là tổng của hai hạng tử, thì định thức bằng tổng của hai định thức tương ứng như sau:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Từ hai tính chất trên có thể phát biểu là:

**Tổng quát :** Định thức có tính chất tuyến tính đối với mỗi hàng (hoặc mỗi cột).

Cho hai ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ và ma trận $C=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ có hàng thứ $k$ là tổ hợp tuyến tính của hàng thứ $i$ của $A$ và $B$.

Nghĩa là $\begin{cases} c_{kj}=a_{kj}=b_{kj}\,; & i\neq k \\ c_{ij}=\alpha\, a_{ij}+\beta\, b_{ij}\,; & \end{cases}$ với mọi $j=1,2,...,n$

thì $\det C=\alpha\det A+\beta\det B$.

Tương tự đối với cột.

**Vídụ 3.25.**

a) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha a_1+\beta a_2 & \alpha b_1+\beta b_2 & \alpha c_1+\beta c_2 \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

b) $\begin{vmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & a & a' \\ \alpha b_1 + \beta b_2 & b & b' \\ \alpha c_1 + \beta c_2 & c & c' \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & a & a' \\ b_1 & b & b' \\ c_1 & c & c' \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_2 & a & a' \\ b_2 & b & b' \\ c_2 & c & c' \end{vmatrix}.$

**Ví dụ 3.26.** Tính định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 15 & -1 \end{bmatrix}$.

Nhận thấy các phần tử ở cột 1 có nhân tử chung là 2, các phần tử ở cột 2 có nhân tử chung là 3. Sau khi đưa TSC ở cột 1 và cột 2 ra ngoài ta thấy xuất hiện $(C_1 \equiv C_2)$. Vậy $\det A = 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 15 & -1 \end{vmatrix} = 2.3.\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 6.0 = 0$$

Dưới đây là một hệ quả của hai tính chất trên.

**Tính chất 7.** Nếu ta cộng vào một hàng (hoặc một cột) một tổ hợp tuyến tính các hàng (hoặc các cột) khác thì định thức không thay đổi. **(**Hệ quả của tính chất 5; 6)

**Hệ quả.** Định thức bằng 0 nếu có một hàng (hoặc một cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng (hoặc các cột) khác.

**Vídụ 3.27.** Tính định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 15 & -1 \end{bmatrix}$. $\det A = 0$ vì $H_3 = 3H_1 + H_2$.

Hoặc ta cũng có thể thực hiện các phép biến đổi sau: $(-3)H_1 + (-1)H_2 + H_3 \to H_3$;

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 15 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**Tính chất 8.** Định thức của mọi hệ $n$ véc tơ phụ thuộc tuyến tính đều bằng $0$. **(**Trong không gian véc tơ $n$ chiều)

**Vídụ 3.28.**

a) Ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, có $\det A = 0$ vì $C_3 = -1C_2 + 1C_1$.

b) Ma trận $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ có $\det B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0$ do $C_4 = C_1 + C_2 + C_3$

hay hệ véc tơ cột của hai ma trận trên là hệ phụ thuộc tuyến tính.

**Ví dụ 3.29.** Tính định thức cấp n sau

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a+n-1 & a & 1 & \dots & 1 \\ a+n-1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} \text{(cộng các cột vào cột 1)}$$

$$= (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a-1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D_n = (a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

### 3.2.4. Các phương pháp tính tính định thức

**a. Khai triển theo một hàng, (theo một cột) bất kỳ**

Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$.

Để khai triển theo một hàng, (hoặc một cột) bất kỳ, ta cần làm quen với các ký hiệu dưới đây. Xét phần tử tổng quát $a_{ij}$.

**Định nghĩa 3.9.**

- $M_{ij}$: có tên gọi là định thức con bù của $a_{ij}$, là định thức của ma trận cấp $n-1$ có được bằng cách xoá đi hàng i cột j (hàng cột chứa $a_{ij}$) của ma trận $A$.
- $A_{ij}$ : được gọi là phần bù đại số của phần tử $a_{ij}$.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad \textbf{(3.20)}$$

Mỗi phần tử $a_{ij}$ có một phần bù đại số $A_{ij}$ tương ứng.

**Định lý 3.2.** Định thức của ma trận $A$ bằng tổng của tích tất cả các định thức con cấp 1 nằm trên hàng $i$ (hoặc cột *j*) nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

Mỗi một phần tử trên hàng $i$ (hoặc cột *j*) là một định thức con cấp 1 trên hàng (cột) đó.

a) $$\det A = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad \textbf{(3.21)}$$

b) $$\det A = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \qquad \textbf{(3.22)}$$

(3.21) gọi là công thức khai triển theo hàng thứ $i$ bất kỳ.

(3.22) gọi là công thức khai triển theo cột thứ $j$ bất kỳ.

**Chứng minh:** (Xem trong $[1]$).

**Ví dụ 3.30.** Tính các bù đại số của các phần tử trong ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13; A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

**Ví dụ 3.31.** Tính định thức cấp 4 sau

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1\left(-1\right)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} + 6\left(-1\right)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -381.$$

Ta đã khai triển định thức trên theo hàng thứ hai.

Sau đó tiếp tục tính hai định thức cấp ba để có kết quả cuối cùng.

❖ Ta cũng có thể khai triển định thức trên theo cột thứ tư của ma trận. Dưới đây ta sẽ dùng tính chất để biến đổi hàng thứ hai của ma trận trước khi khai triển định thức trên theo hàng thứ hai.

**Giải:** khai triển theo hàng thứ 2

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{-6c_1 + c_3 \to c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -19 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & -5 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & -19 & 0 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}$$

Tiếp tục triệt tiêu thêm phần tử $a_{22} = -19$ hàng thứ hai của ma trận trong định thức trên.(làm cho $a_{22} = 0$ ).

Bằng cách thực hiện phép biến đổi sau: $\left(-19\right)C_1 + C_2 \to C_2$.

ta có:

$$D = -\begin{vmatrix} 2 & -41 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -44 & -5 \end{vmatrix} = -\left(-1\right)\left(-1\right)^{2+1}\begin{vmatrix} -41 & 4 \\ -44 & -5 \end{vmatrix} = -(205 + 176) = -381.$$

Ta đã tiếp tục khai triển định thức cấp 3 nhận được theo hàng thứ 2, rồi tính nốt định thức cấp 2 cuối cùng.

**Ví dụ 3.32**. Tính định thức cấp 4 sau $E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{\substack{-c_1 + c_3 \to c_3 \\ -2c_1 + c_4 \to c_4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 1.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 2.3.(-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -6(9-5) = -24.$$

**Định nghĩa 3.10.** Ma trận $C_A = \left[ A_{ij} \right]_{n \times n}$, trong đó $A_{ij}$ là phần bù đại số của phần tử $a_{ij}$ của ma trận $A = \left[ a_{ij} \right]_{n \times n}$, được gọi là ma trận phụ hợp của $A$.

**Ví dụ 3.33.** Tìm ma trận phụ hợp của ma trận $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$.

$a_{11} = x \leftrightarrow A_{11} = t;\quad a_{12} = y \leftrightarrow A_{12} = -z;$
$a_{21} = z \leftrightarrow A_{21} = -y;\quad a_{22} = t \leftrightarrow A_{22} = x;$

Ma trận phụ hợp của ma trận $A$ là $C_A = \begin{bmatrix} t & -z \\ -y & x \end{bmatrix}$.

**Ví dụ 3.34.** Xem Ví dụ 3.30.

Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ có ma trận phụ hợp là $C_A = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

**Nhận xét 3.4.**

- Công thức khai triển theo cột thứ $j$ (3.22) và công thức khai triển theo hàng $i$ (3.21) cho phép tính định thức cấp $n$ theo tổng các định thức cấp $n-1$.
- Việc chọn hàng thứ $i$ hay cột thứ $j$ là tùy ý, ta nên chọn hàng thứ $i$ hoặc cột $j$ mà có $a_{ij} = 0$ thì $a_{ij}A_{ij} = 0$. Vì vậy để tính định thức ta thực hiện các công việc sau:

- Chọn hàng i hoặc cột j có nhiều phần tử bằng $0$ .
- Thực hiện các phép biến đổi (cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác) để triệt tiêu thêm các phần tử trên hàng (hoặc cột) đã chọn.
- Khai triển theo hàng hoặc cột chỉ còn lại ít nhất phần tử khác $0$ .

### 3.2.5 Công thức khai triển Laplace theo $k$ hàng ( $k$ cột )

Từ ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ta xét $k$ hàng: $i_1,...,i_k$ và $k$ cột: $j_1,...,j_k$ , với chú ý

$$1\le i_1<i_2<...<i_k\le n;\ \ 1\le j_1<j_2<...<j_k\le n.$$

Bạn đọc cần xác định được các yếu tố sau

- Ma trận con cấp *k* là ma trận gồm các phần tử nằm trên giao của *k* hàng *k* cột.

  Có $C_n^k$ (số tổ hợp chập k của n ) ma trận con cấp *k* trên *k* hàng đã chọn.
- Định thức con cấp $k$ là định thức của một ma trận con cấp *k*.
- Định thức con cấp $k$ của ma trận con lấy trên $k$ hàng: $i_1,...,i_k$ và $k$ cột: $j_1,...,j_k$

  ký hiệu là: $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ . **(3.22)**

  Mỗi ma trận con cấp *k* cho ta một định thức con cấp *k* tương ứng nên cũng có $C_n^k$ định thức con cấp *k* trên *k* hàng đã chọn.
- $\overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ là định thức con bù của định thức $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ . **(3.23)**

  Để có định thức con bù của $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ thì từ ma trận $A$ ta xoá đi *k* hàng $i_1,...,i_k$ và *k* cột $j_1,...,j_k$ chứa $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ . Khi đó các phần tử còn lại lập thành một ma trận con cấp $n-k$ . Định thức cấp $n-k$ của ma trận này chính là định thức con bù.

  Tương ứng ta cũng có $C_n^k$ định thức con bù cấp $n-k$ .

- $A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ được gọi là phần bù đại số của $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ .

  Công thức: $A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}=(-1)^{i_1+...+i_k+j_1+...+j_k}\,\overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ **(3.24)**

Trên *k* hàng $i_1,...,i_k$ đã chọn ta có $C_n^k$ định thức con cấp *k*: $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ , và tương ứng là $C_n^k$ phần bù đại số $A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ .

**Ví dụ 3.35.** Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

Nếu ta chọn hai hàng là hàng 1, hàng 3 thì ta có 6 định thức con cấp 2:

$$M_{13}^{12}, M_{13}^{13}, M_{13}^{14}, M_{13}^{23}, M_{13}^{24}, M_{13}^{34}$$

Chẳng hạn $M_{13}^{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a1 & a_{32} \end{vmatrix}$; $M_{13}^{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.....

$M_{13}^{23} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ thì $\overline{M}_{13}^{23} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$ là định thức con bù của $M_{13}^{23}$ .

Do đó $A_{13}^{23} = (-1)^{1+3+2+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$ là bù đại số của $M_{13}^{23}$ .

Tương tự với các định thức con cấp 2 khác.

**Định lý 3.3.** (Định lý Laplace khai triển theo $k$ hàng $k$ cột)

1) Khai triển $k$ hàng $i_1,...,i_k$:

$$\det A = \sum_{\substack{1 \le i_1 < ... < i_k \le n \\ 1 \le j_1 < ... < j_k \le n}} M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \tag{3.25}$$

Định thức của $A$ bằng tổng của tích tất cả các định thức con cấp $k$ nằm trên $k$ hàng $i_1,...,i_k$ với phần bù đại số tương ứng của nó.

2) Khai triển $k$ cột $j_1,...,j_k$:

$$\det A = \sum_{\substack{1 \le i_1 < ... < i_k \le n \\ 1 \le j_1 < ... < j_k \le n}} M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \tag{3.26}$$

Định thức của $A$ bằng tổng tất cả các định thức con cấp $k$ nằm trên $k$ cột $j_1,...,j_k$ nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

Đặc biệt khi $k = 1$ ta có công thức (3.23); (3.24) là công thức khai triển theo hàng và theo cột.

**Chứng minh: (**tham khảo $[1]$).

**Nhận xét 3.5.**

- Phương pháp khai triển theo $k$ hàng có tác dụng trong nhiều trường hợp. Sau đây là một vài ví dụ tổng quát có thể xem như các định lý.

**Ví dụ 3.36.** Tính $D_n = \left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1,n-k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-k\,1} & \cdots & c_{n-k\,k} & b_{n-k,1} & \cdots & b_{n-k,n-k} \end{array}\right|$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-k,1} & \cdots & b_{n-k,n-k} \end{vmatrix}$$

Vì $M_{1,\dots,k}^{j_1,\dots,j_k} = 0$ nếu $\{j_1,\dots,j_k\} \neq \{1,\dots,k\}$.

**Ví dụ 3.37.** Tính $D_5 = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 2 & 3 & -1 \\ g & h & 4 & 6 & 2 \\ i & j & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(ad-bc)$;

Ta đã khai triển định thức theo hai hàng đầu. Trên hai hàng này trong số 10 định thức cấp hai chỉ có duy nhất một định thức cấp hai

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

còn mọi định thức cấp hai còn lại đều bằng $0$ vì có ít nhất một cột toàn số $0$.

Phần bù đại số của định thức cấp hai $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ là

$$A_{12}^{12} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

do đó $D_5 = M_{12}^{12} \times A_{12}^{12} = 4(ad-bc)$.

Có thể áp dụng trực tiếp kết quả Ví dụ 3.36.

**Ví dụ 3.38.** Chứng minh rằng với mọi ma trận cùng cấp $A, B$ luôn có

$$\det AB = \det A . \det B .$$

Thật vậy, giả sử $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$, $C = AB = \left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ trong đó $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Xét định thức cấp 2n dưới đây:

$$D_{2n}=\left|\begin{array}{c:c} a_{ij} & \begin{matrix}0 & & 0\\ & 0 & \\ 0 & & 0\end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix}-1 & 0 & \\ & -1 & \\ 0 & & -1\end{matrix} & b_{ij}\end{array}\right|$$

Khai triển Laplace theo n hàng đầu ta có $D_{2n} = \det A\,.\,\det B$ (áp dụng kết quả Ví dụ 3.38).

Ta sẽ chứng tỏ rằng $D_{2n} = \det AB$ .

Bằng cách thực hiện phép biến đổi không làm thay đổi giá trị của định thức:

$$b_{11}C_1 + b_{21}C_2 + \ldots + b_{n1}C_n + C_{n+1} \to C_{n+1}$$

(nhân $b_{11}$ với cột 1, $b_{21}$ với cột 2,..., $b_{n1}$ với cột n của $D_{2n}$, xong cộng tất cả vào cột n+1) thì định thức $D_{2n}$ trở thành:

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & c_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & b_{1n} \\ \vdots & -1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & b_{n2} & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

....Tiếp tục biến đổi tương tự như trên sau $n$ bước, cuối cùng ta được

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & c_{n1} & \ldots & c_{nn} \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.\ \text{Với } C=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}=AB.$$

Khai triển Laplace theo $n$ hàng cuối ta được

$$D_{2n}=(-1)^{1+2+\ldots+n+n+1+\ldots+2n}\begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{2n(2n+1)}{2}+n}\cdot\det C=\det C=\det AB.$$

**Hệ quả:** Với $A, B \in \mathcal{M}_n$, ta có

1. $\det(AB) = \det(BA)$ ; $(AB \neq BA)$.
2. $\det(A^n) = (\det A)^n$.
3. $\det(kA) = k^n.\det A$.

❖ Ngoài hai phương pháp kể trên ta có thể dùng một số tính chất đưa ma trận về dạng tam giác trên để tính định thức của ma trận.

**Ví dụ 3.39.**

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1).5.1 = -5$$

Ta đã thực hiện các phép biến đổi sau $C_2 \leftrightarrow C_3 \leftrightarrow C_1$.

## 3.3 MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

### 3.3.1 Điều kiện cần và đủ để tồn tại ma trận nghịch đảo

Ta đã biết, ma trận vuông $A$ được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp $B$ sao cho $AB = BA = I$. Phép nhân ma trận có tính kết hợp nên ma trận $B$ ở định nghĩa trên nếu tồn tại thì duy nhất một ma trận nghịch đảo của $A$, ký hiệu $A^{-1}$. Việc kiểm tra ma trận vuông A có khả nghịch hay không bằng định thức nhanh chóng hơn nhiều cách sử dụng định nghĩa.

**Định lý 3.4.** (điều kiện cần) Nếu $A$ khả nghịch thì $A$ không suy biến.

**Chứng minh:** Nếu $A$ khả nghịch thì:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \det A.\det A^{-1} = \det AA^{-1} = \det I = 1 .$$

Do đó $A$ không suy biến (tất nhiên cũng có $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \neq 0$).

**Định lý 3.5.** (điều kiện đủ) Nếu $\det A \neq 0$ thì $A$ khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C_A^t \tag{3.27}$$

với $C_A$ là ma trận phụ hợp của $A$.

**Chứng minh:** Với giả thiết $\det A \neq 0$ ta sẽ chỉ ra tồn tại ma trận vuông cùng cấp $B$ sao cho

$$AB = BA = I .$$

Trước hết ta chứng minh kết quả sau.

$$a_{i1}A_{k1} + ... + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases},$$

Và $a_{1i}A_{1k} + ... + a_{ni}A_{nk} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases}.$

Khai triển định thức của ma trận $A$ theo hàng thứ k ta được:

$$a_{k1}A_{k1} + ... + a_{kn}A_{kn} = \det A$$

Xét ma trận $A'$ có được từ $A$ bằng cách thay hàng thứ $k$ của $A$ bởi hàng thứ i, ma trận này có định thức bằng 0.

Vậy $a_{i1}A_{k1} + ... + a_{in}A_{kn}$ là định thức của ma trận $A'$, khai triển theo hàng thứ $k$, do đó bằng 0.

Tóm lại ta có:

$$a_{i1}A_{k1} + ... + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \tag{3.28-a}$$

Hoàn toàn tương tự, khai triển theo cột ta có:

$$a_{1i}A_{1k} + ... + a_{ni}A_{nk} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \tag{3.28-b}$$

Từ (3.28-a), (3.28-b) suy ra

$$AC_A^{\ t} = C_A^{\ t}A = (\det A).I$$

với $\det A \neq 0$ ta có

$$\frac{1}{\det A}.AC_A^{\ t} = \frac{1}{\det A}.C_A^{\ t}A = I$$

hay $A\left(\frac{1}{\det A}C_A^{\ t}\right) = \left(\frac{1}{\det A}C_A^{\ t}\right)A = I.$

Đặt $B = \frac{1}{\det A}C_A^{\ t} := A^{-1}.$

**Hệ quả:**

a) Nếu $BA = I$ hoặc $AB = I$ thì tồn tại $A^{-1}$ và $A^{-1} = B$.

b) Nếu $A$, $B$ là ma trận khả nghịch thì $A^{-1}$, $B^{-1}$, $AB$, $A^t$ cũng khả nghịch

và $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A,\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ \left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$.

c) Nếu $A$ là ma trận khả nghịch cấp $n$, $B$ là ma trận cấp $n \times p$. Khi đó phương trình ma trận $AX = B$ có nghiệm duy nhất

$$X = A^{-1}B. \tag{3.29}$$

Tương tự:

Nếu $A$ là ma trận khả nghịch cấp n, $B$ là ma trận cấp $p \times n$.

Khi đó phương trình ma trận $XA = B$ có nghiệm duy nhất

$$X = BA^{-1}. \qquad \textbf{(3.30)}$$

**Chứng minh:**

a) $BA = I \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ và

$$B = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = A^{-1}.$$

b), c) Độc giả tự chứng minh.

### 3.3.2. Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Ta có thể tìm ma trận nghịch đảo bằng cách dùng định nghĩa, định lý về ma trận nghịch đảo. Dùng định lý hay còn nói là dùng ma trận phụ hợp là cách thường dùng nhất.

**Phương pháp dùng ma trận phụ hợp**

**Ví dụ 3.40.** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

**Giải:**

Ta có $\det A = -1 \neq 0$ và $C_A = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Vậy $A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}^t = -\begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Bạn đọc có thể tham khảo thêm một phương pháp nữa để tìm ma trận nghịch đảo $A^{-1}$. Theo thuật toán Gauss-Jordan ta thực hiện các bước sau:

**Thuật toán Gauss-Jordan:**

1) Viết ma trận đơn vị $I$ bên phải ma trận $A$: $A|I$

2) Thực hiện các phép biến đổi Gauus lên các hàng (hoặc cột) của $A|I$ một cách đồng thời để đưa ma trận $A$ ở vế trái về ma trận đơn vị $I$ (cách biến đổi giống như ta đưa ma trận về dạng tam giác trên, dưới. Chú ý trong cả quá trình, chỉ biến đổi theo hàng hoặc chỉ biến đổi theo cột).

3) Khi vế trái trở thành ma trận đơn vị thì vế phải là ma trận $A^{-1}$.

$$A|I \to .......... \to I|A^{-1}. \qquad \textbf{(3.31)}$$

**Ví dụ 3.41.** Tìm $A^{-1}$ với $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}$ bằng thuật toán Gauss-Jordan .

**Giải:**

Viết ma trận A cạnh ma trận đơn vị I

$$\left.\begin{matrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$$

Biến đổi đồng thời cả hai ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp về hàng.

$$\left.\begin{matrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&-2&5\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{matrix}\qquad 2h_1+h_2\to h_2;\ -h_1+h_3\to h_3$$

$$\left.\begin{matrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&0&-1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0&0\\-2&1&0\\-5&2&1\end{matrix}\qquad 2h_2+h_3\to h_3$$

$$\left.\begin{matrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0&0\\-2&1&0\\5&-2&-1\end{matrix}\qquad -h_3\to h_3$$

$$\left.\begin{matrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-14&6&3\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{matrix}\qquad -3h_3+h_1\to h_1;\ 3h_3+h_2\to h_2$$

$$\left.\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{matrix}$$

Vậy $A^{-1}=\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}$.

**Nhận xét 3.6**.

- Tìm $A^{-1}$ theo phương pháp Gauss-Jordan sẽ dễ dàng khi các phần tử của $A^{-1}$ là các số nguyên có giá trị tuyệt đối không lớn (thường gặp khi $\det A=\pm1$) hoặc trong một số trường hợp ma trận cấp cao, có tính chất đặc biệt.
- Với ma trận cấp hai, ba thông thường nên dùng phương pháp ma trận phụ hợp.

## 3.4. HẠNG CỦA MA TRẬN

Hạng của một ma trận được định nghĩa qua hạng của hệ véc tơ hoặc định nghĩa qua cấp cao nhất của định thức con trong ma trận đó. Từ đó dẫn đến các phương phương pháp khác nhau để tìm hạng của ma trận. Dù bằng cách nào thì ta cũng tìm được ra một số gọi là hạng của ma trận cho trước. Tuy nhiên, tuỳ theo mục đích của việc xác định hạng ma trận thì mỗi phương pháp lại có một lợi thế riêng. Ví dụ để giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính thì dùng biến đổi sơ cấp theo hàng có thuận lợi hơn.

Với mục đích chính là phục vụ cho sinh viên khối ngành kinh tế có công cụ học tập môn toán kinh tế, … nên mục này chúng tôi sẽ giới thiệu cách tìm hạng ma trận chủ yếu nhờ vào biến đổi sơ cấp ma trận.

### 3.4.1 Định nghĩa và cách tìm hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp

**a. Định nghĩa**

**Định nghĩa 3.11.** Xét ma trận $A$ cấp $n \times m$ là ma trận của một hệ $\left(S\right)$ gồm $m$ véc tơ nào đó của không gian véc tơ $n$ chiều. Ta gọi hạng của ma trận $A$, ký hiệu $r(A)$, là hạng của hệ véc tơ cột của ma trận $A$.

Như vậy ma trận không có hạng bằng $0$ : $r\left(\theta\right) = 0$.

$r(A) = p \le \min\left(m, n\right)$.

**b. Tính chất :** Từ định nghĩa trên ta thấy rằng tính chất của hạng của ma trận được suy ra từ tính chất của hạng hệ hữu hạn véc tơ . Đó là : các biến đổi sơ cấp lên các cột của ma trận không làm thay đổi hạng của ma trận.

**c. Phương pháp tìm hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp**

Với cách định nghĩa như trên, hạng của ma trận cũng có các tính chất và cách tính tương tự hạng của hệ véc tơ cột của nó. Các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng hệ véc tơ là:

1) Đổi chỗ hai véc tơ của hệ cho nhau.

2) Nhân vào một véc tơ của hệ một số khác $0$.

3) Cộng vào một véc tơ của hệ một tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của hệ.

Vì vậy để tìm hạng của một ma trận, ta có thể coi mỗi cột của ma trận đó là toạ độ của một véc tơ. Thực hiện các biến đổi sơ cấp lên các cột để đưa ma trận về dạng bậc thang cột. Số các véc tơ cột khác 0 của ma trận chính là hạng của ma trận.

**Chú ý :**

- Cần hiểu rõ thế nào là ma trận bậc thang cột, để kết thúc các biến đổi sơ cấp đúng lúc.
- Cần có qui tắc thực hiện các biến đổi sơ cấp để ta nhận được ma trận bậc thang nhanh nhất, các bước biến đổi sau không làm hỏng các bước biến đổi trước.

- Trong bài toán đơn giản chỉ là tìm hạng ma trận, ta có thể kết hợp cả hai loại đổi sơ cấp lên các cột, hàng.

**Ví dụ 3.42.** Tìm hạng của ma trận sau bằng cách thực hiện các biến đổi sơ cấp lên các cột

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

**Giải:**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-4c_1+c_3\to c_3 \\ -2c_1+c_4\to c_4}]{3c_1+c_2\to c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -7 & 0 \\ -1 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2+c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

đây là ma trận bậc thang cột. Vậy $r(A)=2$.

**Ví dụ 3.43.** Tìm hạng của ma trận sau bằng cách thực hiện các biến đổi sơ cấp lên các cột

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Giải:** $$B \xrightarrow[\substack{c_4\to c_2 \\ c_5\to c_3}]{\substack{c_1\to c_4 \\ c_2\to c_5 \\ c_3\to c_1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_1+c_4\to c_4 \\ -2c_1+c_5\to c_5}]{\substack{c_1+c_2\to c_2 \\ -c_1+c_3\to c_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & a+1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{-(a+3)c_2+(a+1)c_3+2c_4\to c_4 \\ (3-2a)c_2-3c_3+2c_5\to c_5}]{c_3\leftrightarrow c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2-2a & 2-2a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2-2a & 0 \end{bmatrix}$$

đây là ma trận bậc thang cột. Vậy $r(B)=\begin{cases} 4 & \text{nếu } a\neq 1 \\ 3 & \text{nếu } a=1 \end{cases}$.

### 3.4.2 Định nghĩa và tìm hạng của ma trận bằng ứng dụng định thức (tham khảo)

Số véc tơ độc lập tuyến tính tối đại của hệ véc tơ cột bằng hạng của ma trận, từ đó hạng ma trận còn được định nghĩa một cách khác như sau:

**a. Định nghĩa**

**Định nghĩa 3.12.** Ma trận $A$ cấp $m \times n$ có hạng bằng $p$, $r(A) = p$ nếu trong ma trận $A$ tồn tại một định thức con cấp $p$ khác $0$, đồng thời mọi định thức con cấp $p+1$ của ma trận $A$ đều bằng $0$.

Từ đó, ta có thể định nghĩa: hạng của ma trận $A$ chính là cấp cao nhất của định thức con khác $0$ trong ma trận $A$.

$r(A) = p \le \min(m, n)$.

Nếu $A$ vuông cấp $n$ thì $\det A \ne 0 \Leftrightarrow r(A) = n$.

$$\det A = 0 \Leftrightarrow r(A) < n.$$

**b. Tính chất :** với cách định nghĩa theo định thức ta cũng thấy ngay rằng một số phép biến đổi về hàng, cột của ma trận sẽ không ảnh hưởng đến hạng của ma trận.

1) Hạng của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị ma trận : $r(A) = r(A^t)$.

2) Hạng của ma trận không thay đổi qua các phép biến đổi sơ cấp lên các hàng, cột, của ma trận.

Ta biết rằng một ma trận vuông cấp $k$ không suy biến thì luôn được đưa về dạng ma trận tam giác trên, hơn nữa là dạng ma trận đơn vị cấp $k$ bằng các phép biến đổi sơ cấp của ma trận. Bởi vậy ta có kết quả sau:

**Định lý 3.6.** Giả sử $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ là một ma trận cấp $m \times n$. Nếu có định thức con khác 0, cấp $p$ và mọi định thức con cấp $p+1$ bao quanh nó đều bằng 0 thì $r(A) = p$.

**Chứng minh: (**tham khảo $[1]$)

**c. Phương pháp tìm hạng của ma trận bằng ứng dụng định thức**

Để tìm hạng ma trận $A$ ta tìm định thức con cấp 2 khác 0. Bao định thức này bởi các định thức con cấp 3. Nếu tất cả các định thức cấp 3 bao quanh đều bằng 0 thì $r(A) = 2$. Nếu có định thức con cấp 3 khác 0 thì ta tiếp tục bao định thức cấp 3 này bởi các định thức cấp 4...

**Ví dụ 3.44.** Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

**Giải:**

có $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 20$,

xét hai định thức cấp 3 bao quanh định thức cấp hai trên đều bằng 0 là

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Vậy $r(A) = 2$.

**Ví dụ 3.45**. Tìm hạng của ma trận $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

**Giải:**

Tồn tại định thức $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1$.

Bao định thức này bởi định thức cấp 3: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1$.

Định thức cấp 4 duy nhất bao định thức 3 trên chính là định thức $|B|=0$. Vậy $r(B)=3$.

**Ví dụ 3.46.** Tìm hạng của ma trận $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$.

Ta có $|A|=(a+3)(a-1)^3$.

Vậy Khi $a\neq -3, a\neq 1$ thì $r(A)=4$;

Khi $a=1$ thì $r(A)=1$;

Khi $a=-3$, có $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow r(A)=3$.

### 3.4.3 Phương pháp tìm hạng của hệ véc tơ bằng ứng dụng định thức

Từ tính chất 8 của định thức, ta biết rằng định thức của một hệ $n$ véc tơ hệ phụ thuộc tuyến tính trong không gian véc tơ $n$ chiều bằng 0. Do đó nếu trong cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ của không gian véc tơ, $D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_n\}\neq 0$ thì hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính. Ngược lại, giả sử hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính, ta sẽ chứng minh $D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_n\}\neq 0$. Thật vậy, giả sử

$$v_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i\ ,\quad A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n} \text{ là ma trận của } \{v_1,...,v_n\} \text{ trong cơ sở } \mathscr{B}.$$

$\det A=D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_n\}$, vì hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính nên nó là một cơ sở của không gian $n$ chiều $V$. Vậy ta có:

$$e_j=\sum_{i=1}^{n}b_{ij}v_i\ ,\ B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n} \text{ là ma trận của } \mathscr{B} \text{ trong cơ sở } \{v_1,...,v_n\}.$$

A và B chính là các ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\{v_1,...,v_n\}$ và ngược lại.

$$\Rightarrow \quad AB = I \Rightarrow \det A \neq 0 . \tag{3.32}$$

**Định lý 3.7.** Trong không gian véc tơ $n$ chiều, hệ véc tơ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính

khi và chỉ khi $D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_n\} \neq 0$.

**Hệ quả:** Trong không gian véc tơ $n$ chiều, hệ véc tơ $\{v_1,...,v_n\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $r\{v_1,...,v_n\} < n$.

**Ví dụ 3.47.** Hệ véc tơ $v_1 = (2,4,1)$, $v_2 = (3,6,1)$, $v_3 = (-1,2,2)$

có ma trận trong cơ sở chính tắc $\mathscr{B}$ của $\mathbb{R}^3$ là $A$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \det A = 4;$$

Vậy $r\{v_1, v_2, v_3\} = 3$. Đây là hệ véc tơ độc lập tuyến tính.

**Ví dụ 3.48.** Hệ véc tơ $v_1 = (2,1,-4)$, $v_2 = (1,-9,3)$, $v_3 = (3,-8,1)$ có

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -9 & -8 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad r\{v_1, v_2, v_3\} < 3.$$

Đây là hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

**Nhận xét 3.7.**

- Trong thực hành ta có thể kết hợp phương pháp này với phương pháp biến đổi sơ cấp lên các hàng, các cột ma trận thì quá trình tìm hạng ma trận sẽ nhanh hơn**.**
- Khi ma trận được đưa về dạng tam giác hoặc bậc thang hàng (hoặc ma trận bậc thang cột). Số các véc tơ hàng (số các véc tơ cột) khác $0$ là hạng của ma trận.

**Ví dụ 3.49.** Tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Giải:** Cách 1 : Biến đổi theo cột

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-4c_1 + c_3 \to c_3 \\ 3c_1 + c_2 \to c_2}]{-2c_1 + c_4 \to c_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -7 & 0 \\ -1 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 + c_3 \to c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$r(A) = 2$.

Cách 2 : Biến đổi theo hàng, cột

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 4\\ -1 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow[h_1+h_3\to h_3]{-2h_1+h_2\to h_2}\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 7 & -7 & 0\\ 0 & -5 & 5 & 0\end{bmatrix}\to$$

$$\xrightarrow[c_3\leftrightarrow c_4]{c_3+c_2\to c_2}\begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.\ r(A)=2.$$

**Ví dụ 3.50.** Tìm hạng của ma trận sau theo tham số m

$$B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 4 & m & 2\\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5\\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11\\ 3 & 2 & 5 & 4 & 3\end{bmatrix}.$$

**Giải:**

$$B\to\begin{bmatrix}3 & 2 & 5 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5\\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11\\ 4 & 1 & 4 & m & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -4 & -2\\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5\\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11\\ 4 & 1 & 4 & m & 2\end{bmatrix}\to$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -4 & -2\\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5\\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11\\ 4 & 1 & 4 & m & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -4 & -2\\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9\\ 0 & 0 & 0 & m & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow\ r(B)=3;\ \forall m.$

Bạn đọc tự tìm hiểu các bước biến đổi tìm hạng ma trận B.

**Chú ý:**

- Trong quá trình tính định thức hay tìm hạng của ma trận chúng ta thường dùng đến các phép biến đổi đối với các hàng, cột của ma trận. Ta gọi đó là các phép biến đổi sơ cấp ma trận .
- Các phép biến đổi sơ cấp đối với ma trận, đưa ma trận về dạng tam giác hoặc dạng bậc thang để tìm hạng hoặc tính định thức cũng gọi là các phép biến đổi Gauus.
- Để có kết quả tương ứng với các mục đích khác nhau thì người thực hiện cần nắm vững lý thuyết đặc biệt là thuộc các tính chất của định thức và hạng của ma trận.

Ta có thể tóm tắt nội dung trên bằng một bảng tổng kết dưới đây:

| Phép BĐSC \ Mục đích | **Tính định thức** | **Tìm hạng ma trận** |
|---|---|---|
| Chỗ 2 hàng $H_i \leftrightarrow H_j$ (Hoặc 2 cột $C_i \leftrightarrow C_j$ ) | Định thức đổi dấu | Không đổi |
| Nhân một số k khác 0 với 1 hàng $kH_i \to H_i$ (hoặc 1 cột $kC_i \to C_i$ ) | Định thức gấp lên k lần | Không đổi |
| Cộng 1 tổ hợp tuyến tính của các hàng (cột) vào một hàng (cột) $kH_i + H_j \to H_j$ $(kC_i + C_j \to C_j)$ | Định thức không đổi | Không đổi |

**BÀI TẬP CHƯƠNG 3**

**3.1**) Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Tính:

a) $(A+B)+C$ ; b) $A+(B+C)$ ; c) $A^t, B^t, C^t$ ; d) $A^t B$ ; e) $BC^t$ .

**3.2)** 1) Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Tính $3A + 4B - 2C$ .

2) Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Tính } A^t B,\ B^t A,\ \left(B^t A\right)^t .$$

**3.3)** Trong không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2. Ba ma trận sau có độc lập tuyến tính không: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**3.4)** Trong không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2. Tìm tọa độ của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ trong cơ sở $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**3.5)** Tính: a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$.

**3.6)** Cho $A$, $B$ là hai ma trận cỡ $m \times n$. Chứng minh rằng

a) $r(A+B) \le r(A) + r(B)$.

b) $\begin{cases} r(AB) \le r(A) \\ r(AB) \le r(B) \end{cases}$

**3.7)** Tìm các ví dụ về hai ma trận $A$, $B$ vuông cấp 2 thỏa mãn từng điều kiện sau:

a) $r(A+B) < r(A), r(B)$.

b) $r(A+B) = r(A) = r(B)$.

c) $r(A+B) > r(A), r(B)$.

**3.9)** Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]$ vuông cấp n. Ta gọi $\text{Tr}A = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ (tổng các phần tử trên đường chéo chính) là vết của $A$. Chứng minh:

a) $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}\,A + \text{Tr}\,B$;

b) $\text{Tr}AB = \text{Tr}BA$ (mặc dù $AB \ne BA$);

c) nếu $B = P^{-1}AP$ thì $\text{Tr}A = \text{Tr}B$;

d) không tồn tại ma trận $A, B$ sao cho $AB - BA = I$.

**3.10**) Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix}$.

**3.11**) Tìm các giá trị của $k$ sao cho $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$.

**3.12**) Tính các định thức

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$.

**3.13**) Tính định thức của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

**3.14**) Tính định thức của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{bmatrix}$; b) $B=\begin{bmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{bmatrix}$; c) $C=\begin{bmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{bmatrix}$.

**3.15)** a) Giải phương trình: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}=0$.

b) Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & -11 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, Tính $\det A$; $\det f(A)$ biết $f(x)=x^3-3x^2+4$.

**3.16**) Biết 299, 966, 161 chia hết 23. Chứng minh $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 9 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ chia hết 23.

**3.17**) Không cần tính định thức, chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

**3.18**) Cho định thức Vandermond $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Chứng minh: $D_n=\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)=\prod\limits_{k=2}^{n}\left(\prod\limits_{i=1}^{k-1}(x_k-x_i)\right)=\prod\limits_{i=1}^{n-1}\left(\prod\limits_{k=i+1}^{n}(x_k-x_i)\right)$.

**3.19**) Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -9 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -8 & -4 & -2 \\ 6 & 1 & 1 & -16 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & -6 & m & 3 \\ 7 & 0 & 3 & -7 \\ -4 & 4 & -8 & -4 \end{bmatrix}$; e) $C = \begin{bmatrix} 3 & m & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; g) $D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

**3.20**) Các ma trận sau có khả nghịch không, nếu khả nghịch hãy tìm ma trận nghịch đảo:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$; d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

**3.21**) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} m-1 & 3 & -3 \\ -3 & m+5 & -3 \\ -6 & 6 & m-4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} m+1 & 7 & 3 \\ -1 & m-1 & -2 \\ m-5 & 2m-5 & m-6 \end{bmatrix}$.

Tìm các giá trị của $m$ để $A, B$ là các ma trận khả nghịch.

**3.22)** Giải phương trình $AX = B$ với ẩn là ma trận $X$, trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

**3.23)** Với $A, B$ là hai ma vuông cùng cấp. Chứng minh rằng nếu $AB = BA$ thì với mọi số tự nhiên $n > 0$ ta có:

$$(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2 + \dots + B^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k .$$

**3.24)** Tính

a) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix}^n$; b) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^5$.

# CHƯƠNG 4

# HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Ở bậc THCS và Phổ thông trung học, học sinh đã gặp các hệ phương trình tuyến tính đơn giản (gọi là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn hoặc ba ẩn). Học sinh đã có thể giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn hoặc ba ẩn bằng phương pháp dùng các phép biến đổi tương đương hệ phương trình.

Hệ phương trình tuyến tính là hệ phương trình mà các ẩn số cần tìm ở bậc một, đây là bài toán thường gặp phải khi nghiên cứu các đối tượng có quan hệ tuyến tính. Đối với hệ phi tuyến người ta xấp xỉ bởi hệ tuyến tính. Vì vậy hệ phương trình tuyến tính có rất nhiều ứng dụng trong thực tế: các bài toán kỹ thuật, phân tích thống kê trong tâm lý học, xã hội học và kinh tế học…

Qua chương này, người học sẽ biết cách giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp định thức đối với hệ Cramer, phương pháp khử Gauss có thể giải được mọi hệ.

Tuy nhiên trong thực tế, ta có thể phải khảo sát các bài toán hàng trăm phương trình đồng thời, với số ẩn cũng rất lớn. Tình trạng ấy trong thực hành đã gây ra nhiều khó khăn lớn đến nỗi hầu như không thể giải quyết nổi nếu chỉ dùng phương pháp sơ cấp. Với sự hỗ trợ của máy tính và các thuật toán mới đã khiến cho hệ phương trình tuyến tính được ứng dụng hiệu quả để giải quyết các bài toán thực tế.

Để học tốt chương này sinh viên cần phải sử dụng thành thạo công cụ là ma trận và định thức để giải các hệ phương trình tuyến tính trong các trường hợp cụ thể.

Ta lại thấy rằng giải các hệ phương trình tuyến tính là công cụ để giải quyết một số vấn đề ở chương 2 và các chương cuối của tài liệu này.

## 4.1 KHÁI NIỆM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

### 4.1.1 Dạng tổng quát

Hệ $m$ phương trình tuyến tính $n$ ẩn số $\left(1 \le m, n \in \mathbb{N}\right)$ có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \qquad \textbf{(4.1)}$$

Hoặc viết tắt $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ , \ \ i = 1, \ldots, m$.

Trong đó:

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là $n$ ẩn số,
- $a_{ij}$ là hệ số của ẩn thứ $j$ trong phương trình thứ $i$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

- $b_i$ là hệ số vế phải của phương trình thứ $i$ ; $i = 1,...,m$ ; $j = 1,...,n$ ; $b_i \in \mathbb{R}$
- Khi các vế phải $b_i = 0$ $(i = 1,...,m)$ thì hệ phương trình được gọi là thuần nhất.

Nếu (1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .............................................. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ là một hệ không thuần nhất

thì (2) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .............................................. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ gọi là hệ thuần nhất tương ứng của (1)

- Nghiệm của hệ phương trình là bộ gồm $n$ số $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ sao cho khi thay

  $x_i = \alpha_i, \quad i = 1,2,...,n$ vào (4.1) ta có các đẳng thức số đúng.

  - Nghiệm tổng quát của hệ phương trình là nghiệm khi hệ phương trình có vô số nghiệm, phụ thuộc vào một vài ẩn số nhận những giá trị tuỳ ý.
  - Nghiệm riêng của hệ phương trình là nghiệm gồm $n$ số xác định

    $\left(\alpha^0{}_1, \alpha^0{}_2, ..., \alpha^0{}_n\right)$, nhận được sau khi ta thay các ẩn tuỳ ý của nghiệm

    tổng quát bởi một bộ giá trị cụ thể.
- Giải một hệ phương trình là đi tìm tập hợp nghiệm của hệ.
- Hai hệ phương trình cùng ẩn gọi là tương đương nếu tập hợp nghiệm của chúng bằng nhau. Vì vậy để giải một hệ phương trình ta có thể giải hệ phương trình tương đương của nó.

### 4.1.2. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Với hệ (4.1) ta xét các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

$A$, $X$, $B$ lần lượt được gọi là ma trận hệ số, ma trận ẩn số và ma trận vế phải.

Khi đó hệ phương trình (4.1) được viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$AX = B \tag{4.2}$$

### 4.1.3. Dạng véc tơ của hệ phương trình tuyến tính

Nếu ta ký hiệu véc tơ $v_i = (a_{1i}, ..., a_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ cột thứ i của ma trận $A$, và véc tơ $b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ vế phải, thì hệ (4.1) được viết dưới dạng véc tơ như sau

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b \tag{4.3}$$

Với cách viết này ta thấy rằng hệ phương trình (4.3) có nghiệm khi và chỉ khi

$$b \in Span\{v_1,...,v_n\}.$$

**Ví dụ 4.1.** Xét hệ phương trình viết dưới dạng tổng quát:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \end{cases}.$$

Hệ phương trình trên viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Dạng véc tơ của hệ phương trình là:

$$x_1(2,4,8) + x_2(2,3,5) + x_3(-1,-1,-3) + x_4(1,2,4) = (4,6,12).$$

với ký hiệu $v_1 = (2,4,8)$, $v_2 = (2,3,5)$, $v_3 = (-1,-1,-3)$, $v_4 = (1,2,4)$; $b = (4,6,12)$.

### 4.2 Định lý về sự tồn tại nghiệm

**Định lý 4.1.** (Kronecker - Capelli) Hệ phương trình (4.1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$r(A) = r(\overline{A})$$

trong đó $\overline{A}$ là ma trận có được bằng cách bổ sung thêm vào ma trận hệ số $A$ một cột cuối là vế phải của hệ phương trình.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{4.4}$$

**Chứng minh:** Hệ (4.1) có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại $x_1, x_2,..., x_n \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b.$$

Nghĩa là $b \in Span\{v_1,...,v_n\}$.

Vậy $r(v_1,...,v_n) = r(v_1,...,v_n,b)$. Do đó $r(A) = r(\overline{A})$.

**Ví dụ 4.2.** Xét hệ phương trình trong Ví dụ 4.1.

có ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, có $r(A) = 3$.

ma trận bổ sung $\overline{A}=\begin{bmatrix}2&2&-1&1&4\\4&3&-1&2&6\\8&5&-3&4&12\end{bmatrix}$ có $r(\overline{A})=3$.

$r(A)=r(\overline{A})$, do đó hệ phương trình có nghiệm.

**Ví dụ 4.3.** Xét hệ phương trình $\begin{cases}x&-&3y&+&4z&=&2\\2x&+&y&+&z&=&4\\-x&-&4y&+&3z&=&5\end{cases}$.

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&4\\2&1&1\\-1&-4&3\end{bmatrix},\quad r(A)=2;\quad \overline{A}=\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\2&1&1&4\\-1&-4&3&5\end{bmatrix},\quad r(\overline{A})=3.$$

Vậy hệ phương trình trên vô nghiệm.

Trong thực hành người ta biết được hạng của từng ma trận chỉ trong cùng một quá trình tìm hạng của ma trận bổ sung.

**Ví dụ 4.4** Biến đổi ma trận bổ sung của hệ phương trình trong ví dụ 4.1

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2&2&-1&1&4\\4&3&-1&2&6\\8&5&-3&4&12\end{bmatrix}\xrightarrow[4h_1-h_3\to h_3]{2h_1-h_2\to h_2}\begin{bmatrix}2&2&-1&1&4\\0&1&-1&0&2\\0&3&-1&0&4\end{bmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{-3h_2+h_3\to h_3}\begin{bmatrix}2&2&-1&1&4\\0&1&-1&0&2\\0&0&2&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2\longleftrightarrow c_3\longleftrightarrow c_4}\begin{bmatrix}2&2&1&-1&4\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&2&-2\end{bmatrix}.$$

$\mathrm{r}(\mathrm{A})=r(\overline{A})=3$ Vậy hệ phương trình trong Ví dụ 4.1. có nghiệm.

**Ví dụ 4.5** Biến đổi ma trận bổ sung của hệ phương trình trong Ví dụ 4.3

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\2&1&1&4\\-1&-4&3&5\end{bmatrix}\xrightarrow[h_1+h_3\to h_3]{-2h_1+h_2\to h_2}\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\0&7&-7&0\\0&-7&7&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\0&7&-7&0\\0&0&0&7\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{r}(\mathrm{A})=2<r(\overline{A})=3.$

Vậy hệ phương trình trong Ví dụ 4.3 vô nghiệm.

## 4.2 MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

### 4.2.1 Phương pháp Cramer (còn gọi là phương pháp định thức)

Xét hệ $n$ phương trình tuyến tính $n$ ẩn dạng (4.3) $AX=B$.

**Định nghĩa 4.2.** Hệ $n$ phương trình tuyến tính $n$ ẩn có ma trận hệ số $A$ không suy biến được gọi là hệ Cramer.

**Định lý 4.2. (Định lý Cramer)** Mọi hệ Cramer đều tồn tại duy nhất nghiệm. Công thức nghiệm được xác định như sau :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{4.5}$$

Trong đó $A_i$ là ma trận cấp $n$, có bằng cách thay cột thứ $i$ của ma trận hệ số $A$ bởi cột hệ số vế phải.

**Chứng minh:**

Cách 1) $\det A \neq 0 \Rightarrow$ hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Do đó $b$ được biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_1, ..., v_n\}$. Nghĩa là tồn tại duy nhất $x_1, x_2, ..., x_n$ sao cho $x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = b$.

Gọi $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Khi đó:

$$D_i = D_{\mathscr{B}}\{v_1, ..., v_{i-1}, b, v_{i+1}, ..., v_n\} = D_{\mathscr{B}}\left\{v_1, ..., v_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k v_k, v_{i+1}, ..., v_n\right\}$$

$$= x_i D_{\mathscr{B}}\{v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_n\} = x_i D \Rightarrow x_i = D_i / D, \; i = 1, ..., n.$$

Trong đó $D_i = \det A_i$, $D = \det A$.

Cách 2) Viết hệ phương trình ở dạng ma trận $AX = B$, $\det A \neq 0$.

Phương trình ma trận này thỏa mãn các điều kiện của ý c)Hệ quả của định lý về tồn tại duy nhất ma trận nghịch đảo (chương 3), nên có duy nhất nghiệm:

$$X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{\det A} C_A^{\,t} B$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} & & & \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ni} \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{1}{\det A}\left(A_{1i} b_1 + A_{2i} b_2 + \cdots + A_{ni} b_n\right)$$

$$= \frac{\det A_i}{\det A}; \; i - 1, 2, ..., n.$$

Trong đó $A_{ki}$ là phần bù đại số của các phần tử $a_{ki}$, $k = 1, 2, .., n$ trên cột thứ i của ma trận A.

**Ví dụ 4.6**. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$.

**Giải:** Có $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$, đây hệ Cramer.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 66, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -22, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 44.$$

Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{|A_1|}{|A|} = 3 \\ y = \dfrac{|A_2|}{|A|} = -1 \\ z = \dfrac{|A_3|}{|A|} = 2 \end{cases}$ hay nghiệm của hệ là $(3, -1, 2)$.

**Nhận xét 4.1.**

- Phương pháp Cramer chỉ giải được hệ Cramer.
- Đối với hệ có số phương trình, số ẩn cao thì việc thực hiện rất mất công nếu không sử dụng các phần mềm để tính.
- Phương pháp Cramer có một ưu điểm là khi hệ phương trình nào đã được khẳng định là hệ Cramer thì có nghĩa là hệ đó hoàn toàn xác định.

**Ví dụ 4.7.** Giải hệ phương trình tuyến tính trường hợp tổng quát, xét hệ (4.1).

Giả sử hệ phương trình có nghiệm và $r(A) = r(\overline{A}) = p$; $p \leq \min(m,n)$.

**Giải:** Không giảm tổng quát, giả sử $p$ véc tơ hàng phía trên của ma trận $A$ tạo thành hệ độc lập tuyến tính tối đại của hệ các véc tơ hàng của $A$.

Giả sử $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$. Vì vậy hệ (4.1) tương đương với $p$ phương trình đầu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pp}x_p + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}.$$

(trường hợp khác cách giải hoàn toàn tương tự)

Hệ phương trình trên được viết lại:

$$(4.1)' \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 - \left(a_{1p+1}x_{p+1} + ... + a_{1n}x_n\right) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 - \left(a_{2p+1}x_{p+1} + ... + a_{2n}x_n\right) \\ ............................................................................. \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p = b_p - \left(a_{pp+1}x_{p+1} + ... + a_{pn}x_n\right) \end{cases}.$$

đây là hệ Cramer có vế phải phụ thuộc vào các ẩn $x_{p+1},...,x_n$. Với mỗi bộ giá trị cụ thể các ẩn ở vế phải là $(x^0{}_{p+1}, x_{p+1}{}^0 ..., x^0{}_n)$ thì hệ ( 4.1)' trở thành một hệ Cramer, có nghiệm duy nhất $(x^*{}_1, x^*{}_2, ..., x^*{}_p, x^0{}_{p+1}, x_{p+1}{}^0 ..., x^0{}_n)$, trong đó $x^*{}_1, x^*{}_2, ..., x^*{}_p$ được tính theo bộ số $(x^0{}_{p+1}, x_{p+1}{}^0 ..., x^0{}_n)$.

Các ẩn $x_{p+1},...,x_n$ có thể nhận vô số bộ giá trị tùy ý. Vậy hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào các ẩn $x_{p+1},...,x_n$.

**Ví dụ 4.8.** Giải và biện luận theo tham số $\lambda$ hệ $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}$.

**Giải:**

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ (Xem Ví dụ 3.45. Chương 3).

Ta có $\det A = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^3$.

Khi $\lambda \neq -3, \lambda \neq 1$: Hệ đã cho là hệ Cramer nên có nghiệm duy nhất. Ngoài ra khi thay đổi vai trò của các ẩn trong hệ thì hệ không thay đổi

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda + 3}.$$

do đó hệ có nghiệm duy nhất: $\left(\frac{1}{\lambda+3}\ ; \frac{1}{\lambda+3}\ ; \frac{1}{\lambda+3}\ ; \frac{1}{\lambda+3}\right)$

Khi $\lambda = 1$: $r(A) = r(\overline{A}) = 1$, hệ phương trình đã cho tương đương với phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Hệ phương trình có vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Hay nghiệm tổng quát của hệ có dạng

$$\left(1 - x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4\right);\ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Khi $\lambda = -3$: $\det A = 0 \Rightarrow r(A) < 4$ (theo ví dụ 3.65 : $r(A) = 3$) nhưng ma trận bổ sung $\overline{A}$ có định thức con cấp 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \Rightarrow r(\overline{A}) = 4 \Rightarrow \text{ hệ vô nghiệm.}$$

Kết luận : Hệ có nghiệm duy nhất khi $\lambda \neq -3, \lambda \neq 1$.

Hệ có vô số nghiệm dạng $\left(1 - x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4\right)$ khi $\lambda = 1$.

Hệ vô nghiệm khi $\lambda = -3$.

### 4.2.2 Phương pháp ma trận nghịch đảo

**Định lý 4.3**. Hệ Cramer $AX = B$, với các ma trận tương ứng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}B$. **(4.6)**

**Ví dụ 4.9.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad\; + 8x_3 = c \end{cases}$.

**Giải:** Dạng ma trận của hệ là $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ có $\det A = -1 \neq 0$; $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

do đó hệ đã cho là hệ Cramer có nghiệm theo công thức (4.6) $X = A^{-1}B$.

Vậy $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -40a + 16b + 9c \\ 13a - 5b - 3c \\ 5a - 2b - c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -40a + 16b + 9c \\ x_2 = 13a - 5b - 3c \\ x_3 = 5a - 2b - c \end{cases}$$ là nghiệm duy nhất của hệ.

**Nhận xét 4.2.** Hai phương pháp trên chỉ dùng được đối với hệ Cramer.

### 4.2.3 Phương pháp khử Gauss

Xét hệ $m$ phương trình tuyến tính $n$ ẩn, dạng (4.1)

**a. Nguyên tắc**

- Khử bớt ẩn của hệ.
- Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss là thực hiện các phép biến đổi tương đương (có thể đổi chỗ các ẩn nếu cần) để đưa hệ phương trình (4.3) về hệ tương đương $A'X' = B'$.
- Nên thực hiện khử các ẩn theo thứ tự
  - Phương trình thứ nhất có ẩn $x_1$ ($a_{11} \neq 0$) ta sẽ khử $x_1$ ở các phương trình còn lại (từ phương trình thứ hai đến phương trình cuối)
  - Nếu ở phương trình thứ hai có ẩn $x_2$ ($a_{22} \neq 0$) ta sẽ khử $x_2$ ở các phương trình còn lại (từ phương trình thứ ba đến phương trình cuối)
  - Quá trình tiếp tục đến khi được phương trình có ít ẩn nhất có thể, giả sử khử được $p-1$ ẩn. Phương trình có ít ẩn nhất là phương trình có $n-(p-1)$ ẩn.

Phương trình có ít ẩn càng dễ tìm nghiệm.

**Nhận xét 4.3.**

- Ta có thể kiểm tra được rằng: khi thực hiện các phép biến đổi tương đương hệ phương trình thực chất là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung $\overline{A}$ của hệ .
  - Đổi chỗ hai phương trình $\Leftrightarrow$ Đổi chỗ hai hàng của $\overline{A}$
  - Nhân, chia một số khác 0 vào cả 2 vế của một phương trình $\Leftrightarrow$ Nhân, chia một số khác 0 vào một hàng của $\overline{A}$
  - Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính các phương trình khác $\Leftrightarrow$ Cộng vào một hàng của $\overline{A}$ một tổ hợp tuyến tính các hàng khác

**b. Thực hành:** Dùng biến đổi Gauss trên ma trận $\overline{A}$

- Khử $x_1$ ở các phương trình còn lại (từ phương trình thứ hai đến phương trình cuối) thực chất là làm cho các hệ số $a_{i1} = 0,\ i = 2,3,...,n$. Giả sử $a_{11} \neq 0$.

  Bằng cách dùng phép biến đổi sau trên ma trận $\overline{A}$

$$\left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\right)H_1 + H_i \to H_i \qquad (i = 2,3,....n)$$

- Tương tự khử $x_2$ tức là làm cho các hệ số $a_{i2} = 0,\quad i = 3,...,n$.

  Giả sử $a_{22} \neq 0$. Tương tự

$$\left(\frac{-a_{i2}}{a_{22}}\right)H_2 + H_i \to H_i \qquad (i = 3,....n)$$

Quá trình tiếp tục sau một số bước…

✍ Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung $\overline{A}$ (có thể đổi chỗ cột của $A$), đưa $\overline{A}$ về dạng bậc thang sau đây

$$\overline{A} \xrightarrow{BDSC(H)} \left[\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \cdots & \cdots & b'_1 \\ O & a'_{pp} & \cdots & b'_p \\ \hline & & & b'_{p+1} \\ O & & O & b'_m \end{array}\right] \quad \textbf{(4.7)}$$

trong đó $a'_{11},...,a'_{pp} \neq 0$.

✍ Nếu một trong các $b'_{p+1},...,b'_m$ khác 0 hay $r(A) < r(\overline{A})$, thì tồn tại phương trình mà vế trái bằng $0$, vế phải khác $0$, nên hệ vô nghiệm.

✍ Nếu $b'_{p+1} = ... = b'_m = 0$ hay $r(A) = r(\overline{A}) = p$, thì hệ đã cho tương đương với hệ $p$ phương trình, $n$ ẩn số sau với chú ý là $1 \leq p \leq \min(m,n)$.

❖ Khi $r(A) = r(\overline{A}) = p$, có một trong hai trường hợp sau:

* Trường hợp $p = n$ thì hệ có dạng

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + ... + a'_{1n}x'_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x'_2 + ... + a'_{2n}x'_n = b'_2 \\ \qquad \text{.......................................} \\ \qquad\qquad a'_{nn}x'_n = b'_n \end{cases}. \quad \textbf{(4.8)}$$

Các ẩn $x'_1,...,x'_n$ là các ẩn $x_1,...,x_n$ nhưng có thể thay đổi thứ tự chỉ số.

Ta giải hệ tìm nghiệm bằng cách giải từ phương trình cuối tìm $x'_n$, rồi tiếp tục tìm các ẩn còn lại $x'_{n-1}, x'_{n-2},...,x'_1$. Hệ có duy nhất nghiệm.

* Trường hợp $p < n$ thì hệ có dạng:

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + ... + a'_{1p}x'_p + a'_{1p+1}x'_{p+1} + \quad ... + a'_{1n}x'_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x'_2 + ... + a'_{2p}x'_p + a'_{2p+1}x'_{p+1} + \quad ... + a'_{2n}x'_n = b'_2 \\ \qquad \text{.......................................} \\ \qquad\qquad a'_{pp}x'_p + a'_{pp+1}x'_{p+1} + \quad ... + a'_{pn}x'_n = b'_p \end{cases} \quad \textbf{(4.9)}$$

Các ẩn $x'_1,...,x'_n$ là các ẩn $x_1,...,x_n$ nhưng có thể thay đổi thứ tự chỉ số.

Ta có thể tìm các ẩn $x'_1,...,x'_p$ (gọi là các ẩn chính) theo các ẩn $x'_{p+1},...,x'_n$.

Các ẩn $x'_{p+1},...,x'_n$ gọi là các ẩn không chính hay còn gọi là các tùy ý.

Chuyển các ẩn $x'_{p+1},...,x'_n$ sang vế phải, ta nhận được:

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \dots + a'_{1p}x'_p = b'_1 - \left(a'_{1p+1}x'_{p+1} + \quad \dots + a'_{1n}x'_n\right) \\ \qquad a'_{22}x'_2 + \dots + a'_{2p}x'_p = b'_2 - \left(a'_{2p+1}x'_{p+1} + \quad \dots + a'_{2n}x'_n\right) \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a'_{pp}x'_p = b'_p - \left(a'_{pp+1}x'_{p+1} + \quad \dots + a'_{pn}x'_n\right) \end{cases} \quad \textbf{(4.10)}$$

- Khi gán cho $n-p$ ẩn $x'_{p+1},\dots,x'_n$ ở vế phải một bộ số cụ thể $\left(x^0_{p+1},\dots,x^0_n\right)$ thì hệ có duy nhất một nghiệm $\left(x^*_1, x^*_2,\dots,x^*_p, x^0_{p+1},\dots,x^0_n\right)$. Trong đó $x^*_1, x^*_2,\dots,x^*_p$ được tính theo $x^0_{p+1},\dots,x^0_n$.
- $n-p$ ẩn $x'_{p+1},\dots,x'_n$ ở vế phải có thể nhận vô số bộ giá trị tùy ý, vậy hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc $n-p$ ẩn số.

**Chú ý 4.1.**

- Ta chỉ nên dừng quá trình biến đổi lại khi nhận được ma trận bậc thang.
- Nên chọn $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ …để việc biến đổi ma trận bổ sung $\overline{A}$ được thuận lợi.
- Các ẩn không chính không nhất thiết các ẩn $x'_{p+1},\dots,x'_n$. Từ phương trình có ít ẩn số nhất ta giữ lại một ẩn tùy ý với hệ số khác không, chuyển các ẩn còn lại sang vế phải, khi đó các ẩn được chuyển sang vế phải gọi là các ẩn không chính.

Chúng ta có định lý sau.

**Định lý 4.3.** Với hệ phương trình tuyến tính (4.1).

Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = p, \quad 1 \le \text{p} \le \min(m,n)$ thì:

1) $p = n$ : hệ có nghiệm duy nhất.
2) $p < n$ : hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào $n-p$ ẩn số tùy ý.

**Ví dụ 4.10.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad\; + 8x_3 = c \end{cases}$$ bằng phương pháp Gauss.

**Giải:** Ma trận bổ sung $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix}$.

Thực hiện các biến đổi sơ cấp lên hàng của $\overline{A}$ ta được

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 2 & -5 & a-c \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}.$$

Có $r(A)=r(\overline{A})=3$ hệ có nghiệm duy nhất với mọi $a,b,c$. Ta nhận được hệ phương trình tương đương với hệ đã cho là

$$\begin{cases} x_1 + \qquad 8x_3 = c \\ \qquad 5x_2 - 3x_3 = b-2a \\ \qquad\qquad x_3 = 5a-2b-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -40a+16b+9c \\ x_2 = 13a-5b-3c \\ x_3 = 5a-2b-c \end{cases}$$ là nghiệm duy nhất của hệ.

❖ Ở bài toán này, ta có thể tiếp tục biến đổi ma trận trên đưa ma trận A về dạng tam giác (các bước biến đổi sau không nhất thiết phải thực hiện)

$$\overline{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix} \xrightarrow[-8h_3+h_1\to h_1]{3h_3+h_2\to h_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40a+16b+9c \\ 0 & 1 & 0 & 13a-5b-3c \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}.$$

Vậy ta đã tìm được hệ phương trình tương đương và cũng là nghiệm duy nhất của hệ:

$$\begin{cases} x_1 = -40a+16b+9c \\ x_2 = 13a-5b-3c \\ x_3 = 5a-2b-c \end{cases}.$$

**Ví dụ 4.11.** Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 + x_4 - x_5 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 \qquad = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 - 4x_5 = -2 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - 16x_4 - 5x_5 = -3 \\ x_1 + x_2 + \qquad x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}.$$

**Giải:** Biến đổi sơ cấp theo hàng ma trận bổ sung của hệ

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -9 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -8 & -4 & -2 \\ 6 & 1 & 1 & -16 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & -22 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & -22 & -2 & 14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \end{bmatrix} \to$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ đây là ma trận bậc thang hàng, $r(A)=r(\overline{A})=4<5$ .

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào một ẩn tùy ý. (có thể dừng biến đổi ma trận ở bước này để tìm nghiệm).

Cũng có thể tiếp tục biến đổi để ma trận có thêm nhiều số không hơn, ta sẽ nhận được ma trận sau:

$$\overline{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow r(A)=r(\overline{A})=4.$$

Hệ đã cho tương đương với hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một ẩn tùy ý:

$$\begin{cases}x_1 = -2\\ x_2 - 3x_4 = 2\\ x_3 - 3x_4 = 2\\ 2x_4 + x_5 = -1\end{cases}$$ nghiệm tổng quát của hệ là: $$\begin{cases}x_1 = -2\\ x_2 = 2+3x_4\\ x_3 = 2+3x_4\\ x_4 \in \mathbb{R}\\ x_5 = -1-2x_4\end{cases}.$$

❖ Đối với hệ phương trình đã cho, ta có thể biến đổi ma trận bổ sung theo cách khác, dưới đây là một gợi ý:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3\\ 2 & 2 & 1 & -9 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 1 & -8 & -4 & -2\\ 6 & 1 & 1 & -16 & -5 & -3\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_3}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 2 & -9 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3 & -8 & -4 & -2\\ 1 & 1 & 6 & -16 & -5 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2\end{bmatrix}\to\cdots$$

Trong ma trận thứ hai: cột thứ nhất chính là các hệ số của ẩn $x_3$, cột thứ ba là các hệ số của ẩn $x_1$, rõ ràng từ ma trận thứ hai việc biến đổi thuận lợi hơn….

**Ví dụ 4.12**. Giải và biện luận theo tham số $m$ hệ phương trình

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+5x_3+4x_4=3\\ 2x_1+3x_2+6x_3+8x_4=5\\ x_1-6x_2-9x_3-20x_4=-11\\ 4x_1+x_2+4x_3+mx_4=2\end{cases}.$$

**Giải:** Biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận bổ sung: (bạn đọc tự tìm hiểu cách biến đổi)

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}3&2&5&4&3\\2&3&6&8&5\\1&-6&-9&-20&-11\\4&1&4&m&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&-1&-4&-2\\2&3&6&8&5\\1&-6&-9&-20&-11\\4&1&4&m&2\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&-1&-4&-2\\0&5&8&16&9\\0&5&8&16&9\\0&5&8&m+16&10\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&-1&-4&-2\\0&5&8&16&9\\0&0&0&m&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Khi $m=0$: $2=r(A)<r(\overline{A})=3\Rightarrow$ hệ vô nghiệm;

Khi $m\neq 0$: $r(A)=r(\overline{A})=3<4\Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 1 ẩn.

Hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases}x_1-x_2-\ x_3-\ \ 4x_4=-2\\ \quad 5x_2+8x_3+16x_4=9\\ \qquad\qquad\quad mx_4=1\end{cases}$$

chọn $x_3$ tùy ý, ta có nghiệm tổng quát của hệ là:

$$\left(\ x_1=\frac{4-m}{5m}-\frac{3}{5}x_3\ ;\ x_2=\frac{9m-16}{5m}-\frac{8}{5}x_3\ ;\ x_3\ \text{ tùy ý };\ x_4=\frac{1}{m}\ \right).$$

## 4.4 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

### 4.4.1 Tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^n$.

Xét hệ
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0\end{cases}. \qquad \textbf{(4.11)}$$

* Tập hợp nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (4.11) luôn khác $\varnothing$ vì luôn thỏa mãn điều kiện tồn tại nghiệm: $r(\overline{A})=r(A)\le n$. (xem Định lý 4.1).

* Dễ thấy $x_1=\ldots=x_n=0$ là một nghiệm của hệ (4.11). Nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường. Nghiệm có các thành phần không đồng thời bằng $0$ gọi là nghiệm không tầm thường (hay nghiệm khác không).

Định lý sau đây chỉ ra điều kiện tồn tại nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

**Định lý 4.4.**

Hệ (4.11) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $r(A) < n$; và do đó

Hệ (4.11) chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $r(A) = n$.

Trường hợp $A$ là ma trận vuông cấp $n$

Hệ (4.11) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $\det A = 0$.

Hệ (4.11) chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $\det A \neq 0$.

### 4.3.2. Cấu trúc tập hợp nghiệm

**Định lý 4.5.** Giả sử $A$ là ma trận hệ số của hệ (4.11). Nếu $r(A) = p \leq n$

thì tập hợp nghiệm của hệ (4.11) là không gian véc tơ con $n - p$ chiều của $\mathbb{R}^n$.

**Chứng minh:** Áp dụng Định lý 2.1 chương 2.

**Định nghiã 4.3.** Một cơ sở của không gian nghiệm gọi là một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

**Chú ý 4.2.**

- Vế phải của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn bằng 0 do đó không thay đổi khi ta giải hệ theo phương pháp khử Gauss. Vì vậy để giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất ta chỉ cần biến đổi ma trận hệ số của hệ.

**Phương pháp tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (4.11)**

Giả sử $r(A) = p < n$, khi đó không gian nghiệm có số chiều là $n - p$, ta thực hiện các bước sau:

✍ Lập ma trận không suy biến cấp $n - p$.

✍ Cho $n - p$ ẩn tùy ý lần lượt nhận các giá trị của các phần tử trên một hàng, (hoặc một cột) của ma trận, ta có bộ $n - p$ số thực xác định, rồi tìm $p$ ẩn chính theo $n - p$ ẩn tùy ý. Ta sẽ có một nghiệm thuộc hệ nghiệm cơ bản.

✍ Thực hiện $n - p$ lần như vậy, mỗi lần cho $n - p$ ẩn tùy ý nhận giá trị của các phần tử trên một hàng khác nhau, (hoặc một cột khác nhau) ta sẽ nhận được $n - p$ nghiệm, đó chính là hệ nghiệm cơ bản cần tìm.

Nếu chọn ma trận cấp $n - p$ là ma trận $I_{n-p}$ (ma trận đơn vị cấp $n - p$), thì hệ nghiệm cơ bản tìm được còn được gọi là một hệ nghiệm cơ bản chuẩn tắc.

**Ví dụ 4.13.** Giải hệ phương trình thuần nhất $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$.

**Giải:** Giải hệ theo phương pháp khử Gauss, xét ma trận hệ số

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_1 + h_3 \to h_3]{-2h_1 + h_2 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{h_2 + h_3 \to h_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}h_i \to h_i, i = 2,3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3.$$

Hệ sẽ có vô số nghiệm phụ thuộc một ẩn. Chọn $x_3$ làm ẩn tuỳ ý.

Hệ đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad x_2 - \ x_3 \qquad \quad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Đặt $V$ là tập hợp nghiệm của hệ:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_3, x_3, x_3, 0) = x_3(-1,1,1,0) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Vậy $V$ là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$; $\{(-1,1,1,0)\}$ là một cơ sở của $V$; $\dim V = 1$.

**Ví dụ 4.14.** Giải hệ phương trình thuần nhất $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$.

**Giải:** Biến đổi ma trận hệ số

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}; \ x_3, x_4 \text{ tùy ý.}$$

Đặt $V$ là tập hợp nghiệm của hệ:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_3 - 2x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Hệ nghiệm cơ bản chuẩn tắc là $\{(3,2,1,0);(-2,-1,0,1)\}$, vì khi đó ta chọn

$x_3 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow (3,2,1,0)$ là một nghiệm.

$x_3 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow (-2,-1,0,1)$ là một nghiệm.

Hệ nghiệm cơ bản $\{(1,-1,1,1);(-2,-1,0,1)\}$ tương với việc chọn ma trận cấp hai $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ và cho $x_3, x_4$ lần lượt nhận giá trị của phần tử trên mỗi hàng của ma trận để tính nghiệm.

Bạn đọc tự tìm hiểu các phép biến đổi ở lời giải trên, và tìm cơ sở, số chiều không gian nghiệm, cũng như tìm các hệ nghiệm cơ bản khác của hệ.

**Ví dụ 4.15**. Đặt $V_1$, $V_2$ lần lượt là tập hợp nghiệm của hệ phương trình (I) và hệ phương trình (II) sau :

$$(I)\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 \qquad = 0 \end{cases}, \quad (II)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

Hãy tìm một cơ sở, số chiều của các không gian con $V_1$, $V_2$, $V_1 \cap V_2$.

**Giải:**

Giải hệ phương trình (I) :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 5 & 30 & -25 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}$.

$$v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_1$$
$$\Leftrightarrow v = (8x_3 - 7x_4, -6x_3 + 5x_4, x_3, x_4) = x_3(8,-6,1,0) + x_4(-7,5,0,1)$$
$$\Rightarrow V_1 = \{ x_3(8,-6,1,0) + x_4(-7,5,0,1) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Một cơ sở của $V_1$ là $\{ (8,-6,1,0), (-7,5,0,1) \}$; $\dim V_1 = 2$.

Tương tự, giải hệ phương trình (II) ta có

$$V_2 = \{ x_3(3,1,1,0) + x_4(-2,-2,0,1) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\};$$

Một cơ sở của $V_2$ là $\{ (3,1,1,0), (-2,-2,0,1)\}$; $\dim V_2 = 2$.

Khi đó $V_1 \cap V_2$ là không gian nghiệm của hệ 6 phương trình sau:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 \qquad\quad = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm: $(x_4, -x_4, x_4, x_4)$; $x_4$ tùy ý.

$$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{x_4(1,-1,1,1) \mid x_4 \in \mathbb{R}\};$$

Một cơ sở của $V_1 \cap V_2$ là $\{(1,-1,1,1)\}$ ; $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

**Ví dụ 4.16.** Tập $W_2 = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 0\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$ có $\dim W_2 = 3 - 1 = 2$.

### 4.3.3 Mối liên hệ giữa nghiệm của hệ không thuần nhất và phương trình thuần nhất tương ứng

Xét hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất: $AX = B$ $(*)$

và hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng của $(*)$**:** $AX = \theta$ **$(**)$.**

**Định lý 4.6.**

1) Giả sử $X^0$ là một nghiệm riêng của hệ $(*)$, $\overline{X}$ là nghiệm tổng quát của $(*)$.

Khi đó tồn tại nghiệm thích hợp của **$(**)$** để $X$ là tổng của $X^0$ với nghiệm thích hợp của **$(**)$.**

2) Giả sử $X^0$ là một nghiệm riêng của hệ $(*)$, $\overline{X}$ là nghiệm tổng quát của $(**)$.

Khi đó $X^0 + \overline{X}$ là nghiệm tổng quát của $(*)$.

**Hệ quả:** Giả sử $X^0$ là một nghiệm riêng của $(*)$, khi đó $\overline{X}$ là nghiệm tổng quát của $(**)$ khi và chỉ khi $X = X^0 + \overline{X}$ là nghiệm tổng quát của **$(*)$.**

**Ví dụ 4.17.** Giải hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 8 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$.

**Giải:** Nhận thấy $(1,1,1,1)$ là một nghiệm riêng của hệ trên. Theo kết quả của Ví dụ 4.13 nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng của hệ trên là :

$$(-t, t, t, 0),\ \ t \in \mathbb{R}$$

Do đó nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là $(1-t,\ 1+t,\ 1+t,\ 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

**Chú ý 4.3.** Khi giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss, trong trường hợp hệ có vô số nghiệm thì nếu mỗi người chọn những phép biến đổi sơ cấp khác nhau lên ma trận bổ sung, hoặc chọn các ẩn không chính khác nhau sẽ dẫn đến kết quả là cùng một hệ phương trình nhưng ta sẽ thấy công thức nghiệm sẽ khác nhau.

## BÀI TẬP CHƯƠNG 4

**4.1**) Không giải hệ, hãy xét tính tương thích (có nghiệm) của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \end{cases}$.

**4.2)** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$.

**4.3)** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận nghịch đảo:

a) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$.

**4.4)** Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$.

**4.5**) Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauus:

a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$.

**4.6**) Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + mx_4 = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (1+m)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+m)x_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + (1+m)x_3 = m^2 \end{cases}$.

**4.7**) Xác định các giá trị của tham số $m$ sao cho các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my + 3z = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + my - z = -2 \\ x - 3z = -3 \\ x + 2y + mz = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y + mz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = m \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x + 2y + mz = 1 \\ 2x + my + 8z = 3 \end{cases}$.

i) Vô nghiệm.

ii) Có nhiều hơn 1 nghiệm.

iii) Có duy nhất nghiệm.

**4.8**) Tìm điều kiện của $a, b, c$ để hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + 3y - z = a \\ x - 2y + 4z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$.

**4.9)** Trong không gian $\mathbb{R}^4$, hãy biểu thị tuyến tính véc tơ $\alpha_4$ qua các véc tơ còn lại

$\alpha_1 = (1,1,1,1)$; $\alpha_2 = (2,2,2,2)$; $\alpha_3 = (3,0,-1,1)$; $\alpha_4 = (-12,3,8,-2)$;

**4.10)** Véc tơ $v = (3,9,-4,-2)$ có thuộc không gian sinh bởi hệ véc tơ sau hay không

$$S = \{\ u_1 = (1,-2,0,3);\ u_2 = (2,3,0,-1);\ u_3 = (2,-1,2,1)\ \}.$$

**4.11)** Hãy tìm một cơ sở, số chiều của các không gian con $U$, $W$, $U \cap W$ của $\mathbb{R}^4$. Với :

$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\};$$

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0, x_3 = 2x_4\right\}.$$

**4.12)** Đặt $V_1$, $V_2$ lần lượt là hai không gian nghiệm của hệ phương trình (I) và hệ phương trình (II) sau:

$$(I) \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}, \quad (II) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Hãy tìm một cơ sở, số chiều của các không gian con $V_1$, $V_2$, $V_1 \cap V_2$.

**4.13)** Tìm hệ nghiệm cơ bản và số chiều của không gian nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x - y + 7z + 4t = 0 \\ x + 2y - 3z + 6t = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + 4y + z + 2t + 3w = 0 \\ x + 2y + z + 2t + 4w = 0 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 20x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 15x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ 7x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$;

**4.14)** Dùng định nghĩa, hãy chứng tỏ các hệ véc tơ sau trong $\mathbb{R}^4$ là phụ thuộc tuyến tính.

a) $S_1 = \{\ u_1 = (3,2,4,7);\ u_2 = (4,-3,11,2);\ u_3 = (-5,3,-13,1);\ u_4 = (7,-1,15,9)\}$.

b) $S_2 = \{\ v_1 = (1,3,0,7);\ v_2 = (4,-3,11,2);\ v_3 = (6,3,11,16);\ v_4 = (1,-1,1,2)\}$.

**4.15)** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}.$$

Hệ nào trong số các hệ véc tơ sau là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình trên.

a) $\alpha_1 = (1,-2,1,0,0);\ \alpha_2 = (1,-2,0,1,0);\ \alpha_3 = (0,0,1,-1,0);\ \alpha_4 = (1,-2,3,-2,0)$;

b) $\beta_1 = (1,-2,1,0,0);\ \beta_2 = (4,0,0,-6,2);\ \beta_3 = (0,0,-1,1,0)$;

c) $\gamma_1 = (1,-2,1,0,0);\ \gamma_2 = (4,0,0,-6,2);\ \gamma_3 = (2,4,-1,-6,2)$;

d) $\eta_1 = (1,-2,0,0,0);\ \eta_2 = (4,3,0,-6,2);\ \eta_3 = (2,4,-1,-6,2)$;

e) $\mu_1 = (1,-2,1,0,0);\ \mu_2 = (4,0,0,-6,2)$.

**4.16)** Cho các hệ phương trình:

(I) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 9 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 12 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -9 \end{cases}$.

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất của mỗi hệ.

b) Tìm nghiệm tổng quát của mỗi hệ phương trình đã cho, biết một nghiệm riêng của hệ (I) và hệ (II) lần lượt là $(1,1,0,0,0)$; $(1,0,1,1,-1)$;

**4.17*)** Chứng minh rằng hệ phương trình sau tồn tại duy nhất nghiệm:

$$\begin{cases} 1/2\,x_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ 1/2\,x_2 = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1/2\,x_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$ trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

**4.18***) Cho hệ phương trình tuyến tính có 10 phương trình và 11 ẩn số. Biết rằng:

1) Bộ số $(2003, 2004, ..., 2013)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

2) Khi xoá cột thứ $j$ trong ma trận hệ số của hệ phương trình đã cho thì ta được một ma trận vuông có định thức đúng bằng $j$; $(j = 1, 2, ..., 11)$.

Hãy tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đã cho.

# CHƯƠNG 5

# PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG TRÊN $\mathbb{R}^n$

Chỉ với mục đích là giới thiệu phép biến đổi tuyến tính và dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$ nên trong chương này chúng tôi không thể trình bày một cách thật đầy đủ, chi tiết nguồn gốc, bản chất, mối liên hệ sâu sắc của các khác niệm như ánh xạ tuyến tính, dạng song tuyến tính, dạng toàn phương. Tuy nhiên những vấn đề cốt lõi thì không thể bỏ qua được. Để học tốt chương này người học vẫn cần vận dụng kiến thức của các chương đã học: ánh xạ, không gian véc tơ, ma trận, định thức và hệ phương trình tuyến tính.

## 5.1 PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

### 5.1.1 Khái niệm , tính chất, phép toán

Trước hết ta nghiên cứu một ánh xạ tuyến tính tổng quát từ không gian véc tơ $V$ vào không gian véc tơ $W$.

**Định nghĩa 5.1.** Ánh xạ $f$ từ không gian véc tơ $V$ vào không gian $W$ thoả mãn:

$$\begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{cases} \quad \text{với mọi } u, v \in V,\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(5.1)}$$

được gọi là một ánh xạ tuyến tính từ $V$ vào $W$.

Điều kiện (5.1) còn có thể thay thế bởi : với mọi $u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v). \qquad \textbf{(5.2)}$$

Ký hiệu $Hom(V,W) = \left\{ f : V \longrightarrow W \right\}$ là tập các ánh xạ tuyến tính từ $V$ vào $W$.

Nói riêng khi $V \equiv W$ thì $f$ được gọi là tự đồng cấu trên $V$, hay còn gọi là phép biến đổi tuyến tính trên không gian véc tơ $V$.

Ký hiệu $End(V) = \{ f : V \to V \}$ là tập các phép biến đổi tuyến tính trên không gian $V$.

Định lý sau cho thấy luôn tồn tại ánh xạ tuyến tính giữa hai không gian véc tơ.

**Định lý 5.1.** Mỗi ánh xạ tuyến tính từ $V$ vào $W$ hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của $V$; nghĩa là với cơ sở $\mathscr{B} = \{ e_1, ..., e_n \}$ cho trước của $V$, khi đó với mỗi hệ véc tơ $u_1, ..., u_n \in W$: Tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính xác định như sau

$$f : V \to W \text{ sao cho } f(e_i) = u_i,\ i = 1, ..., n.$$

**Chứng minh: (**tham khảo trong $[I]$).

**Định lý 5.2.** Ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ $V$ vào không gian $W$ nói chung và trên $\mathbb{R}^n$ nói riêng có các tính chất sau

(i) $f(\theta)=\theta$

(ii) với mọi $v\in V$: $f(-v)=-f(v)$

(iii) $f\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f(v_i)$, $\forall\alpha_1,...,\alpha_m\in\mathbb{R}$, $\forall v_1,...,v_m\in V$.

**Chứng minh**:

(i) $f(\theta)=f(0\cdot\theta)=0f(\theta)=\theta$.

(ii) $f(v)+f(-v)=f(v+(-v))=f(\theta)=\theta\Rightarrow f(-v)=-f(v)$.

(iii) Dễ dàng chứng minh bằng cách quy nạp theo $m$.

**Định lý 5.3.** Các phép toán trên tập $Hom(V,W)$.

a) Với $f,g\in Hom(V,W)$, tương ứng $f+g$ xác định như sau

$$\begin{aligned} f+g:V &\longrightarrow W\\ u&\mapsto f(u)+g(u) \end{aligned} \quad \textbf{(5.5)}$$

Thì $f+g\in Hom(V,W)$ và được gọi là tổng của $f$ và $g$.

b) Với $k\in\mathbb{R}$, $f\in Hom(V,W)$, tương ứng $kf$ xác định như sau

$$\begin{aligned} kf\ :V &\longrightarrow W\\ u&\mapsto kf(u)=k.f(u) \end{aligned} \quad \textbf{(5.6)}$$

Thì $kf\in Hom(V,W)$ và được gọi là tích của $k$ và $f$.

c) Với $f,g\in End(V)$ thì tích của $f,g$ là $f\circ g\in End(V)$.

Ký hiệu $f\circ f$ là $f^2$ và tổng quát hơn $\underbrace{f\circ...\circ f}_{n}$ là $f^n$.

**Chú ý 5.1.**

- Vậy ta với hai phép toán: cộng hai ánh xạ tuyến tính, nhân một số với ánh xạ tuyến tính thì $Hom(V,W)$ có cấu trúc không gian véc tơ.
- Do giới hạn của tài liệu này chúng ta chỉ nghiên cứu các ánh xạ tuyến tính trên các không gian thực $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$. Bởi vậy ví dụ và bài tập chỉ nhắc đến các ánh xạ tuyến tính có dạng sau:

$$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) \mapsto f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = \left(y_1, y_2, \ldots y_m\right).$$

Tất nhiên nó mang đầy đủ tính chất của một ánh xạ tuyến tính (5.1).

- Trong lý thuyết chúng tôi vẫn dùng ký hiệu tổng quát là các không gian $V, W$.

**Ví dụ 5.1.** Các ánh xạ sau đều là các phép biến đổi tuyến tính:

1) Ánh xạ đồng nhất $\quad \mathrm{Id}_V : V \to V$

$$u \mapsto \mathrm{Id}_V(u) = u$$

2) Ánh xạ không $\quad \theta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$u \mapsto \theta(u) = \theta$$

3) Ánh xạ $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\left(x, y\right) \mapsto f\left(x, y\right) = \left(3x - 4y, 2x + y\right),$$

Với $\forall u = \left(x, y\right),\ v = \left(x', y'\right) \in \mathbb{R}^2,\ k \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{aligned} * \ f\left(u+v\right) &= f\left(x+x', y+y'\right) = \left(3(x+x') - 4(y+y'); 2(x+x') + (y+y')\right) \\ &= \left(3x + 3x' - 4y - 4y', 2x + 2x' + y + y'\right) = \left(3x - 4y, 2x + y\right) + \left(3x' - 4y', 2x' + y'\right) \\ &= f\left(u\right) + f\left(v\right). \end{aligned}$$

$$* \ f\left(ku\right) = \left(k(3x - 4y), k(2x + y)\right) = k\left(3x - 4y, 2x + y\right) = k\, f\left(u\right).$$

chứng tỏ $f$ thoả mãn (5.1) **v**ậy $f$ là một phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$.

4) Ánh xạ $f:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\left(x, y, z\right) \mapsto f\left(x, y, z\right) = \left(3x - 4y + 2z, 2x + y - 4z\right),$$

5) Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$, xét tương ứng $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$$

xác định bởi:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Ta cũng chứng minh được đây là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$. Ngược lại ta có thể chứng minh được mọi ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ đều có dạng như trên.

Thực hiện phép nhân ma trận ta nhận được công thức của $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$, $i = 1,2,..,m$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad \textbf{(5.4)}$$

(5.4) gọi là biểu thức toạ độ của phép biến đổi tuyến tính $f$.

**Ví dụ 5.2.** Cho hai ánh xạ tuyến tính $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh như sau:

$$f(x,y) = (3x-5y, 4x+y);\ g(x,y) = (2x+6y, x-5y).$$

Các ánh xạ $2f,\ f+g,\ f\circ g,\ g\circ f$ đều là các ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ta có:

- $2f(x,y) = (6x-10y, 8x+2y)$.

$(f+g)(x,y) = (5x+y, 5x-4y)$.

- $f\circ g(x,y) = f(2x+6y, x-5y) = (x+43y, 9x+19y)$.
- $g\circ f(x,y) = g(3x-5y, 4x+y) = (30x-4y, -17x-10y)$.

**Ví dụ 5.3.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh như sau:

$$f(x,y) = (3x-5y, 4x+y).$$

- $f^2(x,y) = f(f(x,y)) = (-11x-20y, 16x-19y)$.

### 5.1.2 Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong một cơ cở

Xét ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$. Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của $V$, $\mathscr{B}' = \{\omega_1,...,\omega_m\}$ là một cơ sở của $W$. Hệ $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ là một hệ véc tơ trong $W$. Khi đó ánh xạ tuyến tính $f$ hoàn toàn được xác định bởi hệ véc tơ $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$.

**Định nghĩa 5.2.** Ma trận của hệ véc tơ $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f$ trong cặp cơ sở $\mathscr{B}$ và $\mathscr{B}'$.

Nghĩa là nếu $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\omega_i;\ j = 1,...,n$ thì ma trận của hệ $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ của không gian $W$ là ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \text{ Ký hiệu } A = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}. \qquad \textbf{(5.7)}$$

* Nếu $f : V \to V$ khi đó ma trận của $f$ trong cặp cơ sở $(\mathscr{B}, \mathscr{B})$ là một ma trận $A$ vuông cấp $n$, có các cột lần lượt là tọa độ của hệ véc tơ $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ viết trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, được gọi là ma trận của phép biến đổi tuyến tính $f$ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

Ký hiệu $A = [f]_{\mathscr{B}}$. **(5.8)**

* Ma trận của tự đồng cấu $f$ trong cơ sở chính tắc gọi là ma trận chính tắc.

Từ định nghĩa ta có kết quả sau.

**Định lý 5.4.** Phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ với công thức xác định ảnh:

$$f(x_1, ..., x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, ..., a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)$$

Có ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ trong cơ sở chính tắc của hai không gian.

Ngược lại mỗi ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ xác định duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f$ mà A là ma trận của $f$ trong cơ sở cho trước.

Tổng quát $\forall u \in V$ ta luôn có:

$$f(u) = Au. \qquad \textbf{(5.9)}$$

Nói riêng với $f \in End(V)$, ta có:

$$[f(u)]_{\mathscr{B}} = A[u]_{\mathscr{B}} \qquad \textbf{(5.10)}$$

(5.10) gọi là biểu thức dạng ma trận của $f \in End(V)$ đối với cơ sở $\mathscr{B}$.

Từ đây ta chủ yếu nghiên cứu $f \in End(V)$.

**Nhận xét 5.1.**

- Có tương ứng 1 - 1 giữa $End(V)$ và $\mathscr{M}_n$.
- Nếu cố định cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ của $V$ thì: Với mỗi $f \in End(V)$ tồn tại duy nhất ma trận $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ xác định bởi (5.10).

- Ngược lại, cho ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$. Xét hệ véc tơ $\{u_1,...,u_n\}$ của $V$ có tọa độ trong cơ sở $\mathscr{B}$ là các cột của ma trận $A$, theo định lý 5.1 tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $f:V\to V$ . Do đó $[f]_{\mathscr{B}}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}\in\mathscr{M}_n$.

**Ma trận của $f\in End(V)$ trong các cơ sở khác nhau.**

Ma trận của $f\in End(V)$ trong các cơ sở khác nhau của $V$ có quan hệ đặc biệt. Định lý sau cho biết điều đó.

**Định lý 5.5.** Nếu $f\in End(V)$. Gọi $A,A'$ lần lượt là ma trận của $f$ trong hai cơ sở $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ và $T$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì:

$$A'=T^{-1}AT \qquad \textbf{(5.11)}$$

**Chứng minh**

Với $\forall u\in V\Rightarrow f(u)\in V$ và các giả thiết đã cho ta có

$[u]_{\mathscr{B}}=T[u]_{\mathscr{B}'}$ $(1)$ (công thức đổi tọa độ )

$[f(u)]_{\mathscr{B}}=T[f(u)]_{\mathscr{B}'}$ $(2)$ (công thức đổi tọa độ)

$[f(u)]_{\mathscr{B}}=A[u]_{\mathscr{B}}$ $(3)$ (biểu thức dạng ma trận của phép biến đổi $f$ )

$[f(u)]_{\mathscr{B}'}=A'[u]_{\mathscr{B}'}$ $(4)$ (biểu thức dạng ma trận của phép biến đổi $f$ )

Từ $(4)$ $A'[u]_{\mathscr{B}'}=[f(u)]_{\mathscr{B}'}$

$=T^{-1}T\,[f(u)]_{\mathscr{B}'}=T^{-1}\left(T\,[f(u)]_{\mathscr{B}'}\right)$

$=T^{-1}\left([f(u)]_{\mathscr{B}}\right)$ nhờ $(2)$

$=T^{-1}\left(A[u]_{\mathscr{B}}\right)$ nhờ $(3)$

$=T^{-1}A\,T[u]_{\mathscr{B}'}$ nhờ $(1)$.

$=\left(T^{-1}A\,T\right)[u]_{\mathscr{B}'}$

Từ đây ta suy ra điều cần chứng minh.

**Chú ý:** Công thức $A' = T^{-1}AT$ (5.11) có một vai trò quan trọng đối với một số bài toán về ma trận và định thức.

**Định lý 5.6.** Với $k \in \mathbb{R}$ , và $A, B$ lần lượt là ma trận của $f, g \in Hom(V, W)$ trong một cặp cơ sở nào đó thì $A + B,\ kA,\ AB$ lần lượt là ma trận của $f + g$, $kf$, $f \circ g$ trong cặp cơ sở đó.

**Chứng minh:** (tham khảo $[1]$)

**Ví dụ 5.4.** Cho hai phép biến đổi tuyến tính $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh như sau

$$f(x, y) = (3x - 5y, 4x + y);\ g(x, y) = (2x + 6y, x - 5y).\ \text{(Ví dụ 5.2)}$$

Tìm ma trận chính tắc của các phép biến đổi $f,\ g,\ 2f,\ f + g,\ f \circ g,\ g \circ f$. (Hay còn gọi là ma trận trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$).

**Giải:**

- Đối với phép biến đổi tuyến tính $f$.

Cách 1) Ta áp dụng định nghĩa 5.2. công thức (5.8), ta có

$$f(1,0) = (3,4) = 3(1,0) + 4(0,1);\ f(0,1) = (-5,1) = -5(1,0) + (0,1)$$

Vậy ma trận chính tắc của $f$ là $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Cách 2) Áp dụng công thức (5.10). Viết $f(x, y) = (3x - 5y, 4x + y)$ thành véc tơ cột

$$\begin{bmatrix} 3x - 5y \\ 4x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ suy ra ma trận chính tắc của $f$ là $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

- Tương tự với các phép biến đổi tuyến tính còn lại. Ma trận chính tắc của các ánh xạ: $f, g,\ 2f,\ f + g,\ f \circ g,\ g \circ f$ lần lượt là $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$,

$$2A = \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 8 & 2 \end{bmatrix},\ A + B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix},\ AB = \begin{bmatrix} 1 & 43 \\ 9 & 19 \end{bmatrix},\ BA = \begin{bmatrix} 30 & -4 \\ -17 & -10 \end{bmatrix}.$$

- Từ ma trận nhận được ở trên ta suy ra công thức xác định ảnh của các ánh xạ: $2f,\ f + g,\ f \circ g,\ g \circ f$ mà không dùng định nghĩa như Ví dụ 5.2.

**Ví dụ 5.5.** Tìm ma trận chính tắc của ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (2x + y - 4z, 3x + 5z, x - y + z).$$

**Giải:** Ta có

$$f(1,0,0)=(2,3,1)=2(1,0,0)+3(0,1,0)+1(0,0,1).$$

$$f(0,1,0)=(1,0,-1)=1(1,0,0)+0(0,1,0)-1(0,0,1).$$

$$f(0,0,1)=(-4,5,1)=-4(1,0,0)+5(0,1,0)+1(0,0,1).$$

Vậy ma trận của $f$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -4\\ 3 & 0 & 5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

**Ví dụ 5.6** Cho phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, xác định như sau:

$$f(x,y,z)=(2x-y,\ 9x+4y+6z,\ -8x-3z)$$

a. Tìm ma trận chính tắc của $f$ trong $\mathbb{R}^3$.

b. Tìm ma trận của $f$ trong cơ sở sau

$$(\mathcal{S})=\{\,v_1=(1,3,-4),\ v_2=(1,1,-2),\ v_3=(3,-3,-4)\}\subset\mathbb{R}^3.$$

**Giải** : Cách 1) áp dụng định nghĩa

a. Ta có $\quad f(1,1,0)=(2,9,-8)=2(1,0,0)+9(0,1,0)-8(0,0,1).$

$$f(1,0,1)=(-1,4,0)=-1.(1,0,0)+4.(0,1,0)+0(0,0,1).$$

$$f(0,0,1)=(0,6,-3)=0(1,0,0)+6(0,1,0)-3(0,0,1)$$

Vậy $f$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc $(\varepsilon)$ là $\quad A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 9 & 4 & 6\\ -8 & 0 & -3\end{bmatrix}.$

b. Cơ sở $(\mathcal{S})=\{\,v_1=(1,3,-4),\ v_2=(1,1,-2),\ v_3=(3,-3,-4)\}\subset\mathbb{R}^3$

$$f(1,3,-4)=(-1,-3,4)=-1(1,3,-4)+0(1,1,-2)+0(3,-3,-4).$$

$$f(1,1,-2)=(1,1,-2)=0(1,3,-4)+1(1,1,-2)+0(3,-3,-4).$$

$$f(3,-3,-4)=(9,-9,12)=0(1,3,-4)+0(1,1,-2)+3(3,-3,-4)$$

nên $f$ có ma trận đối với cơ sở $(\mathcal{S})$ là $\quad A'=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$

Rõ ràng, trong các cơ sở khác nhau, thì một ánh xạ tuyến tính có các ma trận khác nhau.

Cách 2) áp dụng công thức $A' = T^{-1}AT$ (5.11)

b. Ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $(\mathcal{S})$ là $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Dễ dàng kiểm tra được $A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, với $A$ là ma trận của $f$ trong cơ sở chính tắc.

**Ví dụ 5.7.** Cho phép biến đổi tuyến tính $f \in End\,\mathbb{R}^4$ có ma trận $A$ ứng với cơ sở

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ xác định như sau: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Hãy tìm ma trận $A'$ của $f$ trong cơ sở $\mathcal{B}' = \{e_1, e_3, e_2, e_4\}$.

**Giải:**

Cách 1) Áp dụng Định nghĩa 5.2 công thức (5.8)

Đặt $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_3$, $e'_3 = e_2$, $e'_4 = e_4$. Theo giả thiết ta có:

$f(e'_1) = f(e_1) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4 = e'_1 + 2e'_2 + 3e'_3 + e'_4$;

$f(e'_2) = f(e_3) = -e_2 + 3e_3 + e_4 = 3e'_2 - e'_3 + e'_4$;

$f(e'_3) = f(e_2) = 2e_1 + 5e_3 + 2e_4 = 2e'_1 + 5e'_2 + 2e'_4$;

$f(e'_4) = f(e_4) = e_1 + 2e_2 + e_3 + 3e_4 = e'_1 + e'_2 + 2e'_3 + 3e'_4$;

Vậy ma trận $A'$ của $f$ trong cơ sở $\mathcal{B}' = \{e_1, e_3, e_2, e_4\}$ là:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Cách 2) Áp dụng công thức (5.11) ta có

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

.

### 5.1.3 Véc tơ riêng , giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính

#### a. Khái niệm véc tơ riêng , giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính

Xét phép biến đổi tuyến tính $f : V \to V$ trên không gian véc tơ $V$.

**Định nghĩa 5.3.** Giả sử $V$ là một không gian véc tơ, $f : V \to V$ là một phép biến đổi tuyến tính. Véc tơ $\theta \neq v \in V$ được gọi là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda$ của $f$ nếu tồn tại số $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$$f(v) = \lambda v. \tag{5.12}$$

Số $\lambda$ được gọi là giá trị riêng của $f$ ứng với véc tơ riêng $v$.

Một cách tương tự, $\lambda$ được gọi là giá trị riêng của ma trận vuông $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nếu tồn tại $x_1,...,x_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ hay } \left(A - \lambda I\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

Khi đó $\theta \neq v = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$.

**Định nghĩa 5.4.** Với $A$ là một ma trận vuông cấp $n$. Ta gọi định thức:

$$\mathscr{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{5.14}$$

là đa thức đặc trưng của ma trận $A$**.** Đây là một đa thức bậc $n$ của $\lambda$.

**Định lý 5.7.** $\lambda_0$ là giá trị riêng của ma trận $A$ khi và chỉ khi $\lambda_0$ là nghiệm của đa thức đặc trưng của $A$.

Nếu $A$ là ma trận của phép biến đổi tuyến tính $f$ trong cơ sở nào đó thì cũng nói $\lambda_0$ là giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính $f$.

**Ví dụ 5.8.** Cho phép biến đổi tuyến tính

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (3x - 5y, 4x + y)$.

Dễ dàng thấy $f(x,x) = 2(x,x)$. Vậy $\lambda = 2$ là một giá trị riêng và mọi véc tơ $v = (x,x)$; $x \neq 0$ là véc tơ riêng tương ứng. Như vậy có vô số véc tơ riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$.

**Ví dụ 5.9.** Cho phép biến đổi tuyến tính

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (-y, x)$.

Ta có thể chứng minh được phép biến đổi tuyến tính này không có giá trị riêng thực nào.

**Ví dụ 5.10.** Cho phép biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

có ma trận chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Ta có thể kiểm tra được các kết quả sau:

$$\mathscr{P}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda).$$

$v_1 = (1,3,-4)$ là một véc tơ riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$.

$v_2 = (1,1,-2)$ là một véc tơ riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$.

$v_3 = (3,-3,-4)$ là một véc tơ riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$.

**Định nghĩa 5.5**. Cho phép biến đổi tuyến tính $f$ của $V$. Với mỗi $\lambda \in \mathbb{R}$, ký hiệu

$$V_\lambda = \left\{ v \in V \,\middle|\, f(v) = \lambda v \right\} = \left\{ v \in V \,\middle|\, (A - \lambda I) v = \theta \right\} \quad \textbf{(5.15)}$$

$V_\lambda$ là không gian con của $V$.

Nếu $\lambda$ là giá trị riêng thì $V_\lambda$ được gọi là không gian riêng ứng với giá trị riêng $\lambda$.

**Định lý 5.8.** $\lambda$ là giá trị riêng của $f$ khi và chỉ khi $V_\lambda \neq \{\theta\}$.

**Chứng minh:** (bạn đọc tự chứng minh định lý này xem như một bài tập)

**Định lý 5.9.** Nếu $v_1,...,v_k$ là các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt $\lambda_1,...,\lambda_k$ của phép biến đổi tuyến tính $f$ (hoặc ma trận $A$) thì hệ véc tơ $\{v_1,...,v_k\}$ độc lập tuyến tính.

**Chứng minh**: Ta chứng minh quy nạp theo $k$.

- Khi $k = 1$, mệnh đề đúng vì hệ một véc tơ $v_1 \neq \theta$ là độc lập tuyến tính.
- Giả sử $k > 1$ và mệnh đề đúng với $k-1$. Hệ $\{v_1,...,v_{k-1}\}$ độc lập tuyến tính.
- Ta chứng minh hệ $\{v_1,...,v_k\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Giả sử có

$$x_1v_1 + ... + x_kv_k = \theta \quad (*) \text{ ta cần chứng minh } x_1 = ... = x_k = 0.$$

Tác động $f$ vào hai vế của (*), vì $v_i$ là những véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng $\lambda_i$, ta được

$$f(x_1v_1 + ... + x_kv_k) = f(\theta) = \theta$$

$$\Rightarrow \lambda_1 x_1 v_1 + ... + \lambda_k x_k v_k = \theta \quad (**)$$

Nhân $\lambda_k$ vào hai vế của (*) rồi trừ cho (**) ta được

$$x_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + x_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + ... + x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = \theta .$$

Theo giả thiết qui nạp, hệ véc tơ $\{v_1, ..., v_{k-1}\}$ độc lập tuyến tính. Do đó

$$x_1(\lambda_1 - \lambda_k) = x_2(\lambda_2 - \lambda_k) = ... = x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$$

Và do các $\lambda_1, ..., \lambda_m$ khác nhau từng đôi một, suy ra $x_1 = ... = x_{k-1} = 0$.

Thay các giá trị này vào (*) ta có $x_k v_k = \theta$. Nhưng $v_k \neq \theta \Rightarrow x_k = 0$.

Vậy hệ $\{v_1, ..., v_k\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

**b. Thuật toán tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính**

Từ (5.13) để tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính $f$ có ma trận $A$, ta thực hiện các bước sau

✍ bước 1: Lập và giải phưng trình đặc trưng $\det(A - \lambda I) = 0$

Tìm các giá trị riêng $\lambda$ là nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận $A$.

✍ bước 2: Với mỗi giá trị riêng $\lambda_j$ tìm được, giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\left(A - \lambda_j I\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Tập nghiệm tìm được là không gian riêng $V_{\lambda_j}$ ứng với giá trị riêng $\lambda_j$ của $f$.
- Khi đó nghiệm không tầm thường (khác $\theta$) của hệ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_j$ của $f$ (hay của ma trận $A$).

**Ví dụ 5.11**:

a) Tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$ có ma trận chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

**Giải**:

- Đa thức đặc trưng

$$\mathscr{P}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda)$$

có các nghiệm $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5$ là các giá trị riêng của $A$.

- Véc tơ riêng $v = (x, y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ là nghiệm khác $\theta$ của hệ

$$\left(A-\lambda_1 I\right)v=\theta \text{ hay } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ( 1) .}$$

Hệ phương trình (1) tương đương với phương trình: $x-y=0 \Rightarrow y=x$.

$\Rightarrow V_{\lambda_1}=\{\ v=(x,x)=x(1,1)\ x\in\mathbb{R}\ \}$ là không gian riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1=2$.

Do đó các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1=2$ có dạng $v=(x,x)=x(1,1);\ x\neq 0$.

- Tương tự, véc tơ riêng $v=(x,y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_2=5$ là nghiệm khác $\theta$ của hệ

$$\left(A-\lambda_2 I\right)v=\theta \text{ hay } \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (2).}$$

Hệ phương trình (2) tương đương với phương trình : $2x+y=0 \Rightarrow y=-2x$.

$\Rightarrow V_{\lambda_2}=\{\ v=(x,-2x)=x(1,-2);\ x\in\mathbb{R}\ \}$.

Các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2=5$ có dạng $v=(x,-2x)=x(1,-2);\ x\neq 0$.

b) Tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

có ma trận chính tắc là $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

**Giải :**

- Đa thức đặc trưng của $A$

$$\mathscr{P}_A(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(3-\lambda).$$

Do đó $A$ có các giá trị riêng $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=3$.

- Giá trị riêng $\lambda_1=-1$ có các véc tơ riêng $v=(x,y,z)$ là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình $\left(A+I\right)v=\theta \quad (1)$

Dạng ma trận $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$A+I=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

hệ phương trình (1) tương đương với hệ: $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x \\ z = -4x \end{cases}$.

Không gian riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -1$ là:

$$V_{\lambda_1} = \{v = (x, 3x, -4x) = x(1,3,-4);\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Vậy các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -1$ là nghiệm khác không của hệ, có dạng $v = (x, 3x, -4x) = x(1,3,-4)$, $x \neq 0$ .

- Giá trị riêng $\lambda_2 = 1$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình $(A - I)v = \theta$ $(2)$

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hệ phương trình ( 2 ) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -2y \end{cases}.$$

$V_{\lambda_2} = \{v = (y, y, -4y) = y(1,1,-2);\ y \in \mathbb{R}\}$.

Vậy các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 1$ có dạng

$$v = (y, y, -2y) = y(1,1,-2),\ y \neq 0 .$$

- Giá trị riêng $\lambda_3 = 3$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình $(A - 3I)v = \theta$ $(3)$

Ta có $A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

hệ phương trình trên tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_3} = \left\{v = \left(-y, y, \frac{4}{3}y\right) = y\left(-1, 1, \frac{4}{3}\right);\ y \in \mathbb{R}\right\}.$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_3} = \left\{v = \left(-y, y, \frac{4}{3}y\right) = y\left(-1, 1, \frac{4}{3}\right);\ y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Vậy các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = 3$ có dạng

$$v = \left(-y, y, \frac{4}{3}y\right) = -\frac{y}{3}(3, -3, -4),\ y \neq 0 .$$

### 5.1.4 Chéo hoá ma trận

Xét $f \in End(V)$.

**a. Các khái niệm và điều kiện chéo hoá**

**Định nghĩa 5.7**. Hai ma trận $A, B$ được gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận không suy biến $T$ sao cho $B = T^{-1}AT$.

**Định nghĩa 5.8**. Ma trận vuông $A$ chéo hoá được nếu $A$ đồng dạng với một ma trận chéo. Nói cách khác : ma trận vuông $A$ chéo hoá được nếu tồn tại ma trận không suy biến $T$ sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

**Định nghĩa 5.9.** Phép biến đổi tuyến tính $f \in End(V)$ chéo hoá được nếu tồn tại một cơ sở của $V$ để ma trận của $f$ trong cơ sở này có dạng chéo.

❖ Ta đã biết một số tính chất của hai ma trận đồng dạng như :

1. Nếu $A, B$ đồng dạng thì $\det A = \det B$.
2. Nếu $A, B$ đồng dạng thì $trace\,A = trace\,B$.
3. Nếu $A, B$ đồng dạng thì $B^n = T^{-1}A^nT$.
4. Công thức (5.11) cho thấy hai ma trận của một tự phép biến đổi tuyến tính bất kỳ trong hai cơ sở khác nhau là đồng dạng.

Ma trận đồng dạng với ma trận $A$ mà có dạng đường chéo sẽ có một vai trò rất quan trọng trong nhiều bài toán. Với tất cả các nhận xét trên, ta có bài toán sau.

**Bài toán 1:** Cho phép biến đổi tuyến tính $f \in End(V)$. Hãy tìm cơ sở của $V$ để ma trận của $f$ trong cơ sở này có dạng chéo.

**Bài toán 2:** Cho ma trận $A$ vuông cấp $n$. Tìm ma trận không suy biến $T$ sao cho

$T^{-1}AT$ có dạng chéo.

Các định lý dưới đây cho ta lời giải của bài toán trên,

**Định lý 5.9.** Phép biến đổi tuyến tính $f \in End(V)$ chéo hoá được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của $V$ gồm các véc tơ riêng của $f$.

**Chứng minh :** Giả sử trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ của $V$, ma trận của $f$ có dạng chéo

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & \alpha_i & \\ 0 & \cdots & & \alpha_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow f(e_i) = 0e_1 + ... + \alpha_i e_i + ... + 0e_n$$

$\Leftrightarrow e_i$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\alpha_i$, $\forall i = 1, 2, ..n$.

Định lý cho ta các điều kiện đủ để phép biến đổi tuyến tính chéo hóa được.

**Hệ quả 1:** (điều kiện đủ 1) Nếu đa thức đặc trưng $\mathscr{P}_A(\lambda)$ của đổi phép biến tuyến tính $f \in End(V)$, $\dim V = n$, có đúng $n$ nghiệm thực phân biệt thì $f$ chéo hoá được.

**Chứng minh**: Vì đa thức đặc trưng có $n$ nghiệm phân biệt nên $n$ véc tơ riêng tương ứng với $n$ giá trị riêng này là một hệ độc lập, do đó là một cơ sở của $V$ gồm các véc tơ riêng của $f$. Vậy $f$ chéo hoá được.

**Hệ quả 2:** (điều kiện đủ 2) Phép biến đổi $f \in End(V)$, $\dim V = n$, chéo hoá được nếu

$$\mathscr{P}_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} ... (\lambda_k - \lambda)^{m_k};$$

$\lambda_1, ..., \lambda_k$ là nghiệm thực, khác nhau từng đôi, với $m_1 + ... + m_k = n$. Đồng thời $\dim V_{\lambda_i} = m_i$ hay $r(A - \lambda_i I) = n - m_i; \forall\ i = 1, ..., k$ **(5.16)**

**Chứng minh**:

Trong mỗi $V_{\lambda_i}$ ta chọn một cơ sở gồm $m_i$ véc tơ. Hệ $n$ véc tơ hợp lại từ các cơ sở vừa chọn là một hệ độc lập tuyến tính, do đó hệ này là một cơ sở của $V$ gồm các véc tơ riêng của $f$. Vậy $f$ chéo hoá được.

**b. Thuật toán chéo hoá**

Khi giải quyết các bài toán trên, ta thực hiện thuật toán chéo hoá.

**Thuật toán**

✍ Bước 1: Tìm các giá trị riêng là nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} ... (\lambda - \lambda_k)^{m_k} = 0.$$

✍ Bước 2: Kiểm tra ĐK đủ . Giả sử $\dim V_{\lambda_i} = d_i$ ;

$$d_i = n - r(A - \lambda_i I).$$

- Nếu $d_i < m_i$ với $i$ nào đó, $1 \le i \le k$ thì $f$ không chéo hoá được. **Dừng.**
- Nếu $d_i = m_i$ với mọi $i = 1, ..., k$ thì $f$ chéo hoá chéo được. **Tiếp tục:**

✍ Bước 3: Với mỗi giá trị riêng $\lambda_i$

- Tìm các véc tơ riêng tương ứng.
- Trong mỗi không gian riêng $V_{\lambda_i}$ ta chọn một cơ sở gồm $m_i$ véc tơ riêng.
- Hệ gồm $m_1 + ... + m_k = n$ các véc tơ riêng này là cơ sở $\mathscr{B}'$ cần tìm.
- Ma trận $T$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$, và $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

**Ví dụ 5.12.** Chéo hóa ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 9 & 4 & 6\\ -8 & 0 & -3\end{bmatrix}$. (Xem Ví dụ 5.11 b).

**Giải:**

- Đa thức đặc trưng của $A$: $\mathscr{P}_A(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ 9 & 4-\lambda & 6\\ -8 & 0 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(3-\lambda)$.

Ma trận $A$ có ba giá trị riêng phân biệt $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=3$ nên chéo hóa được.

- Với giá trị riêng $\lambda_1=-1$.

  Không gian riêng $V_{\lambda_1}=\{v=(x,3x,-4x)=x(1,3,-4);\ x\in\mathbb{R}\}$,

  Chọn một cơ sở của $V_{\lambda_1}$ là $e'_1=(1,3,-4)$.

- Với giá riêng $\lambda_2=1$, $V_{\lambda_2}=\{v=(y,y,-4y)=y(1,1,-2);\ y\in\mathbb{R}\}$

  chọn một cơ sở của $V_{\lambda_2}$ là $e'_2=(1,1,-2)$.

- Tương tự $\lambda_3=3$, $V_{\lambda_3}=\left\{\left(x,-x,\frac{-4}{3}x\right)=\frac{x}{3}(3,-3,-4)\middle|\,x\in\mathbb{R}\right\}$,

  chọn một cơ sở của $V_{\lambda_2}$ là $e'_3=(3,-3,-4)$.

- Cơ sở mới gồm các véc tơ riêng $\mathscr{B}'=\{e'_1,e'_2,e'_3\}$. Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang $\mathscr{B}'=\{e'_1,e'_2,e'_3\}$ là T.

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 1 & -3\\ -4 & -2 & -4\end{bmatrix}\ \text{thì}\ T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

**Ví dụ 5.13.** Cho phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z)=(3x-2y,-2x+3y,z).$$

Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của $f$ trong cơ sở này có dạng chéo.

**Giải:**

- Ma trận chính tắc của $f$ là

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$\det\left(A-\lambda I\right)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(5-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Do đó $A$ có các giá trị riêng $\lambda_1=5$ và $\lambda_2=1$ (kép).

- Giá trị riêng $\lambda_1=5$ có véc tơ riêng $v=(x,y,z)$ là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình: $\left(A-5I\right)v=\theta$ $\quad(1)$

$$\left(A-5I\right)=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad\Rightarrow r\left(A-\lambda_1 I\right)=2\ (*)$$

hệ phương trình (1) tương đương với : $\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$

Không gian riêng ứng với $\lambda_1=5$ là $V_{\lambda_1}=\left\{v=\left(-y,y,0\right)=y(-1,1,0)\middle|\, y\in\mathbb{R}\right\}$,

chọn một véc tơ riêng $\left\{e'_1=(-1,1,0)\right\}$ làm cơ sở của không gian riêng $V_{\lambda_1}$.

- Tương tự, giá trị riêng $\lambda_2=1$, xét hệ phương trình $\left(A-I\right)v=\theta$ $\quad(2)$

$$\left(A-I\right)=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad\Rightarrow r\left(A-\lambda_2 I\right)=1\ (**)$$

hệ phương trình ( 2 ) tương đương với phương trình: $x-y=0$, $z$ tuỳ ý.

Không gian riêng ứng với $\lambda_2=1$ là

$$V_{\lambda_2}=\left\{v=\left(x,x,z\right)=x(1,1,0)+z(0,0,1)\middle|\, x,z\in\mathbb{R}\right\},$$

chọn một cơ sở của không gian riêng $V_{\lambda_2}$ là $\left\{e'_2=(1,1,0),e'_3=(0,0,1)\right\}$.

- Từ đó chọn cơ sở mới gồm các véc tơ riêng $\mathscr{B}'=\left\{e'_1,e'_2,e'_3\right\}$.

Ta có $f(e'_1)=5e'_1$, $f(e'_2)=e'_2$, $f(e'_3)=e'_3$.

Ma trận của $f$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng chéo $A'=\left[f\right]_{\mathscr{B}'}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Chú ý là từ (∗) và (∗ ∗), chứng tỏ ma trận A chéo hóa được do thỏa mãn điều kiện đủ thứ 2.

**Ví dụ 5.11.** Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**Giải:**

- Đa thức đặc trưng của $A$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(\lambda-1)^2 .$$

Do đó $A$ có các giá trị riêng $\lambda_1 = 5$ và $\lambda_2 = 1$ (kép).

- Giá trị riêng $\lambda_1 = 5$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình: $(A - 5I)v = \theta$ $\quad (1)$

$$(A-5I) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow r(A - \lambda_1 I) = 2 \ (*)$$

hệ phương trình (1) tương đương với :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

Không gian riêng ứng với $\lambda_1 = 5$ là $V_{\lambda_1} = \{ v = (-y, y, 0) = y(-1,1,0) \mid y \in \mathbb{R} \}$.

Chọn một véc tơ riêng $\{ e'_1 = (-1,1,0) \}$ làm cơ sở của không gian riêng $V_{\lambda_1}$.

- Tương tự, giá trị riêng $\lambda_2 = 1$, xét hệ phương trình $(A - I)v = \theta$ $\ (2)$

$$(A-I) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow r(A - \lambda_2 I) = 1 \ (**)$$

hệ phương trình ( 2 ) tương đương với phương trình: $x - y = 0$, $z$ tuỳ ý.

Không gian riêng ứng với $\lambda_2 = 1$ là

$$V_{\lambda_2} = \{ v = (x, x, z) = x(1,1,0) + z(0,0,1) \mid x, z \in \mathbb{R} \},$$

chọn một cơ sở của không gian riêng $V_{\lambda_2}$ là hệ $\{ e'_2 = (1,1,0), e'_3 = (0,0,1) \}$.

- Chọn cơ sở mới gồm các véc tơ riêng $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

- Ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở mới $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ là

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ có dạng chéo.

(Từ ($*$) và ($*$ $*$), chứng tỏ ma trận A chéo hóa được do thỏa mãn điều kiện đủ thứ 2).

**Ví dụ 5.12.** Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$

- Đa thức đặc trưng của $A$

$$\mathscr{P}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda+1)^2.$$

Đa thức đặc trưng có nghiệm $\lambda_1 = -1$ ($m_1 = 2$) và $\lambda_2 = 3$ ($m_2 = 1$).

- Giá trị riêng $\lambda_1 = -1$, xét ma trận

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r\left(A - \lambda_1 I\right) = 2$$

$$\Rightarrow \dim V_{\lambda_1} = 3 - r\left(A - \lambda_1 I\right) = 1 < 2.$$

Không gian riêng $V_{\lambda_1}$ có $\dim V_{\lambda_1} = 1 < 2 = m_1$ nên ma trận $A$ không chéo hoá được.

- Không cần xét tiếp giá trị riêng $\lambda_2 = 3$.

## 5.2 DẠNG TOÀN PHƯƠNG TRÊN $\mathbb{R}^n$

### 5.2.1 Định nghĩa và biểu thức toạ độ của dạng toàn phương

Một cách chính xác và đầy đủ thì dạng toàn phương trên không gian véc tơ $V$ phải được định nghĩa thông qua một dạng song tuyến tính $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$. Tuy nhiên do giới hạn của học phần này, ta chỉ có thể nghiên cứu dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$ từ biểu thức tọa độ của nó trong một cơ sở cho trước của $\mathbb{R}^n$ .

Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ , $\forall u \in V$; $u = x_1e_1 + ... + x_ne_n$.

**Định nghĩa 5.9.** Ánh xạ $Q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ **(5.17)**

được gọi là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$.

**Định nghĩa 5.10.**

Dạng toàn phương $Q$ xác định dương khi và chỉ khi $Q(v) > 0$, với mọi $v \neq \theta$;

Dạng toàn phương $Q$ xác định âm khi và chỉ khi $Q(v) < 0$, với mọi $v \neq \theta$.

$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i\neq j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ gọi là biểu thức tọa độ của dạng toàn phương trong cơ sở $\mathscr{B}$.

Ta có biểu diễn dưới dạng ma trận của $Q(u)$:

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \left[x_1\ x_2 \ldots x_n\right]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ta có biểu diễn dưới dạng tường minh của $Q(u)$:

$$\begin{aligned} Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j &= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ &+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \ldots + a_{nn}x_nx_n. \end{aligned}$$

Như vậy dạng toàn phương có biểu thức tọa độ là một đa thức đẳng cấp bậc 2.

**Ví dụ 5.12.** Ánh xạ

$$\begin{aligned} Q: \quad & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, x_3) \mapsto Q(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2x_1 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 5x_3x_1 + 4x_3^2 - 3x_2x_3 + x_3x_2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 7x_1x_3 - 2x_2x_3. \end{aligned}$$

là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$. Biểu thức tọa độ của dạng toàn phương đó là

$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 7x_1x_3 - 2x_2x_3$ là

**Ví dụ 5.13.** Biểu thức $Q(u) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2$ là biểu thức tọa độ của một dạng toàn phương $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

### 5.2.2 Ma trận của dạng toàn phương trong một cơ sở

**Định nghĩa 5.11.** Giả sử dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$ có biểu thức tọa độ là: $Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$; với $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ .

Khi đó ma trận của dạng toàn phương $Q$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ là ma trận vuông cấp $n$ như sau:

$$A = \left[a'_{ij}\right]_{n\times n},\ a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & ,\ i = j \\ a'_{ji} & ,\ i \neq j \end{cases}\ ;\ a'_{ij} + a'_{ji} = a_{ij};\ \forall i \neq j = 1, 2, ...n.$$

Ký hiệu $A = \left[a'_{ij}\right]_{n\times n} = [Q]_{\mathscr{B}}$ là ma trận của $Q$ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

**Chú ý:**

- Như vậy ma trận của dạng toàn phương trong một cơ sở cho trước là ma trận đối xứng $A = A^t$ .
- Tương tự phép biến đổi tuyến tính, trong hai cơ sở khác nhau ma trận của một dạng toàn phương trong hai cơ sở khác nhau là hai ma trận khác nhau.

**Định lý 5.10.** Giả sử $A = [Q]_{\mathscr{B}}$ ; $A' = [Q]_{\mathscr{B}'}$ lần lượt là hai ma trận của $Q$ trong hai cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ và $\mathscr{B}' = \{e'_1, ..., e'_n\}$. Gọi $T = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$. Khi đó

$$A' = T^t A T\ . \tag{5.18}$$

**Ví dụ 5.14.** Dạng toàn phương $Q$ trong Ví dụ 5.12. có ma trận của $Q$ trong cơ sở chính tắc

là $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

**Ví dụ 5.15.** Cho dạng toàn phương $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$Q(v) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3\ .$$

Ma trận của $Q$ trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Trong cơ sở gồm các véc tơ $\{\, e'_1 = (1,0,0), e'_2 = (-3,1,1),\ e'_3 = (-1,1,-1) \,\}$, với

$$\forall v \in \mathbb{R}^3:\ v = (x_1, x_2, x_3) = z_1e'_1 + z_2e'_2 + z_3e'_3\ \text{ thì }\ Q(v) = z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3^2\ .$$

ma trận của $Q$ trong cơ sở mới là $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Bạn đọc tự kiểm tra công thức $A' = T^t AT$ .

### 5.2.3 Đưa biểu thức tọa độ của một dạng toàn phương về dạng chính tắc

#### a. Khái niệm

**Định nghĩa 5.12.** Trong không gian véc tơ thực $V$ cho cơ sở $\mathscr{B} = \left\{ e_1,...,e_n \right\}$,

$u \in V: \ u = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ . Một dạng toàn phương $Q$ có biểu thức:

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x^2{}_i + \sum_{1<i,j}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Nếu tìm được một cơ sở $\mathscr{B}' = \{ e'_1,...,e'_n \}$ của $V$ để trong cơ sở này biểu thức của dạng toàn phương có dạng

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y^2{}_i \ ; \quad u = y_1e'_1 + ... + y_ne'_n \tag{5.19}$$

thì ta nói (5.18) là biểu thức chính tắc của dạng toàn phương $Q$, và ta đã đưa dạng toàn phương $Q$ về dạng chính tắc. Cơ sở $\mathscr{B}' = \left\{ e'_1,...,e'_n \right\}$ gọi là cơ sở chính tắc tương ứng của dạng toàn phương. Trong cơ sở chính tắc tương ứng, ma trận của dạng toàn phương có dạng đường chéo

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & & \ddots & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Trong các mục tiếp theo chúng ta chỉ nghiên cứu một trong số các phương pháp tìm cơ sở để biểu thức tọa độ của dạng toàn phương trong cơ sở này có dạng chính tắc hay ma trận của dạng toàn phương trong cơ sở này có dạng chéo. Bằng một số phép biến đổi sơ cấp biểu thức toạ độ của dạng toàn phương ta sẽ nhận được biểu thức toạ độ có dạng chính tắc.

#### b. Đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Lagrange

**Định lý 5.11.** Trong không gian véc tơ $V$ luôn tồn tại một cơ sở để biểu thức tọa độ của dạng toàn phương trong cơ sở này có dạng chính tắc.

**Chứng minh** (đây chính là phương pháp Lagrange)

Giả sử trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$ của không gian véc tơ $V$ biểu thức tọa độ của dạng toàn phương $Q$ có dạng:

$$Q(v)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ ,\ a_{ij}=a_{ji}\ ,\ v=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\ .$$

Trường hợp 1: Giả sử có $a_{ii}\neq 0$, chẳng hạn $a_{11}\neq 0$, ta có thể sắp xếp lại:

$$Q(v)=a_{11}\left(x_1{}^2+2x_1\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=a_{11}\left(x_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j-a_{11}\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}xi\right)^2 \qquad \textbf{(5.20)}$$

$$=a_{11}\left(x_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2+\sum_{i,j=2}^{n}a'_{ij}\,x_ix_j$$

Đặt $$\begin{cases} y_1=x_1+\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i \\ y_j=x_j;\ j=2,...,n \end{cases} \qquad \textbf{(5.21)}$$

thì $Q(v)=a_{11}y_1{}^2+\displaystyle\sum_{i,j=2}^{n}a'_{ij}\,y_iy_j$

Tiếp tục quá trình này với biểu thức tọa độ của một dạng toàn phương mới $\displaystyle\sum_{i,j=2}^{n}a'_{ij}\,y_iy_j$ .

Trường hợp 2: Nếu mọi $a_{ii}=0$ và tồn tại $a_{ij}\neq 0$, chẳng hạn $a_{12}\neq 0$ .

Đặt $$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_j=y_j\ \ ;\ j=3,...,n \end{cases} \qquad \textbf{(5.22)}$$

thì $Q(v)=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{n}a'_{ij}\,y_iy_j$

Như vậy tọa độ của véc tơ $u\in V$ trong cơ sở ban đầu là $(x_1,x_2,..,x_n)$ còn trong cơ sở mới là $(y_1,y_2,..,y_n)$, dễ thấy $x_i$ biểu diễn tuyến tính qua $(y_1,y_2,..,y_n)$ và ngược lại.

Khi đó $Q(u)=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{n}a'_{ij}\,y_iy_j$ có $a'_{11}=a_{12}\neq 0$,

Vì vậy ta có thể đưa về trường hợp 1.

Tiếp tục quá trình trên, giả sử cuối cùng ta nhận được công thức ứng với phép biến đổi tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 = t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + ... + t_{1n}y_n \\ x_2 = t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + ... + t_{1n}y_n \\ \\ ......................................... \\ x_n = t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + ... + t_{1n}y_n \end{cases} \quad \textbf{(5.23)}$$

hay $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ và $Q(v) = \lambda_1 z_1{}^2 + \lambda_2 z_2{}^2 + ... + \lambda_n z_n{}^2$.

Ma trận $T = \left[ t_{ij} \right]_{n\times n}$ chính là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở ban đầu $\mathscr{B} = \{ e_1, ..., e_n \}$ sang cơ sở mới $\mathscr{B}' = \{ e'_1, ..., e'_n \}$

Xét hệ véc tơ có tọa độ là các cột của ma trận trên:

$$e'_1 = (t_{11}, ..., t_{n1}),\ \ldots,\ e'_n = (t_{1n}, ..., t_{nn})$$

Khi đó với mọi véc tơ $v \in V$: $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = z_1 e'_1 + \cdots + z_n e'_n$ và

$$Q(v) = \lambda_1 z_1{}^2 + \lambda_2 z_2{}^2 + ... + \lambda_n z_n{}^2.$$

Nói cách khác ta đã chỉ ra cơ sở $\{ e'_1, ..., e'_n \}$ là một cơ sở mới mà trong cơ sở $\{ e'_1, ..., e'_n \}$ thì biểu thức tọa độ của $Q$ trong cơ sở này có dạng chính tắc.

**Ví dụ 5.16.** Xét dạng toàn phương ở Ví dụ 5.15.

$$Q(v) = x_1{}^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2x_2x_3.$$

Đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.

**Giải:**

$$\begin{aligned} Q(v) &= x_1{}^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + 4x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 + 4x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3. \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

Tiếp tục đặt $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_2 - z_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ thì $Q(v) = z_1{}^2 - 2z_2{}^2 + 2z_3{}^2$

Ta có $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$.

Suy ra ma trận $T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở mới.

Do đó cơ sở mới là $\{ e'_1 = (1,0,0), e'_2 = (-3,1,1), e'_3 = (-1,1,-1) \}$;

Trong cơ sở $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$, ta có

$\forall v \in \mathbb{R}^3 : \ v = (x_1, x_2, x_3) = z_1 e'_1 + z_2 e'_2 + z_3 e'_3$ thì $Q(v) = z_1{}^2 - 2z_2{}^2 + 2z_3{}^2$.

Và trong cơ sở $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ ma trận của $Q$ có dạng chéo $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

**Nhận xét 5.2.**

- Nếu dùng cách biến đổi khác ta sẽ nhận được biểu thức toạ độ dạng chính tắc khác và tất nhiên là trong một cơ sở khác.
- Các ví dụ cho thấy rằng cùng một dạng toàn phương ta có thể đưa về các dạng chính tắc với các hệ số khác nhau. Tuy nhiên số các hệ số dương và hệ số âm là như nhau.

### 5.2.4 Luật quán tính

**Định lý 5.12.** (Sylvester - Jacobi): Số các hệ số dương và số các hệ số âm trong biểu thức tọa độ dạng chính tắc của một dạng toàn phương $Q$ là những bất biến của dạng đó (tức là không phụ thuộc vào việc lựa chọn cơ sở).

**Định nghĩa 5.13.** Số các hệ số dương được gọi là chỉ số quán tính dương và số các hệ số âm được gọi là chỉ số quán tính âm của dạng toàn phương.

Giả sử $(p,q)$ là cặp chỉ số quán tính dương và âm của dạng toàn phương $Q$ trong không gian $n$ chiều $V$ khi đó $p+q=r$ (hạng của $Q$).

- Trường hợp $r = n$: $Q$ được gọi là không suy biến;
- Trường hợp $p = n$: $Q$ được gọi là xác định dương;
- Trường hợp $q = n$: $Q$ được gọi là xác định âm.

**Định lý 5.13.** (Sylvester): Giả sử dạng toàn phương $Q$ có ma trận là $A$ trong một cơ sở nào đó của $V$. Khi đó:

(i) $Q$ xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính góc trái của $A$ luôn dương.

(ii) $Q$ xác định âm khi và chỉ khi các định thức con góc trái cấp chẵn là dương và cấp lẻ là âm.

**Ví dụ 5.17.** Xét ma trận trong cơ sở chính tắc của một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Có các định thức con chính là

$$\Delta_1 = a_{11} = 1;\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1;\ \ \Delta_3 = \det A = 1.$$

**Ví dụ 5.18.** Áp dụng Định lý 5.11 và 5.12 ta kiểm tra được dạng toàn phương trong Ví dụ 5.17. là dạng toàn phương xác định dương.

**Ví dụ 5.19.** Xét dạng toàn phương có ma trận trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \end{bmatrix}$.

Có $\Delta_1 = a_{11} = -1;\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 4;\ \ \Delta_3 = \det A = -20$;

Áp dụng Định lý 5.13 ta kiểm tra được đây là một dạng toàn phương xác định âm.

Bằng phương pháp Lagrange ta cũng nhận được kết quả tương tự. Thật vậy, biểu thức toạ độ của dạng toàn phương là

$$\begin{aligned} Q(v) &= -x_1^2 - 5x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= -\left(x_1 - x_2 - x_3\right)^2 - 4\left(x_2 - \frac{x_3}{2}\right)^2 - 5x_3^2 \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \dfrac{x_3}{2} \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ thì $Q(v) = -y_1^2 - 4y_2^2 - 5y_3^2 < 0,\ \forall v \neq \theta$.

Áp dụng Định lý 5.12 ta kiểm tra được đây là một dạng toàn phương xác định âm.

Ngoài ra, còn một số phương pháp nữa như phương pháp chéo hoá trực giao, phương pháp Jacobi cũng đưa được dạng toàn phương về chính tắc. Tài liệu này không đưa ra phương pháp chéo hoá trực giao, phương pháp Jacobi.

**Ví dụ 5.20.** Dạng toàn phương ở Ví dụ 5.15. không phải là dạng toàn phương xác định dương, cũng không phải là dạng toàn phương xác định âm.

## BÀI TẬP CHƯƠNG 5

**5.1)** Ánh xạ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính:

a) $f(x,y)=(2x,x+y)$; b) $f(x,y)=(x^2,y)$;

c) $f(x,y)=(y,x)$; d) $f(x,y)=(x,y+1)$;

e) $f(x,y)=(ax+by,cx+dy)$; f) $f(x,y)=(\sqrt[3]{x},\sqrt[3]{y})$.

**5.2)** Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định như sau:

$$f(1,0,0)=(1,1),\ f(0,1,0)=(3,0),\ f(0,0,1)=(4,-7).$$

a) Tìm ma trận chính tắc của $f$.

b) Tính $f(1,3,8)$, $f(x,y,z)$.

**5.3)** Định nghĩa: Nhân của ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$ là tập

$$f^{-1}(\theta)=\left\{v\in V \,\middle|\, f(v)=\theta\right\}$$, ký hiệu là $Kerf$.

Cho phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ có ma trận chính tắc $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -8 & 4\end{bmatrix}$.

a) Vectơ nào sau đây thuộc $Kerf$: $(5,10);(3,2);(1,1)$.

b) Vectơ nào sau đây thuộc $\operatorname{Im} f$: $(1,-4);(5,0);(-3,12)$.

**5.4)** Cho phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh

$$f(x,y,z)=(-x+y-z,x+2y-z,x+5y-3z).$$

a) Tìm ma trận của $f$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) $f$ có là một đơn ánh không? Vì sao?

c) $f$ có là một toàn ánh không? Vì sao?

**5.5)** Viết ma trận chính tắc, tìm $\operatorname{Im} f$, tìm $Kerf$ của các phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$ sau đây, ánh xạ nào có ánh xạ ngược? Vì sao?

a) $f(x,y,z)=(x-y+3z,5x+6y-4z,7x+4y+2z)$

b) $f(x,y,z)=(2x-z,-x+2z,x+2y)$

c) $f(x,y,z)=(2x+2y-8z,x+6y+z,3x+6y-9z)$

d) $f(x,y,z,t)=(x+4y+5z+9t,3x-2y+z-t,3y+5z+8t,4x+2y+6z+8t)$.

e) $f(x,y,z,t)=(x+y-52z+t,3x-2y+z-t,y+z+t,4x+2y+6z-t)$.

g) $f(x,y,z,t)=(x+2y-z+t,x-2y+z-t,3y+z+2t,x+2y+t)$.

**5.6)** Cho phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ma trận chính tắc là $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Hãy tìm ma trận của $f$ trong cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$; Với $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,1,0)$, $v_3=(1,0,0)$.

**5.7)** a) Chứng tỏ $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(2,5,3)$, $v_3=(1,0,10)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm công thức xác định ảnh $f(x,y,z)$ của ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ biết rằng

$f(v_1)=(1,0,0),\ f(v_2)=(0,1,0), f(v_3)=(0,0,1)$.

**5.8)** Trên $\mathbb{R}^3$, cho các phép biến đổi tuyến tính $f$ sau đây được viết dưới dạng biểu thức toạ độ, hãy viết chúng dưới dạng ma trận

a) $f(x,y,z)=(x-y, 2x+3y+2z, x+y+2z)$.

b) $f(x,y,z)=(3x+y+z, 2x+4y+2z, x+y+3z)$.

c) $f(x,y,z)=(x,2y,3z)$.

**5.9)** Trên $\mathbb{R}^3$ cho các phép biến đổi tuyến tính $f,g$ được viết dưới dạng biểu thức toạ độ

$f(x,y,z)=(3x+y+z, 2x+4y+2z, x+y+3z)$.

$g(x,y,z)=(x+2y+2z, x+2y-z, -x+y+4z)$.

Hãy xác định các ánh xạ $f+g$; $f\circ g$; $g\circ f$; $f^2$; $f^3$; $g^3$.

**5.10)** Cho phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ma trận chính tắc là

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Hãy xác định ma trận của các ánh xạ $f^2$; $f^3$.

**5.11)** Cho phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ma trận chính tắc là

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

a) Tìm các vectơ riêng và giá trị riêng của $f$.

b) Tìm ma trận của $f$ trong cơ sở gồm các vectơ riêng của $f$.

**5.12)** Cho phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh

$$f(x,y,z)=(-3x+y-z, -7x+5y-z, -6x+6y-2z).$$

a) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của $f$ trong cơ sở này có dạng chéo.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở tìm được sang cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

c) Có tồn tại ánh xạ ngược của $f$ không? Vì sao? Nếu có hãy xác định công thức $f^{-1}$.

**5.13)** Tìm các giá trị riêng, cơ sở của không gian riêng của các ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

**5.14)** Ma trận nào sau không chéo hoá được, vì sao ?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$.

**5.15)** Tìm ma trận $P$ làm chéo hoá $A$ và xác định $P^{-1}AP$.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; f ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

**5.16)** Trong mỗi trường hợp sau tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để phép biến đổi tuyến tính $f$ có ma trận dạng chéo:

a) $f(x,y,z) = (x - y, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z)$.

b) $f(x,y,z) = (3x + y + z, 2x + 4y + 2z, x + y + 3z)$.

c) $f(x,y,z) = (x + 2y + 2z, x + 2y - z, -x + y + 4z)$.

d) $f(x,y,z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$.

**5.17)** Trong $\mathbb{R}^3$, cho các dạng toàn phương sau đây được viết dưới dạng ma trận, hãy viết chúng dưới dạng biểu thức toạ độ

a) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

**c)** $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

**5.18)** Tìm biểu thức tọa độ của dạng toàn phương $Q$ trên $\mathbb{R}^3$ dưới đây sau khi thực hiện phép biến đổi tương ứng:

a) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - \dfrac{1}{2}y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = -y_2 + y_3 \end{cases}.$$

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_2 - x_3 \end{cases}.$$

**5.19)** Viết ma trận của dạng toàn phương $Q$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Đưa dạng toàn phương về chính tắc bằng phương pháp Lagrange. Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để biểu thức tọa độ của $Q$ trong cơ sở này có dạng chính tắc:

a) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

c) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

d) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$.

e) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$.

f) $Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$.

**5.20)** Tìm $\lambda$ để các dạng toàn phương sau xác định dương:

a) $Q(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

b) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$.

c) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

d) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$.

# HƯỚNG DẪN BÀI TẬP

## CHƯƠNG I

**1.1)** a) $B \subset A$; $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x^2 - 3x + 4 > 0 \right\} = (-\infty, +\infty)$.

$B = (-\infty, \sqrt{3} - 4)$.

b) $A = B = \mathbb{R}_+$ .

**1.2)** a) $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow \exists x \in A \setminus B \Leftrightarrow \exists x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow A \not\subset B$.

b) $x \in A \cup C \Rightarrow x \in A \vee x \in C \Rightarrow x \in B \vee x \in D \Rightarrow x \in B \cup D$

$x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \wedge x \in D \Rightarrow x \in B \cap D$

c) $x \in C$: $*$Nếu $x \in A$ thì $x \in A \bigcap C \Rightarrow x \in A \bigcap B \Rightarrow x \in B$

$*$Nếu $x \notin A$ vì $x \in A \bigcup C \Rightarrow x \in A \bigcup B \Rightarrow x \in B$ .

**1.3); 1. 4)** Sử dụng lôgic mệnh đề.

**1.5); 1.6)** Dùng định nghĩa hoặc khảo sát vẽ đồ thị hàm số

**1.7)** Chứng tỏ $f'(x) > 0$ , $\forall x \in \mathbb{R}$

**1.8)** a) $\forall (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ $pt$ $(X, Y, Z) = f(x, y, z)$ tương đương với hệ

$$\begin{cases} 2x + y - z = X \\ -x + 3y - 2z = Y \\ x + 4y + 2z = Z \end{cases}$$ có nghiệm duy nhất do đó $f$ là song ánh

b) Dùng định nghĩa và từ a)

$$\Rightarrow f^{-1}(x, y, z) = \left( \frac{2}{5}x - \frac{6}{35}y + \frac{1}{35}z, \frac{1}{7}y + \frac{1}{7}z, -\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z \right) .$$

c) Dùng định nghĩa ảnh của ánh xạ.

**1.10)** Cho ánh xạ $f : X \to Y$ cho $A, B \subset X$ và $C, D \subset Y$. Chứng minh rằng:

a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

Tìm ví dụ chứng tỏ $f(A) \subset f(B)$ nhưng $A \not\subset B$.

\+ Với $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A$ sao cho $y = f(x)$

$x \in A \Rightarrow x \in B$ $(do\ A \subset B) \Rightarrow y = f(x) \in f(B)$

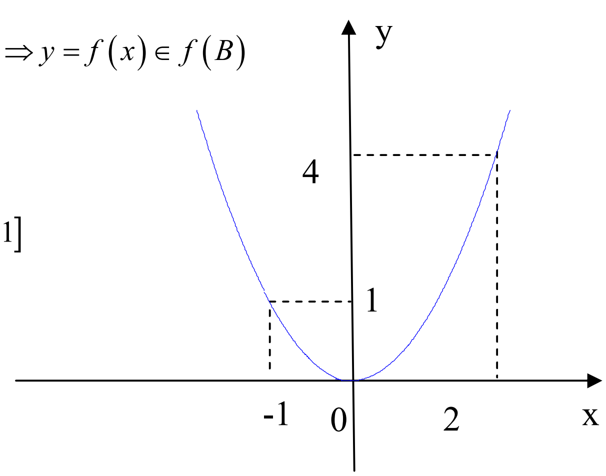
Suy ra $f(A) \subset f(B)$.

\+ Xét một ánh xạ khác đơn ánh $h(x) = x^2$

$A = [-1; 0]$ ; $f(A) = [0; 1]$

$B = [0; 2]$ ; $f(B) = [0; 4]$

$\Rightarrow f(A) \subset f(B)$; $A \not\subset B$.



+ Nếu $f$ đơn ánh thì

g) $f(A)\subset f(B)\Rightarrow A\subset B$.

Lấy bất kỳ $x\in A\Rightarrow f\left(x\right)\in f\left(A\right)\Rightarrow f\left(x\right)\in f\left(B\right)$ do $f\left(A\right)\subset f\left(B\right)$

Với $f\left(x\right)\in f\left(B\right)$ thì $\exists x\in B$ sao cho $f\left(x\right)\in f\left(B\right)$

Với giả thiết $f$ đơn ánh nên $\exists! x\in B$ sao cho $f\left(x\right)\in f\left(B\right)$.

Đó chính là phần tử $x\in A\Rightarrow f\left(x\right)\in f\left(A\right)\Rightarrow f\left(x\right)\in f\left(B\right)$

Nghĩa là $x\in A\Rightarrow x\in B$ hay $f(A)\subset f(B)\Rightarrow A\subset B$.

1.11) Ký hiệu $h=g\circ f$ là hợp của hai ánh xạ $f:X\to Y,\ g:Y\to Z$.

Chứng minh:

a) $f,g$ đơn ánh thì $h$ đơn ánh. HD: C/m trực tiếp bằng định nghĩa:

cách 1)

vì $f$ đơn ánh : $\forall x_1,x_2\in X;\ x_1\neq x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)$

vì $g$ đơn ánh : $f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)\Rightarrow g\left(f\left(x_1\right)\right)\neq g\left(f\left(x_2\right)\right)$

Do đó $\forall x_1,x_2\in X;\ x_1\neq x_2\Rightarrow h\left(x_1\right)=g\left(f\left(x_1\right)\right)\neq g\left(f\left(x_2\right)\right)=h\left(x_2\right)$ nghĩa là $h$ đơn ánh.

Cách 2)

$\forall x_1,x_2\in X;$ giả sử $h\left(x_1\right)=h\left(x_2\right)$

$\Rightarrow g\left(f\left(x_1\right)\right)=g\left(f\left(x_2\right)\right)$ đ/n ánh xạ hợp

$\Rightarrow f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$ do $g$ đơn ánh

$\Rightarrow\quad x_1=x_2$ do $f$ đơn ánh.

$\forall x_1,x_2\in X;\quad h\left(x_1\right)=h\left(x_2\right)\ \Rightarrow x_1=x_2$ nghĩa là $h$ đơn ánh

b) $f,g$ toàn ánh thì $h$ toàn ánh. HD: C/m trực tiếp bằng định nghĩa:

Vì $g$ toàn ánh: $\forall z\in Z;\ \exists y\in Y$ sao cho : $g\left(y\right)=z$.

do $f$ toàn ánh $\forall y\in Y;\ \exists x\in X$ sao cho : $f\left(x\right)=y$.

Suy ra $\forall z\in Z;\ \exists x\in X$ sao cho : $z=g\left(f\left(x\right)\right)=g\circ f\left(x\right)=h\left(x\right)$.

Vậy $g\circ f=h$ là toàn ánh.

c) $h$ toàn ánh thì $g$ toàn ánh. C/m trực tiếp bằng định nghĩa, hoặc C/m phản chứng

d) $h$ đơn ánh thì $f$ đơn ánh. C/m trực tiếp bằng định nghĩa, hoặc C/m phản chứng

e) $h$ đơn ánh và $f$ toàn ánh thì $g$ đơn ánh. HD: C/m phản chứng:

f) $h$ toàn ánh và $g$ đơn ánh thì $f$ toàn ánh. HD: HD: C/m phản chứng:

# HƯỚNG DẪN BÀI TẬP

**1.12)** $\sigma \circ \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mu \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mu^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

.

## CHƯƠNG II

**2.2)** a, b, c) Không phải là không gian vectơ ;

**2.3)** a) Tiên đề 5; b) Tiên đề 7,8 ; c) Tiên đề 5,8 .

**2.4)** a, b, c, d) là không gian vectơ ;

e, f) không phải là không gian vectơ.

**2.5)** a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 7 \\ 3\alpha + 7\beta - 6\gamma = -2 \\ 5\alpha + 8\beta + \gamma = 15 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \alpha = 11; \beta = -5; \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 11u_1 + (-5)u_2 + 0u_3$ ;

b) Phương pháp tương tự $v = \left(-\frac{23}{96}\right)u_1 + \frac{85}{96}u_2 + \left(-\frac{1}{96}\right)u_3$ ; .

**2.6)** a) Bài toán tương đương với việc tìm giá trị của λ để hệ phương trình

sau có nghiệm $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 7 \\ 3\alpha + 7\beta - 6\gamma = -2 \\ 5\alpha + 8\beta + \gamma = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 15.$

b) $\lambda \neq 12$ .

**2.7)** a) Hệ phương trình $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$ có nghiệm $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$\Rightarrow (v_1, v_2, v_3)$ độc lập tuyến tính nên là cơ sở của $\mathbb{R}^3$; $x = v_1 + 2v_2 + 3v_3$.

b) $x = v_1 + v_2 + v_3$.

**2.8)** Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp và áp dụng tính chất của hạng hệ véc tơ suy ra:

a) là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$;

b) không phải là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Hoặc hệ phương trình $\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = a \\ \alpha + 2\beta \qquad = b \\ 3\alpha \qquad\quad = c \end{cases}$

luôn có nghiệm với mọi $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ còn hệ phương trình tương ứng với trường hợp b) không phải luôn có nghiệm với mọi $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

**2.9)** a) Hai vectơ $u, v$ tỉ lệ với nhau nên phụ thuộc tuyến tính;

Bằng hai phương pháp như bài 2.9) suy ra:

b) độc lập tuyến tính;

c) d) phụ thuộc tuyến tính.

**2.10)** a) $(a,b,c,0) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0)$;

b) $(a,b,a-b,a+b) = a(1,0,1,1) + b(0,1,-1,1)$;

c) $(a,a,a,a) = a(1,1,1,1)$.

**2.11)** a) Hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính nên là cơ sở của $\mathbb{R}^3$;

b) Hệ $\{v_1, v_3, v_5\}$ là cơ sở; $v_2 = v_1 + v_3$, $v_4 = v_3 + v_5$;

**2.12)** $f' - 5f = 0 \Rightarrow \dfrac{f'}{f} = 5 \Rightarrow \ln\dfrac{f}{C} = 5x \Rightarrow f(x) = Ce^{5x}$, $C \in \mathbb{R}$

**2.13)** a) $\alpha(v_1 + v_2) + \beta(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow (\alpha + \beta)v_1 + (\alpha - \beta)v_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

b) $\alpha(v_1 + v_2) + \beta(v_2 + v_3) + \gamma(v_1 + v_3) = 0$

$\Rightarrow (\alpha + \gamma)v_1 + (\alpha + \beta)v_2 + (\beta + \gamma)v_3 = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

**2.14)** Áp dụnh Tính chất của hạng hệ véc tơ.

**2.15)** $V = \{(-y-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ có một cơ sở là $\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$;

$W = \{(y+z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ có một cơ sở là $\{(1,1,0), (1,0,1)\}$;

$V \cap W = \{(0, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ có một cơ sở là hệ một vectơ $(0,1,-1)$.

## CHƯƠNG III

**3.1)** a) $(A+B)+C = A+(B+C) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

d) $A^t B = \begin{bmatrix} -9 & 8 \\ -2 & 19 \end{bmatrix}$ e) $BC^t = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 10 \\ -13 & 4 & -11 \end{bmatrix}$

## HƯỚNG DẪN BÀI TẬP

**3.3)** A, B, C là 3 véc tơ độc lập tuyến tính trong không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ .

**3.5)** a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Theo a) $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)^5\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 3^5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 15\cdot 3^5-14\cdot 2^6 & 6(2^5-3^5) \\ 35\cdot(3^5-2^5) & 15\cdot 2^5-14\cdot 3^5 \end{bmatrix}$

Cách khác:

$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 211 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 633 \\ 0 & 1477 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{bmatrix}.$

**3.8)** b) $\mathrm{Tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}\right)=\mathrm{Tr}(BA)$.

c) $\mathrm{Tr}B=\mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right)=\mathrm{Tr}\left((P^{-1}A)P\right)=\mathrm{Tr}\left(P(P^{-1}A)\right)$

$=\mathrm{Tr}\left((PP^{-1})A\right)=\mathrm{Tr}A$.

d) Không tồn tại $A, B$ vì $\mathrm{Tr}(AB-BA)=0$ nhưng $\mathrm{Tr}I=n\neq 0$.

**3.11)** a) -3 b) -9 c) -10 d) 100.

**3.15)** <u>Cách 1</u>: Khai triển theo hàng thứ nhất ta được đa thức bậc 3:

$-2x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ có các nghiệm $x_1=2, x_2=3, x_3=4$.

<u>Cách 2</u>: Định thức trong bài có dạng định thức Vandermond bằng:

$(2-x)(3-x)(4-x)2$

**3.16)** $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 9 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 9 & 299 \\ 9 & 6 & 966 \\ 1 & 6 & 161 \end{vmatrix}=23\begin{vmatrix} 2 & 9 & k_1 \\ 9 & 6 & k_2 \\ 1 & 6 & k_3 \end{vmatrix}=23k$

# HƯỚNG DẪN BÀI TẬP

**3.17)** c) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc + a(a+b+c) - (ab+bc+ca) \\ 1 & b & ca + b(a+b+c) - (ab+bc+ca) \\ 1 & c & ab + c(a+b+c) - (ab+bc+ca) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 + a(ab+bc+ca) - abc \\ 1 & b & b^3 + b(ab+bc+ca) - abc \\ 1 & c & c^3 + c(ab+bc+ca) - abc \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

**3.18)** Nhân $-x_1$ với hàng j-1 và cộng vào hàng j với j = 2, 3, ..., n suy ra:

$$D_n = (x_2 - x_1)...(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_2 & x_3 & ... & x_n \\ ... & ... & ... & ... \\ x_2^{\,n-2} & x_3^{\,n-2} & ... & x_n^{\,n-2} \end{vmatrix}$$

Tiếp tục quá trình này với $-x_2, -x_3, ..., -x_{n-1}$ ta được

$$D_n = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{k=i+1}^{n}(x_k - x_i)\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k-1}(x_k - x_i)\right).$$

**3.19)** e) $r(C) = \begin{cases} 3 & \text{nếu } m \neq 0 \\ 2 & \text{nếu } m = 0 \end{cases}.$

g) $r(D) = \begin{cases} 3 & \text{nếu } m = 1 \\ 4 & \text{nếu } m \neq 1 \end{cases}.$

**3.20)** a) $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ; b) $B^{-1} = \dfrac{1}{14}\begin{bmatrix} -2 & -8 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$;

c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -5 \\ 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ; d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 7 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

**3.21)** $\det A = (m-4)(m-3)(m+2)$, A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 3 \\ m \neq 4 \end{cases}$

**3.22)** Nghiệm $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

**3.23)** Quy nạp theo $n$.

# HƯỚNG DẪN BÀI TẬP

**3.24)** a) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1{}^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k{}^n \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$;

c) Đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ thì $A = -I + B$, $B^2 = -B$

Áp dụng câu 3.24) suy ra $A^5 = -I + 31B = \begin{bmatrix} 61 & -62 \\ 93 & -94 \end{bmatrix}$.

## CHƯƠNG IV

**4.1)** a) Vô nghiệm vì $2 = r(A) < r(\overline{A}) = 3$ **;**

b) Có nghiệm **vì** $r(A) = r(\overline{A}) = 4$**.**

**4.2)** a) $(1,1,-1,-1)$ .

b) $(-2,0,1,-1)$.

**4.6)** a) Khi $m = 0$ hệ vô nghiệm; $m \neq 0$ hệ có nghiệm:

$$\left( x_1 = \frac{4-m}{5m} - \frac{3}{5}x_3 \ , \ x_2 = \frac{9m-16}{5m} - \frac{8}{5}x_3 \ , \ x_4 = \frac{1}{m} \right).$$

b) Khi $m(m+3) \neq 0$ hệ có nghiệm duy nhất:

$$\left( x_1 = \frac{2-m^2}{m(m+3)} \ , \ x_2 = \frac{2m-1}{m(m+3)} \ , \ x_3 = \frac{m^3+2m^2-m-1}{m(m+3)} \right).$$

Khi $m = 0$ và $m = -3$ hệ vô nghiệm.

**4.7)** HD a, b, c): - Tính định thức của ma trận hệ số.

- Hoặc xét hạng của ma trận hệ số, ma trận bổ sung theo $m$ .
- i, ii) Áp dụng định lý về sự tồn tại nghiệm, iii) định lý Cramer.

d) i) $m = 4$; ii) $m \neq 4$; iii) không sảy ra .

**4.8)** Áp dụng định lý về sự tồn tại nghiệm

a) $3a - 2b - c = 0$**.**

b, c, d) $\forall a,b,c$**.**

**4.9)** $\alpha_4 = 3\alpha_1 - 5\alpha_3$;

**4.10)** Không vì $\dim Span(S) = 3$.

## HƯỚNG DẪN BÀI TẬP

**4.11)** $U = span\{(1,0,0,0);(0,-1,1,0);(0,-1,0,1)\} \Rightarrow \dim U = 3$.

$W = span\{(1,-1,0,0);(0,0,2,1)\} \Rightarrow \dim W = 2$.

$U \cap W = span\{(3,-3,2,1)\} \Rightarrow \dim(U \cap W) = 1$.

**4.15) HD**: trước hết tìm hạng của ma trận hệ số. Suy ra số chiều không gian nghiệm. Kiểm tra hệ véc tơ nào là hệ nghiệm và ĐLTT. b) là hệ nghiệm cơ bản.

**4.16) a)** Hệ nghiệm cơ bản $\{(1,-5,0,0,3);(0,1,0,1,0);(0,1,1,0,0)\}$;

Nghiệm tổng quát của hệ **a)** $(1+\alpha;1-5\alpha+\beta+\gamma;\gamma;\beta;3\alpha)$; $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$

**b)** Hệ nghiệm cơ bản $\{(2,5,0,0,6);(1,-1,0,2,0);(0,1,2,0,0)\}$;

Nghiệm tổng quát của hệ **b)**

$(1+2\alpha+\beta;5\alpha-\beta+\gamma;1+2\gamma;1+2\beta;-1+6\alpha)$; $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$.

**4.17*)** $\begin{vmatrix} a_{11}-1/2 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1/2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-1/2 \end{vmatrix} \neq 0$.

**4.18*)** Kết hợp kiến thức về ma trận, định thức, định lý về nghiệm của hệ phương trình để chứng minh được các kết quả sau

+ hệ đã cho có vô số nghiệm phụ thuộc vào một ẩn số.

+ hệ thuần nhất tương ứng có không gian nghiệm là một không gian một chiều và có

$(1,-2,3,-4,5,-6,7,-8,9,-10,11)$ là một nghiệm .

và từ và hệ quả định lý 4.6 thì hệ có nghiệm $\begin{cases} x_1 = 2003+t \\ x_2 = 2004-2t \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{11} = 2013+10t;\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$.

## CHƯƠNG V

**5.1)** a) c) e) là phép biến đổi tuyến tính..

**5.2)** a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$;

b) $f(x,y,z) = (x+3y+4z, x-7z)$.

**5.3)**

a) $(5,10) \in Kerf$ .

b) $(a,b) \in \operatorname{Im} f$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

## HƯỚNG DẪN BÀI TẬP

$\begin{cases} 2x - y = a \\ -8x + 4y = b \end{cases} \Leftrightarrow b = -4a$. Vậy $(1,4), (-3,12) \in \operatorname{Im} f$.

**5.5)** a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$;

$Kerf = \{t(-14,19,11) \mid t \in \mathbb{R}\}$,

$\operatorname{Im} f = \{a(1,0,2) + b(0,1,1) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$Kerf = \{t(0,1,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\operatorname{Im} f = \{a(1,0,0) + b(0,0,1) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & -9 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

$Kerf = \{z(5,-1,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$; $\operatorname{Im} f = \{b(-8,1,-9,0) + d(10,0,12,1) \mid b,d \in \mathbb{R}\}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$;

$Kerf = \{t(0,-1,-1,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

$\operatorname{Im} f = \{a(14,0,0,13) + b(0,14,0,5) + c(0,0,1,0) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

**5.6)** $A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

**5.7)**

a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính do đó là một cơ sở.

b) Giả sử $f : V \longrightarrow V$ có ma trận $A$; Áp dụng $f(u) = Au;\ \forall u \in V$. Từ đó suy ra kết quả hoặc chứng minh công thức $B = AT$, $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 30 & -17 & -5 \\ -20 & 7 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

**5.13)**

a) $P(\lambda) = |A - \lambda I|$; $P(\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2$; $\lambda = 0, v_1 = (1,-1,1); \lambda = 2, v_2 = (1,0,1)$.

b) cột1 - cột3 $\to$ cột1 $\Rightarrow P(\lambda) = (8-\lambda)(1+\lambda)^2$;

$\lambda = -1, v_1 = (1,-2,0), v_2 = (0,-2,1); \lambda = 8, v_3 = (2,1,2)$.

c) - cột2 + cột3 $\to$ cột3 $\Rightarrow P(\lambda) = -(3-\lambda)(2+\lambda)(1-\lambda)$;

$\lambda = -2, v_1 = (0,1,-1)$; $\lambda = 3, v_2 = (5,1,4); \lambda = 1, v_3 = (3,-1,2)$.

d) hàng1 - hàng2 + hàng3 $\to$ hàng1 $\Rightarrow P(\lambda) = (3-\lambda)(1+\lambda)^2$;

$\lambda = -1, v_1 = (1,2,1); \lambda = 3, v_2 = (1,2,2)$.

e) $P(\lambda) = (2-\lambda)^4$; $\lambda = 2; v_1 = (1,1,-1,0), v_2 = (0,0,1,1)$.

**5.14)**

a) $P(\lambda) = |A - \lambda I|$; $P(\lambda) = (2-\lambda)^3$; $V_2 = \{ x(1,2,0) \mid x \in \mathbb{R} \}$, $\dim V_2 = 1 < 3$.

b) $P(\lambda) = |A - \lambda I|$; 3cột1 + cột2 + cột3 $\to$ cột3 $\Rightarrow P(\lambda) = -(1+\lambda)^3$;

$V_{-1} = \{ y(-2,1,0) + z(5,0,1) \mid y, z \in \mathbb{R} \}$, $\dim V_{-1} = 2 < 3$.

c) cột1 + 2cột2 $\to$ cột1; -3cột3 + cột2 $\to$ cột2 $\Rightarrow P(\lambda) = -\lambda^3$;

$V_0 = \{ x(1,0,6) + y(0,1,-3) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$, $\dim V_0 = 2 < 3$.

d) cột1 + cột2 + cột3 $\to$ cột1 $\Rightarrow P(\lambda) = (1-\lambda)\lambda^2$;

$V_0 = \{ y(1,2,3) \mid y \in \mathbb{R} \}$, $\dim V_0 = 1 < 2$.

**5.15)**

a) $P(\lambda) = |A - \lambda I|$; h1 + h2 - h3 $\to$ h3 $\Rightarrow P(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$;

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) c1 + c2 + c3 $\to$ c3 $\Rightarrow P(\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2$;

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) h1 - h2 + h3 $\to$ h1 $\Rightarrow P(\lambda)=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$;

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&0&1\end{bmatrix},\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

d) h1 - h2 + h3 $\to$ h1 $\Rightarrow P(\lambda)=(4-\lambda)(2+\lambda)^2$;

$$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\2&0&1\end{bmatrix},\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

e) c1 + c2 + c3 $\to$ c1 $\Rightarrow P(\lambda)=(1-\lambda)(2-\lambda)^2$;

$$P=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&0&1\\1&3&-3\end{bmatrix},\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

**5.16)** Dùng thuật toán Lagrange.

**5.18)** Biểu thức toạ độ của dạng toàn phương tương ứng

a) $Q(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-7y_2^2+y_3^2$.

b) $Q(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+4y_2^2-5y_3^2$.

**5.19)** Áp dụng phương pháp biến đổi Lagrange ta được:

a) $$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&5/2\\0&1&-1/2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix};$$

.

b) $$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2&0&1\\0&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix};$$

c) $$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix};$$

$$Q(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2-y_3^2.$$

d) $$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1/3&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&-1/2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix};$$

$$Q(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + \frac{37}{6}y_2^2 - y_3^2 - 2y_4^2.$$

e) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ ;

$$Q(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + \frac{21}{8}y_2^2 - 2y_3^2.$$

f) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9/10 & 1 & -1/3 \\ 1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ ;

$$Q(y_1, y_2, y_3) = \frac{49}{10}y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{5}{2}y_3^2.$$

**5.20)** a) $\lambda > 2$ ; b) $|\lambda| < \sqrt{5/3}$ ; c) $-4/5 < \lambda < 0$ ; d) $|\lambda| < 2$.

# TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Bá Long. Đại số. Học viện Công nghệ BCVT. 2010.

- Học liệu tham khảo

[2] Trần Văn Minh (Chủ biên). Đại số tuyến tính. NXB Giao thông vận tải 2000.

[3] Lê Đình Thuý. Toán cao cấp cho các nhà kinh tế.( Phần 1: Đại số tuyến tính).

[4] Nguyễn Duy Thuận (Chủ biên). Đại số tuyến tính. NXB Đại học Sư phạm 2004.

[5] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên). Toán cao cấp tập 1. NXB Giáo dục 2008.

[6] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên). Bài tập toán cao cấp tập 1. NXB Giáo dục 2008.

- Học liệu bổ trợ

[1] Bellman R.; Mở đầu lý thuyết ma trận. Bản dịch tiếng Việt: Nguyễn Văn Huệ, Hoàng Kiếm, NXB KH&KT Hà Nội 1978.

[2] Lipshutz S. ; Linear Algebra, Mc Graw-Hill, 1987.

[3] Lipshutz S. ; Theory and problems of Linear Algebra, Schaum's Outline Series Mc Graw-Hill, 1968.

[4] Proskuryakov I. U.; Problems in Linear Algebra, Mir Pub. Moscow 1978.