Chương 1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1.1. Mở đầu

1.1.1.Khái niệm về toán kinh tế :

- ***Toán kinh tế*** hay còn gọi là *Kinh tế toán học* là một phân ngành của *Kinh tế học* nghiên cứu việc áp dụng toán học và phát triển các kỹ thuật toán học để giải quyết các vấn đề *Kinh tế học.*

- ***Quy hoạch tuyến tính*** (linear programming _ LP) là bài toán *tối ưu hoá*, trong đó *hàm mục tiêu* (objective function) và các *ràng buộc* đều là *hàm tuyến tính.*

1.1.2. Bài toán quy hoạch tổng quát

Tìm véctơ $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ làm cực tiểu (hoặc cực đại) hàm số $f(X)$, với các điều kiện $g_i(X) \le 0, i=\overline{1,...,m}; x_j \ge 0, j = \overline{1,k}, k \le n.$

$$min\ f(X)(\ max\, f(X)) \qquad (1.1)$$

với điều kiện
$$\begin{cases} g_i(X) \le 0, i = \overline{1,m}; & (1.2) \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,k}, k \le n; & (1.3) \end{cases}$$

- Hàm $f(X)$ gọi là ***hàm mục tiêu***, các điều kiện (1.1), (1.2), (1.3) gọi là các ***điều kiện buộc*** của bài toán.

- Mỗi véctơ X =(x_j) $\in R^n$ thỏa mãn hệ điều kiện buộc gọi là một phương án.
Ta kí hiệu tập phương án là ***M***.

- Một phương án làm cực tiểu(hoặc cực đại) hàm mục tiêu gọi là ***phương án tối ưu****(hoặc gọi là* ***nghiệm****)*của bài toán.

- Khi $f(X)$ và $g_i(X)$(i=1,...,n) là các hàm tuyến tính, $M \subset R^n$ thì bài toán đã cho được gọi là ***Bài toán quy hoạch tuyến tính*** (btqhtt).

1.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính

1.2.1.Một số mô hình thực tế

A. Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Một cơ sở có thể sản xuất hai loại sản phẩm A và B, từ các nguyên liệu I, II, III. Chi phí từng loại nguyên liệu và tiền lãi của một đơn vị sản phẩm, cũng như dự trữ nguyên liệu cho trong bảng sau đây:

Nguyên liệu / Sản phẩm	I	II	III	Lãi
A	2	0	1	3
B	1	1	0	5
Dự trữ	8	4	3	

Hãy lập bài toán thể hiện kế hoạch sản xuất sao cho có tổng số lãi lớn nhất, trên cơ sở dự trữ nguyên liệu đã có.

Lập bài toán:

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm A và B được sản xuất ($x, y \geq 0$, đơn vị sản phẩm). Khi đó ta cần tìm $x, y \geq 0$ sao cho đạt lãi lớn nhất.

$$f(X) = 3x + 5y \to \max$$

với điều kiện nguyên liệu:

$$2x + y \leq 8;$$
$$1.y \leq 4;$$
$$1.x \leq 3;$$

Tức là cần giải bài toán:

$$f(X) = 3x + 5y \to \max$$

$$\text{với điều kiện:} \begin{cases} 2x + y = 8; \\ y \leq 4; \\ x \leq 3; \\ x, y \geq 0; \end{cases}$$

B. Bài toán phân công lao động:

Một lớp học cần tổ chức lao động với hai loại công việc: xúc đất và chuyển đất. Lao động của lớp được chia làm 3 loại A, B, C, với số lượng lần lượt là 10, 20, 12. Năng suất của từng loại lao động trên từng công việc cho trong bảng dưới đây:

Lao động / Công việc	A(10)	B(20)	C(12)
Xúc đất	6	5	4
Chuyển đất	4	3	2

Hãy tổ chức lao động sao cho có tổng năng suất lớn nhất.

Lập bài toán:

Gọi x_{ij} là số lao động loại j làm công việc i(j=1,2;$x_{ij} \geq 0$, nguyên). Khi đó, năng suất lao động của công việc đào đất sẽ là:

$$6x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13};$$

còn chuyển đất sẽ là : $4x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23};$

Ta thấy rằng để có năng suất lớn nhất thì không thể có lao động dư thừa, tức là phải cân bằng giữa hai công việc. Vì vậy ta có bài toán sau:

$$6x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} \rightarrow max;$$

với điều kiện $\begin{cases} 6x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} - 4x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23} = 0; \\ x_{11} + x_{21} = 10; \\ x_{12} + x_{22} = 20; \\ x_{13} + x_{23} = 12; \end{cases}$

C. Bài toán khẩu phần thức ăn:

Một khẩu phần thức ăn có khối lượng P, có thể cấu tạo từ *n* loại thức ăn. Gía mua một đơn vị thức ăn loại *j* là c_j. Để đảm bảo cơ thể phát triển bình thường thì khẩu phần cần *m* loại chất dinh dưỡng. Chất dinh dưỡng thứ *i* cần tối thiểu cho khẩu phần là b_i và có trong một đơn vị thức ăn loại *j* là a_{ij}.

Hỏi nên cấu tạo một khẩu phần thức ăn như thế nào để ăn đủ no, đủ chất dinh dưỡng mà có giá thành rẻ nhất.

Lập bài toán:

Gọi x_j ($x_j \geq 0$) là số đơn vị thức ăn loại *j* được cấu tạo trong khẩu phần. Khi đó, giá thành của khẩu phần là:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

Vì phải đảm bảo thoả mãn điều kiện đủ no và đủu chất, tức là:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = P, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_j, i = \overline{1, m}.$$

Ta có bài toán sau: $f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$

với điều kiện $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j = P; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, i = \overline{1,m}; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,n}; \end{cases}$$

Ta thấy rằng ba bài toán trên đều thuộc bài toán tổng quát.

1.2.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát

A. <u>Dạng hệ phương trình</u>

Để nhất quán trong lập luận, ta xét bài toán tìm cực tiểu, sau đó ta xét cách đưa bài toán tìm cực đại về bài toán tìm cực tiểu.

* Bài toán tổng quát của QHTT có dạng :

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (1.4)$$

với điều kiện $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1,\dots,k}; & (1.5) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, i = \overline{k+1,\dots,m}; & (1.6) \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,r}, r \leq n; & (1.7) \end{cases}$$

* Chuyển bài toán tìm cực đại về bài toán tìm cực tiểu :

Nếu gặp bài toán tìm max, tức là :

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$
$$X \in D$$

thì giữ nguyên ràng buộc, ta đưa nó về dạng bài toán tìm min :

$$g(X) = -f(X) = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$
$$X \in D$$

<u>Chứng minh :</u>

Nếu bài toán tìm min có phương án tối ưu là X^* thì bài toán tìm max cũng có phương án tối ưu là X^* và *g(X)= - f(X)*.

Thật vậy, X^* là phương án tối ưu của bài toán tìm min, tức là

$$f(X^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \forall X \in D$$

$$\Rightarrow -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \forall X \in D$$

hay $-f(X^*) = g(X^*) \geq g(X), \forall X \in D$

Vậy X^* là phương án tối ưu của bài toán max và

$$f_{\max} = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = -g_{\min} \qquad (1.8)$$

B. Dạng ma trận

Kí hiệu ma trận hàng $C = (c_1, c_2, ..., c_n)_{1\times n}$ và các ma trận :

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{n\times 1}^T$

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)_{m\times 1}^T$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$

Trong đó T kí hiệu cho phép chuyển vị ma trận

Ta có bài toán:

$$CX \rightarrow \min \qquad (1.9)$$

Với điều kiện $\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$ (1.10)

C. Dạng véc tơ

Kí hiệu các véc tơ:

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$A_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$

$A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ j = 1,2,...,n.

Ta có bài toán: min <CX> (1.11)

Với điều kiện $\begin{cases} x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_n A_n = A_0 \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{cases}$ (1.12)

1.2.3. Dạng chính tắc của bài toán quy hoạch tuyến tính

Người ta thường xét bài toán QHTT dưới dạng sau:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min \qquad (1.13)$$

với điều kiện $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, \ldots, m}; & (1.14) \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n}; & (1.15) \end{cases}$

Bài toán (1.13), (1.14), (1.15) được gọi là ***Bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc.***

1.2.4. Đưa bài toán quy hoạch tuyến tính về dạng chính tắc

***Phương pháp:** Ta có thể đưa bài toán tuyến tính tổng quát về bài toán tuyến tính dạng chính tắc tương đương nhờ các quy tắc sau:

- Nếu có *max f(X)* thì đổi thành $\{\min - f(X)\}$.
- Nếu có bất đẳng thức $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ hoặc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ thì ta đưa thêm ẩn phụ

$x_{n+i} \geq 0$,với hệ số hàm mục tiêu $c_{n+i} = 0$ để có:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \quad \text{hoặc} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i\ ;$$

- Nếu có ẩn x_k chưa ràng buộc về dấu, thì ta có thể thay nó bởi hai biến mới $x_{k'}$ và $x_{k''}$ không âm, theo công thức:

$$x_k = x_{k'} - x_{k''}.$$

***Các ví dụ:**

Ví dụ 1.1

Đưa bài toán sau về dạng chính tắc:

$$\min\ \{x_1 - x_2 - x_3\};$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} 6x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} - 4x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23} = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 4; \\ x_1, x_3 \geq 0; \end{cases}$$

Giải:

Ta thấy có bất đẳng thức $x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 3$ nên ta đưa thêm ẩn phụ $x_4, x_5 \geq 0$

Mặt khác, có ẩn x_2 chưa ràng buộc về dấu, do đó ta thay x_2 bởi $x_2^{'} - x_2^{''}$. Khi đó, bài toán ban đầu được chuyển về dạng sau:

$$(x_1 - x_2^{'} + x_2^{''} - x_3) \to \min$$

với điều kiện $\begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2' + 2x_2'' + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2' - x_2'' - x_3 - x_5 = 4 \\ x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$

Ví dụ 1.2

Đưa bài toán QHTT sau về dạng chính tắc:

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min$$

với điều kiện $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 7 (1) \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -1 (2) \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 10 (3) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 20 \\ x_1, x_5 \geq 0 \\ x_4 \leq 0 \end{cases}$

<u>Giải:</u>

Vì x_2, x_3 chưa ràng buộc về dấu nên ta thay x_2 bởi $x_2' - x_2''(x_2', x_2'' \geq 0)$, x_3 bởi $x_3' - x_3''(x_3', x_3'' \geq 0)$, $x_4 \leq 0$ nên thay x_4 bởi $-x_4'(x_4' \geq 0)$.

Vì có các bất đẳng thức (1), (2), (3) nên ta thêm các ẩn phụ x_6, x_7, x_8.

Từ đó, ta được bài toán sau:

$$2x_1 - (x_2' - x_2'') + 2(x_3' - x_3'') - x_4' - 2x_5 \to \min$$

Với điều kiện $\begin{cases} x_1 - 2(x_2' - x_2'') + x_3' - x_3'' - 2x_4' + x_5 + x_6 = 7 \\ (x_2' - x_2'') + 2(x_3' - x_3'') - x_4' - x_7 = -1 \\ 2(x_2' - x_2'') - x_4' + 3x_5 - x_8 = 10 \\ x_1 + (x_2' - x_2'') - 2(x_3' - x_3'') - x_4' = 20 \\ x_1, x_5, x_6, x_7, x_8, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_4' \geq 0 \end{cases}$

1.3. Mô tả bài toán QHTT và thuật toán đồ thị

1.3.1. Biểu diễn hình học quy hoạch tuyến tính hai biến

Xét bài toán QHTT chuẩn tắc 2 biến

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min \qquad (1.16)$$

với điều kiện $\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, i = \overline{1,m} & (1.17) \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,2}; & (1.18) \end{cases}$

- Ta thấy rằng:

$H = \{x = (x_1, x_2) : a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$ chia R^2 thành hai nửa mặt phẳng:

$D^+ = \{x = (x_1, x_2) : a_1x_1 + a_2x_2 \ge b\}$

$D^- = \{x = (x_1, x_2) : a_1x_1 + a_2x_2 \le b\}$

thì mỗi bất phương trình tuyến tính trong hệ ràng buộc

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, i = \overline{1,m}$

sẽ xác định một nửa mặt phẳng.

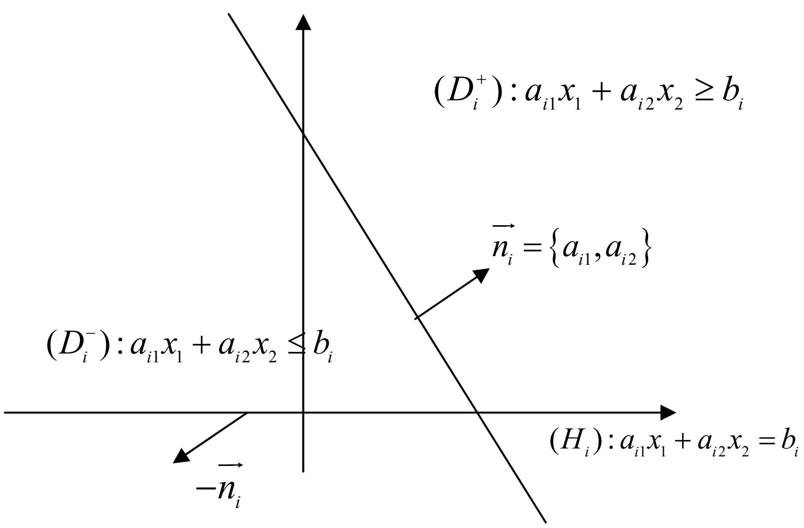
Vậy miền ràng buộc D, xác định bởi hệ ràng buộc là giao của m nửa mặt phẳng, sẽ là đa giác lồi hay khúc lồi($D \ne \varnothing$) hoặc không tồn tại ($D = \varnothing$).

- Để xác định nửa mặt phẳng (1.17), ta phải xác định đường thẳng:

$H_i : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \qquad i = \overline{1,m}$

Sau đó, xác định véc tơ pháp tuyến của nó: $\vec{n_i} = \{a_{i1}, a_{i2}\} \quad i = \overline{1,m}$ thì phần nửa mặt phẳng (D_i^-): $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, i = \overline{1,m}$ nằm về phía ngược hướng với $\vec{n_i}$, $(i = \overline{1,m})$, còn nửa mặt phẳng $(D_i^+) : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i, (i = \overline{1,m})$ sẽ nằm về phía cùng hướng với $\vec{n_i}$, $(i = \overline{1,m})$, kể cả biên của (H_i).

Chú ý: Ngoài phương pháp xác định giữa mặt phẳng (D_i^-) hoặc (D_i^+) nêu trên, có thể xác định bằng cách: Xét điểm góc toạ độ O(0;0) thuộc nửa mặt phẳng nào bằng cách thay toạ độ O(0;0) vào hệ ràng buộc hoặc ngược lại.



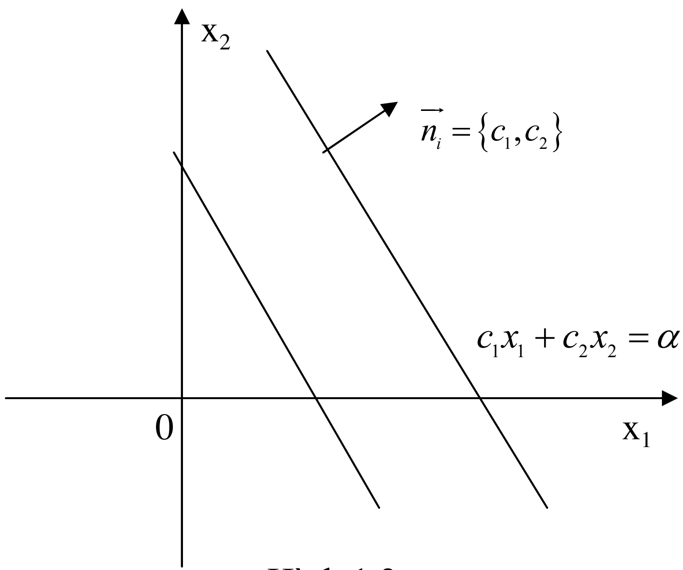
Hình 1.1

- Từ ý nghĩa hình học, đối với hàm mục tiêu $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2$ ta xét phương trình đường thẳng: $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$ với $\alpha \in R^1$ (1.19)

Ta thấy: Khi α thay đổi,(1.19) sẽ xác định trên mặt phẳng toạ độ Ox_1x_2 các đường thẳng song song với nhau(vì cùng vuông góc với véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_i} = \{c_1, c_2\}$), gọi là các đường mức (mức giá trị α). Mỗi điểm $\overline{x} = \left(\overline{x_1}, \overline{x_2}\right) \in D$, sẽ nằm trên đường mức với giá trị : $\overline{\varepsilon} = c_1\overline{x_1} + c_2\overline{x_2}$

Vậy theo ngôn ngữ hình học, có thể phát biểu bài toán QHTTCT như sau;

Trong số các đường mức, tìm đường mức với giá trị nhỏ nhất có thể:



Hình 1.2

$\alpha_{\min} = c_1x_1^* + c_2x_2^*$ với $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in D$

Khi đó $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ là phương án tối ưu với $f_{\min} = \alpha_{\min}$.

1.3.2. Nhận xét

Hàm mục tiêu: $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2$ có thể biểu diễn dưới dạng véc tơ, nhờ khái niệm của tích vô hướng:

$$f(X) = \langle cx \rangle \text{ với } c = (c_1, c_2), x = (x_1, x_2) \in \Re^2$$

Ta thấy $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$

Khi dịch chuyển song song các đường mức theo hướng véc tơ pháp tuyến thì giá trị đường mức sẽ tăng. Ngược lại, khi dịch chuyển theo hướng ngược lại thì giá trị đường mức sẽ giảm.

Từ đó, ta có thể giải bài toán QHTT theo phương pháp hình học sau:

1.3.3. Thuật toán đồ thị

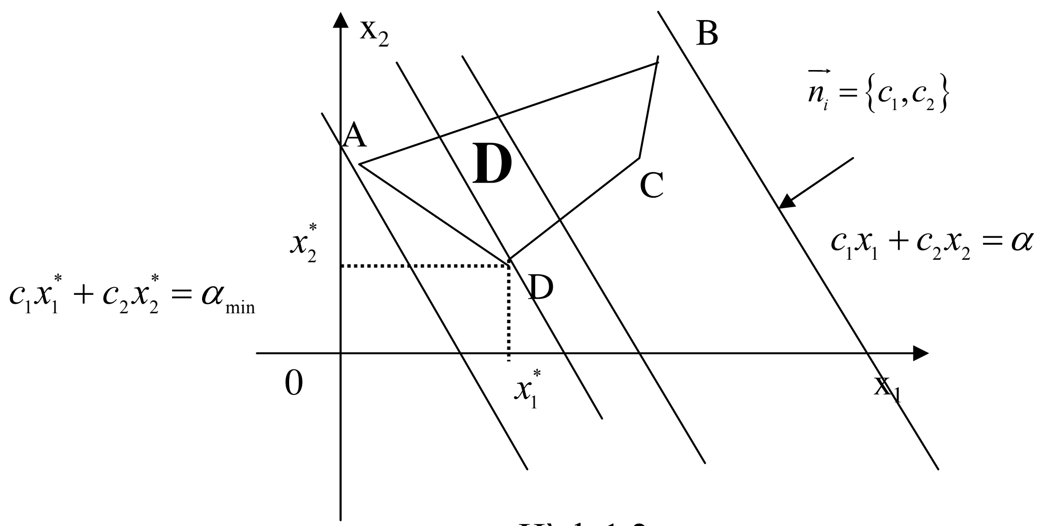
a) Thuật toán

Bước 1. Biểu diễn các điều kiện buộc của bài toán lên mặt phẳng toạ độ vuông góc x_1Ox_2. Xác định miền ràng buộc D.

Bước 2. Vẽ đồ thị đường mức (*) $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$ với một giá trị α

Bước 3. Xác định véc tơ pháp tuyến $\vec{n_i} = \{c_1, c_2\}$ và dịch chuyển song song các đường mức theo hướng của véc tơ $\vec{n_i} = \{c_1, c_2\}$, cho tới vị trí tới hạn(vị trí tới hạn là vị trí mà đường mức vẫn còn cắt miền D, nhưng nếu tiếp tục dịch chuyển sẽ không cắt miền D nữa).

Bước 4: Điểm (hoặc nhiều điểm) của D nằm trên giao điểm của đường mức ở vị trí tới hạn với miền D, là lời giải của bài toán.



Hình 1.2

b) Ví dụ

*** Ví dụ 1**

Giải bài toán sau bằng phương pháp hình học:

$$3x_1 + 2x_2 \to \min$$

với điều kiện $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

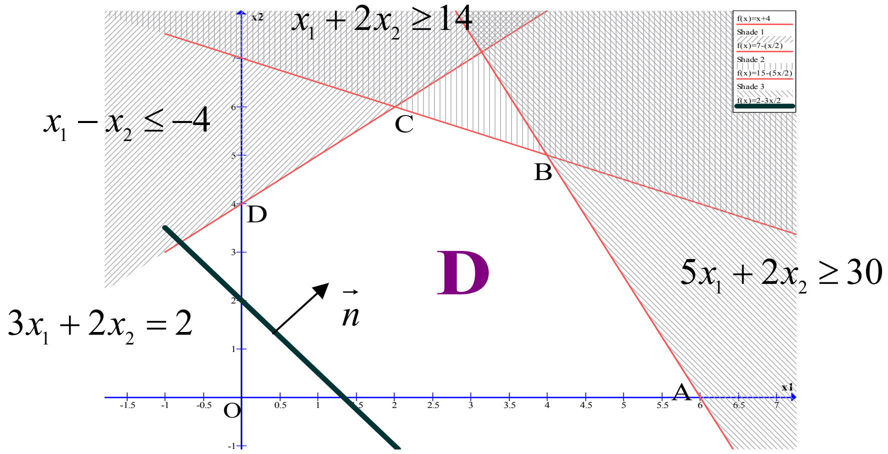
Giải

Biểu diễn các ràng buộc của bài toán lên mặt phẳng toạ độ $x_1\mathbf{O}x_2$, ta được miền ràng buộc D là đa giác lồi OABCD (hình 1.3).

Xét đường mức $3x_1 + 2x_2 = 2$

Dịch chuyển đường mức theo hướng $\vec{n}(3;2)$, đỉnh B$(4;5) \in D$ ở trên đường mức cuối cùng là điểm cực biên tối ưu:

$X^* = (4,5) \Leftrightarrow \alpha_{\max} = f(X)_{\max} = 3.4 + 2.5 = 22$



Hình 1.3

*** Ví dụ 2**

Giải bài toán sau bằng phương pháp hình học:

$$3x_1 + 4x_2 \to \min$$

với điều kiện $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

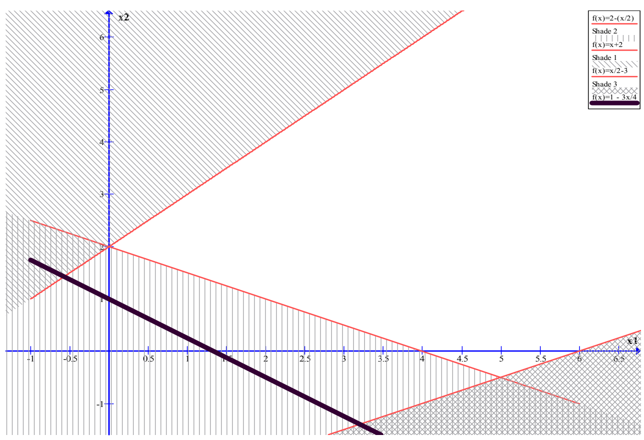
Giải

Xác định miền ràng buộc D của bài toán là khúc lồi (hình 1.5)

Xét đường mức $3x_1 + 4x_2 = 4$

Dịch chuyển sông song các đường mức theo hướng ngược với $\vec{n}(3;4)$ cắt D tại điểm A(0; 2) là duy nhất. Vậy A(0;2) là điểm cực biên tối ưu.

$X^* = (0;2) \Leftrightarrow \alpha_{\min} = f(X)_{\min} = 3.0 + 4.2 = 8$



Hình 1.5

c) Chú ý

- Với bài toán QHTT bất kỳ ta cũng có thể giải được bằng phương pháp hình học. Có thể xảy ra các trường hợp:
  + Miền $D = \varnothing$ tức là các nửa mặt phẳng xác định bởi hệ ràng buộc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$ (hoặc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$) không có điểm chung và do đó bài toán vô nghiệm.
  + miền D là đa giác lồi, thì có duy nhất một điểm cực biên là phương án tối ưu; hoặc có vô số phương án tối ưu, khi đó hai điểm cực biên là phương án tối ưu.
  + Nếu D là khúc lồi(*đa giác lồi không giới nội*), thì bài toán có một phương án cực biên tối ưu, nếu D nằm về một phía đường mức cắt đường mức tại một điểm, hoặc bài toán có phương án tối ưu, nếu có 2 điểm cực biên là các phương án tối ưu, hoặc bài toán không có lời giải (f(x) không bị chặn).

Bài tập

1. Lập bài toán QHTT

*** Phương pháp:**

- Căn cứ vào yêu cầu của bài toán, phân tích các số liệu, đặt ẩn và xác định hàm mục tiêu
- Xác định các ràng buộc của bài toán
- Thiết lập bài toán

*** Bài tập luyện tập**

Bài 1. Xí nghiệp sản xuất giấy có 3 phân xưởng. Do trang bị kỹ thuật khác nhau nên mức hao phí tre gỗ, axít để sản xuất một tấn giấy thành phẩm cũng khác nhau. Mức hao phí được cho trong bảng dưới đây:

	Mức hao phí nguyên liệu cho một tấn giấy		
Nguyên liệu	P.Xưởng I	P.Xưởng II	**P.Xưởng III**
Tre gỗ	**1,4 tấn**	**1,3**	**1,2**
Axít	**0,1**	**0,12**	**0,15**

Số lượng tre gỗ có trong năm là 1.500.000 tấn, Axít là 100.000 tấn.

Hãy lập kế hoạch sản xuất sao cho tổng số giấy sản xuất trong năm của xí nghiệp là nhiều nhất?

Bài 2. Một xí nghiệp có thể sản xuất bốn loại mặt hàng xuất khẩu H1, H2, H3, H4. Để sản xuất 4 loại mặt hàng này, xí nghiệp sử dụng hai loại nguyên liệu N1, N2. Số nguyên liệu tối đa mà xí nghiệp huy động được tương ứng là 600 kg và 800 kg. Mức tiêu hao mỗi loại nguyên liệu để sản xuất một mặt hàng và lợi nhuận thu được cho trong bảng sau:

Định mức tiêu hao	H1	H2	H3	**H4**

nguyên liệu và lợi nhuận				
N1	0,5	0,2	0,3	**0,4**
N2	0,1	0,4	0,2	**0,5**
Lợi nhuận	**0,8**	**0,3**	**0,5**	**0,4**

Lập mô hình sao cho xí nghiệp sản xuất đạt lợi nhuận cao nhất?

Bài 3. Xí nghiệp cơ khí Hùng Vương có 32 công nhân nam và 20 công nhân nữ. Xí nghiệp có hai loại máy: cắt và tiện. Năng suất trung bình của các công nhân đối với mỗi loại máy được cho trong bảng dưới đây:

Năng suất công việc	Công nhân nam	**Công nhân nữ**
Máy cắt	30 chi tiết / giờ	**22 chi tiết / giờ**
Máy tiện	**25 chi tiết/ giờ**	**20 chi tiết / giờ**

Biết rằng trong ngày cắt được bao nhiêu chi tiết thì tiện hết bấy nhiêu chi tiết. Hãy lập mô hình để xí nghiệp sản xuất được nhiều sản phẩm nhất?

Bài 4. Một công ty chuyên sản xuất 3 loại sản phẩm A, B, C. Trong đó, nguyên liệu để sản xuất ra 3 loại sản phẩm trên được nhập về từ hai nguồn N1, N2. Chi phí cho mỗi đơn vị nguyên liệu nhập từ N1 là 100000 USD và nguồn N2 LÀ 90000 USD.

Các loại sản phẩm sản xuất cần các đơn vị nguyên liệu của từng nguồn được cho trong bảng sau:

Nguồn nguyên liệu	**Loại sản phẩm**		
	A	B	**C**
N1	1000	2000	**3000**
N2	**2000**	**1000**	**2000**

Số lượng tối thiểu sản phẩm loại A cần sản xuất trong thời gian tới là 20000, sản phẩm loại B là 18000, sản phẩm loại C là 15000.

Hãy lập bài toán để tổng chi phí sản xuất mà công ty bỏ ra là nhỏ nhất mà vẫn đảm bảo yêu cầu về sản phẩm?

Bài 5. Một cơ sở dự định sản xuất tối đa trong một ngày 500 ổ bánh mì dài và 500 ổ bánh mì tròn, muốn đạt lợi nhuận nhiều nhất, với những điều kiện như sau:

- Gía bán một ổ bánh mì dài làm từ 400g bột là 325 đồng, một ổ bánh mì tròn làm từ 250g bột là 220 đồng.

- Số lượng bột được cung cấp tối đa trong ngày là 225 kg với giá mỗi kg là 300 đồng.

- Lò nướng bánh cho phép nướng 75 ổ bánh mì dài hay 100 ổ bánh mì tròn trong một giờ nhưng không thể nướng hai loại cùng một lúc. Lò nướng hoạt động tối đa 8 giờ trong một ngày.

Hãy lập mô hình cho bài toán nêu trên?

Bài 6. Ba xí nghiệp A, B, C cùng có thể sản xuất áo vét và quần. Khả năng sản xuất của môic xí nghiệp như sau: Khi đầu tư 1000 USD vào xí nghiệp A thì thu được 35 áo vét và 45 quần; vào xí nghiệp B thì thu được 40 áo vét và 42 quần; vào xí nghiệp C thì thu được 43 áo vét và 30 quần. Lượng vải và giờ công sản xuất được cho trong bảng sau:

Xí nghiệp	A		B		**C**	
	vải/giờ		vải/giờ		**vải/giờ**	
1 áo vét	3,5m	20giờ	4m	16giờ	3,8m	**18giờ**
1 quần	**2,8m**	**10giờ**	**2,6m**	**12giờ**	**2,5m**	**15giờ**

Tổng số vải huy động được là 10000m

Tổng số giờ công huy động được là 52000 giờ.

Theo hợp đồng thì tối thiểu phải có 1500 bộ quần áo, nếu lẻ bộ thì quần là dễ bán

Hãy lập kế hoạch đầu tư vào mỗi xí nghiệp bao nhiêu vốn để:

- Hoàn thành hợp đồng.
- Không khó khăn về tiêu thụ.
- Không bị đôngj về vải và giờ công.
- Tổng số vốn đầu tư là nhỏ nhất.

Bài 7. Một nhà máy cán thép có thể sản xuất hai loại sản phẩm: thép tấm và thép cuộn. Nếu chỉ sản xuất một loại sản phẩm thì nhà máy chỉ có thể sản xuất 200 tấn thép tấm hoặc 140 tấn thép cuộn trong một giờ. Lợi nhuận thu được khi bán một tấn thép tấm là 25 USD, một tấn thép cuộn là 30 USD. Nhà máy làm việc 40 giờ trong một tuần và thị trường tiêu thụ tối đa là 6000 tấn thép tấm và 4000 tấn thép cuộn.

Nhà máy cần sản xuất mỗi loại sản phẩm là bao nhiêu trong một tuần để lợi nhuận thu được là cao nhất?

Bài 8. Có 3 người cùng phải đi một quãng đường dài 10km mà chỉ có một chiếc xe đạp một chỗ ngồi. Tốc độ đi của người thứ nhất là 4km/h, người thứ hai là 2km/h, người thứ ba là 2km/h. Tốc độ đi xe đạp của người thứ nhất là 16km/h, người thứ hai là 12km/h, người thứ ba là 12km/h.

Lập bài toán sao cho thời gian người cuối cùng đến đích là ngắn nhất?

Bài 9. Một nhà máy sản xuất ba loại thịt: bò, lợn và cừu với lượng sản xuất mỗi ngày là 480 tấn thịt bò, 400 tấn thịt lợn, 230 tấn thịt cừu. Mỗi loại đề có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt có thể nấu chín để bán là 420 tấn trong giờ và 250 tấn ngoài giờ. Lợi nhuận thu được từ việc bán một tấn mỗi loại thịt cho trong bảng sau:

	Tươi	Nấu chín trong giờ	**Nấu chín ngoài giờ**
Bò	8	14	**11**
Lợn	4	12	**7**
Cừu	**4**	**13**	**9**

Hãy lập bài toán sản xuất sao cho nhà máy đạt lợi nhuận cao nhất?

- Nếu có bất đẳng thức $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$ hoặc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ thì ta đưa thêm ẩn phụ $x_{n+i} \ge 0$,với hệ số hàm mục tiêu $c_{n+i} = 0$ để có:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \quad \text{hoặc} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i\ ;$$

- Nếu có ẩn x_k chưa ràng buộc về dấu, thì ta có thể thay nó bởi hai biến mới $x_{k'}$ và $x_{k''}$ không âm, theo công thức:

$$x_k = x_{k'} - x_{k''}.$$

*** Bài tập luyện tập**

Đưa các bài toán sau về dạng chính tắc:

Bài 1. $$-5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \to \min$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Bài 2. $2x_1 - x_2 \to \max$

với điều kiện $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$

Bài 3. $2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

với điều kiện $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3 \\ x_1, x_2, x_4 \ge 0 \end{cases}$

Bài 4. $x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min$

với điều kiện $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \le 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ x_2 + x_3 \le 5 \\ 2x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$

Bài 5. $-5x_1 - 2x_2 - 10x_3/3 \to \min$

với điều kiện $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 46 \\ 4x_1 + 2x_3 + 3x_5 \le 38 \\ 3x_1 + x_3 \le 21 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$

2. Giải bài toán QHTT bằng phương pháp đồ thị

*** Phương pháp:**

Bước 1. Biểu diễn các điều kiện buộc của bài toán lên mặt phẳng toạ độ vuông góc $\boldsymbol{x_1Ox_2}$. Xác định miền ràng buộc D.

Bước 2. Vẽ đồ thị đường mức (*) $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$ với một giá trị α

Bước 3. Xác định véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_i} = \{c_1, c_2\}$ và dịch chuyển song song các đường mức theo hướng của véc tơ $\overrightarrow{n_i} = \{c_1, c_2\}$, cho tới vị trí tới hạn(vị trí tới hạn là vị trí mà đường mức vẫn còn cắt miền D, nhưng nếu tiếp tục dịch chuyển sẽ không cắt miến D nữa).

Bước 4: Điểm (hoặc nhiều điểm) của D nằm trên giao điểm của đường mức ở vị trí tới hạn với miền D, là lời giải của bài toán.

*** Bài tập luyện tập:** Giải các bài toán sau đây bằng phương pháp đồ thị:

Bài 1. $x_2 - x_1 \to \min$

$$\text{với điều kiện}\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Bài 2. $x_2 - x_1 \to \max$

$$\text{với điều kiện}\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Bài 4. $x_1 - x_2 \to \max$

$$\text{với điều kiện}\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \le 5 \end{cases}$$

Bài 5. $-x_1 + x_2 \to \min$

$$\text{với điều kiện}\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \le 0 \end{cases}$$

Bài 6. $$5x_1 + 6x_2 \to \max$$

với điều kiện $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 2 \end{cases}$

Bài 7. $$3x_1 - 4x_2 \to \max$$

với điều kiện $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Chương 2. TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

2.1. Một số kết quả cơ bản của giải tích lồi

2.1.1. Tập hợp lồi

a) Định nghĩa

*** Định nghĩa 2.1**

- **Tổ hợp lồi**

- Tập hợp $M \subset R^n$ được gọi là tập hợp lồi nếu với bất kì $X, Y \in M$ và $\lambda \in [0,1]$ ta có: $Z = \lambda X + (1-\lambda)Y \in M$,

- Cho hệ hữu hạn điểm $X_1, X_2, \ldots, X_k \in R^n$. Khi đó, $X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i, \forall \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ là tổ hợp lồi của hệ điểm đã cho.

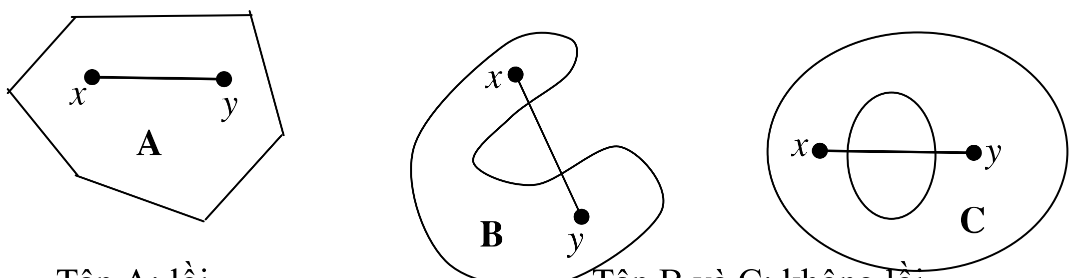
- **Đoạn thẳng**

- Khi k = 2, ta có 2 điểm X_1, X_2. Khi đó,

$X_1X_2 = \left\{ X \in R^n : X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2, 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}, X_1X_2$ được gọi là đoạn thẳng nối hai điểm X_1, X_2.

- **Tập hợp lồi**

Tập M là lồi khi và chỉ khi đoạn thẳng nối hai điểm bất kì nằm trọn trong tập hợp.



Tập A: lồi Tập B và C: không lồi

Hình 2.1

- **Đa tạp tuyến tính**

Tập $M \subset R^n$ được gọi là đa tạp tuyến tính nếu:

$$Z = \lambda X + (1-\lambda)Y \in M, \forall X, Y \in M, \lambda \in R$$

- **Điểm cực biên**

Cho tập lồi $M \subset R^n$, điểm $X \in M$ được gọi là điểm cực biên của M nếu X không thể biểu diễn thành tổ hợp lồi thực sự của hai điểm khác nhau thuộc M. Nghĩa là không thể tồn tại X_1, X_2 thuộc M ($X_1 \neq X_2$)sao cho:

$$Z = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2, 0 \le \lambda \le 1$$

b) Tính chất

1. Giao của các tập lồi là tập lồi

2. Hiệu và tổng của hai tập lồi là tập lồi

3. Tập đóng nhỏ nhất chứa tập lồi M được gọi là ***bao đóng*** của tập M, kí hiệu là $\overline{M}$.

- Bao đóng của tập lồi là tập lồi.

4. Tập tất cả các điểm là tổ hợp lồi của các điểm thuộc M được gọi là bao lồi của M, kí hiệu là co(M).

- co(M) là tập lồi bé nhất chứa M và là giao của tất cả các tập lồi chứa M.

5. Tổ hợp lồi của các tập lồi là tập lồi.

6. Tập M lồi khi và chỉ khi tổ hợp lồi của hữu hạn điểm thuộc M cũng thuộc M.

7. Cho $C \in R^n, \lambda \in R$, tập các điểm $X \subset R^n$ thỏa mãn điều kiện $\langle C, X \rangle = \lambda$ gọi là ***siêu phẳng*** thuộc không gian R^n.

- Cho M và Q là các tập lồi thuộc R^n, $M \cap Q = \varnothing$, khi đó tồn tại siêu phẳng $\langle C, X \rangle = \lambda$ tách M và Q, nghĩa là tồn tại $C \in R^n, \lambda \in R$ sao cho:

$$\langle C, X \rangle \le \lambda, \forall X \in M \text{ và } \langle C, Y \rangle \le \lambda, \forall Y \in Q$$

8. Tập $M = \left\{ X \in R^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = 1,2,...,m \right\}$ là tập lồi.M là tập lồi đa diện thuộc R^n.

- ***Tập phương án M*** của bài toán quy hoạch tuyến tính là một ***tập lồi đa diện.***

- Điểm cực biên của tập lồi các phương án gọi là ***phương án cực biên***.

9. Tập tất cả các phương án của bài toán QHTT khác rỗng là đa diện lồi.

10. Đa diện lồi M có hữu hạn điểm cực biên X_1, X_2, …, X_k và mọi điểm thuộc đa diện lồi là tổ hợp lồi của các điểm cực biên, nghĩa là mọi $X \in M$ thì

$$X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i, \forall \lambda_i \ge 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

2.1.2. Hàm lồi

a) Định nghĩa

Định nghĩa 2.2

Cho hàm số f xác định trên tập hợp lồi M. Hàm f được gọi là ***hàm lồi*** nếu với $X, Y \in M$ và $\lambda \in [0,1]$ ta có:

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y).$$

Nếu $f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \ge \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$ thì f được gọi là hàm lõm.

Nếu *f*(X) là hàm lồi thì *g*(X)= - *f*(X) là hàm lõm.

Ví dụ 2.1

Hàm $y = ax^2 + bx + c$ với a > 0 là hàm lồi.

Hàm y = sinx $x \in [\pi; 2\pi]$ là hàm lồi.

b) Tính chất của hàm lồi

1. Hàm tuyến tính vừa là hàm lồi vừa là hàm lõm
2. Hàm f, xác định trên tập lồi M, là lồi khi và chỉ khi
$$f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i) \le \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(X_i), \forall \alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, k \ge 2.$$
3. Hàm f liên tục trên tập lồi M là lồi khi và chỉ khi
$$f(\frac{X+Y}{2}) \le \frac{1}{2} f(X) + \frac{1}{2} f(Y), \forall X, Y \in M.$$
4. Cho $f_i(X), i = \overline{1,k}$ là các hàm lồi. Khi đó, với $\lambda_i \ge 0, i = \overline{1,k}$ ta có $f(X) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(X)$ là hàm lồi.
5. Cho $f_i(X), i = \overline{1,k}$ là các hàm lồi xác định trên tập M, khi đó $f(X) = \max\left\{ \mathrm{f_i}(X), i = \overline{1,k} \right\}$ là hàm lồi.
6. Nếu f là lồi thì $f(\alpha X + (1-\alpha)Y) \le \max\left\{ f(X), f(Y) \right\}, 0 \le \alpha \le 1.$
7. Hàm một biến số *f*(X) xác định và liên tục, có đạo hàm cấp 2 trên (a,b). Khi đó, *f*(X) lồi trên (a,b) nếu $f''(x) \ge 0, \forall x \in (a,b)$.
8. Dạng toàn phương là lồi khi và chỉ khi xác định không âm.
9. Cho $f_i(X), i = \overline{1,k}$ là các hàm lồi. Khi đó $M = \left\{ X \in R^n : f_i(X) \le 0, i = \overline{1,k} \right\}$ là một tập lồi.

c) Ứng dụng

Ví dụ 2.2

Chứng minh bất đẳng thức Côsi:

$$\frac{\ln(a_1a_2...a_n)}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$$

Giải:

Ta có hàm –lnx là hàm lồi, do vậy:

$$-\ln\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \leq -(1/n)(\ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n)$$

$$\Leftrightarrow -\ln\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \leq -\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \ln\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 2.3

Chứng minh

$$\frac{a^n+b^n}{2} \geq \frac{a+b}{2} \forall a+b \geq 2, \forall n$$

Giải:

Thật vậy, do x^n là hàm liên tục và lồi với mọi $x \geq 1$ nên

$$\frac{a+b}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$$

Ví dụ 2.4

Xác định α để f cho sau đây là lồi :

$$f(X) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 6x_2^2 + 2x_2x_3 + \alpha x_3^2 + 7x_1 - 8x_2 + 10x_3$$

Giải:

Do f là tổng của dạng toàn phương và dạng tuyến tính, nên ta chỉ cần xét dạng toàn phương xác định không âm là đủ.

Ta có dạng toàn phương xác định không âm khi và chỉ khi định thức tương ứng xác định không âm. Tức là :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 6 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 6\alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1 - \alpha$$

$$= 5\alpha - \frac{3}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \geq \frac{3}{10}.$$

Ví dụ 2.5

Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ và $x_1 + x_2 + ... + x_n = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \sum_{i=1}^{k} x_i^3$

Giải:

Ta có hàm số $y = x^3$, với x>0 là hàm lồi. áp dụng tính chất 2 của hàm lồi, ta có :

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{k}\right)^3 \leq \frac{x_1^3 + x_2^3 + ... + x_k^3}{k}$$

Khi đó, theo điều kiện đã cho ta có:

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + ... + x_k^3}{k} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{k}\right)^3 \geq \left(\frac{2}{k}\right)^3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ….. = x_k = \frac{2}{k}$ và $A_{\min} = \frac{8}{k^2}$

2.2. Tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính

Không mất tính tổng quát , ta giả thiết :

- Xét bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc :

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (2.1)$$

với điều kiện
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,\dots,m}; & (2.2) \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}; & (2.3) \end{cases}$$

- Hệ (2.2) có đúng m phương trình độc lập tuyến tính.
- $\forall b_i \geq 0, i = \overline{1,m}$

- m < n (trong trường hợp $m \geq n$ thì tập phương án có nhiều nhất một điểm, do vậy phương án tối ưu là tầm thường).

Định lý 2.1. Nếu tập phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính là đa diện lồi thì tồn tại phương án cực biên tối ưu.

Định lý 2.2. Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu thì có ít nhất một phương án cực biên tối ưu.

Định lý 2.3. Phương án X = (x_j) là cực biên khi và chỉ khi hệ véc tơ cột {A_j} ứng với các $x_j > 0$ độc lập tuyến tính.

Hệ quả 2.3

i, Số toạ độ dương của phương án cực biên có tối đa là m.

ii, Số phương án cực biên của M là hữu hạn.

Định nghĩa 2.3. Phương án cực biên có đủ ***m*** toạ độ dương được gọi là phương án cực biên ***không suy biến*** **(** hay ***không thoái hoá*)**.

Định lý 2.4. Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính có hai phương án tối ưu khác nhau thì có vô số phương án tối.

Định lý 2.5. Mỗi phương án cực biên của tập phương án M đều tồn tại một hàm mục tiêu để nó là phương án tối ưu duy nhất.

Định lý 2.6. Nếu hàm tuyến tính *f*, bị chặn dưới trên tập phương án khác rỗng thì bài toán quy hoạch tuyến tính tồn tại phương án cực biên tối ưu.

Hệ quả 2.6. Bài toán quy hoạch tuyến tính sẽ không có phương án tối ưu khi và chỉ khi xảy ra một trong hai tình huống: hoặc là tập phương án rỗng, hoặc là hàm mục tiêu không bị chặn trên tập phương án.

2.3. Cặp bài toán đối ngẫu

2.3.1. Định nghĩa

Định nghĩa 2.4. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính :

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (2.4)$$

với điều kiện
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = \overline{1,m} & (2.5) \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,n} & (2.6) \end{cases}$$

Ta nói bài toán (2.4), (2.5), (2.6) có dạng ***chuẩn tắc*** và ta gọi đó là bài toán gốc. Khi đó, ta gọi bài toán sau là bài toán đối ngẫu của bài toán gốc :

$$g(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max \qquad (2.7)$$

với điều kiện
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \le c_j,\ j = \overline{1,n} & (2.8) \\ y_i \ge 0, i = \overline{1,m} & (2.9) \end{cases}$$

+ Bài toán (2.4) – (2.6) và (2.7) - (2.9) tạo thành cặp bài toán đối ngẫu. Nếu bài này là bài toán gốc thì bài kia là bài toán đối ngẫu và ngược lại.

+ Các điều kiện (2.5) và (2.8) hoặc (2.6) và (2.9) là các ***cặp điều kiện đối ngẫu.***

+ Dạng ma trận của cặp bài toán đối ngẫu : $\begin{matrix} \min\{CX : AX \ge b, X \ge 0\} \\ \max\{Yb : YA \le C, Y \ge 0\} \end{matrix}$

Ta có thể hình dung cặp bài toán đối ngẫu được viết theo cách mô tả dạng ma trận như sau :

	x_1	x_2	...	x_n	**≥0**	
$\min\sum_{j=1}^{n}$	c_1 $\le$	c_2 $\le$	... ...	c_n $\le$	**có ràng buộc (≥) thứ i mới có $y_i \ge 0$**	
	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\ge b_1$	y_1
	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\ge b_2$	y_2
	...	...	...	...	...	**...**
	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\ge b_m$	y_m
	chú ý rằng khi bài toán max có ràng buộc dạng (≤) thứ j thì mới có $x_j \ge 0$.				$\max\sum_{i=1}^{m}$	

Ví dụ 2.6. Cho bài toán :

$$f(X) = 2x_1 - x_2 + x_3 \to \min$$

với điều kiện
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu là :

$$g(Y) = 2y_1 + 5y_2 \to \max$$

với điều kiện $\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 2 \\ 2y_1 - y_2 \le -1 \\ -y_1 + 2y_2 \le 1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

2.3.2. Tính chất của cặp bài toán đối ngẫu

Định lý 2.7. Với mọi cặp phương án X và Y của cặp bài toán đối ngẫu, ta có :

$$Yb \le CX$$

Định lý 2.8. Nếu X^*, Y^* lần lượt là phương án của cặp bài toán đối ngẫu, thoả mãn $CX^* = Y^*b$ thì X^*, Y^* lần lượt là phương án tối ưu của mỗi bài toán.

<u>Định lý 2.9</u>

Nếu một trong hai bài toán của cặp bài toán đối ngẫu có phương án tối ưu thì bài toán kia cũng có phương án tối ưu, đồng thời

$$\min CX = \max Yb$$

Nếu hàm mục tiêu của bài toán này không bị chặn trên tập phương án thì bài toán kia có tập phương án rỗng.

Hệ quả 2.9. Nếu tập phương án của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu đều khác rỗng thì chúng đều có phương án tối ưu.

Định lý 2.10. Cặp phương án X^*, Y^*, tương ứng cặp bài toán đối ngẫu, tối ưu khi và chỉ khi

$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$, nếu $x_j^* > 0$ (hoặc $x_j^* = 0$ nếu $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* < c_j$)

$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^* = b_i$, nếu $y_i^* > 0$ (hoặc $y_i^* = 0$ nếu $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j^* > b_i$)

- Xét bài toán :

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (2.10)$$

với điều kiện $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,m} & (2.11) \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n} & (2.12) \end{cases}$

Bài toán sau đây được gọi là bài toán đối ngẫu không đối xứng của bài toán trên :

$$g(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max \qquad (2.13)$$

với điều kiện $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j,\ j = \overline{1,n}$ (2.14)

Ví dụ 2.7. Cho bài toán gốc :

$$f(X) = 2x_1 - x_2 \to \min$$

với điều kiện $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$

Bài toán đối ngẫu không đối xứng của nó là :

$$g(Y) = 2y_1 + 4y_2 \to \max$$

với điều kiện $\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 2 \\ 2y_1 - y_2 \le -1 \\ -y_1 + y_2 \le 0 \end{cases}$

Định lý 2.10'. Cặp phương án X*, Y* tối ưu khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^* = c_j$, nếu $x_j^* \ge 0$.

(Hoặc $x_j^* = 0$, nếu $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^* \le c_j$).

2.3.3.Một số ứng dụng của đối ngẫu trong quy hoạch tuyến tính

1. Xây dựng dấu hiệu tối ưu cho một bài toán cụ thể nào đó

Xét bài toán « Lập kế hoạch sản xuất » ở chương I, ta đã lập mô hình

$$f(X) = 3x_1 + 5x_2 \to \max$$

với điều kiện: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

bài toán đối ngẫu của bài toán trên là:

$$g(Y) = 8y_1 + 4y_2 + 3y_3 \to \min$$

với điều kiện $\begin{cases} 2y_1 + y_3 \ge 3 \\ y_1 + y_2 \ge 5 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$

Theo định lý 2.10, phương án sản xuất X = (x_1, x_2) là tối ưu khi và chỉ khi:

Nếu $\sum_{j=1}^{3} a_{ij} y_j > c_i$ thì $x_i = 0$, i=1,2

Nếu $\sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_i < b_j$ thì $y_j = 0$, i=1,2,3

2. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính được đưa về giải hệ phương trình và bất phương trình

Từ các tính chất của cặp bài toán đối ngẫu,việc giải bài toán (2.1)- (2.3) ta có thể đưa về việc giải hệ phương trình và bất phương trình sau đây :

$$\begin{cases} AX \geq b; X \geq 0 \\ YA \leq C; Y \geq 0 \\ CX = Yb \end{cases}$$

3. Kiểm tra một phương án có tối ưu hay không ?

- Nếu biết cặp phương án X^* và Y^*, thì ta chỉ cần kiểm tra điều kiện $f(X^*) = g(Y^*)$
- Nếu chỉ biết phương án X^* thì áp dụng định lý lệch bù

Ví dụ 2.8. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$2x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 \to \max$$

với điều kiện $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 - 3x_4 \leq 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$

1. Hãy chứng tỏ điểm $X_0 = (1 ;1 ;0 ;0)$ là phương án cực biên, đồng thời tại $\lambda = 0$ nó cũng là phương án tối ưu.
2. Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Xác định λ để bài toán đã cho có vô số phương án tối ưu.

Giải:

1. * Chứng X_0 là phương án cực biên:

+ Ta thấy $X_0 = (1 ;1 ;0 ;0)$ thỏa mãn hệ ràng buộc nên X_0 là một phương án của bài toán.

+ Mặt khác ta có $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ là hệ độc lập tuyến tính vì ma trận lập bởi A_1, A_2 :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ có hạng rank(A) = 2.

Do đó, X_0 là phương án cực biên.

* Chứng minh tại $\lambda = 0$, X_0 là phương án tối ưu

+ Dạng ma trận của bài toán gốc:

$$\max\{CX\}$$

Với điều kiện $\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$

Trong đó :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \lambda \end{bmatrix};\ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

+ Áp dụng định lý 2.10, ở đây $x_1 = x_2 = 1 > 0$ nên ta có:

$\sum_{i=1}^{3} a_{i1} y_i = c_1$ và $\sum_{i=1}^{3} a_{i1} y_i = c_1$, có nghĩa là : $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 = c_1$ và $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 = c_1$. Thay số vào ta được:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 4 \end{cases}$$

+ Mặt khác, X_0 thỏa mãn lỏng (<) điều kiện thứ 3: 1 – 3.0 <3 nên ta có $y_3 = 0$.

Vậy ta có hệ : $\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 4 \\ y_3 = 0 \end{cases}$ (*)

Hệ (*) có nghiệm duy nhất $Y_0 = (6/5\ ;2/5\ ;0)$.

+ Với $\lambda = 0$, ta có bài toán đối ngẫu của bài toán trên là:

$$4y_1 + 3y_2 + 3y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 4 \\ y_2 \ge 0 \\ y_1 - 3y_3 \ge 0 \\ y_i \ge 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Thay Thay Y_0 vào hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu, ta thấy Y_0 thỏa mãn. Vậy tại $\lambda = 0$, X_0 là phương án tối ưu.

3. * Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu:

+ Ta thấy rằng với $\lambda \le \frac{2}{5}$ thì Y_0 là phương án của bài toán đối ngẫu.

+Mặt khác, ta có : $f(X_0) = 2.1 + 4.1 + \lambda.0 = 6$

$$g(Y_0) = 4.\frac{6}{5} + 3.\frac{2}{5} + 3.0 = 6$$

$\Rightarrow f(X_0) = g(Y_0) \Rightarrow Y_0$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

* Xác định λ để bài toán có vô số phương án tối ưu:

\+ Với mọi $\lambda \le \frac{2}{5}$, Y_0 là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Do đó với mọi $\lambda \le \frac{2}{5}$ ta có X_0 là phương án tối ưu.

\+ Ta thấy $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ và với $\lambda < \frac{2}{5}$, Y_0 thỏa mãn lỏng(>) ràng buộc thứ 3. Do đó, nếu có phương án tối ưu X thì X phải thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Hệ trên có nghiệm: $X = \left(\frac{5 + x_4}{5}; \frac{5 - 2x_4}{5}; 0; x_4 \right)$

Để X là phương án thì X phải thỏa mãn các điều kiện còn lại: $x_1, x_2, x_4 \ge 0$ và $x_2 - 3x_4 \le 3$. Từ đó suy ra:

$$-\frac{1}{5} \le x_4 \le \frac{2}{5}$$

Vậy khi $\lambda < \frac{2}{5}$ thì tập phương án tối ưu của bài toán gốc là:

$X = \left(\frac{5 + x_4}{5}; \frac{5 - 2x_4}{5}; 0; x_4 \right)$, với $-\frac{1}{5} \le x_4 \le \frac{2}{5}$.

Bài tập

Bài 1. Cho bài toán $\min\{x_1 - x_2 - \lambda x_3\}$

Với điều kiện $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$

a) Điểm $X = \left(0; \frac{8}{5}; \frac{11}{5}; \frac{33}{5}\right)$ có phải là phương án cực biên không ?

b) Tìm phương án cực biên ứng với cơ sở liên kết $A_1A_2A_4$. Phương án cực biên tìm được, tại $\lambda = 1$, có tối ưu không ? Tại sao? Tìm các giá trị của λ để phương án cực biên tìm được là tối ưu.

c) Hãy chứng tỏ bài toán đã cho có phương án tối ưu với λ hữu hạn nào đó.

d) Viết bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho. Xét phương án đã cho ở câu a, tại $\lambda = 1$, có phải là phương án tối ưu không ? Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu ?

Bài 2. Cho bài toán : $\lambda x_1 + x_2 - x_4 - 3x_5 \to \min$

Với điều kiện : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 5 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$

a) Tại $\lambda = 0$, điểm $X_0 = (0; \frac{1}{3}; 0; \frac{11}{3}; 4; 0)$ có phải là phương án tối ưu không ? Tại sao?

b) Tìm λ để X_0 là phương án tối ưu.

Bài 3. Cho bài toán : $\lambda x_1 + 6x_2 - 12x_3 + x_4 \to max$

Với điều kiện: $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq -1 \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 10 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$

a) Viết bài toán đối ngẫu. Tại $\lambda = 8$, điểm $X_0 = (0\,;6\,;0\,;10)$ có là phương án tối ưu không ? Chứng tỏ rằng X_0 là phương án cực biên.

b) Tìm λ để X_0 là phương án tối ưu. Với $\lambda < 8$, tìm tập phương án tối ưu của bài toán gốc.

CHƯƠNG 3. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

3.1. Cơ sở lý luận của phương pháp

3.1.1. Tư tưởng của phương pháp đơn hình

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min(\max) \qquad (3.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,m} & (3.2) \\ x_j \geq 0 & (3.3) \end{cases}$$

Dạng véctơ của bài toán:

$$f(X) = < C, X > \rightarrow \min(\max) \qquad (3.4)$$

Với điều kiện: $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} A_j x_j \begin{pmatrix} = \\ \geq \\ \leq \end{pmatrix} b & (3.5) \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,n} & (3.6) \end{cases}$$

Ta đã biết rằng :

- Nếu bài toán có phương án thì có phương án cực biên
- Nếu bài toán có phương án tối ưu thì cũng có phương án cực biên tối ưu.

Số phương án cực biên là hữu hạn.

Do đó, ta có thể tìm một phương án tối ưu(hay một lời giải của bài toán) trong tập hợp các phương án cực biên. Tập hợp này là hữu hạn. Vì vậy Dantzig đề xuất thuật toán đơn hình như sau:

Xuất phát từ một phương án cực biên X^0. Kiểm tra xem X^0 có là phương án tối ưu hay chưa. Nếu X^0 chưa phải là phương án tối ưu thì tìm cách cải tiến nó để được phương pháp khác là X^1 tốt hơn X^0, tức là $f(X^1) < f(X^0)$. Qúa trình này lặp lại nhiều lần. Vì số phương án cực biên là hữu hạn nên sau một số hữu hạn lần lặp ta sẽ tìm thấy phương án cực biên tối ưu.

Để thực hiện thuật toán đề ra ở trên, ta cần làm rõ hai vấn đề sau:

1. Làm thế nào để biết một phương án cực biên đã cho là tối ưu hay chưa, tức là cần tìm « dấu hiệu tối ưu«.

2. Làm thế nào để từ một phương án cực biên chưa tối ưu tìm được một phương án cực biên tốt hơn nó.

3.1.2. Biểu diễn qua cơ sở. Dấu hiệu tối ưu

Gỉa sử có phương án cực biên X^0 với cơ sở J(tức là hệ véctơ cột độc lập tuyến tính $\{A_j, j \in J\}$ và $x_j > 0$). Ta có:

$$AX^0 = b \text{ hay } b = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 A_j = \sum_{j \in J} x_j^0 A_j \qquad (3.7)$$

(vì $x_j^0 = 0 \forall j \notin J$). Với mỗi $k \notin J$, ta biểu diễn véc tơ A_k qua các véc tơ cơ sở $\{A_j, j \in J\}$: $A_k = \sum_{j \notin J} z_{jk} A_j (\forall k \notin J)$

Gỉa sử X $\in$D là một phương án bất kỳ. Ta có :

$$b = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j = \sum_{j \in J} x_j A_j + \sum_{k \notin J} x_k A_k = \sum_{j \in J} x_j A_j + \sum_{k \notin J} x_k \sum_{j \in J} z_{jk} A_j = \sum_{j \in J} (x_j + \sum_{k \notin J} z_{jk} x_k) A_j \quad (3.8)$$

Vì $\{A_j, j \in J\}$ độc lập tuyến tính nên từ (3.7) và (3.8) suy ra:

$$x_j^0 = x_j + \sum_{k \notin J} z_{jk} x_k (\forall j \in J)$$

Hay: $x_j = x_j^0 - \sum_{k \notin J} z_{jk} x_k \forall j \in J$ (3.9)

Khi đó, ta có:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j \in J} c_j x_j + \sum_{k \notin J} c_k x_k \qquad (3.10)$$

Thay (3.9) vào ta được :

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} (x_j^0 - \sum_{k \notin J} z_{jk} x_k) c_j + \sum_{k \notin J} c_k x_k = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 - \sum_{k \notin J} (\sum_{j \in J} z_{jk} c_j - c_k) x_k$$

Ký hiệu:

$\Delta_k = \sum_{j \in J} z_{jk} c_j - c_k (k \notin J)$ gọi là ước lượng của véc tơ cột A_k theo cơ sở J và:

$$f(X) = f(X^0) - \sum_{k \notin J} \Delta_k x_k$$

Nhận xét: Do x $\geq$ 0 nên nếu $\forall k \notin J, \Delta_k \leq 0$ thì $f(X) \geq f(X^0), \forall X \in D$ do đó ta có dấu hiệu tối ưu sau đây:

Phương án cực biên X^0 với cơ sở J là phương án tối ưu thì $\Delta_k \leq 0, \forall k \notin J$ **.**

3.2. Công thức biến đổi và bảng đơn hình

3.2.1. Công thức biến đổi

Giả sử X^0 với cơ sở J là một phương án cực biên nhưng chưa phải là phương án tối ưu, khi đó $\exists k \notin J$ sao cho $\Delta_k > 0$. Giả sử s là một chỉ số trong các chỉ số nói trên: $s \notin J, \Delta_s > 0$.

Theo thuật toán trên ta cần cải tiến X^0 để nhận được một phương án cực biên mới tốt hơn. Ta sẽ tìm một phương án cực biên mới X^1 ứng với cơ sở J^1 chỉ khác J một véc tơ : $J^1 = (J \setminus r) \cup s$, tức là ta đưa véc tơ A_s vào cơ sở thay cho véc tơ A_r bị loại ra khỏi cơ sở J.

Vì mọi thành phần ngoài cơ sở của một phương án cực biên đều bằng 0 nên phương án cực biên mới X^1 có cơ sở $J^1 = (J \setminus r) \cup s$ là:

$$x_k^1 = \begin{cases} 0 \text{ với } k \notin J, k \neq s (\text{tức là } k \notin J^1) \\ \theta \text{ với } k = s \end{cases} \qquad (3.11)$$

Trong đó θ là một số dương sẽ được xác định sau sao cho X^1 là một phương án cực biên.

* Tìm điều kiện của θ để X^1 là một phương án:

Thay (3.11) vào (3.9) ta được:

$$x_j^1 = x_j^0 - \sum_{k \notin J} z_{jk}.x_k^1 = x_j^0 - \theta z_{js} (\forall j \in J)$$

Hay $$x_j^1 = \begin{cases} 0 \text{ với } j \notin J, j \neq s (\text{tức là } j \notin J^1) \\ \theta \text{ với } j = s \\ x_j^0 - \theta z_{js} \text{ với } j \in J \end{cases} \qquad (3.12)$$

Để X^1 là một phương án thì nó phải thỏa mãn các điều kiện buộc AX=b và $X \geq 0$.

\+ Ta thấy rằng với mọi θ, ta có:

$$AX^1 = \sum_{j \in J} x_j^1 A_j + \sum_{j \notin J} x_j^1 A_j = \sum_{j \in J} (x_j^0 - \theta z_{js}) A_j + \theta A_s = \sum_{j \in J} x_j^0 A_j - \theta \sum_{j \in J} z_{js} A_j + \theta A_s = b - \theta A_s + \theta A_s = b$$

Vậy với mọi θ thì ràng buộc thứ nhất thỏa mãn. Ta chỉ cần tìm θ sao cho $X^1 \geq 0$. Có hai trường hợp xảy ra:

\+ Trường hợp 1: Nếu $z_{js} \leq 0$ với mọi j $\in$J thì $X^1 \geq 0$ với mọi $\theta > 0$ và X^1 là phương án của bài toán. Nhưng do $\Delta_s > 0$:

$$f(X^1) = f(X^0) - \sum_{k \notin J} \Delta_k x_k^1 = f(X^0) - \Delta_s \theta \to -\infty \; khi \theta \to +\infty$$

Như vậy hàm mục tiêu không bị chặn dưới trên miền ràng buộc. Khi đó bài toán không có lời giải hữu hạn.

+ Trường hợp 2: Nếu $\exists j \in J$ để $z_{js} > 0$, khi đó theo (3.12) số θ không thể lớn tùy ý, nó phải thỏa mãn $x_j^0 - \theta z_{js} \ge 0, \forall j \in J$ mà $z_{js} > 0$. Giá trị θ lớn nhất chỉ có thể bằng $\min\left\{\frac{x_j^0}{z_{js}} : j \in J \text{ mà } z_{js} > 0\right\}$

Nếu vượt qua miền đó sẽ có một trong các ($x_j^0 - \theta z_{js} < 0$) và X^1 sẽ vượt ra khỏi miền ràng buộc.

Giả sử cực tiểu trên đạt tại j = r. Lấy $\theta = \frac{x_r^0}{z_{rs}}$, thay vào (3.12) ta được:

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 \text{ với } j \notin J, j \ne s \text{ (tức là } j \notin J^1) \\ \dfrac{x_r^0}{z_{rs}} \text{ với } j = s \\ x_j^0 - \dfrac{x_r^0}{z_{rs}} z_{js} \text{ với } j \in J \end{cases} \tag{3.13}$$

Khi đó, ta có:

$$f(X^1) = f(X^0) - \Delta_s \frac{x_r^0}{z_{rs}} \tag{3.14}$$

Từ (3.14) ta thấy rằng X^1 là phương án tốt hơn X^0 nếu $\frac{x_r^0}{z_{rs}} > 0$.

* Tìm điều kiện của θ để X^1 là phương án cực biên:

Định lý 3.2.1. Phương án X^1 được xác định theo công thức (3.13) là phương án cực biên với cơ sở $J^1 = (J \setminus r) \cup s$.

Chứng minh: Theo (3.13) suy ra $x_r^1 = 0$ nên $J^+(X^1) \subseteq J^1$ với ($J^+(X) = \{j : x_j > 0\}$). Ta cần chứng minh hệ véc tơ $\{A_j, j \in J^1\}$ độc lập tuyến tính.

+ Thật vậy, giả sử $\sum_{j \in J^1} \alpha_j A_j = 0$ ta cần chứng minh $\alpha_j = 0 \forall j \in J^1$. Ta có:

$$0 = \sum_{j \in J^1} \alpha_j A_j = \sum_{j \in J, j \ne r} \alpha_j A_j + \alpha_s A_s = \sum_{j \in J, j \ne r} \alpha_j A_j + \alpha_s \sum_{j \in J} z_{js} A_j = \sum_{j \in J, j \ne r} (\alpha_j + \alpha_s z_{js}) A_j + \alpha_s z_{rs} A_r$$

Vì hệ véc tơ $\{A_j, j \in J\}$ độc lập tuyến tính, nên:

$$\begin{cases} \alpha_j + \alpha_s z_{js} = 0 \forall j \in J, j \neq r \\ \alpha_s z_{rs} = 0 \end{cases}$$

Vì $z_{rs} > 0$ nên suy ra $\alpha_s = 0$, do đó $\alpha_j = 0 (j \in J, j \neq r)$. Vậy $\alpha_j = 0 \forall j \in J^1 = (J \setminus r) \cup s$.

Vì $J^+(X^1) \subseteq J^1$ nên hệ véc tơ $\left\{ A_j, j \in J^+(X^1) \right\}$ độc lập tuyến tính. Do đó X^1 là phương án cực biên và J^1 là cơ sở của phương án cực biên X^1.

Như vậy X^1 là một phương án cực biên của bài toán.

ở trên ta đã tìm các thành phần của phương án cực biên mới X^1 cùng với giá trị hàm mục tiêu $f(X^1)$ thông qua các hệ số khai triển z_{jk} và các ước lượng Δ_k trong cơ sở J. Như vậy chúng ta cần xác định các đại lượng z^1_{jk} và Δ^1_k trong cơ sở J^1. Theo định nghĩa z_{jk} và z^1_{jk} là các hệ số khai triển của véc tơ A_k tương ứng với cơ sở J, J^1.

$$A_k = \sum_{j \in J} z_{jk} A_j = \sum_{j \in J^1} z^1_{jk} A_j \ (*)$$

$$\sum_{j \in J} z_{jk} A_j = \sum_{j \in J, j \neq r} z_{jk} A_j + z_{rk} A_r \ (**)$$

Từ

$$A_s = \sum_{j \in J} z_{js} A_j = \sum_{j \in J, j \neq r} A_j z_{js} + z_{rs} A_r \text{vì } z_{rs} > 0 \text{ta có } A_r = \frac{1}{z_{rs}} \left(A_s - \sum_{j \in J, j \neq r} z_{js} A_j \right).$$

Thay vào (**) ta được:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} z_{jk} A_j &= \sum_{j \in J, j \neq r} z_{jk} A_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}} (A_s - \sum_{j \in J, j \neq r} z_{js} A_j) \\ &= \sum_{j \in J, j \neq r} (z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} . z_{js}) A_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}} . A_s \end{aligned} \quad (***)$$

Vì $\left\{ A_j, j \in J^1 \right\}$ độc lập tuyến tính nên từ (*) và (**) suy ra:

$$x^1_{jk} = \begin{cases} \dfrac{z_{rk}}{z_{rs}} \text{ với } j = s \\ z_{jk} - \dfrac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js} \text{ với } j \in J, j \neq r \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\Delta^1_k = \sum_{j \in J^1} z^1_{jk} c_j - c_k = \sum_{j \in J, j \neq r} \left(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js} \right) c_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}} c_s - c_k$$

$$= \sum_{j \in J} \left(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js} \right) c_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}} c_s - c_k (\text{vì v?i j=r thì } \left(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js} \right) = 0)$$

$$=(\sum_{j\in J} z_{jk}c_j - c_k) - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}\sum_{j\in J} z_{js}c_j - c_s) = \Delta_k - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}\Delta_s.$$

Vậy: $\Delta_k^1 = \Delta_k - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}\Delta_s$.

3.2.2. Bảng đơn hình

Để thuận tiện cho việc tính toán, người ta sắp xếp các số liệu thành một bảng gọi là bảng đơn hình như dưới đây:

Cơ sở	Hệ số	Phương án	1 c_1	2... c_2...	....	k... c_k...	s.... c_s...	**n** $\mathbf{c_n}$
j_1	c_{j_1}	x_{j_1}	$z_{j_1 1}$	$z_{j_1 2}$	...	$z_{j_1 k}$ ...	$z_{j_1 s}$ ...	$z_{j_1 n}$
j_2	c_{j_2}	x_{j_2}	$z_{j_2 1}$	$z_{j_2 2}$	...	$z_{j_2 k}$ ...	$z_{j_2 s}$ ...	$z_{j_2 n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
j_r	c_{j_r}	x_{j_r}	$z_{j_r 1}$	$z_{j_r 2}$	...	$z_{j_r k}$ ...	$z_{j_r s}$ ...	$z_{j_r s}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
j_m	c_{j_m}	x_{j_m}	$z_{j_m 1}$	$z_{j_m 2}$	...	$z_{j_m k}$ ...	$z_{j_m s}$ ...	$z_{j_m s}$
		f(X)	Δ_1	Δ_2 ...	...	Δ_k	Δ_s...	Δ_n

Các cột ứng với $j\in J$ sẽ là các véc tơ đơn vị với số 1 trên dòng với chỉ số j.

3. Thuật toán đơn hình

3.3.1. Thuật toán

Bước xuất phát: Tìm một phương án cực biên X^0 và cơ sở J tương ứng . Tìm các hệ số khai triển z_{jk} và các ước lượng Δ_k.

Bước 1: Kiểm tra dấu hiệu tối ưu

- Nếu $\Delta_k \le 0 \forall k \notin J$ thì X^0 là phương án tối ưu. Thuật toán kết thúc.

- Nếu $\exists \Delta_k > 0$ thì chuyển sang bước 2.

Bước 2: Kiểm tra dấu hiệu hàm mục tiêu giảm vô hạn: Với mỗi $k \notin J$ mà $\Delta_k > 0$ thì kiểm tra các hệ số khai triên$_{jk}$ của cột A_k tương ứng:

a) Nếu có một $\Delta_k > 0$ mà tất cả $z_{jk} \le 0$ $\forall j \in J$ thì kết luận hàm mục tiêu giảm vô hạn trên miền ràng buộc. Bài toán không có lời giải hữu hạn. Thuật toán kết thúc.

b) $\forall k \notin J$ mà $\Delta_k > 0$ đều tồn tại ít nhất một hệ số z_{jk}>0 thì chuyển sang bước 3

Bước 3: Xác định cột xoay, dòng xoay, phần tử trục

- Chọn chỉ số $s \notin J : \Delta_s = \max\{\Delta_k > 0, k \notin J\}$, đánh dấu ***cột s*** là ***cột xoay***

- Tìm chỉ số r đạt min: $\theta = \dfrac{X_r^0}{z_{rs}} = \min\left\{\dfrac{X_j^0}{z_{js}}, z_{js} > 0\right\}$, đánh dấu hàng r là hàng xoay.

Bước 4: Tính các $X_j^1, f(X^1), \Delta_k^1, z_{jk}^1$ trong cơ sở mới $J^1 = (J \setminus r) \cup s$ theo các công thức trên. Ghi nhận các kết quả trong một bảng mới. Quay trở lại bước 1.

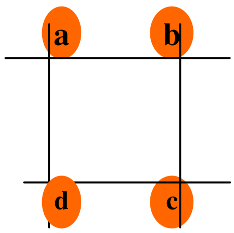
- Để nhận được bảng đơn hình mới từ bảng đơn hình cũ ta làm như sau:

+ Thay X_r bằng X_s, c_r bằng c_s.

+ Chia các phần tử trên hàng xoay (hàng r) cho phần tử trục z_{rs} ta được hàng r mới gọi là hàng chuẩn.

+ Mỗi phần tử khác ngoài hàng xoay trừ đi tích của phần tử cùng hàng với nó trên cột xoay với phần tử cùng cột với nó trên hàng chuẩn được phần tử cùng vị trí trong bảng đơn hình mới.

$$a' = a - \frac{bd}{c}$$



3.3.2. Ví dụ

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(X) = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \to \min$$

với điều kiện: $$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 - x_6 = 2 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 12 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

Giải: Ta thấy X^0 = (2;12;9;0;0;0) là một phương án cực biên của bài toán (sinh viên tự kiểm tra) với cơ sở J = {1;2;3}. A_J là ma trận cơ sở. Do đó, ta có bảng đơn hình xuất phát sau:

J	x_J	x_J	1 1	2 -1	3 0	4 -2	5 2	**6** **-3**
1	1	2	1	0	0	1	1	**-1**
2	-1	12	0	1	0	1	0	**1**
3	0	9	0	0	1	2	4	**3**

		-10	**0**	**0**	**0**	**2**	**-1**	**1**

Các bước của thủ tục đơn hình:

+ Bước 1: có $\Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0$ nên chuyển sang bước 2.

+ Bước 2: Trên cột 4 và cột 6 tồn tại $z_{jk} > 0$ nên ta chuyển sang bước 3

+ Bước 3: Đổi cơ sở:

Chọn chỉ số s: $\Delta_4 = \max\{\Delta_4 = 2, \Delta_6 = 1\}$, chọn cột 4 làm cột xoay (đưa A_4 vào cơ sở)

Chọn chỉ số r: $\theta = \min\left\{\frac{2}{1}; \frac{12}{1}; \frac{9}{2}\right\} = \frac{2}{1} = \frac{x_1}{z_{14}} \Rightarrow r = 1$, chọn hàng 1 làm hàng xoay (đưa A_1 ra ngoài cơ sở). Phần tử trục là $z_{14} = 1$.

+ Bước 4: Tính toán theo các công thức đổi cơ sở ta được bảng sau:

J	c_J	x_J	1 1	2 -1	3 0	4 -2	5 2	**6** **-3**
4	-2	2	1	0	0	1	1	**-1**
2	-1	10	-1	1	0	0	-1	**2**
3	0	5	-2	0	1	0	2	**5**
		-14	-2	0	0	0	-3	**3**
cột xoay: 6, dòng xoay: 3, phần tử trục: $z_{36} = 5$								
4	-2	3	3/5	0	1/5	1	7/5	**0**
2	-1	8	-1/5	1	-2/5	0	-9/5	**0**
6	-3	1	-2/5	0	1/5	0	2/5	**1**
		-17	**-4/5**	**0**	**-3/5**	**0**	**-21/5**	**0**

Vậy phương án tối ưu là $X^*=(0;8;0;2;0;1)$ và $f(X^*) = -17$.

3.4. Tìm phương án cực biên xuất phát

a) Nội dung phương pháp: Xây dựng bài toán mới là bài toán biến giả hay bài toán "M" từ bài toán đang xét. Bài toán "M " có ngay phương án cực biên xuất phát và có đủ điều kiện áp dụng thuật toán đơn hình để giải, đồng thời từ kết quả của bài toán "M" đưa ra được kết luận cho bài toán đang xét.

b) Xây dựng bài toán "M"

Xét bài toán chính tắc:

$$f(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \to \min \qquad (3.16)$$

với điều kiện $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i=\overline{1,\ldots,m}; & (3.17) \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}; & (3.18) \end{cases}$

Bài toán (3.16)-(3.18) gọi là bài toán đầu. Gỉa thiết $b_i \ge 0$ ($i=\overline{1,m}$) và ma trận các hệ số trong hệ ràng buộc (3.17) $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$ không chứa véc tơ đơn vị nào. Bài toán "M" được xây dựng như sau:

Thêm vào vế trái của phương trình thứ i ($i=\overline{1,m}$) trong hệ ràng buộc (3.17) một biến giả $x_{n+i} \ge 0 (i=\overline{1,m})$. Hệ số của các biến giả này trên hàm mục tiêu đều bằng M, với M là số dương lớn tùy ý (M>0), bài toán "M" có dạng:

$$f(\overline{X})=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j + M\sum_{i=1}^{m}x_{n+i} \to \min$$

Với điều kiện: $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i (i=\overline{1,m}) \\ x_j \ge 0 (j=\overline{1,n}) \end{cases}$

Bài tóan "M" có ngay phương án cực biên xuất phát:

$\overline{X}^0=(0;0;....;0;b_1;b_2;.....b_m)$ với cơ sở J_0 là: $E_m=(A_{n+1}; A_{n+2};....;a_{n+m})$;

$J_0 = \{n+1; n+2; ....;n+m\}$

Do vậy áp dụng được thuật toán đơn hình để giải bài toán "M".

Từ cách xây dựng bài toán "M" như trên ta thấy:

Nếu $\overline{X}^0=(x_1;x_2;.....x_n;0;0;....;0)$ là phương án của bài toán "M" thì $X=(x_1;x_2;....;x_n)$ là phương án của bài toán ban đầu và ngược lại, đồng thời $f(X)=f(\overline{X})$.

c) Mối quan hệ giữa bài toán "M" và bài toán ban đầu

Nếu bài toán "M" có:

$\overline{X}^*=\left[x_1^*,x_2^*,....,x_n^*,0,0,....,0\right]$ thì bài toán ban đầu có $X^*=\left[x_1^*,x_2^*,....,x_n^*\right]$ và $f(\overline{X}^*)=f(X^*)$.

Nếu bài toán "M" có $\overline{X}^*=\left[x_1^*,x_2^*,....,x_{n+m}^*\right]$ trong đó tồn tại ít nhất một ${x_{n+i}}^* \ge 0 (i=\overline{1,m})$ thì bài toán ban đầu không có phương án nào.

Nếu bài toán "M" vô nghiệm thì bài toán ban đầu cũng vô nghiệm.

d) Ví dụ

Giải bài toán sau:

$$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min$$

với điều kiện: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$

Giải:

Trong ma trận hệ số ràng buộc không chứa véc tơ đơn vị nào nên ta lập bài toán "M" sau:

$$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + M(x_5 + x_6 + x_7) \to \min$$

với điều kiện: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_6 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 7 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7};\ M >> 0 \end{cases}$

Bài toán "M" có phương án cực biên xuất phát là $\overline{X}^0 = (0;0;0;0;2;6;7)$ với cơ sở $\{A_5; A_6; A_7\}$. Do đó, ta có bảng đơn hình sau:

J	c_J	x_j	1 2	2 1	3 -1	4 -1	5 M	6 M	**7** **M**
5	M	2	1	-1	2	-2	1	0	**0**
6	M	6	2	1	-3	1	0	1	**0**
7	M	7	1	1	1	1	0	0	**1**
		15M	4M-2	M-1	1	1	0	0	**0**
Cột xoay: 1, dòng xoay: 5, phần tử trục z_{51}= 1									
1	2	2	1	-1	2	-1		0	**0**
6	M	2	0	3	-7	3		1	**0**
7	M	5	0	2	-1	2		0	**1**
		7M+4	0	5M-3	-8M+5	5M-1		0	**0**
Cột xoay: 4 , dòng xoay: 6, phần tử trục z_{64}= 3									
1	2	8/3	1	0	-1/3	1			**0**
4	-1	2/3	0	1	-7/3	0			**0**
7	M	11/3	0	0	11/3	0			**1**
		$\frac{11M+14}{3}$	0	-2	$\frac{11M+8}{3}$	0			**0**
Cột xoay: 3, dòng xoay: 7, phần tử trục z_{37}= 11/3									

1	2	3	1	0	0	0			
4	-1	3	0	1	1	0			
3	-1	1	0	0	0	1			
		2	**0**	**-2**	**0**	**0**			

Bảng đơn hình cuối cùng có các $\Delta_k \le 0, k=\overline{1,7}$, do đó bài toán "M" có phương án tối ưu $\overline{X}^* = (3;0;1;3;0;0;0)$ và $f(\overline{X^*})=2 \Rightarrow X^*=(3;\ 0;\ 1;\ 3)$ và $f(X^*)= f(\overline{X^*})=2$.

3.5. Tính hữu hạn của thuật toán đơn hình

Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án và không suy biến thì sau hữu hạn bước lặp theo thủ tục đơn hình ta sẽ tìm thấy phương án tối ưu hoặc phát hiện ra bài toán có hàm mục tiêu giảm vô hạn hay bài toán không có lời giải hữu hạn.

Thật vậy, vì bài toán không suy biến nên $x_j^0 > 0 \forall j \in J$ nên $\theta = \dfrac{x_r^0}{z_{rs}} > 0$ suy ra $X^1 \ne X^0$, $f(X^1)<f(X^0)$, nghĩa là X^1 thực sự tốt hơn X^0. Sau mỗi bước lặp, nếu không xảy ra trường hợp hàm mục tiêu giảm vô hạn thì ta tìm được một phương án mới thực sự tốt hơn phương án cũ, tức là không bao giờ trở lại phương án đã đi qua. Vì số phương án cực biên là hữu hạn nên sau hữu hạn bước lặp ta phải tìm được phương án cực biên tối ưu.

Bài tập chương 3

Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình:

Bài 1.

a)
$$2x_1 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 - x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 8 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,6} \end{cases}$$

b)
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,6} \end{cases}$$

Bài 2.

a)
$$7x_1 - 21x_2 + 14x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + -3x_2 + x_3 \ge 6 \\ x_1 + 7x_2 - 3x_3 \le 1 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$$

b)
$$x_1 + 2x_2 - 2x_4 - x_5 - 3x_6 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_6 = 2 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 12 \\ 4x_1 + x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 9 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,6} \end{cases}$$

Bài 3.

a) $$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \le 7 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 \le 3 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

b) $$-5x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 3x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_3 + 8x_4 \le 25 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_3 - 3x_4 \ge -13 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Bài 4.

a) $$2x_1 + 7x_2 - 5x_3 + \frac{9}{2}x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 14 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 \le 8 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_3 - 3x_4 \ge -20 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

b) $$6x_2 + 4x_4 + x_5 + x_6 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 2x_5 + x_6 = 14 \\ -4x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 21x_4 + 5x_5 - 2x_6 = -45 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 = -15 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

CHƯƠNG 4. CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH ĐẶC BIỆT

4.1. Phương pháp đơn hình cải biên

4.1.1. Ý tưởng của phương pháp

Như ta đã biết tư tưởng của phương pháp đơn hình là xuất phát từ một phương án cực biên X^0, ta tiến hành đánh giá X^0, nếu X^0 chưa tối ưu, ta đi xây dựng một phương án cực biên mới X^1 tôt hơn X^0. Phương pháp đơn hình cải biên là phương pháp được xây dựng dựa trên phương pháp đơn hình thông qua một số cải tiến . Ta tiến hành cải tiến như sau:

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Trong đó các $b_i \geq 0, \forall i = \overline{1,n}$ và giả sử X^0 là phương án cực biên ứng với hệ véc tơ cơ sở $\{A_j\}_{j\in J}$, A_j là các véc tơ đơn vị. Đặt $B = \{A_j\}_{j\in J} = E$

Ta có: $A_k = \sum_{j\in J_0} z_{jk} A_j = Bz_k \Rightarrow z_k = B^{-1} A_k$

Ta kí hiệu ma trận $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}$ và cột thứ k của ma trận **A** là $\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} A_k \\ -c_k \end{pmatrix}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ -c^* & 1 \end{pmatrix} \text{ và } \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ c^* B^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

trong đó $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$, $c^* = (c_1, c_2, ..., c_m)$

Như vậy:

$$\Delta_k = c^*.z_k - c_k = c^* B^{-1} A_k - c_k = (c^* B^{-1}, 1) \times \begin{pmatrix} A_k \\ -c_k \end{pmatrix}$$

= tích hàng m+1 của ma trận $\mathbf{B}^{-1}$ với cột $\mathbf{A}_k$ của ma trận **A**

$$z_k = B^{-1} A_k = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_k \\ -c_k \end{pmatrix}$$

Việc tính tất cả các cột của bảng đơn hình là không cần thiết, do đó ta có bảng đơn hình cải tiến như sau:

J	c_J	x_J	B^{-1}	z_s	Δ_k $(k \notin J)$
j_1	c_{j_1}	x_{j_1}	1 0 .... 0 0		
j_2	c_{j_2}	x_{j_2}	0 1 ....0 0		k
...	...	...	....		Δ_k
j_m	c_{j_m}	x_{j_m}	0 0 ....0 0		
		f(X)	**c_1 c_2 ....c_n 1**	Δ_s	

4.1.2. Thuật toán đơn hình cải biên

Bước xuất phát: Chọn cơ sở đơn vị, xác định phương án cực biên X^0

+ Ghi ma trận A

+ Lập bảng đơn hình xuất phát, xác lập ma trận $\mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ c^*B^{-1} & 1 \end{pmatrix}$

+ Tính $\Delta_k\,(k \notin J)$

Bước 1: Kiểm tra dấu hiệu tối ưu

+ Nếu $\Delta_k \le 0\ \forall k$ thì X^0 tối ưu

+ Ngược lại chuyển sang bước 2

Bước 2: Kiểm tra dấu hiệu hàm mục tiêu giảm vô hạn

+ Nếu $\exists \Delta_k > 0$ mà $z_{jk} \le 0\ \forall j$ thì $f(x) \longrightarrow -\infty$ và bài toán vô nghiệm.

+Ngược lại chuyển sang bước 3

Bước 3: Xác định cột xoay, dòng xoay và phần tử trục :

+ Xác định s: $\Delta_s = Max\{\Delta_k > 0\}$ ghi z_s vào cột tương ứng.

+ Xác định r: Loại véc tơ A_r với $\dfrac{x_r^0}{z_{rs}} = Min\left\{\dfrac{x_j^0}{z_{js}} : z_{js} > 0\right\}$

Bước 4: Xây dựng bảng đơn hình mới (tính toán như trong phương pháp đơn hình). Sau đó quay trở lại bước 1.

4.1.3. Các ví dụ

Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình cải biên

Ví dụ 1. $f(x) = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to Min$

Với điều kiện: $\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2 \; x_j \geq 0 \forall j = \overline{1,6} \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6 \end{cases}$

Giải: Chọn cơ sở liên kết A_4, A_2, A_5 là các véc tơ đơn vị nên ta có các $z_{ij} = a_{ij}$ và phương án cực biên xuất phát $X^0 = (0;2;0;9;6;0)$ cùng với bảng đơn hình cải biên và ma trận **A** như sau :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

J	c_J	x_J	B^{-1}				z_s	Δ_k $(k \notin J)$			
4	1	9	1	0	0	0	6	k	1	3	6
2	-1	2	0	1	0	0	**2**	Δ_k	-2	5	7⇑
5	1	6	0	0	1	0	2				
		13	1	-1	1	1	7				
cột xoay: 6, dòng xoay: 2, phần tử trục: 2											
4	1	3	1	-3	0	0	**12**	k	1	2	3
6	-1	1	0	1/2	0	0	-2	Δ_k	-25/2	-7/2	19⇑
5	1	4	0	-1	1	0	6				
		6	1	-9/2	1	1	19				
cột xoay: 3, dòng xoay: 4, phần tử trục: 12											
3	1	1/4	1/12	-1/4	0	0	-1/4	k	1	2	4
6	-1	3/2	1/6	0	0	0	0	Δ_k	1/6	5/4⇑	-3/4
5	1	5/2	-1/2	1/2	1	0	**1/2**				
		5/4	-7/12	1/4	1	1	5/4				
cột xoay: 2, dòng xoay: 5, phần tử trục: 1/2											
3	1	3/2	-1/6	0	1/2	0		k	1	4	5
6	-1	3/2	1/6	0	0	0		Δ_k	-29/6	-1/3	-5/2

2	-1	5	-1	1	2	0		
		-5	2/3	-1	-3/2	1		

Ta thấy $\Delta_k \le 0 \forall k$, được phương án tối ưu là: x = (0, 5, 3/2, 0, 0, 3/2) và f_{min} = -5

Ví dụ 2. $f(x) = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to Min$

Với điều kiện: $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 5x_4 + x_5 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_j \ge 0 \forall j = \overline{1,5} \end{cases}$

Giải:

Chọn cơ sở liên kết A_3, A_5, A_2 là các véc tơ đơn vị nên ta có các $z_{ij} = a_{ij}$ và phương án cực biên xuất phát $X^0 = (0;5;6;0;3)$ cùng với bảng đơn hình cải biên và ma trận A như sau :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

J	c_J	x_J	B^{-1}				z_s	Δ_k $(k \notin J)$			
3	1	6	1	0	0	0	1	k	1	4	
5	1	3	0	1	0	0	**5**	Δ_k	-1	4⇑	
2	-1	5	0	0	1	0	1				
		4	1	1	-1	1	4				
cột xoay: 4, dòng xoay: 5, phần tử trục: 5											
3	1	27/5	1	-1/5	0	0		k	1	5	
4	1	3/5	0	1/5	0	0		Δ_k	-13/5	-4/5	
2	-1	22/5	0	-1/5	1	0					
		8/5	1	1/5	-1	1					

Ta thấy $\Delta_k \le 0 \forall k$, được phương án tối ưu là: $x = (0, 22/5, 27/5, 3/5, 0)$ và $f_{min} = 8/5$

Ví dụ 3. $f(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 \to Min$

Với điều kiện: $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 + 7x_5 = 8 \\ x_3 + 5x_4 + x_5 \le 7 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ x_j \ge 0 \forall j = \overline{1,5} \end{cases}$

Giải:

Ta chuyển về dạng chính tắc:

$$f(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 \to Min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 + 7x_5 = 8 \\ x_3 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 7 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ x_j \ge 0 \forall j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Chọn cơ sở liên kết A_1, A_6, A_2 là các véc tơ đơn vị nên ta có các $z_{ij} = a_{ij}$ và phương án cực biên xuất phát cùng với bảng đơn hình cải biên và ma trận A như sau :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -1 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

J	c_J	x_J	B^{-1}				z_s	Δ_k $(k \notin J)$			
1	1	8	1	0	0	0	2	k	3	4	5
6	0	7	0	1	0	0	1	Δ_k	15⇑	3	-3
2	3	3	0	0	1	0	**4**				
		13	1	0	3	1	15				
cột xoay: 3, dòng xoay: 2, phần tử trục: 4											
1	1	13/2	1	0	-1/2	0	**8**	k	2	4	5
6	0	25/4	0	1	-1/4	0	3/2	Δ_k	-15/4	-3/4	9/2⇑
3	-1	3/4	0	0	1/4	0	-1/2				
		23/4	1	-1	-3/4	1	9/2				
cột xoay: 5, dòng xoay: 1, phần tử trục: 8											
5	4	13/16	1/8	0	-1/16	0	**8**	k	1	2	4
6	0	161/32	-3/16	1	-5/32	0	3/2	Δ_k	-9/16	-111/32	-33/32
3	-1	37/32	1/16	0	7/32	0	-1/2				

		67/32	7/16	-1	-15/32	1	9/2	

Ta thấy $\Delta_k \le 0 \forall k$, được phương án tối ưu là: $x = (0,0,37/32,0,13/16)$ và $f_{min} = 67/32$

4.2. Phương pháp đơn hình đối ngẫu

4.2.1. Cơ sở lý luận

Xét bài toán chính tắc

$f(X) \to Min$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $g(Y) \to Max$

(I) $\begin{cases} AX = b \\ X \ge 0 \end{cases}$ ta có bài toán đối ngẫu $(\tilde{I})$ $\begin{cases} YA \le c \\ Y \in R^m \end{cases}$

giả sử X^0 là phương án cực biên ứng với hệ véc tơ cơ sở $\{A_j : j \in J\}$, A_j là các véc tơ đơn vị, , $B = (A_j)_{j \in J}$, $c^* = (c_j)_{j \in J}$. Xét $y = c^* B^{-1}$

Mệnh đề 1: $y = c^* B^{-1}$ là phương án của bài toán $(\tilde{I})$ khi và chỉ khi $\Delta_k = c^*.z_k - c_k \le 0 \forall k$

Chứng minh:

y là phương án $yA \le c \Leftrightarrow yA_k \le c_k \forall k \Leftrightarrow yA_k = c^* B^{-1} A_k = c^* z_k \le c_k \Leftrightarrow \Delta_k \le 0 \forall k$

Mệnh đề 2: Nếu tại phương án $Y = c^* B^{-1}$ có được $X = B^{-1} b \ge 0$ thì X là phương án tối ưu (và y cũng là phương án tối ưu)

Nếu X không thỏa mãn $X = B^{-1} b \ge 0$ thì X được gọi là một giả phương án tối ưu (Vì có $\Delta_k \le 0 \forall k$)

Chứng minh:

Rõ ràng $Ax = AB^{-1} b = b$ và $x \ge 0$ nên $x = B^{-1} b$ là phương án. Kết hợp $\Delta_k \le 0 \forall k$ nên x là phương án tối ưu.

Mệnh đề 3: Kí hiệu ω_i là hàng thứ i của ma trận B^{-1}. Với mọi $\beta \ge 0$, ta có $y' = y - \beta\omega_i$ là phương án của $(\tilde{I})$ khi và chỉ khi $\Delta_j \le \beta z_{ij} \; \forall j$

Chứng minh:

$y' = y - \beta\omega_i$ là phương án của $(\tilde{I}) \Leftrightarrow y'A = yA - \beta\omega_i A \Leftrightarrow y'A_j = yA_j - \beta\omega_i A_j$

$\Leftrightarrow y'A_j = yA_j - \beta\omega_i A_j \Leftrightarrow c^* B^{-1} A_j - \beta\omega_i A_j \le c_j \Leftrightarrow c^* B^{-1} A_j - \beta z_{ij} \le c_j \Leftrightarrow \Delta_j + c_j - \beta z_{ij} \le c_j$

$\Leftrightarrow \Delta_j \le \beta z_{ij}$

Mệnh đề 4: Nếu tại phương án $Y = c^* B^{-1}$ tồn tại $x_s < 0$ (trong $X = B^{-1}b$) và $z_{sj} \geq 0 \forall j$ thì hàm mục tiêu của bài toán $(\tilde{I})$ không bị chặn trên tập phương án, do đó $(\tilde{I})$ không có phương án tối ưu và (I) cũng vô nghiệm.

Chứng minh:

Với mọi $\beta \geq 0$, ta có $y' = y - \beta\omega_i$ thỏa mãn $\Delta_j \leq \beta z_{ij} \forall j \Rightarrow y'$ là phương án.

$\Rightarrow \tilde{f}(y') = y'b = yb - \beta\omega_i b = \tilde{f}(y) - \beta\omega_i b = \tilde{f}(y) - \beta x_i$

Lấy i = r và cho $\beta \to +\infty \Rightarrow \tilde{f}(y') \to +\infty$. Vậy hàm mục tiêu không bị chặn nên bài toán không giải được.

Mệnh đề 5: Nếu tại phương án $Y = c^* B^{-1}$ tồn tại $x_r < 0$ (trong $X = B^{-1}b$) và tồn tại $z_{rj} < 0$ thì xây dựng được phương án mới $Y' = Y - \beta_0\omega_r$ (trong đó $\beta_0 = Min\left\{\frac{\Delta_j}{z_{rj}} : z_{rj} < 0\right\} = \frac{\Delta_s}{z_{rs}}$) tốt hơn Y.

Chứng minh:

Giả sử trong $x = B^{-1}b$ có $x_r < 0$. Ta có y' là phương án $\Leftrightarrow \beta \geq 0$ và $\Delta_j \leq \beta z_{ij} \forall j \Leftrightarrow 0 \leq \beta \leq \frac{\Delta_j}{z_{rj}} \forall j = \overline{1,n}; z_{rj} < 0$. Chọn $\beta_0 = Min\left\{\frac{\Delta_j}{z_{rj}} : z_{rj} < 0\right\} = \frac{\Delta_s}{z_{rs}}$, hiển nhiên $\beta_0 \geq 0$ và $\tilde{f}(y') = y'b = yb - \beta_0 x_r \geq yb = \tilde{f}(y) \Rightarrow y'$ tốt hơn y. Đpc/m

**** Nhận xét:***

Từ các mệnh đề trên ta có nhận xét:

+ Nếu có nhiều $x_r < 0$ thì ta có thể chọn $x_r = Min\{x_r < 0\}$. khi đó véc tơ A_r được đưa ra khỏi cơ sở.

+ Từ việc chọn $\beta_0 = Min\left\{\frac{\Delta_j}{z_{rj}} : z_{rj} < 0\right\} = \frac{\Delta_s}{z_{rs}}$ nên ta sẽ đưa A_s vào cơ sở của phương án mới.

+ Việc xây dựng các số liệu khác được biến đổi trên bảng đơn hình như cách thông thường.

+Cấu trúc bảng đơn hình đối ngẫu:

J	c_J	Giả p.a	**1 2 ....m.................n**

		x_J	c_1 c_2 ....c_m ....c_n
j_1	c_{j_1}	x_{j_1}	1 0 ....0.................
j_2	c_{j_2}	x_{j_2}	0 1 ....0.................
...	...	...	....
j_m	c_{j_m}	x_{j_m}	0 0 ....1.................
			Δ_1 Δ_2 .... Δ_m .... Δ_n

4.2.2. Thuật toán đơn hình đối ngẫu

Bước xuất phát: Xuất phát từ hệ m véc tơ độc lập tuyến tính, có $B = \left(A_j\right)_{j\in J} = E$, $|J| = m$ sao cho $\Delta_j \le 0 \forall j$. Tìm $X = (X^*, 0)$, trong đó $X^* = c^* B^{-1}; x_j = 0 \forall j \notin J$

Lập bảng đơn hình đối ngẫu xuất phát.

Bước 1: Kiểm tra dấu hiệu tối ưu

+ Nếu $x_j \ge 0 \forall j \in J$ thì X tối ưu

+ Ngược lại, chuyển sang bước 2

Bước 2: Kiểm tra dấu hiệu bài toán vô nghiệm

+ Nếu $\exists x_j < 0$ và $z_{ij} \ge 0$ $\forall j = \overline{1,n}$ thì bài toán vô nghiệm.

+ Ngược lại chuyển sang bước 3

Bước 3: Xác định dòng xoay, cột xoay, phần tử trục

+ Nếu $\exists x_j < 0$ và $\exists z_{ij} < 0$ thì chọn $x_r = Min\{x_r < 0\}$. Khi đó véc tơ A_r được đưa ra khỏi cơ sở. Dòng r là ***dòng xoay***

+ Tính $\beta_0 = Min\left\{\dfrac{\Delta_j}{z_{rj}} : z_{rj} < 0\right\} = \dfrac{\Delta_s}{z_{rs}}$ nên ta sẽ đưa A_s vào cơ sở thay thế cho A_r.

Cột s là ***cột xoay***

Bước 4: Xây dựng bảng đơn hình mới (tính toán như trong phương pháp đơn hình)

Sau đó quay trở lại bước 1.

4.2.3. Các ví dụ

Ví dụ 1

$$f(X) = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ -x_1 - x_4 + x_6 = -3 \\ 4x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Giải: Xét cơ sở A_3, A_5, A_2 gồm các véc tơ đơn vị. Khi đó ma trận B là:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, ta được giả phương án X = (0, 5, 6, 0, 0, -3)

Bảng đơn hình đối ngẫu là:

J	c_J	Giả p.a x_J	1	2	3	4	5	6
			1	-1	1	1	1	0
3	1	6	2	0	1	-1	3	0
6	0	-3	-1	0	0	-1	0	1
2	-1	5	4	1	0	-1	2	0
			-3	0	0	-1	0	0
dòng xoay: 6; cột xoay: 4; phần tử trục: -1								
3	1	9	3	0	1	0	3	-1
4	1	3	1	0	0	1	0	-1
2	-1	8	5	1	0	0	2	-1
		4	-2	0	0	-1	0	0

Tại đây ta có X≥ 0 nên nó là phương án tối ưu, với X = (0, 8, 9, 3, 0, 0) và $f_{Min} = 4$

Ví dụ 2

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow Min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 11 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 \geq 8 \\ x_j \geq 0\ (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Đưa về dạng chính tắc

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow Min$$

$$\begin{cases} x_1+x_3-x_4=2 \\ -x_1+2x_2+x_4+x_5=11 \\ 2x_1+x_2-3x_4-x_6=8 \\ x_j \ge 0\,(j=\overline{1,6}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_3-x_4=2 \\ -x_1+2x_2+x_4+x_5=11 \\ -2x_1-x_2+3x_4+x_6=-8 \\ x_j \ge 0\,(j=\overline{1,6}) \end{cases}$$

Như vậy ta có hệ véc tơ cơ sở $\{A_3, A_5, A_6\} \Rightarrow x^0=(0,0,2,0,11,-8)$ (luôn có $\Delta_k \le 0\ \forall k$). Ta có bảng đơn hình đối ngẫu:

J	c_J	Giả p.a x_J	1	2	3	4	5	6
			1	-1	1	1	1	0
3	2	2	1	0	1	-1	0	0
5	0	11	-1	2	0	1	1	0
6	0	-8	-2	-1	0	3	0	1
			-2	-3	0	-5	0	0
dòng xoay: 6; cột xoay: 1; phần tử trục: -2								
3	1	-2	0	-1/2	1	1/2	0	1/2
5	0	15	0	5/2	0	-1/2	1	-1/2
1	4	4	1	1/2	0	-3/2	0	-1/2
			0	-2	0	-10	0	-1
dòng xoay: 3; cột xoay: 2; phần tử trục: -1/2								
2	3	4	0	1	-2	-1	0	-1
5	0	5	0	0	5	2	1	2
1	4	2	1	0	1	-1	0	0
		20	0	0	-4	-8	0	-3

Tại đây ta có $x \ge 0$ nên nó là phương án tối ưu, với $x=(2,4,0,0,5,0)$ và $f_{Min}=20$

Bài tập chương 4

Giải bằng phương pháp đơn hình cải tiến các bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

1) $F(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 4x_6 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 6 \\ x_2 - x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_1 >= 0,\ x_2 >= 0,\ x_3 >= 0,\ x_4 >= 0,\ x_5 >= 0,\ x_6 >= 0 \end{cases}$$

ĐS: (1,1,0,0,2,0)

2) $F(x) = 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_6 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_5 = 8 \\ x_1 + 3x_3 - x_5 + x_6 = 9 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ x_1 >= 0,\ x_2 >= 0,\ x_3 >= 0,\ x_4 >= 0,\ x_5 >= 0,\ x_6 >= 0 \end{cases}$$

ĐS: (0,13/2,3/2,0,0,9/2)

3) $F(x) = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + x_5 + 4x_6 = 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 9 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 5 \\ x_1 >= 0,\ x_2 >= 0,\ x_3 >= 0,\ x_4 >= 0,\ x_5 >= 0,\ x_6 >= 0 \end{cases}$$

ĐS: (7/2,11/2,0,3/2,0,0)

4) $F(x) = x_1 - x_2 - x_3 + x_5 + 3x_6 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_5 + 3x_6 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_4 + x_6 = -8 \\ x_1 + x_3 + 3x_6 = 6 \\ x_1 >= 0,\ x_2 >= 0,\ x_3 >= 0,\ x_4 >= 0,\ x_5 >= 0,\ x_6 >= 0 \end{cases}$$

Giải bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu các bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

5) $f(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \rightarrow Min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_4 \ge 8 \\ -3x_2 + x_3 - 4x_4 \le 18 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \ge 20 \\ x_j \ge 0\ (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$ ĐS: $x = (0, 0, 12, 4, 0, 22, 0)$

6) $f(x) = 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 + x_4 \rightarrow Min$

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + 3x_4 \geq 10 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 7 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$ ĐS: Vô nghiệm

7) $f(x) = -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 + 5x_5 \to Min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 6 \\ -2x_2 + x_3 - 4x_5 \leq 15 \\ 5x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq 18 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$ ĐS: $x = (0, 3, 0, 3, 0, 21, 0)$

8) $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to Min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 21 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 27 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 8 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$ ĐS: $x = (0, 6, 5, 0, 0, 0, 26)$

9) $f(x) = 5x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 + 2x_6 \to Min$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_5 - 3x_6 \geq 18 \\ -9x_1 + x_2 - x_5 + 2x_6 = 11 \\ 6x_1 - 5x_3 + x_4 + 3x_5 - 4x_6 = 24 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$ ĐS: $x = (2, 33, 0, 0, 4, 0, 0)$

CHƯƠNG 5. BÀI TOÁN VẬN TẢI

5.1. Nội dung và đặc điểm của bài toán

5.1.1. Nội dung bài toán

a) Bài toán

Có m địa điểm A_1, A_2,...,A_m cùng sản xuất một loại hàng hóa với các lượng hàng tương ứng là a_1, a_2,…,a_m.

Có n nơi tiêu thụ loại hang đó B_1,B_2,…,B_n với các yêu cầu tương ứng là b_1, b_2, …,b_n.

Để đơn giản ta sẽ gọi

A_i: điểm phát i, i=1,…m

B_j: điểm thu j, j=1,…n

Hàng có thể chở từ một điểm phát bất kỳ (i) tới một điểm thu bát kỳ (j).

Ký hiệu:

c_{ij}- chi phí vận chuyển chở một đơn vị hàng từ điểm phát (i) đến điểm thu (j)

x_{ij}- lượng hàng chuyên chở từ i tới j

Bài toán đặt ra là: xác định những đại lượng x_{ij} cho mọi con đường (i;j)sao cho tổng chi phí chuyên chở là nhỏ nhất với giả thiết:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Tức là lượng hàng phát ra bằng đúng lượng hàng yêu cầu ở các điểm thu.

b) Mô hình toán học

Dạng toán học của *bài toán vận tải*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (5.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m} & (5.2) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n} & (5.3) \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n} & (5.4) \\ a_i, b_j > 0; \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j & (5.5) \end{cases}$$

Bài toán trên được gọi là bài toán cân bằng thu phát.

- Trường hợp $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. Ta đưa về bài toán cân bằng thu phát bằng cách thêm vào một trạm thu giả B_{n+1} với yêu cầu $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, đồng thời $c_{i\,n+1} = 0$ ($\forall$i). Lượng hàng lấy từ trạm phát A_i cung cấp cho trạm thu giả B_{n+1}, nghĩa là lượng hàng được giữ lại ở trạm phát A_i.
- Trường hợp $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$. Ta đưa về bài toán cân bằng thu phát bằng cách thêm vào một trạm phát giả A_{m+1} với yêu cầu $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, đồng thời $c_{m+1j} = 0$ ($\forall$j). Lượng hàng lấy từ trạm phát giả A_{m+1} cung cấp cho trạm thu B_j, nghĩa là lượng hàng yêu cầu của trạm thu B_j không được thỏa mãn.

c) Bài toán vận tải dạng bảng

Ta đưa bài toán vận tải vào bảng gọi là bảng vận tải.

B_j / A_i	b_1	b_2	……	b_j	…..	$\mathbf{b_n}$
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	……	c_{1j} x_{1j}	…..	$\mathbf{c_{1n}}$ $\mathbf{x_{1n}}$
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	……	c_{2j} x_{2j}	…..	$\mathbf{c_{2n}}$ $\mathbf{x_{2n}}$
….	….	….	….	….	….	**….**
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	….	c_{ij} x_{ij}	….	$\mathbf{c_{in}}$ $\mathbf{x_{in}}$
….	….	….	….	….	….	**….**
$\mathbf{a_m}$	$\mathbf{c_{m1}}$ $\mathbf{x_{m1}}$	$\mathbf{c_{m2}}$ $\mathbf{x_{m2}}$	**….**	$\mathbf{c_{mj}}$ $\mathbf{x_{mj}}$	**….**	$\mathbf{c_{mn}}$ $\mathbf{x_{mn}}$

Các khái niệm về bài toán dạng bảng:

+ ô chọn: là ô có lượng hang x_{ij}>0, còn gọi là ô sử dụng

+ ô loại: là ô không có hàng, tức là x_{ij}=0.

+ Dây chuyền: là một đoạn thẳng hay một dãy liên tiếp các đoạn thẳng gấp khúc mà hai đầu mút là hai ô chỉ nằm trên cùng một hàng hoặc một cột với một ô chọn khác thuộc dây chuyền của bảng vận tải.

+ Chu trình: là một dây chuyền khép kín

Như vậy một hàng hoặc một cột mà chu trình đi qua thì chỉ đi qua hai ô và do đó, số ô ít nhất của một chu trình là 4.

+ Ma trận $X=(x_{ij})_{m\times n}$ thỏa mãn hệ điều kiện ràng buộc được gọi là một phương án của bài toán.

+ Phương án $X=(x_{ij})_{m\times n}$ được gọi là phương án cực biên của bài toán vận tải nếu tập hợp các ô tương ứng với các thành phần dương của nó không tạo thành chu trình.

+ Phương án $X=(x_{ij})_{m\times n}$ được gọi là phương án cực biên không suy biến nếu nó có đúng m + n – 1 ô chọn.

+ Phương án $X=(x_{ij})_{m\times n}$ được gọi là phương án cực biên suy biến nếu nó có ít hơn m + n – 1 ô chọn.

+ Phương án $X=(x_{ij})_{m\times n}$ được gọi là phương án tối ưu (hay là nghiệm) của bài toán nếu nó thỏa mãn điều kiện (5.1), ký hiệu là X^*.

5.1.2. Tính chất chung của bài toán

- Một phương án cực biên có tối đa m + n – 1 thành phần dương.
- Các véc tơ A_j tương ứng với biến x_{ij} có thành phần i và thành phần m+j bằng 1 còn các thành phần còn lại đều bằng 0.
- Bài toán luôn luôn có lời giải.

5.2. Phương pháp thế vị để giải bài toán

a) Phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát

Để xây dựng môt phương án cực biên xuất phát người ta dùng một trong 3 phương pháp sau:

**** Phương pháp góc Tây_Bắc:***

Bước 1: Chọn ô ở dòng 1, cột 1 của bảng vận tải.

Bước 2: Phân lượng hàng h = $\{a_1,b_1\}$ vào ô (1;1).

Bước 3: Đánh dấu hàng (cột), theo đó lượng hàng ở trạm phát (trạm thu) đã hết (đã đủ).

Bước 4: Quay trở về bước 1 thực hiện công việc ở những ô còn lại.

Ví dụ: Đầu tiên phân phối cho ô (1;1), tức là đặt x_{11} =min {25;70}=25, ghi số 25 vào trong hình chữ nhật nhỏ ở góc ô (1;1). Yêu cầu của trạm thu B_1 thỏa mãn, loại cột 1 ra khỏi bảng bằng cách đánh dấu (x) vào các ô còn lại trên cột 1. Trong phần còn lại của bảng, ô nằm ở góc tây bắc là ô (1;2). Phân phối cho ô (1;2) với x_{12} = min {45;80}=45, loại hàng 1 ra khỏi bảng. Tiếp tục cho phân phối cho ô (2;2) … cho tới khi yêu cầu của mọi trạm phát và thu đều thỏa mãn.

Kết quả ta được một phương án cực biên với 8 ô được phân phối, đó là phương án cực biên không suy biến.

Thu / **Phát**	**25**	**80**	**120**	**45**	**30**
70	7 $\boxed{25}$	2 $\boxed{45}$	9 x	12 x	**6** **x**
85	8 x	6 $\boxed{35}$	4 $\boxed{50}$	3 x	**9** **x**
35	5 x	3 x	6 $\boxed{35}$	7 x	**11** **x**
110	**11** **x**	**5** **x**	**10** $\boxed{\mathbf{35}}$	**8** $\boxed{\mathbf{45}}$	**1** $\boxed{\mathbf{30}}$

**** Phương pháp chi phí nhỏ nhất::***

Bước 1: Chọn ô có cước phí thấp nhất, giả sử là ô (i;j).

Bước 2: Phân lượng hàng h = $\{a_i,b_j\}$ vào ô (i;j).

Bước 3: Đánh dấu các ô thuộc hàng i nếu trạm phát A_i đã hết hàng hoặc cột j nếu trạm thu B_j đã nhận đủ hàng.

Bước 4: Quay trở lại bước 1 thực hiện công việc ở những ô còn lại.

Ví dụ Ta thấy min $\{c_{ij}\} = c_{45} = 1$, phân phối cho ô (4;5) với lượng hàng tương ứng là $x_{45} = \min\{30;110\}=30$. Yêu cầu trạm thu B_5 thỏa mãn, loại cột 5 bằng cách đánh dấu (x) vào các ô còn lại trên cột này. Trong phần còn lại của bảng, ô ứng với min c_{ij} là ô (1;2), xác định $x_{12} = \min\{70;80\}=70$. Yêu cầu của trạm phát A_1 thỏa mãn, loại hàng 1. Tiếp tục phân phối cho ô (3;2) với x_{32} …. cho tới khi yêu cầu của mọi trạm thu phát đề thỏa mãn. Khi phân phối cho ô (3;1) thì yêu cầu của trạm phát A_3 và B_1 đều thỏa mãn, loại đồng thời hàng 3 và cột 1. Kết quả ta được một phương án cực biên với 7 ô được phân phối, đó là phương án cực biên suy biến. Để có tập ô cơ sở, cần bổ sung 1 ô, chẳng hạn ô (3;4), không tạo vòng với các ô cơ sở đã có. Trên bảng ô này được đánh dấu bằng hình vuông nhỏ, trong đó ghi số 0 là trị số của biến cơ sở tương ứng . Cũng có thể bổ sung những ô khác.

Phát \ Thu	25	80	120	45	30
70	7 x	2 70	9 x	12 x	**6** **x**
85	8 x	6 x	4 40	3 45	**9** **x**
35	5 25	3 10	6 x	7 0	**11** **x**
110	**11** **x**	**5** **x**	**10** **80**	**8** **x**	**1** **30**

**** Phương pháp xấp xỉ:***

- Định nghĩa độ lệch của hàng(cột) là hiệu số giữa ô có cước phí thấp thứ nhì trừ đi ô có cước phí thấp thứ nhất ở hàng (cột) đó.

Bước 1: Chọn hàng hoặc cột có độ lệch lớn nhất

Bước 2: Chọn ô có cước phí thấp nhất thuộc hàng hoặc cột đó, giả sử là ô (i;j).

Bước 3: Phân lượng hàng h = $\{a_i,b_j\}$ vào ô (i;j).

-*Bước 4:* Đánh dấu các ô thuộc hàng i nếu trạm phát A_i đã hết hàng hoặc cột j nếu trạm thu B_j đã nhận đủ hàng.Quay trở về bước 1 tiếp tục thực hiện thuật toán.

Ví dụ

Trước hết tính các hiệu số hàng và cột, ghi ở cuối hàng và cột tương ứng.

Hiệu số lớn nhất là 5 ở cột 5 nên đầu tiên phân phối cho ô (4,5) với lượng hàng tương ứng là $x_{45} = 30$. Yêu cầu của tạm thu thỏa mãn, loại cột 5; tính lại các ước lượng hàng, nếu hiệu số hàng thay đổi thì ghi vào sau vào hiệu số cũ. Bây giờ hiệu số lớn nhất cũng là 5 ở hàng 1, phân phối cho ô (1,2) với lượng hàng $x_{12} = 70$. Yêu cầu của trạm phát thỏa mãn, loại hàng 1; tính lại các hiệu số cột … Tiếp tục phân phối cho tới khi yêu cầu của mọi trạm thu và phát đều thỏa mãn ta được phương án cực biên không suy biến.

Phát \ Thu	25	80	120	45	30	
70	7 x	2 70	9 x	12 x	6 x	**4,5 K**

85	8 x	6 x	4 $\boxed{40}$	3 $\boxed{45}$	9 x	**1,2,4 K**
35	5 $\boxed{25}$	3 x	6 $\boxed{10}$	7 x	11 x	**2,1 K**
110	11 x	5 $\boxed{10}$	10 $\boxed{70}$	8 x	1 $\boxed{30}$	**4,3,5,1 K**
	2	**1**	**2**	**4**	**5**	
	3	**2**	**4**	**K**	**K**	
	6	**K**	**K**			
	K					

b) Tiêu chuẩn tối ưu

Phương án cực biên không suy biến $X=(x_{ij})_{m\times n}$ được gọi là phương án tối ưu khi và chỉ khi tồn tại các số u_i (i=1,..,m) cho các hàng và các số v_j (j= 1,...,n)cho các cột của bảng vận tải sao cho:

$$\begin{cases} u_i + v_j = c_{ij} & (i;j): x_{ij} > 0(*) \\ u_i + v_j \le c_{ij} & (i;j): x_{ij} = 0(**) \end{cases}$$

Phương trình (*) ứng với ô (i;j) là ô chọn.

Phương trình (**) ứng với ô (i;j) là ô loại.

Các số u_i và v_j được gọi là hệ thống thế vị, trong đó u_i được gọi là thế vị hàng, v_j được gọi là thế vị cột.

c) Thuật toán thế vị

Bước 1: Tìm phương án cực biên xuất phát X^0 = =$(x_{ij})_{m\times n}$

Sử dụng một trong 3 phương pháp ở trên. Nếu phương án tìm được là phương án suy biến thì ta bổ sung ô chọn không để được phương án cực biên không suy biến, ô chọn này có vai trò như các ô chọn khác.

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu của phương án.

+ Xây dựng hệ thống thế vị.

Cho u_i một giá trị tùy ý nào đó thì mọi giá trị khác đều xác định được một cách duy nhất do (*) có (n+m) ẩn và và (m+n-1) phương trình độc lập tuyến tính.

+ Tính các số kiểm tra Δ_{ij}

Đặt $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}\ (i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$. Tính các Δ_{ij} ứng với các ô loại.

- Nếu $\Delta_{ij} \le 0\ (i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$ thì phương án đang xét là phương án tối ưu.

- Nếu $\exists \Delta_{ij} > 0\ (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ thì phương án đang xét chưa tối ưu, chuyển sang bước 3.

Bước 3: Xây dựng phương án mới

+ Chọn ô điều chỉnh:

Ô (r,s) gọi là ô điều chỉnh nếu : $\Delta_{rs} = \max\left\{\Delta_{ij} > 0 \ \ (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})\right\}$

+ Tìm chu trình điều chỉnh: Là chu trình với ô xuất phát là ô điều chỉnh, các ô còn lại là ô chọn. Gọi V là tập hợp các ô thuộc chu trình điều chỉnh.

+ Đánh dấu các ô của chu trình, bắt đầu từ ô điều chỉnh đánh dấu (+) rồi xen kẽ nhau đánh dấu (-), (+)…. cho đến hết chu trình. Gọi V+ là tập các ô có dấu (+), V- là tập các ô có dấu (-). Khi đó, $V = V^{+} \cup V^{-}$.

+ Xác định lượng hàng điều chỉnh: $q = \min\left\{x_{ij} : (i, j) \in V^{-}\right\}, q > 0.$

+ Điều chỉnh sang phương án mới: $X^{1} = (x_{ij})_{m\times n}$ với:

$$\begin{cases} x_{ij} & ,(i, j) \notin V \\ x_{ij} + q & ,(i, j) \in V^{+} \\ x_{ij} - q & ,(i, j) \in V^{-} \end{cases}$$

Gọi X^1 đóng vai trò như X^0 rồi quay lại bước 2 và lặp cho tới khi tìm được phương án tối ưu.

* *Chú ý:* - Nếu ô điều chỉnh không duy nhất thì ta xét theo hàng từ trên xuống dưới trong bảng vận tải gặp ô nào trước thì ta chọn ô đó làm ô điều chỉnh.

- Nếu có thể thì ta chọn ô (i_0, j_0) thỏa mãn:

$q.\Delta_{i_0 j_0} = \max\left\{q.\Delta_{ij}\right\} > 0$ thì giá trị hàm mục tiêu giảm nhanh hơn.

d) Ví dụ

Ví dụ 1. Giải bài toán vận tải với số liệu cho trong bảng sau:

Thu / **Phát**	**46**	**45**	**76**	**20**	**52**
79	10	1	5	13	**8**
50	5	6	10	8	**13**
60	3	2	8	9	**6**
50	**13**	**5**	**7**	**10**	**13**

Giải:

Bước 1: Tìm phương án cực biên xuất phát:

Sử dụng phương pháp chi phí nhỏ nhất xây dựng phương án cực biên ta được phương án cực biên không suy biến cho trong bảng sau:

Thu / Phát	**46**	**45**	**76**	**20**	**52**
79	10 x	1 $\boxed{45}$	5 $\boxed{34}$	13 x	**8** **x**
50	5 x	6 x	10 x	8 $\boxed{20}$	**13** $\boxed{\mathbf{30}}$
60	3 $\boxed{46}$	2 x	8 x	9 x	**6** $\boxed{\mathbf{14}}$
50	**13** **x**	**5** **x**	**7** $\boxed{\mathbf{42}}$	**10** **x**	**13** $\boxed{\mathbf{30}}$

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu của phương án:

+ Xây dựng hệ thống thế vị:

Cho $u_4 = 0$, các ô (4,3) ,(4,5) là các ô cơ sở nên tính được $v_3 = 7$ và $v_5 = 13$. Xét cột 3 chẳng hạn ta thấy (1,3) là ô cơ sở nên tính được $u_1 = 7- 5 =2$,… Tiếp tục tính tương tự sẽ xác định được toàn bộ các thế vị hàng và cột như trong bảng dưới:

+ Tính các số kiểm tra:

Tính các Δ_{ij} $(i = \overline{1,4}, j = \overline{1,5})$ ta thấy các $\Delta_{15} = 3 > 0, \Delta_{21} = 5 > 0$ nên phương án đang xét chưa tối ưu, ta chuyển sang bước 3.

Thu / Phát	**46**	**45**	**76**	**20**	**52**	u_i
79	10 -2	1 $\boxed{45}$	5 $\boxed{34}$	13 -7	8 3	**-2**
50	5 5	6 -3	10 -3	8 $\boxed{20}$	13 $\boxed{30}$	**0**
60	3 $\boxed{46}$	2 -6	8 -8	9 -8	6 $\boxed{14}$	**-7**
50	13 -3	5 -2	7 $\boxed{42}$	10 -2	13 $\boxed{8}$	**0**
v_j	**10**	**3**	**7**	**8**	**13**	

Bước 3: Xây dựng phương án mới:

+ Chọn ô điều chỉnh:

$\Delta_{21} = \max\{5;3\} = 5$ nên chọn ô (2,1) làm ô điều chỉnh.đánh dấu (+) vào ô điều chỉnh.

+ Chọn chu trình điều chỉnh: Chu trình điều chỉnh như trong bảng sau:

Thu / Phát	46	45	76	20	52	u_i
79	10 -2	1 $\boxed{45}$	5 $\boxed{34}$	13 -7	8 3	**-2**
50	5 (+) 5	6 -3	10 -3	8 $\boxed{20}$	13 (-) $\boxed{30}$	**0**
60	3 (-) $\boxed{46}$	2 -6	8 -8	9 -8	6 (+) $\boxed{14}$	**-7**
50	13 -3	5 -2	7 $\boxed{42}$	10 -2	13 $\boxed{8}$	**0**
v_j	**10**	**3**	**7**	**8**	**13**	

+Xác định lượng hàng điều chỉnh:

$q = \min\{46; 30\} = 30$

+ Điều chỉnh sang phương án mới:

$X^1 = (x_{ij}^1)$ theo công thức cho trong bước 3 của thuật toán ta được bảng sau:

Thu / Phát	46	45	76	20	52	u_i
79	10 -2	1 $\boxed{45}$	5 $\boxed{34}$	13 -2	8 3	**-2**
50	5 (+) $\boxed{30}$	6 -8	10 -8	8 (-) $\boxed{20}$	13 -5	**-5**
60	3 (-) $\boxed{16}$	2 -6	8 -8	9 -3	6 (+) $\boxed{44}$	**-7**
50	13 -3	5 -2	7 $\boxed{42}$	10 (+) 3	13 (-) $\boxed{8}$	**0**
v_j	**10**	**3**	**7**	**13**	**13**	

+ Lặp lại quá trình ta được chu trình như bảng trên. Ta được:

$q = \min\{16; 20; 8\} = 8$

+ Điều chỉnh sang phương án mới X^2 cho trong bảng dưới:

Thu / Phát	46	45	76	20	52	u_i
79	10 / -5	1 / $\boxed{45}$	5 / $\boxed{34}$	13 / -5	8 / 0	**-2**
50	5 / $\boxed{38}$	6 / -5	10 / -5	8 / $\boxed{12}$	13 / -5	**-2**
60	3 / $\boxed{8}$	2 / -3	8 / -5	9 / -3	6 / $\boxed{52}$	**-4**
50	13 / -6	5 / -2	7 / $\boxed{42}$	10 / $\boxed{8}$	13 / -3	**0**
v_j	**7**	**3**	**7**	**10**	**10**	

Ta thấy mọi $\Delta_{ij} \le 0$ $(i = \overline{1,4}, j = \overline{1,5})$ nên phương án tương ứng ở bảng trên là tối ưu với giá trị hàm mục tiêu là f* = 45 * 1 + 34 * 5 + 38 * 5 + 12 * 8 + 8*3 + 52 * 6 + 42 * 7 + 8 * 10 = 1211.

Bài tập chương 5

Giải các bài toán vận tải sau, sử dụng cả 3 phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát:

Bài 1

Phát \ Thu	60	70	40	30
100	2	1	4	3
80	5	3	2	6
20	6	2	1	5

Đáp số:

$$X^* = \begin{bmatrix} 60 & 10 & 0 & 30 \\ 0 & 60 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}; f(X^*) = 460$$

Bài 2

Phát \ Thu	10	10	10	20	20
5	5	1	4	6	7
15	3	4	2	7	8
20	4	3	1	7	9
30	6	5	4	9	11

Đáp số:

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 15 \end{bmatrix}; f(X^*) = 435$$

Bài 3

Phát \ Thu	20	100	145	30	150
120	6	3	1	4	5
150	1	2	5	4	3
150	2	4	3	1	6
25	3	1	4	2	7

Đáp số:

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 150 \\ 20 & 75 & 25 & 30 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; f(X^*) = 940$$