TRƯỜNG ĐẠI HỌC KIÊN GIANG

KHOA SƯ PHẠM VÀ XÃ HỘI NHÂN VĂN

Danh Ngọc Thắm

BÀI GIẢNG

TOÁN KINH TẾ

(Lưu hành nội bộ)

NĂM 2017

Danh Ngọc Thắm

BÀI GIẢNG

TOÁN KINH TẾ

(Tài liệu dùng cho hệ Đại học, Cao đẳng)

NĂM 2017

LỜI GIỚI THIỆU

Toán học ngày nay đã trở thành một công cụ quan trọng trong nhiều lĩnh vực, không những trong khoa học tự nhiên mà ngay cả trong các lĩnh vực bên xã hội. Tuy nhiên, những khái niệm toán học khá phức tạp và trừu tượng có thể làm một số sinh viên không chuyên khó tiếp cận. Chính vì vậy, bài giảng này được viết theo hướng giảm thiểu các lý thuyết trừu tượng, cung cấp một số kiến thức toán cơ bản thường được sử dụng trong kinh tế và một số ứng dụng thường gặp.

Bài giảng Toán kinh tế được áp dụng cho sinh viên tất cả các ngành kinh tế, gồm 8 chương, cụ thể như sau:

Chương 1. Giới hạn hàm một biến

Chương 2. Phép tính vi phân hàm một biến

Chương 3. Phép tính tích phân hàm một biến

Chương 4. Phép tính vi phân hàm nhiều biến

Chương 5. Ma trận và định thức

Chương 6. Hệ phương trình tuyến tính

Chương 7. Bài toán quy hoạch tuyến tính

Chương 8. Bài toán vận tải

Mặc dù rất cố gắng nhưng đây là biên soạn đầu tiên chắc sẽ còn những sai sót do lỗi đánh máy. Tác giả rất mong nhận được sự góp ý của đồng nghiệp và các sinh viên để bài giảng ngày càng hoàn chỉnh hơn.

Danh Ngọc Thắm

Dntham@vnkgu.edu.vn

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1

GIỚI HẠN HÀM MỘT BIẾN

1.1 Các khái niệm cơ bản hàm một biến

1.1.1 Biến số

1.1.1.1 Định nghĩa

Biến số (hay được gọi tắt là biến) là một kí hiệu mà ta có thể gán cho nó một số bất kỳ thuộc một tập số $X \neq \varnothing$ cho trước $\left(X \subset \mathbb{R}\right)$. Tập hợp X được gọi là miền biến thiên và mỗi số thực $x_o \in X$ được gọi là một giá trị của biến số đó.

Ký hiệu: $x, y, z, \ldots$

Một biến chỉ nhận một giá trị duy nhất được gọi là hằng số.

1.1.1.2 Các biến số trong kinh tế

Trong lĩnh vực kinh tế người ta quan tâm đến các đại lượng như: giá cả, lượng cung, lượng cầu, doanh thu, chi phí, thu nhập quốc dân, tỷ lệ lạm phát, tỷ lệ thất nghiệp…

Khi phân tích xu hướng thay đổi trị số của các đại lượng đó theo không gian, thời gian và theo các điều kiện khác nhau, các nhà kinh tế xem chúng như các biến số.

Các biến số đó được gọi là biến số kinh tế.

Một số ký hiệu thường gặp:

P: Giá hàng hóa (price);

Q: Sản lượng (Quantity);

Q_s : Lượng cung (Quantity Supplied);

Q_d : Lượng cầu (Quantity Demanded);

TC: Tổng chi phí (Total Cost);

TR: Tổng doanh thu (Total Revenue);

π : Lợi nhuận

I: Thu nhập quốc dân (National Income);

C: Tiêu dùng (Consumption);

S: Tiết kiệm (Saving);

1.1.2 Hàm số và miền xác định của hàm số

Một hàm số f xác định trên một tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in D$ với một và chỉ một số thực y.

Tập hợp D được gọi là tập xác định (hay miền xác định) của hàm số f .

Số y tương ứng với số x được gọi là giá trị của hàm số f tại điểm x. Ký hiệu: $f(x)$.

Tập $f\left(D\right)=\left\{f\left(x\right): x \in D\right\}$ gọi là tập giá trị của hàm số f.

Chú ý:

- Ta thường viết hàm số $y = f(x)$ hay $f(x)$ và x là biến độc lập hay đối số;
- Nếu hàm số được cho bởi biểu thức giải tích $y = f(x)$ mà không nói rõ tập xác định thì miền xác định là tập hợp mọi số thực làm cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Ví dụ 1.1. Hàm số $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ có xác định là

$$D = \{x | x^2 - 1 > 0\} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$ có miền xác định là $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$.

1.1.3 Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x, y)$ của mặt phẳng tọa độ Oxy có hoành độ x là một số thực bất kỳ lấy từ miền xác định của hàm số và tung độ y là giá trị tương ứng của hàm số tại điểm x.

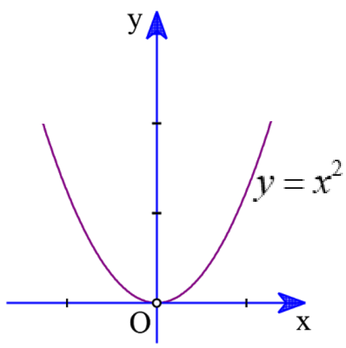
Cho hàm số $f(x)$ xác định trên D. Khi đó tập $G_f = \{M(x, f(x)) | x \in D\}$ gọi là đồ thị hàm số $f(x)$.

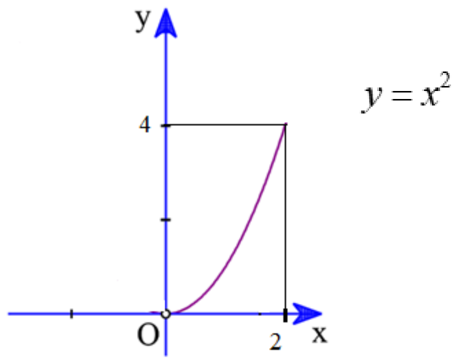
Đồ thị $f(x)$ là một đường cong trong mặt phẳng Oxy.

Công thức $y = f(x)$ còn được gọi là phương trình của đồ thị.

Ví dụ 1.2. Hàm $y = x^2$ có đồ thị là đường parabol

Hàm $y = x^2$, $x \in [0, 2]$ có đồ thị là một cung parabol.





1.1.4 Hàm số sơ cấp và các phép toán trên hàm số

Hàm số sơ cấp cơ bản

(1) Hàm số hằng $y = c$ (c là hằng số).

(2) Hàm số lũy thừa: $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

(3) Hàm số mũ: $y = a^x$ ($a > 0$ và $a \neq 1$)

(4) Hàm số logarit: $y = \log_a x$ (a > 0 và $a \neq 1$).

(5) Các hàm lượng giác: $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x,\ y=\cot x.$

(6) Các hàm lượng giác ngược:

$y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=\arctan x,\ y=\operatorname{arccot} x.$

Chú ý: Trong giải tích toán học cung và góc luôn luôn được đo bằng Radian.

Các phép toán trên hàm số

Giả sử các hàm số $f(x)$, $g(x)$ có cùng tập xác định D, ta có:

$$\left(f(x)+g(x)\right)=f(x)+g(x),\ \forall x\in D.$$

$$\left(f(x)-g(x)\right)=f(x)-g(x),\ \forall x\in D.$$

$$\left[f(x)g(x)\right](x)=f(x).g(x),\ \forall x\in D.$$

$$\left(f(x)/g(x)\right)=\frac{f(x)}{g(x)},\ \forall x\in D: g(x)\neq 0.$$

$$af(x)=a.f(x),\ \forall x\in D,\ a\in\mathbb{R}.$$

Ví dụ 1.3. Cho 3 hàm số $f(x)=2x^2+1,\ g(x)=\sqrt{x},\ h(x)=x+1.$ Xác định hàm số $\left(f(x)-3g(x)\right)/h(x)$ và miền xác định của nó.

Giải

$$\frac{\left(f(x)-3g(x)\right)}{h(x)}=\frac{2x^2-3\sqrt{x}+1}{x+1}$$

Miền xác định: $\begin{cases} x\geq 0 \\ x+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 0.$

1.1.5 Một số đặc trưng của hàm số

1.1.5.1 Hàm số chẵn và hàm số lẻ

Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định D, với $x\in D,\ -x\in D,$ ta có:

- f được gọi là hàm số chẵn nếu $f(-x)=f(x),\ \forall x\in D.$

  Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua Oy.

- f được gọi là hàm số lẻ nếu $f(-x)=-f(x),\ \forall x\in D.$

  Đồ thị của hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ.

Ví dụ 1.4. Các hàm số $f(x)=x^2,\ g(x)=\cos x\ (x\in\mathbb{R})$ là các hàm số chẵn:

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R};$$

$$g(-x)=\cos(-x)=\cos x=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Ví dụ 1.5. Các hàm số $f(x)=x^3,\ g(x)=\sin x\ \ (x\in\mathbb{R})$ là các hàm số lẻ:

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R};$$

$$g(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

1.1.5.2 Hàm số đơn điệu

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$

- Nếu $x_1,\ x_2\in(a;b): x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ thì $f(x)$ được gọi là hàm tăng hay hàm số đồng biến.
- Nếu $x_1,\ x_2\in(a;b): x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ thì $f(x)$ được gọi là hàm giảm hay hàm số nghịch biến.

Hàm số tăng hoặc giảm được gọi chung là hàm số đơn điệu.

Ví dụ 1.6. Hàm số $f(x)=x^2$ là hàm đơn điệu tăng trên khoảng $[0;+\infty)$ và đơn điệu giảm trên khoảng $(-\infty;0]$:

$$\forall x_1,\ x_2\in[0;+\infty): x_1<x_2\Rightarrow x_1^2<x_2^2;$$

$$\forall x_1,\ x_2\in(-\infty;0]: x_1<x_2\Rightarrow x_1^2>x_2^2.$$

Ví dụ 1.7. Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}$ đơn điệu giảm trong khoảng $(0;+\infty)$:

$$\forall x_1,\ x_2\in(0;+\infty): x_1<x_2\Rightarrow \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}.$$

1.1.5.3 Hàm số bị chặn

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm bị chặn trong *D* nếu tồn tại các hằng số *m* và *M* sao cho:

$$m\le f(x)\le M\quad \forall x\in D.$$

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm bị chặn trên nếu: $\exists M: f(x)\le M,\ \forall x;$
- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm bị chặn dưới nếu: $\exists M: f(x)\ge m,\ \forall x.$

Chú ý: Hàm số $f(x)$ bị chặn khi và chỉ khi $f(x)$ bị chặn trên và bị chặn dưới.

Ví dụ 1.8. Hàm số $f(x)=x^2+a\ \ (x\in\mathbb{R})$ là hàm bị chặn dưới:

$$f(x)=x^2+a\ge a,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Hàm số $f(x)=-x^2+a\ (x\in\mathbb{R})$ là hàm bị chặn trên:

$$f(x)=-x^2+a\le a,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Hàm số $f(x)=\sin x\ \ (x\in\mathbb{R})$ là hàm bị chặn: $-1\le\sin x\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

1.1.6 Các hàm trong phân tích kinh tế

1.1.6.1 Hàm cung và hàm cầu

Khi phân tích thị trường hàng hóa và dịch vụ, các nhà kinh tế sử dụng khái niệm hàm cung (supply function) và hàm cầu (demand function) để biểu diễn sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu đối với một loại hàng hóa vào giá của hàng hóa đó. Hàm cung và hàm cầu có dạng:

Hàm cung: $Q_s = S(p)$,

Hàm cầu: $Q_d = D(p)$,

trong đó: p là giá hàng hóa;

Q_s là lượng cung (quantity supplied), tức là lượng hàng hóa mà người bán bằng lòng bán;

Q_d là lượng cầu (quantity demanded), tức là lượng hàng hóa mà người mua bằng lòng mua.

Trong thực tế, nếu giá P tăng thì lượng hàng sản xuất tăng (lượng cung tăng) và nhu cầu sản phẩm giảm (lượng cầu giảm). Như vậy, hàm cung là hàm đơn điệu tăng, còn hàm cầu là hàm đơn điệu giảm.

Hàm ngược của hàm $Q_s = S(p)$ là hàm cung:

$$Q_s = S(p) \Leftrightarrow p = S^{-1}(Q_s).$$

Hàm ngược của hàm $Q_d = D(p)$ là hàm cầu:

$$Q_d = D(p) \Leftrightarrow p = D^{-1}(Q_d).$$

1.1.6.2 Hàm sản xuất

Hàm sản xuất dùng để mô tả sự phụ thuộc của sản lượng hàng hóa của một nhà sản xuất vào lượng lao động được sử dụng.

Hàm sản xuất có dạng: $Q = Q(L)$,

trong đó: L là lượng lao động được sử dụng (Labor);

Q là mức sản lượng tương ứng.

Chú ý: Sản lượng Q và lượng lao động L được đo theo luồng (flow), tức là đo định kỳ (hàng ngày, hàng tuần, hàng tháng, hàng năm,…)

1.1.6.3 Hàm doanh thu

Hàm doanh thu là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của tổng doanh thu (TR) vào sản lượng (Q) và được xác định bởi hàm sau:

$$TR = TR(Q) .$$

- Tổng doanh thu của nhà sản xuất cạnh tranh là:

  $TR = TR(Q) = P.Q$, với P là giá sản phẩm trên thị trường.

- Đối với nhà sản xuất độc quyền, tổng doanh thu được xác định theo công thức:

  $TR = D^{-1}(Q).Q$, với $D^{-1}(Q)$ là hàm cầu ngược.

1.1.6.4 Hàm chi phí và hàm lợi nhuận

Hàm chi phí là hàm biểu diễn sự phụ thuộc của tổng chi phí (*TC*) sản xuất vào sản lượng và được xác định bởi hàm sau:

$$TC = TC(Q).$$

Hàm lợi nhuận là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của tổng lợi nhuận (π) vào sản lượng và được xác định như sau:

$$\pi = \pi(Q).$$

Hàm lợi nhuận có thể được xác định thông qua hàm doang thu và hàm chi phí:

$$\pi = TR(Q) - TC(Q).$$

1.1.6.5 Hàm tiêu dùng và hàm tiết kiệm

Hàm tiêu dùng biểu diễn sự phụ thuộc của biến tiêu dùng *C* (Consumption) vào biến thu nhập quốc dân *I* (Income), được xác định như sau:

$$C = C(I).$$

Khi thu nhập tăng người ta có xu hướng tiêu dùng nhiều hơn, do đó hàm tiêu dùng là hàm đồng biến.

Hàm tiết kiệm là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của biến tiết kiệm *S* (Saving) vào biến thu nhập:

$$S = S(I) = I - C(I).$$

1.2 Dãy số - Một số bài toán về lãi suất

- Dãy số là một dãy liệt kê các số thực theo thứ tự như sau: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$

  Ký hiệu: $\{x_n\}$.

  $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ nếu giá trị x_n gần *a*, $\forall n$ đủ lớn.

- Vài giới hạn quan trọng

  i) $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

  ii) $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + q + q^2 + ... + q^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \dfrac{1}{1-q}.$

  iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}\right) = e,\ e \approx 2,71828.$

1.2.1 Dãy cấp số cộng và công thức lãi đơn

Dãy số $\{x_n\}$ gọi là dãy cấp số cộng với công sai *d* nếu

$$x_n = x_{n-1} + d,\ \forall n.$$

Hay $x_n = x_0 + n.d,\ \forall n.$

Nhận xét. $S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n = \frac{n}{2}(x_0 + x_n) = \frac{n}{2}(2x_0 + n.d).$

Giả sử ta cho vay khoản vốn v_0 với lãi suất mỗi kỳ là *r* trong vòng *n* kỳ và cuối mỗi kỳ lãi được rút ra chỉ để lại vốn v_0 cho kỳ kề sau.

Cách tính lãi như vậy gọi là cách tính lãi đơn.

Sau *n* kỳ của lãi đơn, lợi tức là $n(v_0.r)$. Ta có

Tổng giá trị đạt được là: $v_n = v_0 + n(v_0.r)$.

Với cách tính lãi đơn, vốn ban đầu v_0, lãi suất *r*, số kỳ tính lãi *n*.

Dãy tổng giá trị $\{v_n\}$ là dãy cấp số cộng của công sai $d = v_0 r$.

Ví dụ 1.9. Cho vay một lượng vốn là 10 triệu đồng với lãi suất là $r = 1\%$ trên tháng. Sau một năm 8 tháng (20 kỳ), tổng giá trị là bao nhiêu?

Giải

$$v_{20} = v_0 + 20.(v_0 r) = 10 + 20.(10.(0,01)) = 12 \text{ (triệu đồng).}$$

1.2.2 Dãy cấp số nhân

Dãy số $\{x_n\}$ gọi là dãy cấp số nhân với công bội *q* nếu

$$x_n = x_{n-1}.q,\ \forall n$$

Hay $x_n = x_0.q^n,\ \forall n.$ (1.1)

Tổng *n* số hạng đầu của cấp số nhân được tính theo công thức (với giả thiết $q \neq 1$):

$$S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n = x_0.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Một cấp số nhân với công bội có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1 $(|q| < 1)$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Trong trường hợp này $q^n \to 0$ thì $n \to +\infty$, do đó:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{x_0}{1-q}.$$

Giới hạn của dãy số S_n được gọi là tổng tất cả các số hạng của cấp số nhân lùi vô hạn. Ta có thể viết:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + ... + x_n + ... = \frac{x_0}{1-q}.$$

1.2.3 Tính giá trị hiện tại và giá trị tương lai của tiền tệ

Giả sử bạn có 1 khoản tiền A đồng gửi vào một ngân hàng nào đó với một mức lãi suất r cố định thì sau một khoảng thời gian bạn sẽ nhận được một khoản tiền lớn hơn là:

$$B = A + \text{(tiền lãi)}.$$

Người ta gọi khoản B đồng đó là giá trị tương lai của khoản A đồng hôm nay. Ngược lại, A là giá trị hiện tại của khoảng B đồng mà bạn sẽ có được trong tương lai.

Giả sử bạn có một khoản tiền A đồng thì sau một năm, với lãi suất r một năm, bạn sẽ có một khoản tiền gộp cả lãi lẫn gốc là:

$$B_1 = A + r.A = A.(1 + r). \qquad (1.2)$$

Như vậy, nếu tính gộp tiền lãi vào tiền gốc thì cứ sau mỗi năm số tiền của bạn sẽ được nhân thêm bội số $q = 1 + r$. Gọi B_t là số tiền bạn sẽ có sau t năm, ta có một dãy số nhân với công bội $q = 1 + r$. Theo công thức (1.1), ta có:

$$B_t = B_0.q^t = A.(1 + r)^t, \qquad (1.3)$$

trong đó $B_0 = A$ là khoản tiền bạn có hôm nay.

Giá trị tương lai của A đồng bạn có hôm nay sau t năm được tính theo công thức:

$$B = A.(1 + r)^t \qquad (1.4)$$

Đảo lại công thức (1.4), ta được công thức tính giá trị hiện tại của một khoản B đồng mà bạn sẽ nhận sau t năm:

$$A = B(1+r)^{-t} = \frac{B}{(1+r)^t}. \qquad (1.5)$$

Ví dụ 1.10. Giả sử bạn có 100 (triệu đồng). Bạn đem gửi ngân hàng với lãi suất $r = 10\%$ trong một năm. Hỏi sau 2 năm bạn được bao nhiêu tiền?

Giải

Gọi B là giá trị tương lai của tiền (Future Value).

A là giá trị hiện tại của tiền (Present Value).

r là lãi suất chiết khấu.

Số tiền đầu tiên có: $A = 100$ (triệu đồng).

Lãi suất: $r = 10\% = 0,1$

Theo công thức (1.2), sau 1 năm ta có:

$$B_1 = A + A.r = A.(1 + r)$$
$$= 100.(1 + 10\%) = 110 \text{ (triệu đồng)}$$

Theo công thức (1.3), sau 2 năm số tiền bạn có được là:

$$B_2 = A(1 + r)^2$$
$$= 100.(1 + 10\%)^2 = 121 \text{ (triệu đồng)}$$

Vậy nếu bạn gửi ngân hàng 100 (triệu đồng), sau 2 năm bạn sẽ có 121 (triệu đồng).

Ví dụ 1.11. Một dự án đầu tư đòi hỏi chi phí hiện tại 100 (triệu đồng) và sẽ đem lại 150 (triệu đồng) sau 3 năm. Với lãi suất thịnh hành 8% một năm, ta thử đánh giá xem có nên thực hiện dự án đó hay không?

Giải

Để đánh giá dự án, ta tính giá trị hiện tại của 150 (triệu đồng) sẽ thu về sau 3 năm. Theo công thức (1.5) ta có:

$$A = 150.(1 + 0,08)^{-3} \approx 119,075 \text{ (triệu đồng).}$$

Như vậy, việc thực hiện dự án sẽ đem lại một khoản lợi 19,075 (triệu đồng).

Một cách khác để đánh giá dự án là so sánh giá trị tương lai sau 3 năm của khoản chi phí 100 (triệu đồng) bỏ ra hôm nay với khoản 150 (triệu đồng) thu về sau 3 năm.

Theo công thức (1.4), giá trị tương lai sau 3 năm của 100 (triệu đồng) bỏ ra hôm nay là:

$$B_3 = 100.(1 + 0,08)^3 = 125,971 \text{ (triệu đồng).}$$

Ta thấy $B_3 < 150$ (triệu đồng). Vậy, tiến hành dự án là có lợi.

1.2.4 Kỳ khoản và các giá trị của các luồng vốn

Kỳ khoản là các khoản tiền tích góp đều đặn theo định kỳ (hàng tháng, hàng quý, hàng năm,…). Kỳ khoản định kỳ hàng năm được gọi là niên khoản hay niên kim.

Ví dụ 1.12. Các khoản tiền nộp đoàn phí hàng tháng, các khoản tiền thanh toán cho một hàng hóa theo phương thức trả góp,…

Giả sử một dự án đầu tư sau một năm sẽ đem lại cho bạn đều đặn một khoản thu nhập B mỗi năm và liên tiếp trong n năm sau đó. Với lãi suất r/năm thì giá trị hiện tại của khoản B là bao nhiêu?

Ta có $B = B_1 = B_2 = \ldots = B_n$.

Khi đó, giá trị hiện tại của khoản B sau

1 năm: $A_1 = B_1.(1 + r)^{-1}$

2 năm: $A_2 = B_2.(1 + r)^{-2}$

……………………..

n năm: $A_n = B_n.(1 + r)^{-n}$

Như vậy, sau n năm thì giá trị hiện tại là:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_5 = B\left(1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

Ta có $1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^n}$ là cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{1+r}$. Khi đó:

$$A = B\left(\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r}\right).$$

Ví dụ 1.13. Một dự án đầu tư sau một năm sẽ đem lại cho bạn đều đặn 500 (triệu đồng) mỗi năm, liên tiếp trong 10 năm sau đó. Hỏi rằng với lượng vốn phải đầu tư ban đầu là bao nhiêu thì bạn có thể chấp nhận dự án đó trong điều kiện lãi suất 10% một năm?

Giải

Giá trị hiện tại của luồng thu nhập:

$$A = \frac{500}{1+0{,}1} + \frac{500}{(1+0{,}1)^2} + \dots + \frac{500}{(1+0{,}1)^{10}}$$

$$= 500.\left(\frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}1^2} + \dots + \frac{1}{1{,}1^{10}}\right) = 500.\frac{\frac{10}{11}\left[1-\left(\frac{10}{11}\right)^{10}\right]}{1-\frac{10}{11}} \approx 3072{,}2836.$$

Vậy dự án chỉ có thể được chấp nhận nếu số vốn phải đầu tư ban đầu nhỏ hơn 3072,28 (triệu đồng).

Ví dụ 1.14. Giả sử bạn định mua một chiếc xe máy theo phương thức trả góp. Theo phương thức này, sau 1 tháng kể từ khi nhận hàng bạn phải trả đều đặn mỗi tháng một lượng tiền nhất định, liên tiếp trong 24 tháng.

Cửa hàng bán xe đưa ra các điều kiện:

- Nếu mua xe trả ngay, giá xe máy vào thời điểm bạn mua là 30 (triệu đồng)
- Nếu trả trong vòng 24 tháng (2 năm): mỗi tháng trả: 1,5 (triệu đồng).
- Lãi suất vay ngân hàng 1%/tháng.

Bạn sẽ đồng ý mua trả góp với số tiền trả hàng tháng là bao nhiêu?

Giải

Gọi a là khoản tiền phải trả hàng tháng.

B là giá trị hiện tại và $B = 30$ (triệu đồng)

Dòng tiền đều trong 24 kỳ thanh toán là: $a > 0$.

Ta có $B = \frac{a}{1{,}01} + \frac{a}{1{,}01^2} + \dots + \frac{a}{1{,}01^{24}} = a\left[\frac{1}{1{,}01} + \frac{1}{1{,}01^2} + \dots + \frac{1}{1{,}01^{24}}\right]$

$$= a.\frac{\frac{1}{1{,}01}\left[1-\left(\frac{1}{1{,}01}\right)^{24}\right]}{1-\frac{1}{1{,}01}} \approx 21{,}24a.$$

Việc mua trả góp sẽ tương đương với việc mua trả ngay nếu:

$$B = 21{,}24a = 30 \Leftrightarrow a = \frac{30}{21{,}24} \approx 1{,}4124.$$

Vậy bạn chỉ đồng ý mua trả góp với điều kiện số tiền chi trả hàng tháng nhỏ hơn 1,41 (triệu đồng).

1.3 Giới hạn hàm số

1.3.1 Giới hạn của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận của x_0 (có thể trừ điểm x_0). Số thực a được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to x_0$, nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f\left(x\right) - a \right| < \varepsilon .$$

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = a$.

Giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to x_0$, nếu có là duy nhất.

Ví dụ 1.15. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Giải

Khi $x \to 1$ thì $x \neq 1$ nên: $\left| f(x) - 2 \right| = \left| \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = \left| x - 1 \right|$. Vậy

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon : 0 < \left| x - 1 \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - 2 \right| < \varepsilon.$$

Do đó $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

1.3.2 Giới hạn một phía

Ta gọi số a là giới hạn trái (bên trái) của hàm số $f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow \left| f\left(x\right) - a \right| < \varepsilon .$$

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f\left(x\right) = a.$

Ta gọi số a là giới hạn phải (bên phải) của hàm số $f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow \left| f\left(x\right) - a \right| < \varepsilon .$$

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f\left(x\right) = a$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f\left(x\right) = a.$

Ví dụ 1.16. Cho hàm số $f\left(x\right) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x - 3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{x \to 0} f\left(x\right)$.

Giải

Khi $x \to 0^+$ thì $x > 0$, nên $f\left(x\right) = 2x + 1$. Vì vậy:

$$\lim_{x \to 0^+} f\left(x\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(2x + 1\right) = 1.$$

Khi $x \to 0^-$ thì $x < 0$, nên $f(x) = x - 3$. Vì vậy: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 3) = -3.$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

1.3.3 Các tính chất và các phép toán

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$ thì

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = a + b;$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x).\lim_{x \to x_0} g(x) = a.b;$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}, \ b \neq 0.$$

Một số giới hạn cơ bản

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (x : radian);$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad (0 < a \neq 1);$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (0 < a \neq 1);$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e; \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{k}{x}} = e^k;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Nhận xét. Kết quả của giới hạn không phụ thuộc vào biến lấy giới hạn. Vì vậy, ta có thể đổi biến trong quá trình tính giới hạn.

Ví dụ 1.17. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 5 \left(\dfrac{\sin 5x}{5x} \right) = 5 \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin 5x}{5x} \right) = 5.1 = 5.$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{3^x - 1}{x} - \dfrac{2^x - 1}{x} \right) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \dfrac{3}{2}.$

1.3.4 Phương pháp tính giới hạn

Ta thường gặp các dạng vô định như sau: $\infty-\infty; \frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}; 0^0; 0.\infty; \infty^0; 1^\infty$. Khi gặp một giới hạn có dạng vô định, ta cần biến đổi để khử dạng vô định.

1.3.4.1 Tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *(dạng* $\frac{\infty}{\infty}$*)*

Trong đó:

$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,\ (a_n\neq 0)$ là đa thức bậc n (ký hiệu: $\deg P_n=n$).

$Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0,\ (b_m\neq 0)$ là đa thức bậc m (ký hiệu: $\deg Q_m=m$).

Khử dạng vô định này bằng cách chia $P_n(x)$ và $Q_m(x)$ cho bậc cao nhất của x^k, $k=\max\{m,n\}$. Có thể áp dụng cho trường hợp trong phân thức có chứa căn thức.

Ví dụ 1.18.

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=2.$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}=1.$$

Nhận xét. Từ cách giải các ví dụ trên ta có thể rút ra nhận xét về kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$) dựa vào $\deg P_n=n$ và $\deg Q_m=m$ như sau:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[\begin{array}{ll}\infty & \text{khi } n>m,\\ \frac{a_n}{b_m} & \text{khi } n=m,\\ \infty & \text{khi } n<m.\end{array}\right.$$

1.3.4.2 Tìm $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *(dạng* $\frac{0}{0}$*)*

Trong đó: $P_n(a)=Q_m(a)=0$, tức là $x=a$ là nghiệm của đa thức $P_n(x)$ và $Q_m(x)$. Để khử dạng vô định này ta phân tích $P_n(x)$ và $Q_m(x)$ thành nhân tử, trong đó có nhân tử chung là $(x-a)$.

Ví dụ 1.19.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{1}{5}$.

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-11x-4}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3(x-4)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)}{x+4}=\dfrac{13}{8}$.

1.3.4.3 Giới hạn của biểu thức có chứa dấu căn

Ta có thể nhân với lượng liên hiệp để khử căn đồng thời cũng khử được dạng vô định. Hai lượng liên hợp thường dùng là:

$$\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)=A-B$$

$$\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\left(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}\right)=A-B$$

Ví dụ 1.20.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{1}{32}.$$

1.3.4.4 Giới hạn có dạng vô định 1^∞

Ta biến đổi để đưa về dạng công thức sau:

$$\lim_{x\to x_0}\left[u(x)\right]^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\left[u(x)-1\right]v(x)}$$

trong đó: $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$.

Ví dụ 1.21.

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x-1)\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}2.\frac{\sin 2x}{2x}}=e^2$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k=e^k$.

Từ ví dụ vừa nêu trên, ta có thêm công thức mở rộng như sau:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{k}{x}}=e^{k}.$$

1.3.5 Vô cùng bé, vô cùng lớn

1.3.5.1 Vô cùng bé

Biểu thức $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé (VCB) khi $x\to x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha\left(x\right)=0$.

Ví dụ 1.22.

a) $\sin x$ là VCB khi $x\to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

b) $\sin x-1$ là VCB khi $x\to\frac{\pi}{2}$ vì $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-1\right)=0$.

c) e^{-x^2} là VCB khi $x\to\infty$ vì $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$.

d) $\ln\left(x+1\right)$ là VCB khi $x\to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+x\right)=0$.

Cho $f\left(x\right),g\left(x\right)$ là hai VCB khi $x\to x_0$. Giả sử tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=k$.

- Nếu k = 1 thì $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ là hai VCB tương đương khi $x\to x_0$. Ký hiệu: $f\left(x\right)\sim g\left(x\right)$.
- Nếu k = 0 thì $f\left(x\right)$ gọi là VCB cấp cao hơn $g\left(x\right)$ khi $x\to x_0$.
- Nếu $k\neq 1$, $k\neq 0$ thì $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ là hai VCB cùng cấp.

Ví dụ 1.23.

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\sin x\sim x$ khi $x\to 0$.

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$ nên x^2 cấp cao hơn x.

VCB tương đương

Cho $\alpha\left(x\right)\to 0$ khi $x\to 0$ ta có các cặp VCB tương đương sau:

$\sin x\sim x$;	$\arcsin x\sim x$;
$\tan x\sim x$;	$\arctan x\sim x$;
$\ln\left(1+x\right)\approx x$;	$e^{x}-1\approx x$;
$1-\cos x\approx\frac{x^2}{2}$;	$\left(1+x\right)^{\alpha}-1\approx\alpha x$.

1.3.5.2 Vô cùng lớn

Biểu thức $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng lớn (VCL) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |\alpha(x)| = +\infty$.

Dễ thấy rằng nếu $\alpha(x)$ là VCL thì $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ là VCB, ngược lại $\alpha(x)$ là VCB thì $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ là VCL $\alpha(x) \neq 0$.

Ví dụ 1.24.

a) x là VCL khi $x \to \infty$ vì $\lim\limits_{x \to \infty} |x| = +\infty$.

b) $x^2 + 1$ là VCL khi $x \to \infty$ vì $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^2 + 1\right) = +\infty$.

c) e^{2x} là VCL khi $x \to +\infty$ vì $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$.

d) $\ln x$ là VCL khi $x \to +\infty$ vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

e) $\dfrac{1}{x}$ là VCL khi $x \to 0$ vì $\lim\limits_{x \to 0} \left|\dfrac{1}{x}\right| = +\infty$.

***VCL tương đương**:*

Khi $x \to \infty$ thì ta có:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n \ (a_n \neq 0).$$

Ví dụ 1.25. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x}$.

Giải

a) Khi $x \to 0$, thì ta có: $\sin 5x \sim 5x$; $\sin x \sim x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{x} = \lim_{x \to 0} 5 = 5.$$

b) Khi $x \to 0$, thì ta có: $\ln(1+x) \sim x$; $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x.x}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$

Ví dụ 1.26. Tính

a) $I = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 3x + 5}}{5x + 1}$; b) $J = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 3x + 5}}{5x + 1}$.

Giải

a) Khi $x \to \infty$, ta có:

$$\frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{5x+1} \sim \frac{\sqrt{2x^2}}{5x} = \frac{\sqrt{2}x}{5x} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Suy ra $I = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

b) Khi $x \to -\infty$, ta có:

$$\frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{5x+1} \sim \frac{\sqrt{2x^2}}{5x} = \frac{-\sqrt{2}x}{5x} = \frac{-\sqrt{2}}{5}$$

Suy ra $I = -\frac{\sqrt{2}}{5}$.

1.4 Hàm số liên tục

1.4.1 Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$, $x_0 \in (a;b)$. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nhận xét. Nếu hàm số không liên tục tại x_0 thì được gọi là gián đoạn tại x_0.

Ví dụ 1.27. Xét sự liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, x \neq 0 \\ 1 \qquad\quad , x = 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$.

Giải

Ta có hàm số $f(x)$ xác định tại $x = 0$. Mặt khác, $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$. Vậy $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$, $x_0 \in (a;b)$.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trái (bên trái) điểm x_0, nếu:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục phải (bên phải) điểm x_0, nếu:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục trái và liên tục phải tại x_0. Tức là: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Ví dụ 1.28. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2, x \geq 1 \\ 2mx - 1, x < 1 \end{cases}$.

Xét sự liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 1$?

Giải

Ta có $f(1) = 4$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2mx - 1) = 2m - 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x^2 + 2) = 4.$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ thì

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2m - 1 = 4 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Khi $m \neq \frac{5}{2}$ thì hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$.

Tính chất

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại x_0. Khi đó:

a) $f(x) \pm g(x)$ và $f(x).g(x)$ cũng liên tục tại x_0.

b) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0, với $g(x_0) \neq 0$.

c) Nếu hàm số $u = f(x)$ liên tục tại x_0 và hàm $g(u)$ liên tục tại $u_0 = f(x_0)$ thì hàm hợp $h(x) = g\left[f(x)\right]$ liên tục tại x_0.

1.4.2 Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

Cho hàm số $f(x)$. Ta nói:

- $f(x)$ liên tục trên một khoảng (a,b) nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x \in (a,b)$.
- $f(x)$ liên tục trên một đoạn $[a,b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên (a,b) và liên tục phải tại *a*, liên tục trái tại *b*.

Câu hỏi và bài tập chương 1

Bài 1.1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{3x - x^3}$;

b) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

c) $y = \ln\left(x^2 - 4\right)$;

d) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x}$.

Bài 1.2. Tìm miền xác định và miền giá trị của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$;

b) $y = \lg(1 - 2\cos x)$;

c) $y = 2 + 3\sin x$;

d) $y = \arccos \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Bài 1.3. Tìm các giới hạn sau: (sử dụng các giới hạn cơ bản)

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{2x^3 - x^2 1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + x + 1}{8x^3 + x^2 + x + 1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^4 + x + 1}{x^5 + x^4 + x + 2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x\sqrt{x+1} - 1}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

Bài 1.4. Xét sự liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & khi\ \ x \neq 2 \\ 3 & khi\ \ x = 2 \end{cases}$, tại điểm *x = 2.*

b) $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{\pi x}{2} & khi\ \ |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{2} & khi\ \ x > 1 \end{cases}$, trên toàn trục số.

c) $f(x) = \begin{cases} e^x & khi\ \ x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 1 & khi\ \ x < 0 \end{cases}$, tại điểm *x = 0.*

d) $f(x)=\begin{cases} 4\dfrac{1-\cos x}{x^2} & khi\ x>0 \\ 2 & khi\ x=0 \\ \sin x+2 & khi\ x<0 \end{cases}$, tại điểm $x = 0$.

Bài 1.5. Tìm tổng thu nhập sau khi đầu tư vốn ban đầu v_0 sau t năm với lãi suất r/năm.

a) $v_0 = 1000,\ t = 3,\ r = 12\%,$ với định kỳ năm.

b) $v_0 = 300,\ t = 6,\ r = 12\%,$ với định kỳ nữa năm.

c) $v_0 = 500,\ t = 6,\ r = 10\%,$ với định kỳ quý 4 tháng.

d) $v_0 = 500,\ t = 6,\ r = 9\%,$ với định kỳ tháng.

e) $v_0 = 500,\ t = 6,\ r = 8\%,$ với định kỳ ngày (1 năm = 365 ngày).

Bài 1.6. Trong điều kiện lãi suất 0,9% một tháng, hãy cho biết:

a) Giá trị tương lai của 3 triệu đồng bạn có hôm nay sau 3 năm.

b) Giá trị hiện tại của khoản tiền 5 triệu đồng bạn sẽ nhận được sau 4 năm.

Bài 1.7. Đầu tư 10 triệu với lãi suất 12%/năm tính theo quý tức là 4%/quý. Sau 1 năm 8 tháng (6 quý), tổng giá trị là bao nhiêu?

Bài 1.8. Gửi tiết kiệm 50 triệu sau 2 năm thu được khoảng 63,12 triệu với lãi suất định kỳ nữa năm là r. Tìm r.

Bài 1.9. Với lãi 1% định kỳ tháng, cho vay 50 triệu đồng. Tìm thời gian cho vay để được tổng giá trị khoảng 75 triệu đồng.

Bài 1.10. Muốn nhận được tổng giá trị là 100 triệu sau 5 năm với lãi suất 4% định kỳ quý 3 tháng thì bây giờ phải gửi một khoản tiền tiết kiệm là bao nhiêu?

Bài 1.11. Một dự án đòi hỏi vốn đầu tư ban đầu 6000 (tỷ đồng) và sẽ đem lại 10000 (tỷ đồng) sau 5 năm. Trong điều kiện lãi suất tiền gửi ngân hàng là 9% một năm có nên đầu tư vào dự án đó hay không?

Bài 1.12. Một nhà đầu tư có thể bỏ tiền để thực hiện 1 trong 3 dự án sau:

Dự án 1: Chi phí hiện tại 2000$ và đem lại 3000$ sau 4 năm;

Dự án 2: Chi phí hiện tại 2000$ và đem lại $4000 sau 6 năm;

Dự án 3: Chi phí hiện tại 3000$ và đem lại 4800$ sau 5 năm.

Với lãi suất thịnh hành là 10% một năm thì nên chọn dự án nào?

CHƯƠNG 2

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

2.1 Đạo hàm và vi phân cấp 1

2.1.1 Đạo hàm

2.1.1.1 Khái niệm đạo hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \ ,$$

thì k được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x_0)$ tại điểm x_0.

Ký hiệu: $f'(x_0),\ y'(x_0),\ \dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Đặt $\Delta x = x - x_0$: gọi là số gia của biến độc lập (đối số). Ta có $x = x_0 + \Delta x$.

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$: gọi là số gia của biến phụ thuộc.

Khi đó, biểu thức định nghĩa trở thành:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Đạo hàm một phía

Đạo hàm bên phải: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Đạo hàm bên trái: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó tồn tại đạo hàm bên trái, đạo hàm bên phải và bằng nhau.

Ví dụ 2.1. Tìm đạo hàm bằng định nghĩa của $y = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x.\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Chú ý: Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.

2.1.1.2 Đạo hàm của hàm số ngược

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x, $f'(x) \neq 0$ và có hàm số ngược $x = f^{-1}(y)$ thì hàm số $x = f^{-1}(y)$ có đạo hàm tại $y = f(x)$:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ví dụ 2.2. Tìm đạo hàm của $y = \arcsin x$.

Đặt $y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$, vậy ta có:

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2.1.1.3 Đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

$(c)' = 0$ (c: hằng số)

$\left(x^\alpha\right)' = \alpha . x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ x > 0)$

$\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;

$\left(e^x\right)' = e^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$

$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2.1.1.4 Các quy tắc tính đạo hàm

Nếu các hàm số u, v có đạo hàm tại x thì:

i) $(u+v)' = u' + v'$

ii) $(\alpha.u)' = \alpha.u'$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

iii) $(u.v)' = u'.v + v'.u$

iv) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$ $(v(x) \neq 0)$.

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm theo x, hàm $y = f(u)$ có đạo hàm theo u thì hàm số hợp $y = f\left[g(x)\right]$ có đạo hàm theo x và $y'(x) = y'(u).u'(x)$.

Ví dụ 2.3. Tìm đạo hàm của các hàm sau:

a) $y = \cos(\sin x)$ b) $y = x^{\cos x}$

c) $y = \left(1+\sin^2 x\right)^{3x}$ d) $y = \arctan(\sin(3x+4))$.

Giải

a) Đặt $u = \sin x \Rightarrow y = \cos u$

$$\Rightarrow y' = -\sin u.\cos x = -\sin(\sin x).\cos x.$$

b) Lấy ln hai vế, ta có: $\ln y = \cos x.\ln x.$

Đạo hàm 2 vế theo x, ta có:

$$\frac{y'}{y} = \left(-\sin x.\ln x + \cos x.\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \left(-\sin x.\ln x + \frac{\cos x}{x}\right).x^{\cos x}.$$

2.1.2 Vi phân cấp 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm hữu hạn tại x_0. Nếu hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 thì $df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm f tại x_0.

Nếu $y = x$ thì $dy = dx = 1.\Delta x$. Vậy đối với biến số độc lập x, ta có $dx = \Delta x$. Do đó, công thức vi phân và đạo hàm được ký hiệu như sau:

$$df = f'(x).dx \text{ và } f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Ví dụ 2.4. Tìm vi phân cấp 1 của:

a) $f(x) = x^3$ b) $y = f(x) = \sqrt{1+\ln x}$

Giải

a) Ta có $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow df = 3x^2.dx$.

b) Ta có $y' = \dfrac{1}{x.2.\sqrt{1+\ln x}} \Rightarrow df = \dfrac{dx}{2x.\sqrt{1+\ln x}}$.

2.2 Đạo hàm và vi phân cấp cao

2.2.1 Đạo hàm cấp cao

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thì $y' = f'(x)$ được gọi là đạo hàm cấp 1. Đạo hàm (nếu có) của đạo hàm cấp 1 gọi là đạo hàm cấp 2. Ký hiệu: $y''(x)$, $f''(x)$.

Tương tự, đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ là đạo hàm cấp n.

Ký hiệu: $y^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(x)$.

Ví dụ 2.5. Tính đạo hàm cấp *n* của hàm số sau: $(\sin x)^{(n)}$

Ta có $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$(\sin x)'' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)''' = \cos\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3.\frac{\pi}{2}\right)$$

....

Vậy $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$.

Tương tự, $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$.

2.2.2 Vi phân cấp cao

Cho hàm số $y = f(x)$ và $f^{(n-1)}$ khả vi, ta ký hiệu:

- Vi phân cấp 1: $df = f'(x).dx$
- Vi phân cấp 2: $d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2 = f^{(2)}(x)dx^2$.
- Vi phân cấp *n*: $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$.

2.2.3 Các định lý về giá trị trung bình

- ***Định lý Rolle***

Cho hàm số *f*(*x*) liên tục trên [*a*; *b*], khả vi trong (*a*; *b*). Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Nói cách khác, phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x_0 = c \in (a; b)$.

- ***Định lý Lagrange***

Cho hàm số *f*(*x*) liên tục trên [*a*; *b*], khả vi trong (*a*; *b*).

Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Nhận xét: Định lý Rolle là một trường hợp đặc biệt của định lý Lagrange trong trường hợp $f(a) = f(b)$.

- ***Định lý Cauchy***

Cho hàm số $f(x), g(x)$ cùng liên tục trên $[a; b]$, khả vi trong $(a; b)$ và $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a; b)$. Khi đó, tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Nhận xét: Định lý Lagrange là một trường hợp đặc biệt của định lý Cauchy trong trường hợp $g(x) = x$.

2.2.4 Công thức khai triển TayLor

2.2.4.1 Định lý Taylor

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp $n+1$ trong $(a; b)$ chứa x_0.

Khi đó, $\forall x \in (a; b)$, ta có:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)' + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(x-x_0)^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(x-x_0)^{n+1},$$

với $c = x_0 + \theta(x-x_0), 0 < \theta < 1.$

Công thức trên được gọi là công thức khai triển TayLor của hàm $f(x)$ trong lân cận điểm x_0.

Có thể viết $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, với

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$: là đa thức Taylor bậc n của hàm số $f(x)$.

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(x-x_0)^{n+1}$: phần dư của công thức Taylor.

Đặc biệt, trường hợp $x_0 = 0$ thì $c = \theta x$ công thức Taylor trở thành công thức Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

2.2.4.2 Một số công thức MacLaurin thường gặp

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}.x^{n+1}.$

(2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}.\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^n.\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.\sin\left[\theta x + (2n+3)\dfrac{\pi}{2}\right].$

(3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n.\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}.\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.\cos\left[\theta x + (2n+2)\dfrac{\pi}{2}\right].$

(4) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}.\dfrac{x^n}{n} + (-1)^n.\dfrac{1}{(n+1)}.\left(\dfrac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}$, $x > -1.$

(5) Cho $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \geq 1.$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}.x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}.x^n$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}.x^{n+1}.$$

Đặc biệt khi $\alpha = n \in \mathbb{N}$ thì

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^k + x^n.$$

Đây chính là công thức nhị thức Newton quen thuộc.

2.2.4.3 Một số ví dụ ứng dụng

Ví dụ 2.6. Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x}$ $(a > 0,\ a \neq 1).$

Đặt $f(x) = a^x$, ta có $f'(x) = a^x.\ln a$; $f(0) = 1$, $f'(0) = \ln a.$

Khai triển $f(x) = a^x$ theo công thức Taylor, ta được:

$$a^x = 1 + x.\ln a + \theta(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x.\ln a + \theta(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\ln a + \frac{\theta(x)}{x}\right) = \ln a.$$

Ví dụ 2.7. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ $(\alpha > 0).$

Khai triển hàm số $f(x) = (1+x)^\alpha$ theo công thức Taylor ta có:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x).$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x - o(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\alpha - \frac{o(x)}{x}\right) = \alpha.$$

2.3 Ứng dụng của đạo hàm trong toán học

2.3.1 Khử dạng vô định

2.3.1.1 Quy tắc L'Hospital

Quy tắc L'Hospital là quy tắc cho phép ta sử dụng đạo hàm để khử các dạng vô định dạng $0/0$ và ∞/∞ khi tính giới hạn của hàm số.

Giả sử $f(x), g(x)$ khả vi trong lân cận của a, $g'(x) \neq 0$ trong lân cận đó và thỏa mãn điều kiện sau:

i) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ có dạng vô định $0/0$ hoặc ∞/∞ (tức là $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$).

ii) Tồn tại $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ hữu hạn hoặc vô hạn.

Khi đó

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nhận xét: Quy tắc L'Hospital vẫn đúng nếu:

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} g(x) = 0$.

(3) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} g(x) = \infty$.

Ví dụ 2.8. Tìm giới hạn của hàm số: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Giải

Giới hạn này có dạng $\dfrac{0}{0}$, sử dụng quy tắc L'Hospital ta có:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 2.9. Tính giới hạn: $I = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

Giải

Giới hạn này có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$. Theo quy tắc L'Hospital ta có:

$$I = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(e^x\right)'}{x'} = \lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty.$$

Chú ý: Trường hợp $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ không tồn tại thì ta không có kết luận về giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Trong trường hợp này giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ vẫn có thể tồn tại.

Ví dụ 2.10. Giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+x}{x}$ có dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Tỷ số đạo hàm $\dfrac{(\sin x+x)'}{x'}=\cos x+1$.

Khi $x\to\infty$ thì $\cos x+1$ không có giới hạn, trong khi đó:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x+x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}.\sin x+1\right)=1 \quad (\text{do } \frac{1}{x}\to 0 \text{ và } \sin x \text{ bị chặn}).$$

2.3.1.2 Các dạng vô định khác

- Dạng $0.\infty$, $\infty-\infty$: tìm cách chuyển về dạng $0/0$ và ∞/∞.

Ví dụ 2.11. Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^5.\ln x\right)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^5.\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^5}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{5}{x^6}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^5}{5}=0.$

- Dạng $0^0, 1^\infty, \infty^0$:

  Ta xét $\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{g(x).\ln f(x)}$ $\left(f(x)>0\right)$

  $\lim\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\lim g(x).\ln f(x)}$.

Ví dụ 2.12. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x^2}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x^2.\ln x}=e^0=1$ (vì $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2.\ln x=0$).

2.3.2 Cực trị hàm một biến

2.3.2.1 Định nghĩa

- Hàm $f(x)$ được gọi là đạt cực đại tại x_0 nếu tồn tại một lân cận của x_0 sao cho $f(x)\le f(x_0)$.
- Hàm $f(x)$ được gọi là đạt cực tiểu tại x_0 nếu tồn tại một lân cận của x_0 sao cho $f(x)\ge f(x_0)$.

Định lý: Cho hàm $f(x)$ khả vi trong $(a;\, b)$:

i) Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a;\, b)$ thì $f(x)$ tăng trong khoảng đó.

ii) Nếu $f'(x) < 0,\ \forall x \in (a;\, b)$ thì $f(x)$ giảm trong khoảng đó.

Điểm tới hạn: Các điểm thỏa một trong các điều kiện sau thì được gọi là điểm tới hạn của $f(x)$:

i) Không tồn tại $f'(x)$

ii) $f'(x) = 0$.

Điểm dừng: Các điểm thỏa điều kiện $f'(x) = 0$ được gọi là điểm dừng của f.

2.3.2.2 Điều kiện cần của cực trị

Cho hàm $f(x)$ đạt cực trị tại x_0. Khi đó, nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x) = 0$ (Định lý Fermat).

2.3.2.3 Điều kiện đủ của cực trị

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và khả vi trong $(a;\, b)$ chứa điểm x_0. Khi đó:

i) Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a;\, x_0)$ và $f'(x) < 0,\ \forall x \in (x_0;\, b)$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

ii) Nếu $f'(x) < 0,\ \forall x \in (a;\, x_0)$ và $f'(x) > 0,\ \forall x \in (x_0;\, b)$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

Ví dụ 2.13. Tìm cực trị của hàm số $y = \ln(1 + x^2)$.

Ta có $y' = \dfrac{2x}{1 + x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Định lý: Giả sử $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục ở lân cận điểm x_0 và $f'(x) = 0$.

i) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu.

ii) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại.

Ví dụ 2.14. Tìm cực trị của hàm số $y = \ln(1 + x^2)$.

Ta có $y' = \dfrac{2x}{1 + x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Khi đó $y'' = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$

$\Rightarrow y''\left(x_0\right) = y''(0) = 2 > 0 \Rightarrow y$ đạt cực tiểu tại $x = 0.$

Ví dụ 2.15. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-5).$

Giải

Ta có $f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-5) + x^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x^2} = \dfrac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}},$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng xét dấu:

x		0		2	
$f(x)$	+	||	–	0	+

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

$$y_{\max} = f(0) = 0 \text{ và } y_{\min} = f(2) = -3\sqrt[3]{4}.$$

Ví dụ 2.16. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = (x-1)^3$.

Giải

Ta có $f'(x) = 3(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Nhưng $f'(x) > 0$, với mọi $x \neq 1$. Vậy hàm số không đạt cực trị tại $x = 1$.

2.3.3 Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất

Cho hàm số $f(x)$ liên tục $[a; b]$. Khi đó $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) tại các điểm tới hạn thuộc $(a; b)$ hay tại hai điểm đầu mút a, b.

Phương pháp tìm GTLN – GTNN

Bước 1. Tìm điểm tới hạn của hàm số trên $(a; b)$.

Bước 2. Tính giá trị của f tại các điểm tới hạn và $f(a)$, $f(b)$.

Bước 3. Kết luận GTLN, GTNN từ các giá trị được tính ở bước 2.

Ví dụ 2.17. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 4$ trên đoạn $[-3; 2]$.

Giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$

Tìm điểm tới hạn: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

Tính giá trị: $f(1)=2;\ f(-1)=6;$

$f(-3)=14;\ f(2)=6.$

Vậy GTLN: $\underset{[-3;\,2]}{Max}\, f(x)=6$ tại $x=-1$ và $x=2$.

GTNN: $\underset{[-3;\,2]}{Min}\, f(x)=-14$ tại $x=-3$.

Ví dụ 2.18. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x)=-\left(x^3+3x^2-9x\right)$ trên $[-2;\,2]$. Từ đó suy ra GTLN, GTNN của hàm số $g(x)=\left|x^3+3x^2-9x\right|$ trên $[-2;\,2]$.

Giải

Hàm số *f*(*x*) xác định và liên tục trên $[-2;\,2]$.

Tìm điểm tới hạn của *f*(*x*) trong (–2; 2).

Ta có $f'(x)=-\left(3x^2+6x-9\right)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x=1 & (n)\\ x=-3 & (l)\end{array}\right.$, vì $x\in(-2;\,2)$.

Tính giá trị: $f(1)=5;\ f(-2)=-22;\ f(2)=-2.$

Kết luận: xét trên đoạn $[-2;\,2]$ thì

GTLN: $\underset{[-2;\,2]}{Max}\, f(x)=5$ tại $x=1$.

GTNN: $\underset{[-2;\,2]}{Min}\, f(x)=-22$ tại $x=-2$.

Mặc khác, ta có $g(x)=\left|f(x)\right|$ nên:

GTLN: $\underset{[-2;\,2]}{Max}\, g(x)=5\max\left\{\left|f_{\max}\right|,\left|f_{\min}\right|\right\}=22$ tại $x=-2$.

GTNN: $\underset{[-2;\,2]}{Min}\, g(x)=0.$

2.4 Ứng dụng của đạo hàm trong toán kinh tế

2.4.1 Bài toán giá trị cận biên

2.4.1.1 Ý nghĩa của đạo hàm trong kinh tế

Xét mô hình hàm số $y=f(x)$ với *x* và *y* là các biến số kinh tế. Trong kinh tế học người ta quan tâm đến xu hướng biến thiên của biến phụ thuộc *y* tại một điểm x_0 khi biến độc lập *x* thay đổi 1 lượng nhỏ.

Theo định nghĩa đạo hàm:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Khi Δx có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ ta có:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} \approx f'\left(x_0\right)$$

$$\Rightarrow \Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) \approx f'\left(x_0\right).\Delta x$$

Với $\Delta x = 1$, ta có $\Delta y \approx f'\left(x_0\right)$. Như vậy, đạo hàm là đại lượng đo lường sự biến động của *y* khi *x* tăng lên 1 đơn vị và được gọi là giá trị biên hay giá trị cận biên của *x* tại điểm x_0.

Đối với mỗi hàm kinh tế, giá trị cận biên cụ thể như sau:

(1) Sản lượng biên (Marginal Quantity)

Sản lượng biên là đại lượng đo lường sự biến động của sản lượng khi vốn hoặc lao động tăng lên một đơn vị. Kí hiệu: *MQ*.

Cho hàm sản xuất $Q = Q\left(L\right)$, khi đó sản lượng biên là: $MQ\left(L\right) = Q'\left(L\right)$.

Ví dụ 2.19. Giả sử hàm sản xuất của một doanh nghiệp là: $Q = 4\sqrt{L}$, trong đó *L* là số công nhân.

Sản phẩm biên của lao động tại *L* = 100 là:

$$MQ\left(L\right) = \frac{dQ}{dL} = \frac{4}{2\sqrt{L}} = \frac{2}{\sqrt{100}} = 0,2.$$

Ta có thể giải thích: Tại mức lao động $L = 100$, nếu tăng lao động lên 1 người thì sản lượng tăng thêm 0,2 đơn vị.

(2) Chi phí biên (Marginal Cost)

Chi phí biên là đại lượng đo lường sự thay đổi của chi phí khi sản lượng tăng lên một đơn vị. Kí hiệu: $MC\left(Q\right)$.

Cho hàm chi phí $TC = TC\left(Q\right)$. Ta gọi $MC\left(Q\right) = TC'\left(Q\right)$ là giá trị cận biên của chi phí.

Ví dụ 2.20. Cho tổng chi phí *TC* để sản xuất *Q* sản phẩm có hàm như sau:

$$TC = 0,0001Q^3 - 0,02Q^2 + 5Q + 5000 \text{ (đơn vị tiền)}$$

Tìm giá trị cận biên của chi phí. Với $Q = 20$ thì chi phí biên là bao nhiêu và cho biết ý nghĩa?

Giải

Giá trị cận biên của chi phí: $MC\left(Q\right) = \frac{dC}{dQ} = 0,0003Q^2 - 0,04Q + 5$

Với $Q = 20$, ta có $MC\left(20\right) = 4,32$ (đơn vị tiền/sản phẩm).

Ý nghĩa: Nếu sản suất tăng thêm một đơn vị (từ 20 lên 21) thì chi phí tăng thêm 4,2 đơn vị tiền tệ.

(3) Doanh thu biên (Marginal Revenue)

Doanh thu biên là đại lượng đo lường sự thay đổi của doanh thu khi giá hoặc sản lượng tăng lên 1 đơn vị. Kí hiệu: $MR(Q)$.

Cho hàm doanh thu $TR = TR(Q)$. Ta có $MR(Q) = TR'(Q)$ là giá trị cận biên của doanh thu.

Ví dụ 2.21. Lượng sản phẩm bán được Q và giá sản phẩm P có quan hệ: $Q = 500 - 10P$. Tìm doanh thu cận biên khi $P = 10,\ P = 30$.

Giải

Ta có $Q = 500 - 10P \Leftrightarrow P = 50 - \dfrac{Q}{10}$.

Doanh thu $TR = QP = Q\left(50 - \dfrac{Q}{10}\right) = 50Q - \dfrac{Q^2}{10}$ (đơn vị tiền).

$$MR(Q) = TR'(Q) = 50 - \frac{Q}{5}.$$

Khi $P = 10 \Rightarrow Q = 400$.

$\Rightarrow MR(400) = -30$ (đơn vị tiền/sản phẩm) là tốc độ thay đổi của doanh thu R theo Q tại $Q = 400$.

Nghĩa là nếu doanh nghiệp tăng giá lên 1 đơn vị/sản phẩm (từ 10 lên 11) thì doanh thu giảm 30 đơn vị.

Khi $P = 30 \Rightarrow Q = 200$.

$\Rightarrow MR(200) = 10$ (đơn vị tiền/sản phẩm).

Nghĩa là nếu doanh nghiệp tăng giá lên 1 đơn vị/sản phẩm (từ 30 lên 31) thì doanh thu tăng 10 đơn vị.

(4) Lợi nhuận biên (Marginal Profit)

Lợi nhuận biên là đại lượng đo lường sự thay đổi của lợi nhuận khi giá hoặc sản lượng tăng thêm 1 đơn vị.

Xét hàm lợi nhuận của 1 sản phẩm:

$$\pi = \pi(Q) = TR(Q) - TC(Q).$$

Khi đó giá trị cận biên của lợi nhuận có 2 giá trị:

$$M\pi_P = \frac{d\pi}{dP}$$

$$M\pi_Q = \frac{d\pi}{dQ}.$$

(5) Xu hướng tiêu dùng và tiết kiệm cận biên

Cho hàm tiêu dùng $C = C(I)$, với *I* là tổng thu nhập quốc gia.

Hàm tiết kiệm $S = I - C(I)$.

Ta có: *MC*(*I*) là xu hướng tiêu dùng cận biên.

MS(*I*) là xu hướng tiết kiệm cận biên.

Khi đó:

$$MS(I) = \frac{dS}{dI} = 1 - \frac{dC}{dI}$$

Do đó $MS(I) = 1 - MC(I)$.

Ví dụ 2.22. Cho hàm tiêu dùng $C = \frac{5\left(2\sqrt{I^3}+3\right)}{I+10}$. Xác định xu hướng tiêu dùng cận biên và xu hướng tiết kiệm cận biên khi $I = 100$.

Giải

$$MC(I) = C'(I) = \frac{5\left[3\sqrt{I}\,(I+10) - \left(2\sqrt{I^3}+3\right)\right]}{(I+10)^2} = \frac{5\left[\sqrt{I^3} + 30\sqrt{I} - 3\right]}{(I+10)^2}.$$

$$\Rightarrow MC(100) = \frac{5.\left[\sqrt{100^3} + 30\sqrt{I} - 3\right]}{(100+10)^2} \approx 0,536.$$

Tốc độ thay đổi của xu hướng tiêu dùng *C* theo biến *I* tại $I = 100$ khoảng 0,563 (đơn vị/đơn vị), nghĩa là tại $I = 100$ nếu *I* tăng 1 đơn vị thì *C* tăng khoảng 0,563 đơn vị.

Ta có: $MS(100) = 1 - MC(100) \approx 0,464$.

Tốc độ thay đổi của xu hướng tiết kiệm *S* theo biến *I* tại *I* = 100 khoảng 0,464 (đơn vị/đơn vị), nghĩa là tại *I* = 100, nếu *I* tăng 1 đơn vị thì *S* tăng khoảng 0,464 đơn vị.

2.4.2 Hệ số co dãn

2.4.2.1 Lượng thay đổi tuyệt đối và tương đối

Khi đại lượng *x* tăng thêm 1 lượng Δx thì ta gọi Δx là độ thay đổi tuyệt đối của *x* (số tuyệt đối).

Tỷ số $\frac{\Delta x}{x}.100\%$ gọi là độ thay đổi tương đối của *x* (số tương đối).

Ví dụ 2.23. Tại một cửa hàng gạo, giá bán trước đây là $P = 10$ ngàn đồng, hiện tại giá bán gạo tăng lên $P_1 = 11$ ngàn đồng. Vậy giá gạo tăng bao nhiêu và tương ứng tăng bao nhiêu phần trăm?

Giải

Số tuyệt đối: $\Delta P = P_1 - P = 1$ ngàn đồng: giá gạo tăng lên 1 ngàn đồng.

Số tương đối: $\dfrac{P_1 - P}{P} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$ hay $\dfrac{\Delta P}{P}.100\% = 10\%$: nghĩa là giá tăng lên 0,1 lần hay 10%.

Ví dụ 2.24. Một căn hộ giá 200 triệu đồng nếu giá tăng thêm 1 triệu đồng thì độ thay đổi tuyệt đối và tuyệt đối là bao nhiêu?

Giải

Độ thay đổi tuyệt đối: $\Delta P = P_1 - P = 1$ triệu đồng.

Độ thay đổi tương đối: $\dfrac{P_1 - P}{P} = \dfrac{1}{200} = 0{,}005$ hay $\dfrac{\Delta P}{P}.100\% = 0{,}5\%.$

Chú ý: Độ thay đổi tương đối không phụ thuộc vào đơn vị tính.

2.4.2.2 Hệ số co dãn

Đối với các hàng hóa khác nhau thì sự thay đổi giá thêm một đơn vị mang ý nghĩa khác nhau. Như vậy, để đánh giá độ nhạy cảm của cầu hàng hóa đối với sự biến động giá cả, các nhà kinh tế sử dụng khái niệm hệ số co dãn.

Hệ số co dãn của cầu theo giá (tính ở mỗi mức giá) là số đo lượng thay đổi tương đối của lượng cầu (*Q*) khi lượng thay đổi tương đối của giá cả *P* tăng lên 1%.

Kí hiệu: ε_{QP}.

$$\varepsilon_{QP} = \frac{(\Delta Q_d / Q_d).100}{(\Delta P / P).100} = \frac{\Delta Q_d}{\Delta P}.\frac{P}{Q_d} = \frac{\Delta D(P)}{\Delta P}.\frac{P}{D(P)} = D'(P).\frac{P}{D(P)}.$$

Ví dụ 2.25. Cho hàm cầu $Q = 1400 - P^2$. Tìm hệ số co dãn tại giá *P* = 20 (đơn vị tiền).

Giải

Ta có $\varepsilon_{QP} = (-2P).\dfrac{P}{1400 - P^2} = \dfrac{-2P^2}{1400 - P^2}.$

Khi *P* = 20 ta có $\varepsilon_{QP} = -0{,}8.$

Vậy điều này có nghĩa là tại mức giá *P* = 20, nếu tăng 1% thì cầu sẽ giảm 0,8%.

Tương tự, hệ số co dãn của cung theo giá là số đo lượng thay đổi tương đối của lượng cung khi lượng tương đối của giá tăng 1%.

Cho hàm cung $Q_S = S(P)$, thì hệ số co dãn của cung theo giá trị tại điểm *P*:

$$\varepsilon = \frac{dQ_S}{dP}.\frac{P}{Q_S} = \frac{dS(P)}{dP}.\frac{P}{S(P)} = S'(P).\frac{P}{S(P)}.$$

2.4.3 Lựa chọn tối ưu

Đối với một doanh nghiệp sản xuất, mục tiêu thường đặt ra là tối đa hóa lợi nhuận. Bài toán đặt ra là:

- Tìm *P*, *Q* để doanh thu đạt tối đa.
- Tìm *Q* để chi phí tối thiểu.

Giả sử doanh nghiệp có hàm tổng chi phí $TC(Q)$ và hàm tổng doanh thu $TR(Q)$. Tổng lợi nhuận của doanh nghiệp là hàm số:

$$\pi = TR(Q) - TC(Q).$$

Bài toán đặt ra là chọn mức sản lượng Q_0 để thu lợi nhuận tối đa. Điều kiện cần để π đạt cực đại tại điểm Q_0 là:

$$\pi' = TR'(Q_0) - TC'(Q_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow TR'(Q_0) = TC'(Q_0) \Leftrightarrow MR = MC.$$

Nghĩa là doanh thu cận biên bằng chi phí cận biên. Khi đó, điều kiện đủ để π đạt cực đại là:

$$\pi'' = TR''(Q_0) - TC''(Q_0) < 0 \Leftrightarrow TR''(Q_0) < TC''(Q_0).$$

Ví dụ 2.26. Cho hàm doanh thu và hàm chi phí của nhà sản xuất như sau:

$$TR = 1400Q - 7,5Q^2 \;, TC = Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 750.$$

Hãy chọn mức sản lượng tối ưu để lợi nhuận tối đa.

Giải

Hàm lợi nhuận của nhà sản xuất trong trường hợp này là:

$$\pi = TR - TC = -Q^3 - 1,5Q^2 + 1260Q - 750.$$

Điều kiện cần để π đạt cực đại:

$$\pi' = -3Q^2 - 3Q + 1260 = 0$$

$$\Leftrightarrow Q^2 + Q - 420 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q = 20 \quad (n) \\ Q = -21 \; (l) \end{array}\right.$$

$$\pi''(Q) = -6Q - 3 \Rightarrow \pi''(20) = -123 < 0.$$

Suy ra $Q = 20$ là điểm cực đại.

Vậy sản lượng tối ưu để cho lợi nhuận tối đa là $Q = 20$.

Ví dụ 2.27. Hãy xác định mức giá tối ưu của nhà sản xuất độc quyền, biết:

Hàm chi phí cận biên: $MC = 3Q^2 - 6Q + 132.$

Hàm cầu đối với sản phẩm: $Q = 148 - \frac{2}{3}P.$

Giải

Theo cầu của thị trường, để tiêu thụ được Q sản phẩm, nhà sản xuất phải bán với giá $P = 222 - 1,5Q$.

Tổng doanh thu của nhà sản xuất tại mức sản lượng Q: $TR = P.Q = (222 - 1,5Q).Q$.

Doanh thu cận biên: $MR = TR'_Q = 222 - 3Q$.

Điều kiện cần để tổng lợi nhuận đạt cực đại là:

$$MR = MC \Leftrightarrow 222 - 3Q = 3Q^2 - 6Q + 132$$

$$\Leftrightarrow Q^2 - Q - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q = 6 \quad (n) \\ Q = -5 \ (l) \end{array}\right..$$

Điều kiện đủ:

$$TC'' = MC'(Q) = 6Q - 6 = 30 \Rightarrow TC'' = MC'(6) = 30.$$

$$TR'' = MR'(Q) = MR'(6) = -3 \Rightarrow TR'' < TC''$$

$\Rightarrow$ Mức sản lượng tối ưu là Q = 6.

Câu hỏi và bài tập chương 2

Bài 2.1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = e^x(1+\cot x)$;

b) $y = \dfrac{(x-3)^2(2x+1)}{(x-1)^2}$;

c) $y = 3^{\frac{\ln x}{3}}$;

d) $y = \sin(\cos^2 x).\cos(\sin^2 x)$;

e) $y = \arctan(\ln x) + \ln(\arctan x)$;

f) $y = \ln(2x^2 + 3\sin^2 x)$.

Bài 2.2. Tính vi phân *dy* của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{e^{x^2}}{\cos x}$;

b) $y = \ln(2\arctan x)$;

c) $y = \arctan\left(\dfrac{\ln x}{3}\right)$;

d) $y = 3^{\ln(\arccos x)}$;

e) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

f) $y = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$, $(a \neq 0)$.

Bài 2.3. Tìm khai triển Mac – Laurin các hàm số sau:

a) $f(x) = e^{2x}$ đến x^4;

b) $f(x) = \cos^2 x$ đến x^4;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ đến x^4;

d) $f(x) = \ln(3-2x)$ đến x^4.

Bài 2.4. Áp dụng quy tắc L'Hospital, tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi - 2\arctan x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{\sin x + 2x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \arctan x}{x^3}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x}{1 - \cos x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}(a>0)$;

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, $(a, b = const)$;

k) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$;

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$;

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^x + x)^{\frac{1}{x}}$;

n) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Bài 2.5. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

a) $y=\ln(2x+5)$

b) $y=x.e^x$

c) $y=\sqrt{3+x}$

d) $y=\sin(3x+5)$

Bài 2.6. Tìm khai triển Taylor các hàm sau đến cấp 3 trong lân cận x = 1.

a) $y=e^{-2x}$

b) $y=\ln(x+2)$

Bài 2.7. Tìm giá trị cận biên của các hàm số

a) Hàm chi phí $TC = -0{,}1Q^2 + 5Q + 3$. Tại $Q = 2$ và $Q = 100$.

b) Hàm doanh thu: $TR = 100Q + 5Q^2 - Q^3$ tại $Q = 5$, $Q = 100$.

Bài 2.8. Cho hàm tiêu dùng của một quốc gia là:

$$C=\frac{10\sqrt{I}+0{,}7\sqrt{I^3}-0{,}2I}{\sqrt{I}}.$$

Tìm xu hướng tiết kiệm cận biên khi thu nhập quốc dân là 25 và 50.

Bài 2.9. Cho hàm cầu $Q=\dfrac{60}{P}+\ln\left(80-P^3\right)$.

Xác định hệ số co dãn khi $P = 4$, $P = 10$.

Bài 2.10. Doanh thu của một loại sản phẩm $TR = 240Q + 50Q^2 - Q^3$. Tìm Q để doanh thu đạt tối đa.

Bài 2.11. Cho hàm cầu của một loại sản phẩm $Q=100-\dfrac{P}{10}$. Tìm mức giá để doanh thu đạt tối đa.

Bài 2.12. Một loại sản phẩm có hàm cầu $P = 5000 - 20P$ và hàm chi phí trung bình cho mỗi đơn vị sản phẩm là $\overline{C}=2+\dfrac{80}{Q}$. Tìm mức giá để có lợi nhuận tối đa.

Bài 2.13. Trung bình chi phí một đơn vị sản phẩm cho bởi: $\overline{C}=Q^2-20Q+300-\dfrac{100}{Q}$.

a) Tìm mức sản suất $Q\in[2;10]$ để có chi phí tối thiểu.

b) Tìm mức sản suất $Q\in[5;10]$ để có chi phí tối thiểu.

Bài 2.14. Hàm cầu của một loại sản phẩm độc quyền $P = 600 - 2Q$ và tổng chi phí $TC = 0{,}2Q^2 + 28Q + 200$.

a) Tìm mức sản xuất Q để lợi nhuận đạt tối đa. Tìm mức giá P và lợi nhuận lúc đó.

b) Chính quyền đặt thuế là 22 đơn vị tiền cho 1 đơn vị sản phẩm. Tìm mức sản xuất để lợi nhuận đạt tối đa. Tìm mức giá và lợi nhuận lúc đó.

CHƯƠNG 3

PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

3.1 Nguyên hàm và tích phân bất định

3.1.1 Nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(a;b)$. Ta nói $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ nếu, với mọi $x \in (a;b)$: $F'(x) = f(x)$.

Định lý

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;\ b)$ thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x)+C$ (với C là hằng số tùy ý).

Chứng minh. Vì $\left[F(x)+C\right]' = F'(x) = f(x)$ nên $F(x)+C$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng đó. Cho $G(x)$ là một nguyên hàm bất kỳ của $f(x)$ trên $(a;b)$. Ta có:

$$\left[G(x)-F(x)\right]' = G'(x)-F'(x) = f(x)-f(x) = 0.$$

Suy ra, $G(x)-F(x)=C$ (hằng số). Vậy $G(x)=F(x)+C$.

3.1.2 Tích phân bất định

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ thì biểu thức $F(x)+C$ (với C là hằng số tùy ý) được gọi là tích phân bất định của $f(x)$, ký hiệu:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C.}$$

Định lý: Cho $f(x)$ khả tích và $F(x)$ khả vi. Khi đó, ta có một số tính chất của tích phân bất định

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \qquad d\int f(x)dx = f(x)dx; \\ \int dF(x) = F(x)+C; \\ \int\left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]dx = \alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx. \end{array}}$$

3.1.3 Bảng các tích phân cơ bản

1. $\int a dx = ax + C,\ (a \in \mathbb{R})$;

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$;

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4. $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}.\ln|ax+b| + C$;

5. $\int \dfrac{dx}{(ax+b)^2} = -\dfrac{1}{a}.\dfrac{1}{(ax+b)} + C$;

6. $\int e^{ax+b} dx = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + C$;

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1;$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

10. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C;$

11. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C;$

12. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$

13. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \dfrac{1}{a}\arcsin\dfrac{x}{a} + C;$

15. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C;$

16. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C;$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

3.1.4 Các phương pháp tính tích phân

3.1.4.1 Sử dụng các tính chất và nguyên hàm cơ bản

Nếu $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ thì

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx.$$

Ví dụ 3.1. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int \left(x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + x^2 \right) dx;$

b) $I = \int \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right) dx.$

Giải

a) $I = \int x dx + \int \dfrac{1}{x} dx + \int \dfrac{1}{x^2} dx + \int x^2 dx = \dfrac{x^2}{2} + \ln|x| - \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^3}{3} + C.$

b) $I = \int \left(x\sqrt{x} + 1\right) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int dx = \dfrac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C.$

3.1.4.2 Phương pháp đổi biến

Dạng 1: Đặt $x = \varphi(t)$ khả vi và đơn điệu, khi đó $dx = \varphi'(t)dt$ và ta có công thức:

$$\boxed{I = \int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt.}$$

Ví dụ 3.2. Tính tích phân bất định $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Giải

Đặt $x = a\sin t,\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2} \right) \Rightarrow t = \arcsin\dfrac{x}{a},\ dx = a\cos x dx.$

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}.a\cos tdt$$
$$=\int\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}.a\cos tdt=a^2\int\sqrt{\cos^2 t}\cos tdt$$
$$=a^2\int\cos^2 tdt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$
$$=\frac{a^2}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$
$$=\frac{a^2t}{2}+\frac{a\sin t.a\cos t}{2}+C=\frac{a^2t}{2}+\frac{a\sin t.\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}{2}+C.$$

Thay $t=\arcsin\frac{x}{2}$, ta được: $I=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$

Chú ý. Trong thực tế chúng ta có thể gặp dạng tích phân trên dạng tổng quát hơn như: nếu hàm số dưới dấu tích phân có chứa căn dạng $\sqrt{a^2+x^2},\sqrt{a^2-x^2}$ và $\sqrt{x^2-a^2}$ (trong trong đó a là hằng số dương) mà không có cách biến đổi nào khác thì nên đổi sang các hàm số lượng giác để làm mất căn thức, cụ thể là:

Với $\sqrt{a^2-x^2}$, đặt $x=a\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x=a\cos t,\ t\in\left[0;\pi\right]$.

Với $\sqrt{a^2+x^2}$, đặt $x=a\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x=a\cot t,\ t\in\left(0;\pi\right)$.

Với $\sqrt{x^2-a^2}$, đặt $x=\frac{a}{\sin t},\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\backslash\left\{0\right\}$ hoặc $x=\frac{a}{\cos t};\ t\in\left[0;\pi\right]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Dạng 2: Đặt $t=u\left(x\right)$ khả vi liên tục. Khi đó

$$\boxed{I=\int f\left[u\left(x\right)\right]u'\left(x\right)dx=\int f\left(t\right)dt.}$$

Ví dụ 3.3. Tính các tích phân bất định

a) $I=\int\frac{x^3}{\left(2x^4+1\right)^6}dx;$ b) $I=\int\frac{e^{5x}}{e^{2x}+1}dx.$

Giải

a) Đặt $t=2x^4+1\Rightarrow dt=8x^3dx\Rightarrow x^3dx=\frac{dt}{3}$. Do đó

$$I=\int\frac{1}{8}.\frac{dt}{t^6}=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^6}=\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{5t^5}\right)+C=-\frac{1}{40\left(2x^4+1\right)^5}+C.$$

b) Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx$. Khi đó:

$$I=\int\frac{e^{4x}.e^x}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{t^4dt}{t^2+1}=\int\left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t+C$$
$$=\frac{1}{3}e^{3x}-e^x+\arctan\left(e^x\right)+C.$$

3.1.4.3 Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử $u = u(x)$ và $v = v(x)$ khả vi liên tục. Khi đó:

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du\,.}$$

Ví dụ 3.4. Tính

a) $I = \int x \arctan x dx$; b) $I = \int x^2 \ln x dx$.

Giải

a) Đặt $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$.

Suy ra: $I = \dfrac{1}{2}x^2.\arctan x - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{x^2}{x^2+1}dx$.

Xét $\int \dfrac{x^2}{x^2+1}dx = \int \left(1 - \dfrac{1}{x^2+1}\right)dx = x - \arctan x + C$.

Vậy $I = \dfrac{1}{2}x^2.\arctan x - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}C$.

b) Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$.

Suy ra: $I = \dfrac{1}{3}x^3.\ln x - \dfrac{1}{3}\int x^3 dx = \dfrac{1}{3}x^3.\ln x - \dfrac{1}{9}x^3 + C.$

Ví dụ 3.5. Tính $I_n = \int \dfrac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$, với $a > 0$.

Giải

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{-2nx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx \\ v = x \end{cases}$. Suy ra:

$$I_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx.$$

Mặt khác,

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx = \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx - a^2\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}.$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}.$$

Vậy $$\boxed{I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n},$$

với $I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ thì công thức trên được gọi là công thức tích phân truy hồi.

Nhận xét:

a) Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng:

$$\int P(x)\ln(x)dx,\ \int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\arctan xdx,$$

thì ta đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=P(x)dx\end{cases}$ hay $\begin{cases}u=\arcsin x\\ dv=P(x)dx\end{cases}$ hay $\begin{cases}u=\arctan x\\ dv=P(x)dx\end{cases}$

b) Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng:

$$\int P(x)\ln(x)dx,\ \int P(x)\sin xdx,\ \int P(x)\cos xdx,\int P(x)e^xdx,$$

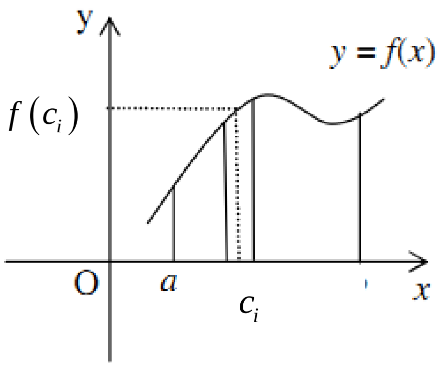
thì ta đặt $\begin{cases}u=P(x)\\ dv=\sin xdx\end{cases}$ hay $\begin{cases}u=P(x)\\ dv=\cos xdx\end{cases}$ hay $\begin{cases}u=P(x)\\ dv=e^xdx\end{cases}$

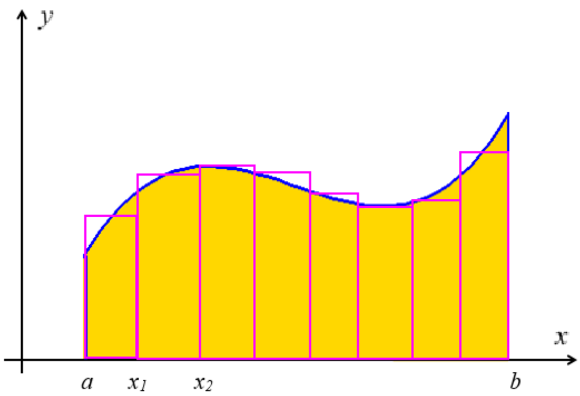
3.2 Tích phân xác định

3.2.1 Bài toán tính diện tích hình thang cong

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(x)\geq 0,$ với mọi $x\in[a,b]$. Miền giới hạn bởi các đường $y=f(x),\ x=a,\ x=b$ và trục hoành Ox được gọi là hình thang cong.

Chia tùy ý đoạn $[a, b]$ thành n phần bởi các điểm: $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b.$





Từ các điểm chia đó, ta dựng các đường thẳng song song với trục Oy. Khi đó, hình thang cong $AabB$ được chia thành n hình thang cong nhỏ. Lấy 1 điểm tùy ý $c_i\in[x_{i-1};x_i]$ với $i=\overline{1,n}$, và coi diện tích hình thang cong thứ i gần bằng diện tích hình chữ nhật có đáy x_i-x_{i-1} và chiều cao là $f(c_i)$, ta có:

$$f(c_i)(x_i-x_{i-1})=f(c_i)\Delta x_i.$$

Do đó, diện tích gần đúng của hình thang cong *AabB* là:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Nếu $S_n \to S$ khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$ không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a, b]$ và cách chọn điểm $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ thì S chính là diện tích của hình thang cong *AabB*

$$S_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \right).$$

3.2.2 Tích phân xác định

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và không âm trên $[a, b]$. Chia tùy ý đoạn $[a, b]$ thành n phần bởi các điểm, mỗi phép chia được gọi là một phép phân hoạch $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Gọi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, lấy một điểm tùy ý $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ với $i = \overline{1, n}$, và lập tổng tích phân:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Nếu tồn tại hữu hạn $I = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

Giới hạn này không phụ thuộc vào cách chia $[a, b]$ và cách lấy điểm c_i thì $y = f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và I được gọi là tích phân xác định của f trên $[a, b]$.

Ký hiệu: $\int_a^b f(x)dx$, trong đó a là cận dưới và b là cận trên.

Chú ý:

- $S_n = \int_a^b f(x)dx$, $f(x) \geq 0$ thì tích phân xác định là diện tích giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$.
- Quy ước: $\int_a^a f(x)dx = 0$

3.2.3 Một số tính chất cơ bản

Cho $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a, b]$, a, b, c, k là các hằng số tùy ý. Khi đó, ta có:

a) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

b) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ a < c < b$

c) $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

d) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ k \in \mathbb{R}$

e) Nếu $f(x) \le g(x)$ với mọi $x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

3.2.4 Công thức Newton – Leibnitz

Cho *f* liên tục trên [*a*, *b*] và *F* là nguyên hàm của *f* thì ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

3.2.5 Phương pháp tính tích phân

3.2.5.1 Phương pháp đổi biến

Cho *f*(*x*) liên tục trên [*a*, *b*], $x = x(t)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$ sao cho $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b.$ Khi đó ta có công thức đổi biến:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))d(x(t)) = \int_\alpha^\beta f(x(t)).x'(t)dt.$$

Ví dụ 3.6. Tính tích phân

a) $I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$;   b) $I = \int_1^e \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

Giải

a) Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Đổi cận:

$$x = e \Rightarrow t = 1$$
$$x = 1 \Rightarrow t = 0$$

Khi đó $I = \int_0^1 t^2 dx = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

b) Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = -dt.$

Đổi cận:

$$x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$
$$x = 1 \Rightarrow t = 1$$

Khi đó $I = -\int_1^{\frac{1}{2}} e^t dt = -e^t\Big|_1^{\frac{1}{2}} = e - \sqrt{e}.$

3.2.5.2 Phương pháp tích phân từng phần

Nếu các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$ thì

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu .}$$

Ví dụ 3.7. Tính $I = \int_0^{\pi/2} e^x \cos xdx$.

Giải

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

$$I = \left[e^x \sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin xdx = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin xdx .$$

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

$$\int_0^{\pi/2} e^x \sin xdx = \left[-e^x \cos x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos xdx = 1 + I .$$

Do đó, $I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - I \Rightarrow I = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

3.3 Tích phân suy rộng

3.3.1 Tích phân suy rộng loại 1 (có cận vô hạn)

Ta có $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ là không tồn tại theo nghĩa tích phân xác định nếu cận α hay β là $+\infty$ hay $-\infty$. Như vậy, cần mở rộng tích phân xác định theo hướng cận vô hạn.

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;+\infty)$ và *f* liên tục trên $[a,t]$ với mọi $t > a$. Nếu $\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx = B$ thì *B* được gọi là tích phân suy rộng cuả hàm số *f* trên $[a;+\infty)$.

Ký hiệu: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx.$

Nếu *B* là một số hữu hạn thì ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và ngược lại là phân kỳ.

Tương tự có các dạng tích phân như sau:

- $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{t\to-\infty}\int\limits_{t}^{a} f(x)dx$
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$

Nhận xét: Đoạn lấy tích phân phải chứa trong tập xác định của hàm lấy tích phân.

Ví dụ 3.8. Tính tích phân suy rộng $I = \int\limits_{-\infty}^{-1} \dfrac{dx}{x^2}.$

Giải

$$I = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{-1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{a}^{-1}\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right) = 1 + \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{a} = 1 \text{ (vì } \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{a} = 0. \text{)}$$

Vậy tích phân I hội tụ.

3.3.2 Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,t], t\in[a,b)$, f không bị chặn trong mọi khoảng $(u,b), u > a$. Nếu $\lim\limits_{t\to b^-}\int\limits_{a}^{t} f(x)dx = B$ thì B được gọi là tích phân suy rộng của f trên $[a,b]$.

Ký hiệu:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int\limits_{a}^{t} f(x)dx.$$

Nếu B hữu hạn thì ta nói tích phân hội tụ, ngược lại ta nói phân kỳ.

Tương tự ta có định nghĩa tích phân suy rộng loại 2 trong trường hợp $f(x)$ không bị chặn khi gần điểm a và $f(x)$ không bị chặn đồng thời tại a và b.

Định lý

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm liên tục không âm trên $[a,b]$.

Nếu $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = +\infty$ và $f(x) \le g(x)$, thì:

(i) $\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ hội tụ.

(ii) $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$ phân kỳ

Nếu $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k\ (0 < k < +\infty)$, thì:

$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx, \int\limits_{a}^{b} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ 3.9. Tính tích phân suy rộng

a) $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) $I=\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Giải

a)

$$I=\lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{t\to 1^-}\arcsin x\Big|_0^t$$

$$=\lim_{t\to 1^-}\left(\arcsin t-\arcsin 0\right)=\lim_{t\to 1^-}\arcsin t=\frac{\pi}{2},\ t\in(0,1).$$

b) $I=\lim_{t\to 1^+}\int_t^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, $t\in(1,e)$.

Mặt khác $\int_t^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. Đặt $u=\sqrt{\ln x}\Leftrightarrow u^2=\ln x\Leftrightarrow 2udu=\frac{dx}{x}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=e\Rightarrow u=1\\ x=t\Rightarrow u=\sqrt{\ln t}\end{cases}$

Khi đó $\int_{\ln t}^1 \frac{2udu}{u}=\int_{\ln t}^1 2du=2u\Big|_{\ln t}^1=2-2\ln t$. Suy ra $I=\lim_{t\to 1^+}\left(2-2\ln t\right)=2$.

Chú ý: Ta có tích phân suy rộng loại 2 đặc biệt sau đây:

Tích phân suy rộng loại 2 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $(a<b,\ \alpha>0)$ hội tụ khi $\alpha<1$ và phân kỳ khi $\alpha\ge 1$.

Ví dụ 3.10.

$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$ hội tụ (vì $\alpha=\frac{1}{2}<1$).

$\int_2^3 \frac{dx}{3-x}$ phân kỳ (vì $\alpha=1$).

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $(a<b,\alpha>0)$, $\alpha<1$ thì tích phân *hội tụ*, $\alpha\ge 1$ thì tích phân *phân kỳ*.

$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ hội tụ (vì $\alpha=\frac{1}{2}<1$).

$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ phân kỳ (vì $\alpha=2>1$).

3.4 Ứng dụng tích phân trong kinh tế

3.4.1 Ứng dụng tích phân bất định

Nếu biết $f(x)$ là hàm giá trị biên thì hàm mục tiêu là: $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Bài toán 1. Tìm hàm chi phí

Cho biết hàm chi phí biên một sản phẩm của doanh nghiệp: $MC = 3x^2 + 2x + 4$.

Khi đó hàm chi phí:

$$TC = \int MCdx = \int (3x^2 + 2x + 4)dx = x^3 + x^2 + 4x + C$$

Nếu $x = 0 \Rightarrow TC(0) = C_0$: Đây chính là định phí.

$\Rightarrow TC = x^3 + x^2 + 4x + C_0.$

Bài toán 2. Tìm hàm doanh thu và hàm cầu:

Sản phẩm A có hàm doanh thu biên: $MTR = \dfrac{dTR}{dQ} = 10000 - Q^3.$

$$\Rightarrow TR = \int (10000 - Q^3)dQ = 10000Q - \frac{Q^4}{4} + C$$

Khi $Q = 0 \Rightarrow C = 0.$

$\Rightarrow TR = 10000Q - \dfrac{Q^4}{4}$

Vì $TR = PQ \Rightarrow$ Hàm cầu như sau:

$$P = \frac{TR}{Q} = 10000 - \frac{Q^3}{4}.$$

Bài toán 3. Tìm hàm lợi nhuận:

Cho hàm lợi nhuận biên của một sản phẩm: $M\pi = -100Q + 500.$

Nếu chỉ bán được 100 sản phẩm thì công ty bị lỗ 50000 đơn vị tiền tệ. Tìm hàm lợi nhuận theo Q.

$$\pi = \int (-100Q + 500)dQ = -50Q^2 + 500Q + C.$$

Vì $\pi(100) = -50(100)^2 + 500(100) + C = -50000 \Rightarrow C = 400000$

Vậy hàm lợi nhuận: $\pi = -50Q^2 + 500Q + 400000.$

Bài toán 4. Tìm hàm tiêu dùng:

Giả sử hàm tiêu dùng $C = C(I)$ (I là thu nhập). Ta ký hiệu hàm tiêu dùng biên $MPC = C'(I)$.

Cho hàm tiêu dùng biên $MPC = 0,4 + \frac{0,1}{3\sqrt{I}}$ và biết rằng khi không có thu nhập vẫn phải tiêu dùng 50 để tồn tại. Tìm hàm tiêu dùng.

$$C(I) = \int\left(0,4 + \frac{0,1}{3\sqrt{I}}\right)dI = 0,4I + \frac{0,15}{\sqrt[3]{I^2}} + C$$

Ta có $C(0) = C = 50$

Vậy hàm tiêu dùng là $C(I) = 0,4I + \frac{0,15}{\sqrt[3]{I^2}} + 50.$

3.4.2 Ứng dụng tích phân xác định

Bài toán 1. Phân tích lợi nhuận:

Lợi nhuận biên của một sản phẩm được xác định bởi:

$$\frac{d\pi}{dx} = -0,002x + 10,5$$

a) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi lượng bán tăng từ 100 lên 101 đơn vị?

b) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi lượng bán tăng từ 100 lên 110 đơn vị?

Giải

a) Sự thay đổi của lợi nhuận khi tăng sản lượng bán từ 100 lên 101 đơn vị là:

$$\int_{100}^{101} d\pi dx = \int_{100}^{101}(-0,002x + 10,5)dx = \left(-0,001x^2 + 10,5x\right)\Big|_{100}^{101} = 10,3.$$

b) Sự thay đổi của lợi nhuận khi tăng sản lượng bán tửu 100 lên 110 đơn vị là:

$$\int_{100}^{110} d\pi dx = \int_{100}^{110}(-0,002x + 10,5)dx = \left(-0,001x^2 + 10,5x\right)\Big|_{100}^{110} = 102,9.$$

Bài toán 2. Chi phí trung bình

Cho hàm chi phí theo thời gian t (tháng) của doanh nghiệp trong thời gian 3 năm:

$$TC = -0,006t^2 + 0,02t + 13,15;\ 0 \le t \le 36.$$

Tìm chi phí sản xuất trung bình một tháng trong kỳ kinh doanh này.

Giải

Chi phí trung bình được xác định bởi

$$\frac{1}{36}\int_0^{36}\left(0,006t^2 + 0,02t + 13,15\right)dt = \frac{1}{36}\left(0,002t^3 + 0,01t^2 + 13,15t\right)\Big|_0^{30} = 15,74.$$

Bài toán 3. Tìm khách hàng và nhà cung ứng thặng dư

Một sản phẩm *A* đang bán trên thị trường có hàm cung và hàm cầu như sau:

Hàm cầu: $P = -0,3x + 10$

Hàm cung: $P = 0,1x + 2$

Với P là giá bán, x là sản lượng.

Hãy tìm khách hàng và nhà cung ứng thặng dư.

Giải

Xác định giá cân bằng:

Thị trường cân bằng khi Cung = Cầu, do đó ta có:

$$-0,3x + 10 = 0,1x + 2 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow P = 4.$$

Vậy điểm cân bằng thị trường: $M_0(20,4)$.

Khách hàng thặng dư (thặng dư tiêu dùng):

$$\int_0^{20} (-0,3x + 10 - 4)\,dx = \left(0,15x^2 + 6x\right)\Big|_0^{20} = 60$$

Nhà cung ứng thặng dư:

$$\int_0^{20} (4 - 0,1x - 2)\,dx = \left(2x - 0,05x^2\right)\Big|_0^{20} = 20.$$

Bài toán 4. Xác định tổng nguồn vốn từ lượng tiền đầu tư theo thời gian:

Gọi K là tổng nguồn vốn theo thời gian của doanh nghiệp thì $K(t)$ thể hiện sự tích lũy theo thời gian.

Gọi I là lượng tiền đầu tư theo thời gian thì $I(t) = \dfrac{dK}{dt}$.

$$\Rightarrow K(t) = \int I(t)\,dt + K_0.$$

Với $t = 0$, $K(t) = K_0$: vốn đầu tưu ban đầu $(t = t_0)$.

Ví dụ 3.11. Giả sử lượng tiền đầu tư theo thời gian t là $I(t) = 10t^{\frac{1}{3}}$ và lượng tiền đầu tư ban đầu là $K_0 = 400\ (t_0 = 0)$. Tính tổng nguồn vốn tại năm thứ 3.

Giải

Ta có $K(t) = \int 10t^{\frac{1}{3}}dt + 400 = 10.\dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + 400.$

Tổng nguồn vốn đầu tư từ năm 1 đến năm 3:

$$K(t) = \int_1^3 10t^{\frac{1}{3}}dt + 400 = 10.\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\Big|_1^3 + 400 = 425.$$

Câu hỏi và bài tập chương 3

Bài 3.1. Tính các tích phân bất định sau (đổi biến số)

a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$;

b) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$;

c) $\int \frac{\sin(\ln x) dx}{x}$;

d) $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$;

e) $\int \frac{e^x dx}{\cos^2(e^x)}$;

f) $\int \frac{e^x dx}{e^x - 2}$;

g) $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

h) $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$;

i) $\int x^2 . \sqrt[3]{1+x^3} dx$;

j) $\int x^3 . \sqrt[3]{1+x^2} dx$;

k) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$;

l) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Bài 3.2. Tính các tích phân bất định sau (tích phân từng phần)

a) $\int \frac{x dx}{e^x}$;

b) $\int 2x \arctan x dx$;

c) $\int x \sin x dx$;

d) $\int x^2 e^{-2x} dx$;

e) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$;

f) $\int 16x^3 \ln x dx$;

g) $\int 4x \cos 2x dx$;

h) $\int 4x \ln 2x dx$

Bài 3.3. Tính các tích phân xác định sau

a) $\int_0^1 (x^3 + x + 1) dx$;

b) $\int_1^{\pi} \left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + x^2 \right) dx$;

c) $\int_1^2 \sqrt{x+1} dx$;

d) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}$;

e) $\int_1^{e^2} \frac{7x - 2\sqrt{x} - 5}{x} dx$;

f) $\int_1^2 (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1) dx$.

Bài 3.4. Tính các tích phân xác định sau

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1 + 3\cos x}$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + 4\sin x} \cos x dx$;

c) $\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx$;

d) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^3+1}}$;

e) $\int_0^1 e^{x^2+2}xdx$;

f) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}dx$;

g) $\int_1^e \frac{e^{2\ln x+1}}{x}dx$;

h) $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx$;

i) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$;

j) $\int_e^{e^2} \frac{1+\ln^2 x}{x\ln x}dx$.

Bài 3.5. Tính các tích phân xác định sau

a) $\int_1^e \frac{\ln^3 xdx}{x^3}$;

b) $\int_1^e x\ln xdx$;

c) $\int_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\cos x)\sin xdx$;

e) $\int_1^e \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln xdx$;

f) $\int_1^2 \ln\left(x^2+x\right)dx$;

g) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\tan^2 xdx$;

h) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx$;

i) $\int_0^1 xe^x dx$;

j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos xdx$.

Bài 3.6. Tính các tích phân suy rộng loại 1 sau

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$;

b) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$;

c) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

d) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$;

e) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$;

f) $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;

g) $g)\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

Bài 3.7. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau

(i) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^3\right)(1+x)}$;

(ii) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{x^2+1}}$;

(iii) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$;

(iv) $\int_{1}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$

(v) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin^3 3xdx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;

(vi) $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}}$

(vii) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\left(3+\sin x\right)dx}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x+1}}$;

(viii) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$;

(ix) $\int_{2}^{+\infty}\frac{\left(x+1\right)dx}{\sqrt[3]{x^7-3x-2}}$.

Bài 3.8. Tính các tích phân suy rộng loại 2 sau

a) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$;

b) $\int_{0}^{1}\frac{\ln xdx}{\sqrt{x}}$;

c) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}-1}$;

d) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Bài 3.9. Chi chí phí biên là $MC=32+18Q-12Q^2$, chi phí cố định là 43. Tìm hàm chi phí và chi phí trung bình.

Bài 3.10. Cho hàm chi phí biên $MC=2.e^{0,2Q}$, chi phí cố định là 90. Tìm tổng chi phí và chi phí trung bình.

Bài 3.11. Cho hàm tiết kiệm biên là $MS=0,2-0,1I^{-\frac{1}{2}}$. Tìm hàm tiết kiệm biết rằng khi $I=81$ thì $S=0$.

Bài 3.12. Doanh thu biên cho bởi phương trình $MR=60-2Q-2Q^2$. Tìm hàm tổng doanh thu.

Bài 3.13. Cho hàm đầu tư theo thời gian là $I=40t^{\frac{3}{5}}$ và tại thời điểm $t=0$ nguồn vốn là 75. Tìm hàm tổng nguồn vốn.

Bài 3.14. Cho hàm đầu tư theo thời gian là $I=60t^{\frac{1}{3}}$ và tại thời điểm $t=0$ nguồn vốn là 85. Tìm hàm tổng nguồn vốn.

Bài 3.15. Cho hàm cầu $P=45-0,5Q$. Tìm thặng dư tiêu dùng khi $P_0=32,5,\ Q_0=25$.

Bài 3.16. Cho hàm cung $P=\left(Q+3\right)^2$. Tìm thặng dư của nhà sản xuất khi $P_0=81,\ Q_0=6$.

Bài 3.17. Cho hàm cung $P_s=2Q+1$ và hàm cầu $P_d=25-Q^2$. Tìm khách hàng và nhà cung ứng thặng dư.

CHƯƠNG 4

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

4.1 Các khái niệm cơ bản về hàm nhiều biến

4.1.1 Khái niệm hàm nhiều biến

Gọi $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ...x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ...n\}$.

Phần tử $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ của $\mathbb{R}^n$ được gọi là điểm hay vector, còn $x_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ gọi là tọa độ thứ *i* của *x*.

Hai phần tử $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ và $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ bằng nhau nếu $x_i = y_i \left(i = \overline{1, n}\right)$.

Khoảng cách giữa *x* và *y* là số $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

Trong bài giảng này, ta làm việc trên không gian nền gồm tập $\mathbb{R}^n$ được trang bị khoảng cách $d(x, y)$ như trên.

Định nghĩa

Cho tập $D \subset \mathbb{R}^n$. Một hàm *f* của *n* biến $x_1, x_2, ..., x_n$ là qui luật cho ứng mỗi phần tử $(x_1, x_2, ...x_n)$ trong *D* với một số thực duy nhất $f(x_1, x_2, ...x_n)$.

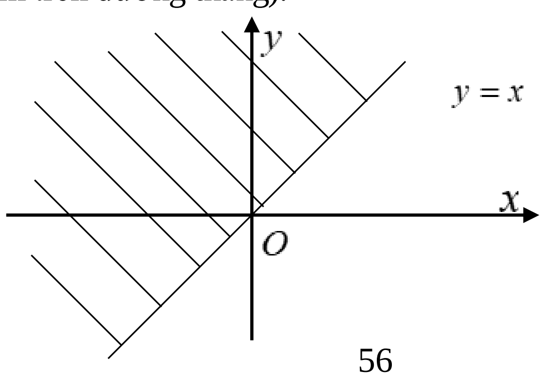
Ký hiệu: $u = f(x_1, x_2, ...x_n)$.

Tập *D* được gọi là miền xác định của hàm *f*. Đó là tập các điểm $(x_1, x_2, ...x_n)$ sao cho giá trị $f(x_1, x_2, ...x_n)$ xác định.

Khi *n* = 2 hoặc *n* = 3 ta thường dùng ký hiệu $z = f(x, y)$ hoặc $u = f(x, y, z)$.

Ta sẽ xét chủ yếu ở hàm hai biến $z = f(x, y)$. Miền xác định của hàm là tập các điểm (x, y) trong mặt phẳng Oxy sao cho biểu thức $f(x, y)$ có nghĩa.

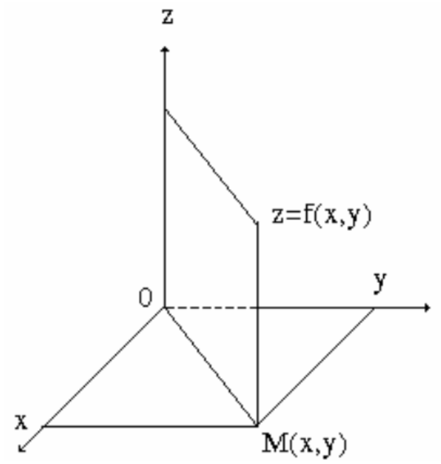
Ví dụ 4.1. Hàm $z = \ln(y - x)$ có miền xác định là tập hợp những điểm có tọa độ thỏa $y - x > 0$ hay $y > x$. Đó là nữa mặt phẳng nằm phía trên đường thẳng $y = x$ (không kể những điểm trên đường thẳng).



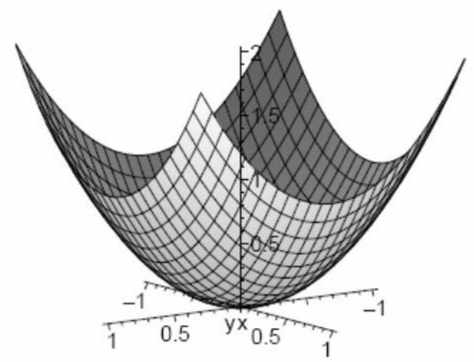
4.1.2 Đồ thị của hàm hai biến

Đồ thị của hàm hai biến thường là một mặt cong trong không gian, mà hình chiếu của nó trên mặt phẳng Oxy là miền xác định của hàm.

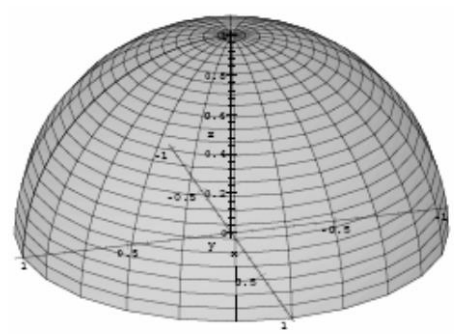
Cho hàm số hai biến $z = f(x, y)$. Ta thấy (x, y) biểu diễn 1 điểm $M(x, y)$ nên ta có thể xem hàm hai biến $f(x, y)$ là hàm của điểm *M*. Ta có thể biểu diễn như sau:



Ví dụ 4.2. Hàm số $z = x^2 + y^2$ là đồ thị một paraboloid tròn xoay.



Hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là đồ thị nửa trên của mặt cầu tâm O bán kính 1.



4.1.3 Các điểm trong không gian *n* chiều

- ***Lân cận***: Trong $\mathbb{R}^2$ cho điểm $M_0(x_0, y_0)$ và số thực $r > 0$. Lân cận của điểm M_0 bán kính *r* là tập hợp $N_r(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^2 : MM_0 < r\}$.

Cho S là tập con của $\mathbb{R}^2$ và M_0 là điểm thuộc $\mathbb{R}^2$.

- M_0 được gọi là ***điểm trong*** của S nếu tồn tại lân cận N_r của M_0 sao cho $M_0 \in N_r \subset S$. Tập các điểm trong của S được gọi là phần trong của S.
- M_0 được gọi là ***điểm giới hạn*** của S nếu với mọi lân cận N_r của M_0 ta đều có $(N_r | M_0) \cap S \neq \varnothing$.
- M_0 được gọi là ***điểm biên*** của S nếu với mọi lân cận N_r của M_0 ta đều có $N_r \cap S \neq \varnothing$, $N_r \cap (\mathbb{R}^2 | S) \neq \varnothing$. Tập các điểm biên của S được gọi là biên của S.
- S là ***tập mở*** nếu mọi điểm của S đều là điểm trong của S.
- S là tập đóng nếu mọi điểm biên của S đều thuộc S.

4.1.4 Một số hàm kinh tế nhiều biến thông dụng

4.1.4.1 Hàm sản xuất

Gọi K là lượng tư bản (vốn) và L là lượng lao động được sử dụng. Khi đó hàm sản xuất có dạng:

- $Q = f(K, L)$
- Hàm Cobb – Douglas: $Q = aK^{\alpha}L^{\beta}$, a, α, β là các hằng số dương.

4.1.4.2 Hàm chi phí, hàm lợi nhuận theo các yếu tố sản xuất

Tổng chi phí sản suất TC (total cost) tính theo sản lượng:

$$TC = TC(Q)$$

Nếu tính theo các yếu tố sản xuất thì hàm chi phí là hàm số của các yếu tố sản xuất:

$$TC = W_K K + W_L L + C_0,$$

trong đó: W_K: là giá thuê một đơn vị tư bản (chẳng hạn như giờ sử dụng xưởng máy);

W_L: là giá thuê một đơn vị lao động (một giờ làm việc của một công nhân);

C_0: chi phí cố định.

Nếu doanh nghiệp cạnh tranh có hàm sản xuất $Q = f(K, L)$ và giá thị trường của sản phẩm là P thì tổng doanh thu của doanh nghiệp là hàm số của K và L:

$$TR = P.Q = P.f(K, L).$$

Tổng lợi nhuận của một doanh nghiệp cạnh tranh có hàm số:

$$\pi = P.f(K, L) - (W_K K + W_L L + C_0).$$

4.1.4.3 Hàm chi phí kết hợp

Trên thực tế có nhiều doanh nghiệp sản xuất kết hợp nhiều loại sản phẩm. Giả sử doanh nghiệp sản xuất n sản phẩm với số lượng $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$.

Như vậy TC là hàm n biến số và được gọi là hàm chi phí kết hợp.

$$TC = TC(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n).$$

4.1.4.4 Hàm lợi ích (Utility function)

Lợi ích là sự thỏa mãn của một người cảm nhận được khi tiêu dùng một loại sản phẩm hay dịch vụ.

Tổng lợi ích – *TU* (Total Utility): là tổng mức thỏa mãn đạt được khi tiêu thụ một số lượng sản phẩm hay dịch vụ trong một đơn vị thời gian.

Giả sử cơ cấu tiêu dùng gồm có *n* mặt hàng. Mỗi túi hàng là một bộ *n* số thực $X=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, trong đó x_i là lượng hàng hóa T_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Hàm lợi ích có dạng tổng quát:

$$U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Một trong những dạng hàm lợi ích hay được sử dụng là hàm Cobb – Douglas:

$$U = ax_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n},\ a,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n \text{ là các hằng số dương.}$$

4.1.4.5 Hàm cung và hàm cầu trên thị trường nhiều hàng hóa

Trên thị trường *n* hàng hóa liên quan hàm cung hàng hóa *i* và hàm cầu đối với hàng hóa *i* có dạng:

$$Q_{s_i} = S_i\left(P_1,P_2,...,P_n\right),$$

$$Q_{d_i} = D_i\left(P_1,P_2,...,P_n\right),$$

trong đó Q_{s_i} là lượng cung hàng hóa *i*,

Q_{d_i} lượng cầu hàng hóa *i*,

P_i là giá hàng hóa *i* ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Mô hình cân bằng của thị trường *n* hàng hóa liên quan có dạng:

$$\begin{cases} Q_{s_i} = Q_{d_i} \\ Q_{s_i} = S_i\left(P_1,P_2,...,P_n\right) \\ Q_{d_i} = D_i\left(P_1,P_2,...,P_n\right) \\ i = 1,2,...,n \end{cases}$$

4.2 Giới hạn và sự liên tục của hàm nhiều biến

4.2.1 Giới hạn

Điểm $M\left(x,y\right)$ được gọi là dần về điểm $M_0\left(x_0,y_0\right)$ nếu

$$MM_0 = \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2} \to 0.$$

Ký hiệu $\left(x,y\right)\to\left(x_0,y_0\right)$.

Nhận xét: $M\left(x,y\right)\to M_0\left(x_0,y_0\right)$ khi và chỉ khi $x\to x_0$ và $y\to y_0$.

Định nghĩa

Số L được gọi là giới hạn của hàm $f(M)$ tại điểm M_0 nếu với dãy điểm $\{M_n\}$ bất kỳ dần về điểm M_0 sao cho $M_n \in D\ \forall n, M_n \neq M_0$ thì dãy $\{f(M_n)\}$ dần đến L.

Ký hiệu: $L = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ hay $L = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$.

Số L được gọi là giới hạn của hàm $f(x, y)$ khi (x, y) dần về (x_0, y_0) nếu với mọi số dương ε, tồn tại số dương $\delta = \delta(\varepsilon)$ sao cho $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ với những điểm (x, y) có tọa độ thỏa $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

Định nghĩa tương tự như hàm một biến, ta có các giới hạn sau:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \pm\infty, \qquad \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x, y) = L$$

Tính chất

Giới hạn của hàm hai biến có các tính chất tương tự như hàm một biến.

(1) Nếu $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = L$ và $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} g(x, y) = L'$ thì

i) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left[f(x, y) \pm g(x, y) \right] = L \pm L'$

ii) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left[f(x, y).g(x, y) \right] = L.L'$

iii) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left[\dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} \right] = \dfrac{L}{L'}\ (L' \neq 0)$.

(2) Nếu $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = L$ và $\lim\limits_{t \to L} F(t) = F(L)$ thì $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} F(f(x, y)) = F(L)$.

Ví dụ 4.3.

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} \left(x^2 - 3y + 1 \right) = 2^2 - 3.1 + 1 = 2$.

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to \infty}} \left(\dfrac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0$.

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\dfrac{1}{x^3 + y^3} \right) = \infty$.

Ví dụ 4.4. Chứng minh $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = 0$.

Giải

Ta thấy $f(x, y)$ xác định tại mọi điểm trong mặt phẳng trừ điểm (0, 0).

Vì $x^2 \le x^2 + y^2$ nên ta có

$$0 \le \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| \le |y| \to 0 \text{ khi } x \to 0 \text{ và } y \to 0$$

Điều này chứng tỏ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right) = 0.$

Nhận xét: Từ tính duy nhất của giới hạn ta nhận thấy:

Nếu tồn tại các dãy điểm $\{M_n\}_n$ và $\{M'_n\}_n$ sao cho $M_n \to M_0, M'_n \to M_0$ nhưng $f(M_n) \to L,\ f(M'_n) \to L',\ L \ne L'$ thì giới hạn $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ không tồn tại.

Ví dụ 4.5. Xét sự tồn tại giới hạn của hàm $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ khi $(x,y) \to (0,0)$.

Ta có $(x_n, y_n) = \left(0, \dfrac{1}{n}\right) \to (0,0),\ (x'_n, y'_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \to (0,0)$

và $f(x_n, y_n) = 0 \to 0,\ f(x'_n, y'_n) = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}.$

Vậy giới hạn $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ không tồn tại.

4.2.2 Sự liên tục của hàm nhiều biến

Giả sử hàm $f(x,y)$ xác định trong miền D và $(x_0, y_0) \in D.$

Hàm $f(x,y)$ được gọi là liên tục tại (x_0, y_0) nếu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$ Hàm $f(x,y)$ được gọi là liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

Ví dụ 4.6. Xét tính liên tục của hàm số tại $(0,0)$: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \ne 0 \\ 0 & , x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

Ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(\dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right) = 0 = f(0,0) \ \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $(0,0)$.

Định lý: Nếu $f(x,y)$ liên tục trên một tập đóng và bị chặn trên $D \subset \mathbb{R}^2$ thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D.

4.3 Đạo hàm riêng và vi phân

4.3.1 Đạo hàm riêng

4.3.1.1 Đạo hàm riêng cấp 1

Cho $z = f(x,y)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2, M_0(x_0,y_0) \in D.$

Nếu $y = y_0$ không đổi thì $f(x,y_0)$ là hàm 1 biến theo *x*. Nếu $f(x,y_0)$ có đạo hàm theo *x* tại $x = x_0$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng cấp 1 của *f* tại x_0.

Ký hiệu: $f'_x(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

Đặt $\Delta_x f = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$: số gia riêng của *f* theo *x* tại (x_0,y_0).

Khi đó $f'_x(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

Tương tự, ta có đạo hàm riêng cấp 1 của *f* theo *y* tại $M_0(x_0,y_0)$, ký hiệu là:

$$f'_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta y}.$$

Ví dụ 4.7. Tính các đạo hàm riêng của hàm số sau:

a) Cho hàm số $z = f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + xy.$

b) $z = \sqrt{x^2+y^2}.$

Giải

a) Ta có $z'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y^2 + y.$

$$z'_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4xy + x.$$

b) Sinh viên tự giải.

4.3.1.2 Đạo hàm riêng cấp cao

Cho hàm số *z* = *f*(*x*, *y*). Các đạo hàm riêng $f'_x,\ f'_y$ được gọi là những đạo hàm riêng cấp 1. Các đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp 1 nếu tồn tại được gọi là đạo hàm riêng cấp 2. Ta có 4 đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$$

Tổng quát, các đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp $n-1$ của hàm z được gọi là các đạo hàm riêng cấp n của z.

Chẳng hạn $\frac{\partial^n z}{\partial x^i \partial y^{n-i}}$ là đạo hàm riêng cấp n của z, trong đó z được lấy đạo hàm riêng i lần theo biến x rồi lấy đạo hàm riêng $n-i$ lần theo y.

Ví dụ 4.8. Tính đạo hàm riêng cấp 2 của hàm $z = 2x^3y^2 + y^5$.

$z'_x = 6x^2y^2$ $\quad z''_{xx} = 12xy^2$ $\quad z''_{xy} = 12x^2y$

$z'_y = 4x^3y + 5y^4$ $\quad z''_{yy} = 4x^3 + 20y^4$ $\quad z''_{yx} = 12x^2y$.

Định lý (Schwartz):

Nếu trong lân cận nào đó của (x_0, y_0) hàm số $f(x, y)$ tồn tại các đạo hàm riêng và liên tục tại (x_0, y_0) thì $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

Định lý này cũng đúng cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn của n biến số $(n\geq 3)$.

4.3.1.3 Đạo hàm của hàm số hợp

Cho hàm số $z = f(u, v)$ trong đó $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Nếu các hàm $u(x, y)$, $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục thì khi đó tồn tại các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$$

Ví dụ 4.9. Tính $z=e^u\sin v,\ u=xy,\ v=x+y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^u\sin v\right).y+\left(e^u\cos v\right).1=e^{xy}\left[y\sin(x+y)+\cos(x+y)\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^u\sin v\right).x+\left(e^u\cos v\right).1=e^{xy}\left[x\sin(x+y)+\cos(x+y)\right].$$

Tương tự ta đạo hàm riêng của hàm n biến:

Cho hàm $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$, đạo hàm riêng của u theo biến x_i là đạo hàm của f theo biến x_i nếu coi các biến khác là hằng số, ký hiệu:

$$f'_{x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

4.3.2 Vi phân

4.3.2.1 Vi phân toàn phần

Cho $f\left(x_0, y_0\right)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và có các đạo hàm riêng $f'_x,\ f'_y$ liên tục tại điểm $M_0\left(x_0, y_0\right) \in D$ thì:

$$\Delta f\left(x_0, y_0\right) = f'_x\left(x_0, y_0\right)\Delta x + f'_y\left(x_0, y_0\right)\Delta y$$

được gọi là vi phân toàn phần của *f* tại $M_0\left(x_0, y_0\right)$.

Ký hiệu là: $df\left(x_0, y_0\right) = f'_x\left(x_0, y_0\right)\Delta x + f'_y\left(x_0, y_0\right)\Delta y$.

Vì *x*, *y* là các biến độc lập nên: $\Delta x = dx,\ \Delta y = dy$. Khi đó:

$$df = f'_x\left(x_0, y_0\right)dx + f'_y\left(x_0, y_0\right)dy$$

Hay $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy.$

Ví dụ 4.10. Tìm vi phân toàn phần của hàm số: $f\left(x, y\right) = x^2y^3$.

Ta có $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3;\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2.$

Vi phân toàn phần: $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy.$

4.3.2.2 Vi phân cấp cao

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$.

Vi phân toàn phần cấp 1:

$$df = f'_x dx + f'_y dy : \text{ là một số theo } x, y.$$

Ta lấy vi phân toàn phần của *df*:

$$d\left(df\right) = d^2 f = d\left(f'_x dx + f'_y dy\right)$$

$$= f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2.$$

Tổng quát, ta có vi phân cấp *n*:

$$d^{(n)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^{(n)} = \left(f'_x dx + f'_y dy\right)^n.$$

Ví dụ 4.11. Cho hàm số $f\left(x, y\right) = x^2y^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 2xy^3;\ \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 3x^2y^2.$$

Vi phân toàn phần cấp 1: $df = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy.$

Ta có $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2} = 2y^3;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2} = 6x^2y;\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6xy^2.$

Vi phân toàn phần cấp 2:

$$d(df) = d^2 f = 2y^3dx^2 + 2.(6xy^2)dxdy + 6x^2ydy^2.$$

4.3.3 Sử dụng đạo hàm riêng trong phân tích kinh tế

Cho đại lượng $z = z(x_1, x_2, ..., x_n)$, với $x_1, x_2, ..., x_n$ là các biến độc lập.

(i) Đạo hàm riêng $z'_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ là tốc độ thay đổi (tức thời) của *z* theo biến x_i tại điểm cụ thể $z(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

(ii) Hệ số co dãn:

$$\varepsilon_i = \frac{2z(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i}.\frac{x_i}{z}.$$

(iii) Cho hàm sản xuất $Q = f(K, L)$.

Sản lượng phụ thuộc vào hai biến tư bản và nhân công:

- $\frac{dQ}{dK} = \frac{df}{dK}$: lượng thay đổi của Q đối với tư bản trong khi L không thay đổi.

  Ký hiệu: $\frac{df}{dK} = MP_K$ (Marginal product of Capital).

- $\frac{dQ}{dL} = \frac{df}{dL}$: lượng thay đổi của Q khi L thay đổi, trong khi K không đổi.

  Ký hiệu: $\frac{df}{dL} = MP_L$ (Marginal product of Labor).

Ví dụ 4.12. Cho hàm sản xuất $Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$. Ta có:

$$MP_K = \frac{dQ}{dK} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \alpha A\frac{L^{1-\alpha}}{K^{1-\alpha}} = \alpha A\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha}$$

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} = (1-\alpha)A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}.$$

Nếu cho $A = 30$, $\alpha = \frac{2}{3}, 1-\alpha = \frac{1}{3}$ thì $Q = 30K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$.

Giả sử doanh nghiệp sử dụng 27 đơn vị tư bản và 64 đơn vị lao động, ta có:

- $MP_K = \frac{2}{3}.30.\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = 27.$

Điều này có nghĩa là: Nếu tăng thêm một đơn vị tư bản (27 lên 28) thì sản lượng sẽ tang thêm 27 đơn vị trong khi nhân công không thay đổi (L giữ nguyên).

- $MP_L = \frac{1}{3}.30.\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}} = 10.\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}} = 6.$

Như vậy, nếu tăng thêm một đơn vị lao động (64 lên 65) thì sản lượng tang thêm là 6 đơn vị sản phẩm.

Ví dụ 4.13. Cho hàm cầu $Q = 10000 - 0,5P_1^2 + P_2^2 - 0,4P_3^2$.
Tại mức giá $(P_1, P_2, P_3) = (20,\ 20,\ 10)$, ta có:

$$Q'_{P_1} = \frac{\partial Q}{\partial P_1} = -P_1 = -20.$$

$$Q'_{P_2} = \frac{\partial Q}{\partial P_2} = 2P_2 = 40.$$

$$Q'_{P_3} = \frac{\partial Q}{\partial P_3} = -0,8P_3 = -8.$$

Tại mức giá $(P_1, P_2, P_3) = (20,\ 20,\ 10)$:

- Tốc độ thay đổi (tức thời) của Q theo P_1 là (– 20) (đơn vị/đơn vị giá), nghĩa là nếu tăng P_1 thêm 1 đơn vị giá thì nhu cầu Q sẽ giảm 20 đơn vị sản phẩm.
- Tốc độ thay đổi (tức thời) của Q theo P_2 là 40 (đơn vị/đơn vị giá), nghĩa là nếu tăng P_2 thêm 1 đơn vị giá thì nhu cầu Q sẽ tăng 40 đơn vị sản phẩm.
- Tốc độ thay đổi (tức thời) của Q theo P_3 là (– 8) (đơn vị/đơn vị giá), nghĩa là nếu tăng P_3 thêm 1 đơn vị giá thì nhu cầu Q sẽ giảm 8 đơn vị sản phẩm.

Ta có $(P_1, P_2, P_3) = (20,\ 20,\ 10)$, suy ra $Q = 8360$.

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial Q}{\partial P_1}.\frac{P_1}{Q} = -20.\frac{20}{8360} = -0,0478$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial Q}{\partial P_2}.\frac{P_2}{Q} = 40.\frac{20}{8360} = 0,0957$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial Q}{\partial P_3}.\frac{P_3}{Q} = -8.\frac{10}{8360} = -0,0096.$$

Vậy tại mức giá $(P_1, P_2, P_3) = (20,\ 20,\ 10)$:

- Nếu giá P_1 tăng thêm 1% thì nhu cầu Q giảm bớt 0,0478%.
- Nếu giá P_2 tăng thêm 1% thì nhu cầu Q tăng thêm 0,0957%.
- Nếu giá P_3 tăng thêm 1% thì nhu cầu Q giảm bớt 0,0096%.

4.4 Cực trị hàm nhiều biến

4.4.1 Cực trị tự do hàm hai biến

4.4.1.1 Định nghĩa

Cho $z = f(x, y)$ xác định trong $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0\left(x_0, y_0\right) \in D$. Hàm số $f\left(x, y\right)$ đạt cực trị tại $M_0\left(x_0, y_0\right)$ nếu tồn tại một lân cận w của M_0 sao cho:

- $f\left(M_0\right) \geq f\left(M\right),\ \forall M \in w$ thì hàm số đạt cực đại tại M_0.
- $f\left(M_0\right) \leq f\left(M\right),\ \forall M \in w$ thì hàm số đạt cực tiểu tại M_0.

4.4.1.2 Điều kiện cần để có cực trị

Điểm $\left(x_0, y_0\right)$ được gọi là điểm dừng của hàm $f(x, y)$ nếu:

$$f'_x\left(x_0, y_0\right) = f'_y\left(x_0, y_0\right) = 0.$$

Điểm $\left(x_0, y_0\right)$ được gọi là điểm kỳ dị của hàm $f(x, y)$ nếu:

$$f'_x\left(x_0, y_0\right) \text{ hoặc } f'_y\left(x_0, y_0\right) \text{ không tồn tại.}$$

Điểm dừng và điểm kỳ dị được gọi chung là điểm tới hạn.

Nếu hàm $f(x, y)$ đạt cực trị tại điểm $\left(x_0, y_0\right)$ và tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x\left(x_0, y_0\right)$, $f'_y\left(x_0, y_0\right)$ thì $f'_x\left(x_0, y_0\right) = 0$ và $f'_y\left(x_0, y_0\right) = 0$.

4.4.1.3 Điều kiện đủ để có cực trị

Giả sử $f(x, y)$ có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong lân cận của điểm $M_0\left(x_0, y_0\right)$, với M_0 là điểm dừng của $f(x, y)$.

Đặt $A = f''_{xx}\left(x_0, y_0\right);\ B = f''_{xy}\left(x_0, y_0\right);\ C = f''_{yy}\left(x_0, y_0\right)$ và $\Delta = B^2 - AC$.

Khi đó:

- Nếu $\begin{cases} \Delta < 0 \\ A > 0 \end{cases}$ thì f đạt cực tiểu tại M_0.
- Nếu $\begin{cases} \Delta < 0 \\ A < 0 \end{cases}$ thì f đạt cực đại tại M_0.
- Nếu $\Delta > 0$ thì f không đạt cực trị tại M_0.
- Nếu $\Delta = 0$ thì không thể khẳng định gì về sự tồn tại của cực trị.

Ví dụ 4.14. Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy + 1$.

Giải

- Tìm điểm tới hạn: Ta có $z'_x = 3x^2 - 3y;\ z'_y = 3y^2 - 3x$.

Xét hệ $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right.$

Suy ra, các điểm dừng: (0, 0), (1, 1).

- Ta có: $A = z''_{xx} = 6x;\ B = z''_{xy} = -3;\ C = z''_{yy} = 6y.$

  Tại O(0, 0), ta có A = 0; B = - 3, C = 0 $\Rightarrow \Delta = B^2 - AC = (-3)^2 - 0 = 9 > 0$

$\Rightarrow$ *f* không đạt cực trị tại (0, 0).

  Tại (1, 1), ta có A = 6; B = - 3, C = 6 $\Rightarrow \Delta = B^2 - AC = 9 - 36 < 0$

  Mà A > 0 nên *f* đạt cực tiểu tại (1, 1).

4.4.2 Cực trị có điều kiện

Cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$ được gọi là cực trị có điều kiện.

4.4.2.1 Phương pháp thế

Giả sử từ điều kiện ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$ ta giải ra được $y = y(x)$. Khi đó việc tìm cực trị có điều kiện của hàm $z = f(x, y)$ được quy về việc tìm cực trị tự do (không điều kiện) của hàm $z = f(x, y(x))$.

Ví dụ 4.15. Tìm cực trị của hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ với điều kiện $x + y - 1 = 0$.

Giải

Từ điều kiện ta có $y = 1 - x$. Thế vào biểu thức của z, ta được

$$z = \sqrt{1 - x^2 - (1 - x)^2} = \sqrt{2}.\sqrt{x - x^2}.$$

Đây là hàm một biến của x xác định với $x - x^2 \geq 0$ hay $0 \leq x \leq 1$.

Ta có: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1 - 2x}{\sqrt{x - x^2}};\ \dfrac{dz}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}.$

x	0		1/2		1
$\dfrac{dz}{dx}$		+	0	-	
z	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

Ta thấy z đạt cực đại có điều kiện tại $M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

4.4.2.2 *Phương pháp nhân tử Lagrange*

Điều kiện cần của cực trị có điều kiện

Cho $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $\varphi(x,y)=0$. Giả sử:

(i) Các hàm f và φ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục ở lân cận của điểm M_0.

(ii) Các đạo hàm riêng $\varphi'_x(x_0,y_0), \varphi'_y(x_0,y_0)$ không đồng thời bằng 0. Khi đó tồn tại một số λ_0 sao cho (x_0,y_0,λ_0) là điểm dừng của hàm:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda.\varphi(x,y)$$

Số λ được gọi là nhân tử Lagrange, hàm $F(x,y,\lambda)$ được gọi là hàm Lagrange.

Điều kiện đủ của cực trị có điều kiện

Giả sử các hàm hàm $z = f(x, y)$ và $\varphi(x,y)=0$ có đạo hàm riêng liên tục đến cấp 2 ở lân cận (x_0, y_0) và (x_0,y_0,λ) là điểm dừng của hàm Lagrange. Xét vi phân

$$d^2F(x_0,y_0,\lambda) = F''_{xx}(x_0,y_0,\lambda)dx^2 + 2F''_{xy}(x_0,y_0,\lambda)dxdy + F''_{yy}(x_0,y_0,\lambda)dy^2$$

Với ràng buộc $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0,\ dx^2 + dy^2 > 0.$ Khi đó:

(i) Nếu $d^2F(x_0,y_0) < 0$ thì hàm $f(x, y)$ đạt cực đại tại (x_0, y_0).

(ii) Nếu $d^2F(x_0,y_0) > 0$ thì hàm $f(x, y)$ đạt cực tiểu tại (x_0, y_0).

(iii) Nếu dấu của $d^2F(x_0,y_0)$ không xác định thì hàm $f(x, y)$ không đạt cực trị tại (x_0, y_0).

Ví dụ 4.16. Tìm cực trị của hàm $z = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Giải

Lập hàm Lagrange: $F(x,y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Giải hệ: $\begin{cases} F'_x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = -3 + 2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

Ta được các điểm dừng của hàm Lagrange: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5} \\ y_1 = \dfrac{3}{5} \\ \lambda_1 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{4}{5} \\ y_2 = -\dfrac{3}{5} \\ \lambda_2 = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$

Ta có $d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$.

- Với $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ ta có $d^2F\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right) > 0$ nên hàm đạt cực tiểu tại $M_1\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ và $z_{\min} = 1$.
- Với $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$ ta có $d^2F\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right) < 0$ nên hàm đạt cực đại tại $M_2\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$ và $z_{\max} = 11$.

4.4.3 Ứng dụng cực trị trong kinh tế

Xét trường hợp một doanh nghiệp cạnh tranh sản xuất 2 loại sản phẩm. Giả sử tổng chi phí kết hợp được tính theo số lượng sản phẩm:

$$TC = TC(Q_1, Q_2),$$

trong đó Q_1 là số lượng sản phẩm thứ nhất

Q_2 là số lượng sản phẩm thứ hai.

Với P_1, P_2 là giá thị trường của hai loại sản phẩm, hàm tổng lợi nhuận có dạng:

$$\pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 - TC(Q_1, Q_2).$$

Bài toán đặt ra trong trường hợp này là chọn một cơ cấu sản lượng (Q_1, Q_2) để hàm tổng lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ 4.17. Giả sử hàm tổng chi phí của doanh nghiệp cạnh tranh là:

$$TC = 6Q_1^2 + 3Q_2^2 + 4Q_1Q_2,$$

và giá sản phẩm $P_1 = 60$, $P_2 = 34$. Hãy xác định mức sản lượng tối ưu cho lợi nhuận tối đa.

Giải

Hàm tổng lợi nhuận là hàm số:

$$\pi = 60Q_1 + 34Q_2 - 6Q_1^2 - 3Q_2^2 - 4Q_1Q_2.$$

Điều kiện cần để đạt lợi nhuận tối đa là:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 60 - 12Q_1 - 4Q_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 34 - 4Q_1 - 6Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 4 \\ Q_2 = 3 \end{cases}$$

Ta lại có

$$A = \pi''_{11} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -12; \quad B = \pi''_{12} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -4; \quad C = \pi''_{22} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -6.$$

Suy ra $\Delta = B^2 - AC < 0$ và $A < 0$ nên hàm lợi nhuận đạt cực đại.

Vậy lợi nhuận sẽ lớn nhất nếu doanh nghiệp sản xuất 4 đơn vị sản phẩm thứ nhất và 3 đơn vị sản phẩm thứ hai.

Câu hỏi và bài tập chương 4

Bài 4.1. Tính các giới hạn sau (nếu có):

a) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 2}} x.\sin\dfrac{y}{x}$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 5}} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^{x}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Bài 4.2. Tính các đạo hàm riêng và vi phân cấp 1 của các hàm số sau:

a) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$

b) $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$

c) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

d) $z=x^{x^{y}}, x>0$

e) $z=y.x^{y}\ (x>0)$

f) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Bài 4.3. a) Cho hàm hợp $z=f(u)$ với $u=xy+\dfrac{y}{x}$. Tính $z'_x,\ z'_y$.

b) Cho hàm hợp $z=\arctan\dfrac{x}{y}$ với $x=u.\sin v;\ y=u.\cos v$. Tính $z'_u,\ z'_v$

Bài 4.4. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $z=4(x-y)-x^2-y^2$

b) $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$

c) $z=x+y-x.e^{y}$

d) $z=\left(x^2+y^2\right).e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

e) $z=x^3-6xy+3y^2$

f) $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$

g) $z=x^3+3xy^2-15x+12y$

h) $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$

Bài 4.5. Tìm cực trị có điều kiện của các hàm số sau:

a) $z=xy$ với điều kiện x + y = 1.

b) $z=xy^2$ với điều kiện $x^2+y^2=1$.

c) $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

d) $z = 12 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 25$.

Bài 4.6. Giả sử doanh nghiệp độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp: $TC = Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2$.

Giả sử cầu đối với các loại hàng hóa đó là:

$P_1 = 56 - 4Q_1$ (đối với sản phẩm thứ nhất);

$P_2 = 48 - 2Q_2$ (đối với sản phẩm thứ hai).

Hãy xác định mức sản lượng và giá tối ưu cho các sản phẩm.

Bài 4.7. Một doanh nghiệp cạnh tranh thuần túy sản xuất kết hợp hai loại sản phẩm với hàm chi phí như sau (Q_i là lượng sản phẩm i):

$$TC = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 10.$$

Hãy chọn mức sản lượng kết hợp (Q_1, Q_2) để doanh nghiệp có được lợi nhuận tối đa khi giá sản phẩm 1 là 160$ và giá sản phẩm 2 là 120$.

CHƯƠNG 5

MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

5.1 Khái niệm về ma trận và các phép tính

5.1.1 Các định nghĩa

5.1.1.1 Định nghĩa ma trận

Cho một bảng gồm có *m* x *n* số thực, có *m* hàng và *n* cột được gọi là ma trận cấp *m* x *n*.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

- a_{ij} : là phần tử của ma trận *A* nằm ở giao điểm của hàng *i* cột *j*.
- Ký hiệu: $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $A_{m\times n}$.

Ví dụ 5.1. Một công ty muốn thống kê tình hình tiêu thụ sản phẩm của các đại lý kinh doanh các sản phẩm của họ như sau:

Đại lý	**Sản phẩm**			
	A	**B**	**C**	**D**
1	150	230	210	180
2	225	175	200	350
3	120	425	175	380

Ta có thể trình bày dưới dạng ma trận về lượng hàng tiêu thụ như sau:

$$\begin{bmatrix} 150 & 230 & 210 & 180 \\ 225 & 175 & 200 & 350 \\ 120 & 425 & 175 & 380 \end{bmatrix}$$

Trong đó: - Yếu tố cột là lượng hàng tiêu thụ của từng sản phẩm.

- Yếu tố hàng là lượng hàng tiêu thụ của từng đại lý.

Chú ý:

Ma trận chỉ có một hàng (cột) được gọi là ma trận hàng (cột) hay vecto hàng (cột).

Số thực là một trường hợp đặc biệt ma trận chỉ có một hàng một cột. Ví dụ: $A = [3]$.

5.1.1.2 Ma trận không

Ma trận không là ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng 0.

$$\theta = [0]_{m\times n} \left(\forall a_{ij} = 0\right),$$

$$\theta_{m\times n}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}.$$

5.1.1.3 Ma trận vuông

a) Ma trận vuông

Khi $m=n,$ ta có ma trận cấp $n\times n$ được gọi là ma trận vuông cấp *n* hay gọi tắt là ma trận cấp *n*.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Các phần tử $a_{11}, a_{22},..., a_{nn}$ được gọi là các phần tử chéo. Đường thẳng xuyên qua các phần tử chéo gọi là đường chéo chính.

b) Ma trận tam giác trên

Ma trận A cấp *n*:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} \text{ còn viết } A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ & & \dots & \dots\\ & & & a_{nn}\end{bmatrix}$$

trong đó $a_{ij}=0$ nếu $i>j$ được gọi là ma trận tam giác trên.

c) Ma trận tam giác dưới

Ma trận A cấp *n*:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} \text{ còn viết } A=\begin{bmatrix}a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

trong đó $a_{ij}=0$ nếu $i<j$ được gọi là ma trận tam giác dưới.

d) Ma trận chéo

Ma trận A cấp *n*:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} \text{ còn viết } A=\begin{bmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & a_{nn}\end{bmatrix}$$

trong đó $a_{ij}=0$ nếu $i\neq j$ được gọi là ma trận chéo.

e) Ma trận đơn vị

Ma trận đơn vị là ma trận vuông cấp *n* là ma trận chéo mà tất cả các phần tử chéo đều bằng 1, các phần tử khác đều bằng 0.

$$I = \left[a_{ij}\right]_{n\times n} \text{ với } a_{ij} = 1 \text{ và } a_{ij} = 0, \forall i \neq j.$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

5.1.1.4 Ma trận chuyển vị

Xét ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$. Đổi hàng thành cột, cột thành hàng ta được một ma trận mới gọi là ma trận chuyển vị của *A*. Ký hiệu là A^T, A'.

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \Rightarrow A^T = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}.$$

Ví dụ 5.2. Tìm ma trận chuyển vị của ma trận *A*

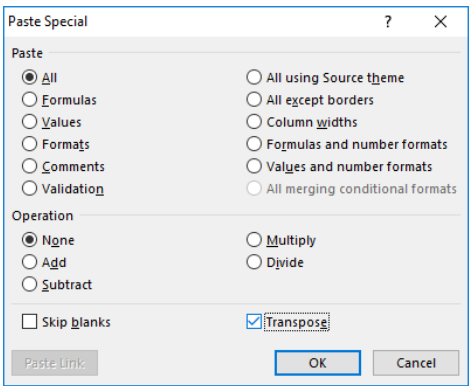
$$A = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 15 & 27 & 30 \\ 9 & 14 & 18 & 16 & 24 \\ 13 & 15 & 20 & 19 & 28 \\ 11 & 18 & 17 & 25 & 31 \end{bmatrix}$$

Giải

$$A^T = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 13 & 11 \\ 12 & 14 & 15 & 18 \\ 15 & 18 & 20 & 17 \\ 27 & 16 & 19 & 25 \\ 30 & 24 & 28 & 31 \end{bmatrix}.$$

Sử dụng Excel: Ta thực hiện các bước sau:

- Đánh dấu khối ma trận gốc
- Chọn sao chép (copy)
- Dán bằng tùy chọn: Paste special/Transpose.



5.1.1.5 Ma trận đối xứng

Ma trận vuông A được gọi là ma trận đối xứng nếu $A = A^T$.

Chú ý, với định nghĩa trên thì ma trận đối xứng chỉ có trong khái niệm ma trận vuông.

Ví dụ 5.3. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ là ma trận đối xứng.

Đối với ma trận đối xứng các phần tử đối xứng với nhau qua đường chéo chính.

5.1.1.6 Ma trận bậc thang

a) Ma trận bậc thang

- Một hàng của ma trận được gọi là hàng 0 nếu nó chỉ gồm những phần tử 0. Ngược lại, nếu một hàng của ma trận có ít nhất một phần tử khác 0 thì được gọi là hàng khác 0.
- Phần tử khác 0 đầu tiên của một hàng được gọi là phần tử chính của hàng đó.
- Ma trận A được gọi là ma trận bậc thang khi thoả các điều kiện sau:

  (i) A không có hàng 0 hoặc hàng 0 luôn ở dưới các hàng khác 0.

  (ii) Nếu A có ít nhất 2 hàng khác 0 thì phần tử chính của hàng dưới luôn nằm bên phải của phần tử chính của hàng trên.

Ví dụ 5.4.

Ma trận dạng bậc thang: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ma trận không dạng bậc thang: $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

b) Ma trận bậc thang rút gọn hàng

- Mọi phần tử khác không đầu tiên của một hàng bằng 1 gọi là phần tử dẫn đầu.
- Mọi phần tử khác của cột chứa phần tử dẫn đầu đều bằng 0.
- Các hang chứa toàn phần tử bằng 0 nằm dưới các hàng khác 0.
- Các phần tử dẫn đầu (bằng 1) được sắp xếp theo thứ tự chỉ số cột tăng dần.

Chú ý: Với bất kỳ một ma trận A cho trước, sử dụng liên tiếp các phép biến đổi hàng. Ta đưa được A tương đương với ma trận bậc thang rút gọn hàng.

Ví dụ 5.5. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Hãy biến đổi ma trận A thành ma trận bậc thang rút gọn dòng.

Giải

Ta thực hiện như sau:

Hàng 1 giữa nguyên vị trí, nhân hàng 1 với (-2) cộng vào hàng 2; Nhân hàng 1 với (-1) cộng vào hàng 3:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\2&5&7&2\\1&2&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow[h_3=h_3-h_1]{h_2=h_2-2h_1}\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&3&3&-4\\0&1&1&-2\end{bmatrix}$$

Đổi chỗ hàng 2 với hàng 3:

$$\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&3&3&-4\\0&1&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{h_2\leftrightarrow h_3}\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&-2\\0&3&3&-4\end{bmatrix}$$

Nhân hàng 2 cho (-1) cộng vào hàng 1; Nhân hàng 2 cho (-3) cộng vào hàng 3:

$$\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&-2\\0&3&3&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[h_3=h_3-3h_2]{h_1=h_1-h_2}\begin{bmatrix}1&0&1&5\\0&1&1&-2\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

Nhân hàng 3 cho $\frac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix}1&0&1&5\\0&1&1&-2\\0&0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow[h_3=\frac{1}{2}h_3]{}\begin{bmatrix}1&0&1&5\\0&1&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Vậy ma trận bậc thang rút gọn hàng của A là: $\begin{bmatrix}1&0&1&5\\0&1&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

5.1.2 Các phép toán trên ma trận

5.1.2.1 Ma trận bằng nhau

Hai ma trận A và B được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cấp và các phần tử cùng vị trí bằng nhau, tức là:

i) $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$; $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$.

ii) $a_{ij}=b_{ij}$ với mọi i, j.

Ký hiệu: $A=B$.

Ví dụ 5.6. Tìm các giá trị x_{ij} sao cho ma trận $X=A$:

$$X=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}5&7\\4&3\end{bmatrix}.$$

Giải

Dựa vào định nghĩa ta có: $x_{11}=5;\ x_{12}=7;\ x_{21}=4;\ x_{22}=3.$

5.1.2.2 Phép cộng hai ma trận

Định nghĩa

Cho hai ma trận cùng cấp $m\times n$:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n};\ B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}.$$

Tổng $A + B$ là ma trận cấp $m\times n$ xác định bởi

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}.$$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cấp ta cộng các phần tử cùng vị trí.

Ví dụ 5.7.

$$\begin{bmatrix}4&1\\3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+1&1+(-3)\\3+2&2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2\\5&3\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}2&3&1&4\\5&1&3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&1&4\\5&1&3&2\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&-2&-1\\-2&-3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Tính chất

Nếu các ma trận $A,\ B,\ C,\ \theta$ cùng cấp $m\times n$, ta có các tính chất sau:

- $A+B=B+A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$
- $\theta+A=A$
- Nếu gọi $-A=\left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$ thì ta có $-A+A=\theta.$

5.1.2.3 Phép nhân một số thực với ma trận

a) Định nghĩa

Cho $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}, k\in\mathbb{R}$ thì tích kA là một ma trận cấp $m\times n$ được xác định bởi $kA=\left[ka_{ij}\right]_{m\times n}.$

Ví dụ 5.8.

$$3.\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&0&5&3\\2&1&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6&9&3\\6&0&15&9\\6&3&0&12\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Tính chất: Cho $k,\ h \in \mathbb{R}$ ta có các tính chất sau:

- $k(A+B) = kA + kB$
- $(k+h)A = kA + hA$

5.1.2.4 Phép nhân hai ma trận

a) Định nghĩa

Xét hai ma trận $A = [a_{ik}]_{m\times p}$, $B = [b_{kj}]_{p\times n}$.

Gọi tích *AB* là ma trận $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ được xác định như sau:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Chú ý: Số cột của ma trận *A* bằng số hàng của ma trận *B*.

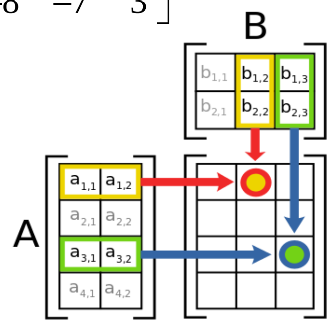
Với công thức trên ta thấy c_{ij} là tổng các tích các phần tử tương ứng ở hàng *i* của ma trận *A* với các phần tử ở cột *j* của ma trận *B*.

Ví dụ 5.9.

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & -8 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

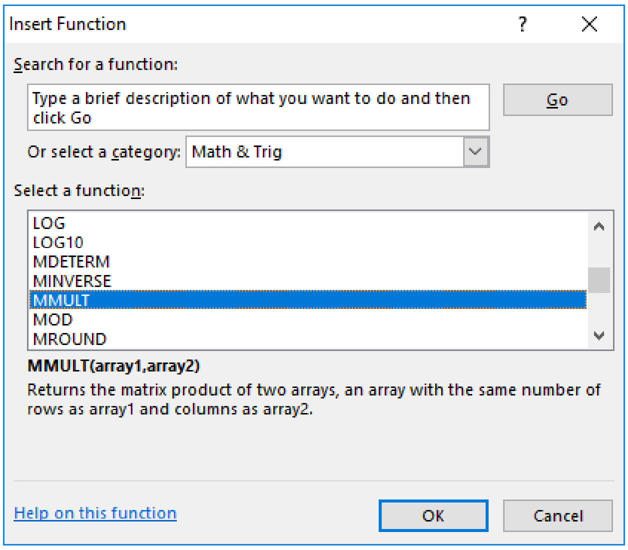
$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



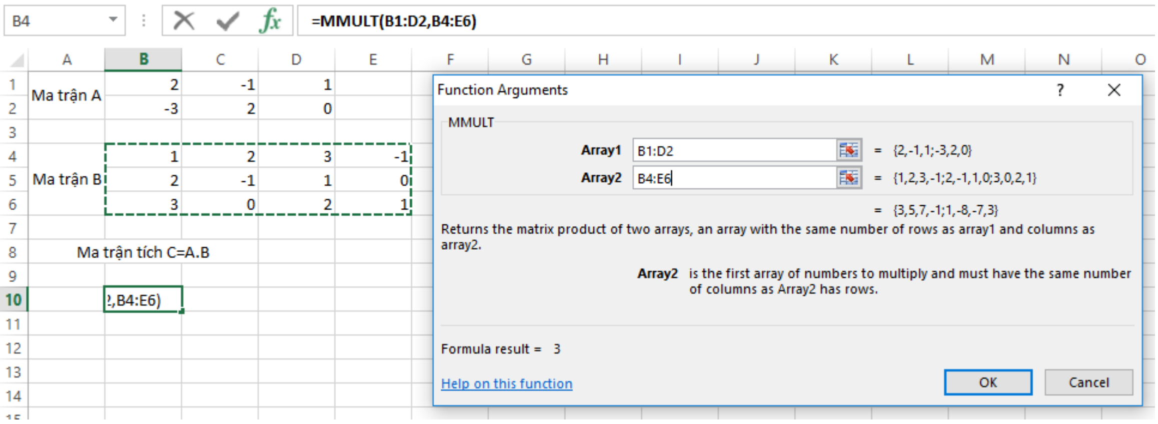
b) Sử dụng Excel

Ta sử dụng hàm MMULT với các bước như sau:

- Vào Inserst chọn Function
- Chọn hàm MMULT

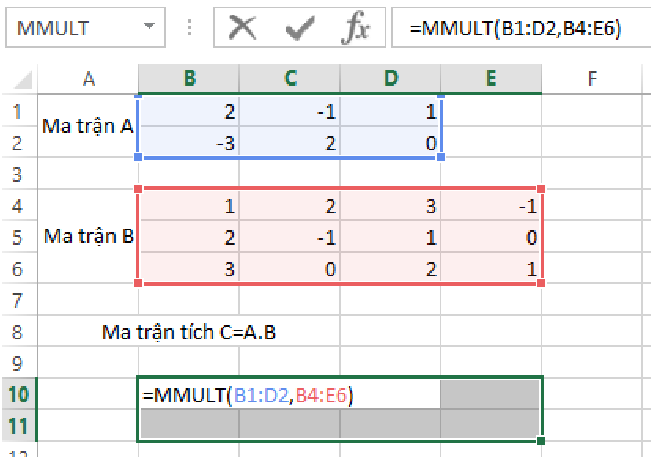


- Nhập ma trận A và B.



Sau khi thực hiện ta chỉ được phần c_{11}, để có được tất cả các phần tử còn lại ta thực hiện tiếp các bước tiếp sau:

- Copy kết quả vừa có
- Xác định cấp ma trận cần có và đánh dấu chọn khối
- Nhấn F2
- Sử dụng tổ hợp phím: Ctrl + Shift + Enter.



c) *Một số tính chất*

- $(A.B).C = A(B.C)$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $(B+C).A = BA + CA$
- $k(BC) = (kB)C = B(kC)$
- $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n} \Rightarrow I.A = A.I = A$

Nhận xét: $AB \neq BA$. Trường hợp $AB = BA$ thì ta nói A và B là hai ma trận giao hoán.

Ví dụ 1.29. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ta có $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = BA.$

5.1.3 Một vài ứng dụng

Ví dụ 5.1. Một công ty có 3 cửa hàng kinh doanh tiêu thụ các sản phẩm của công ty. Tìm tổng lượng hàng hoá tiêu thụ tháng 1 và tháng 2, số liệu thống kê như sau:

Lượng tiêu thụ tháng 1

Cửa hàng	Sản phẩm			
	A	B	C	D
1	7	4	2	5
2	2	5	9	3
3	5	3	6	4

Lượng tiêu thụ tháng 2

Cửa hàng	Sản phẩm			
	A	B	C	D
1	2	4	7	3
2	4	3	7	5
3	8	2	1	7

Giải

Tổng lượng hàng hóa tiêu thụ tháng 1 và tháng 2 như sau:

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 9 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 5 \\ 8 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 9 & 8 \\ 6 & 8 & 16 & 8 \\ 13 & 5 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Trong đó, yếu tố cột là sản phẩm, yếu tố hàng là cửa hàng.

Ví dụ 5.10. Một xí nghiệp muốn lập kế hoạch cung cấp nguyên vật liệu cung ứng cho các phân xưởng để đáp ứng kế hoạch sản xuất của đơn vị. Với số liệu đã có hãy lập kế hoạch cung ứng nguyên vật liệu:

Bảng kế hoạch sản xuất của từng phân xưởng

Phân xưởng	Sản phẩm		
	A	B	C
1	5	0	10
2	0	15	8
3	12	6	0

Bảng định mức tiêu hao nguyên vật liệu cho từng loại sản phẩm

Sản phẩm	Nguyên vật liệu				
	1	2	3	4	5
A	1	2	1	0	1
B	2	3	4	1	0
C	0	2	3	1	2

Giải

Kế hoạch cung ứng vật tư cho từng phân xưởng như sau:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 15 & 8 \\ 12 & 6 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 30 & 35 & 10 & 25 \\ 30 & 61 & 84 & 23 & 16 \\ 24 & 42 & 36 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

Trong đó, ma trận kết quả yếu tố cột là nguyên vật liệu, yếu tố hàng là phân xưởng.

5.2 Định thức

Khái niệm định thức chỉ có trong trường hợp ma trận là một ma trận vuông.

5.2.1 Định nghĩa định thức

Định thức của ma trận vuông A ký hiệu là $\det(A)$ hoặc $|A|$ được định nghĩa bằng phương pháp truy hồi như sau:

- A là ma trận vuông cấp 1: $A = [a_{11}]$ thì $\det(A) = a_{11}$.
- A là ma trận vuông cấp 2: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

- A là ma trận vuông cấp n: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Gọi A_{ij} là ma trận vuông cấp $n-1$ nhận được từ A bằng cách xóa hàng i và cột j và được gọi là ma trận con ứng với phần tử a_{ij}.

Gọi $c_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ là phần bù đại số của a_{ij}. Ta có định nghĩa định thức cấp n của A như sau:

$$\det(A)=a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+\dots+a_{1n}c_{1n}$$

Hay $\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}c_{1j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{ij})$.

Chú ý:

Với cách định nghĩa như trên, muốn tính được định thức cấp n thì phải tính được định thức cấp $n-1$, $n-2,\dots$ với cách định nghĩa như vậy người gọi là định nghĩa theo phương pháp truy hồi. Ngoài định nghĩa trên, một số tác giả còn định nghĩa định thức theo khái niệm thế vị. Cách định nghĩa này thường dùng cho các sinh viên chuyên ngành toán học.

Chúng ta chú ý trong công thức tính det(A), các phần tử a_{ij} đều nằm trên hàng 1 của A nên người ta còn gọi định nghĩa trên là triển khai định thức theo hàng 1.

Ví dụ 5.11. Sử dụng định nghĩa hãy tính định thức:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A)=(-1)^{1+1}.3.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}.2.\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}.4.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A)=3.(1-6)-2.(3-3)+4.(6-1)=5.$$

5.2.2 Một số tính chất của định thức

Với cách tính định thức bằng phương pháp truy hồi sẽ gặp nhiều khó khăn khi cấp của định thức lớn $(n\geq 4)$, ta dễ dàng thấy rằng để có được kết quả định thức cấp n thì phải tính tất cả $n(n-1)(n-2)\dots 3$ định thức con cấp 2. Để đơn giản hoá việc tính toán ta nghiên cứu các tính chất sau đây:

Tính chất 1: $|A^T|=|A|$

□ ***Hệ quả:*** Để triển khai định thức theo hàng 1 ta có thể triển khai định thức theo cột 1.

Ví dụ 5.12. Tính $\det(A)$ với $A = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 29 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

Giải

Để tính định thức trên, rõ ràng nếu ta triển khai theo cột 1 sẽ trở nên đơn giản hơn:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 29 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 33.$$

Tính chất 2: Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) của một định thức ta được một định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu.

□ ***Hệ quả***:

- Ta có thể triển khai định thức theo hàng nào cũng được.
- Kết hợp tính chất 1 và tính chất 2 dẫn đến ta có thể triển khai theo hàng nào hay cột nào cũng được.

Ví dụ 5.13. Tính định thức: $|A| = \begin{vmatrix} 35 & 46 & 17 & 2 \\ 3 & 2 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 19 & 0 \end{vmatrix}$.

Giải

Bước 1. Ta triển khai theo hàng 3:

$$|A| = 1.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 35 & 46 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Bước 2. Triển khai theo cột 3:

$$|A| = 2.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Tính chất 3: Một định thức có hai hàng (hay hai cột) như nhau thì bằng không.

Tính chất 4: Một định thức có một hàng (hay một cột) toàn là số không thì bằng không.

Tính chất 5: Khi nhân các phần tử của một hàng (hay một cột) với cùng một số k khác không thì được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với k.

□ ***Hệ quả***:

- Khi các phần tử của một hàng (hay một cột) có một thừa số chung, ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài định thức.

- Khi nhân một số thực khác không với định thức ta chỉ nhân một hàng hoặc một cột của định thức.

Tính chất 6: Một định thức có hai hàng (hay hai cột) tỷ lệ thì bằng không.

Tính chất 7: Khi tất cả các phần tử của một hàng (hay một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức đó có thể phân tích thành tổng của hai định thức. Chẳng hạn như một hàng thứ *i* nào đó của định thức có $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ thì $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$, trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 5.14. Tính định thức *A* với $A = \begin{bmatrix} 2001 & 2002 & 2003 \\ 2004 & 2006 & 2008 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Giải

Ta tách định thức *A* thành 2 định thức:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2001 & 2002 & 2003 \\ 2004 & 2006 & 2008 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2001 & 2002 & 2003 \\ 2001 & 2002 & 2003 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2001 & 2002 & 2003 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Tính chất 8: Nếu định thức có một hàng (hay một cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng khác (hay của các cột khác) thì định thức ấy bằng không.

Ví dụ 5.15. Tính định thức: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & 3 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Giải

Trong định thức trên ta nhận thấy (cột 4) = 2(cột 1) + 3(cột 3). Vậy cột 4 biểu diễn tuyến tính qua cột 1 và cột 3, suy ra $\det(A) = 0$.

Tính chất 9: Khi ta công bội k của một hàng nào đó vào một hàng khác thì được một định thức mới bằng định thức cũ.

Ví dụ 5.16. Tính $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Giải

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2&1&3\\4&5&7\\6&1&5\end{vmatrix}\overset{h_2=-2h_1+h_2}{\underset{h_3=-3h_1+h_3}{=}}\begin{vmatrix}2&1&3\\0&3&1\\0&-2&-4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&1\\-2&-4\end{vmatrix}=-20.$$

Tính chất 10: Các định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1n}\\0&a_{22}&...&a_{2n}\\...&...&...&...\\0&0&...&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}...a_{nn},\quad \begin{vmatrix}a_{11}&0&...&0\\0&a_{22}&...&0\\...&...&...&...\\a_{n1}&a_{n2}&...&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}...a_{nn}.$$

5.2.3 Phương pháp tính định thức

Dựa vào các nội dung đã trình bày, ta có thể tổng hợp lại gồm có một vài phương pháp tính định thức như sau:

5.2.3.1. Phương pháp 1 (Dùng định nghĩa)

Tuy nhiên, ta phải sử dụng linh hoạt, có nghĩa là ta có triển khai bất kỳ hàng nào hay cột nào thuận lợi nhất. Thông thường thì ta triển khai theo hàng hay cột có nhiều số 0 nhất.

5.2.3.2. Phương pháp 2 (Sử dụng các biến đổi sơ cấp)

Ta sử dụng tính chất 2, 5, 9 để chuyển định thức về dạng tam giá trên hoặc tam giác dưới và sử dụng tính chất 10 để có kết quả. Các phép biến đổi định thức dựa vào tính chất 2, 5, 9 được gọi là các phép biến đổi sơ cấp trên định thức. Dưới đây là bảng tóm tắt các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của định thức (và đương nhiên nó cũng sẽ đúng trên cột).

Biến đổi sơ cấp	Tác dụng	Lý do
Đổi chỗ hai hàng	Định thức đổi dấu	Tính chất 2
Nhân một hàng với một số $k \neq 0$	Định thức cũ nhân với k	Tính chất 5
Cộng k lần hàng r vào hàng s	Định thức không đổi	Tính chất 9

Chú ý: Trong quá trình biến đổi chúng ta có thể áp dụng một cách linh hoạt một số tính chất đặc biệt của định thức không nhất thiết bắt buộc phải đưa về dạng tam giác.

Ví dụ 5.17. Tính định thức của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}0&1&5\\3&-6&9\\2&6&1\end{bmatrix}$.　　　b) $B=\begin{bmatrix}2&4&6&1\\1&3&5&7\\3&2&3&2\\-3&1&2&1\end{bmatrix}$.

Giải

a) Để tính định thức ta sử dụng các phép biến đổi sơ cấp để chuyển định thức về dạng tam giá trên, ta thực hiện như sau:

Đổi chỗ 2 hàng 1 và 2:

$$\det(A) \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Đưa thừa số 3 ở hàng 1 ra ngoài:

$$\det(A) = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

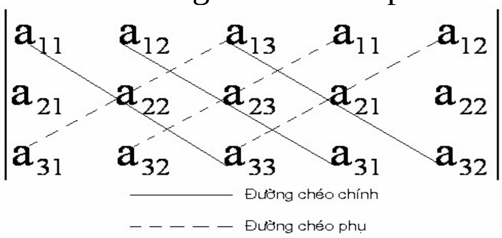
$$\det(A) \overset{h_3=-2h_1+h_3}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \overset{h_3=-10h_2+h_3}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

Vậy $\det(A) = (-3)(1)(1)(-55) = 165.$

b) Sinh viên giải tương tự, $|A| = -13.$

5.2.3.3 Phương pháp 3 **(*Sarrus*)**

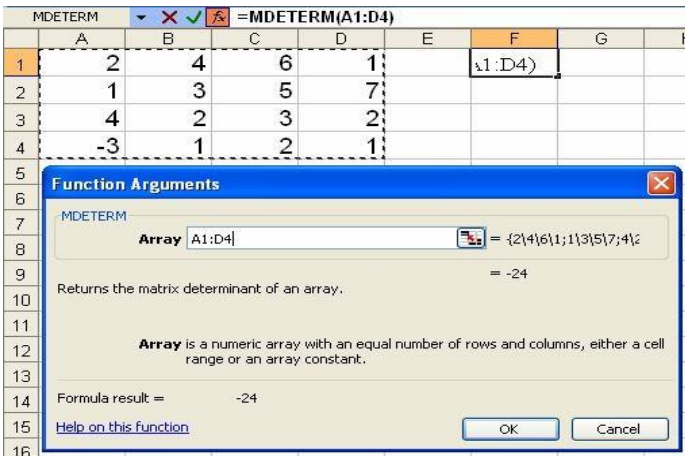
Phương pháp này chỉ áp dụng đối với định thức cấp 3 và phát biểu như sau: Tổng của tích các đường chéo chính trừ đi tổng của tích các phần tử nằm trên đường chéo phụ.



$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

5.2.3.4. Phương pháp 4 (Sử dụng Excel)

Ta sử dụng hàm MDETERM.



5.3 Ma trận nghịch đảo và phép khử Gauss Jordan

Khái niệm ma trận nghịch đảo chỉ có trong trường hợp ma trận vuông.

5.3.1 Ma trận không suy biến

Ta gọi ma trận vuông A cấp n là một ma trận không suy biến nếu $\det(A) \neq 0$.

5.3.2 Ma trận nghịch đảo

Cho ma trận vuông A cấp n, nếu tồn tại ma trận vuông B cấp n thoả mãn: $AB = BA = I$ thì B được gọi là ma trận nghịch đảo của A.

Nếu A có ma trận nghịch đảo thì A gọi là ma trận khả nghịch.

Ký hiệu: $B = A^{-1}$, nghĩa là ta có $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

5.3.3 Định lý

- Nếu A khả nghịch thì A^{-1} là duy nhất.
- Nếu $\det(A) \neq 0$ thì ma trận A có nghịch đảo A^{-1} được tính bởi công thức sau:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^T = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

trong đó c_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij}.

- Nếu A, B là hai ma trận vuông cùng cấp và khả nghịch thì AB cũng khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Chú ý: Khi $\det(A) \neq 0$ thì A có nghịch đảo, nên A là ma trận không suy biến.

5.3.4 Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Cho ma trận vuông A cấp $n \times n$, tìm ma trận nghịch đảo theo các bước sau:

Bước 1. Tính $\det(A)$. Nếu $\det(A) = 0$ thì không tồn tại A^{-1}. Nếu $\det(A) \neq 0$ thì A không suy biến nên tồn tại A^{-1}.

Bước 2. Tính các phần tử $c_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$, lập ma trận $C = [c_{ij}]$, $i, j = \overline{1,n}$.

Bước 3. Lập ma trận chuyển vị của C là C^T và tính $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.C^T$.

Ví dụ 5.18. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Giải

a) ***Bước 1.*** $\det(A) = 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$

Bước 2. Tìm các phần tử:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6;\ c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2;\ c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0;\ c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2;\ c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Rightarrow C = \begin{vmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

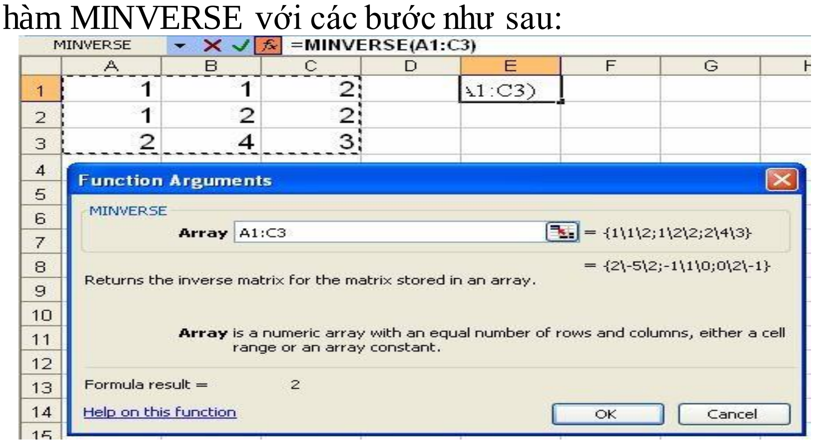
Bước 3. Ma trận chuyển vị $C^T = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$

Vậy $A^{-1} = -\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$

b) Sinh viên tự giải, ta có: $B^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$

5.3.5 Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo bằng Excel

Ta sử dụng hàm MINVERSE với các bước như sau:



Sau khi thực hiện ta chỉ được phần tử (1,1) của ma trận nghịch đảo, để có được tất cả các phần tử còn lại ta không thể sử dụng lệnh copy thông thường mà phải thực hiện tiếp các bước tiếp sau:

- Copy thông thường kết quả vừa có.
- Xác định cấp ma trận cần có và đánh dấu khối.
- Nhấn F2.
- Sử dụng tổ hợp 3 phím: Ctrl+Shift+Enter.

5.3.6 Phép biến đổi sơ cấp – phép khử Gauss Jordan

Các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận:

i) Đổi chỗ hai hàng.

ii) Nhân một hàng với một số $k \neq 0$.

iii) Cộng k lần hàng r vào hàng s.

Để tìm ma trận nghịch đảo dùng các phép biến đổi sơ cấp sao cho:

$$\left[A \middle| I\right] = \left[I \middle| A^{-1}\right],$$

trong đó, $\left[A \middle| I\right]$ là ma trận A ghép với ma trận đơn vị.

Ví dụ 5.19. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải

Để thực hiện phương pháp này có nghĩa là ta sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận sao cho biến ma trận A thành ma trận đơn vị còn ma trận đơn vị trở thành ma trận nghịch đảo của A.

Bước 1: Ta biến đổi sao cho phần tử (1,1) khác 0 là được.

Biến đổi các phần tử khác trong cột 1 bằng 0.

$$\left[A \middle| I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 = -5h_1 + 2h_3]{h_2 = -3h_1 + 2h_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -11 & -28 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Bước 2: Ta biến đổi sao cho phần tử (2, 2) chỉ cần khác không là được.

Biến đổi các phần tử khác trong cột 2 bằng 0.

$$\left[A|I\right]\xrightarrow[h_3=-11h_1+3h_3]{h_1=h_2+h_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&2&-2&2&0\\0&-3&-4&-3&2&0\\0&0&-40&18&-22&6\end{array}\right].$$

Bước 3. Tương tự như bước 1.

Ta biến đổi sao cho phần tử (3, 3) chỉ cần khác 0 là được.

Biến đổi các phần tử khác trong cột 3 bằng 0.

$$\left[A|I\right]\xrightarrow[h_2=-h_3+10h_2]{h_1=h_3+20h_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}40&0&0&-22&18&6\\0&-30&0&-48&42&-6\\0&0&-40&18&-22&6\end{array}\right].$$

Bước 4. Ta chuyển ma trận chéo về ma trận đơn vị:

$$\left[A|I\right]\xrightarrow{h_1=\frac{h_1}{40},\ h_2=\frac{h_2}{-30},\ h_3=\frac{h_3}{-40}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11/20&9/20&3/20\\0&1&0&8/5&-7/5&1/5\\0&0&1&-9/20&11/20&-3/20\end{array}\right].$$

Vậy $A^{-1}=\begin{bmatrix}-11/20&9/20&3/20\\8/5&-7/5&1/5\\-9/20&11/20&-3/20\end{bmatrix}$.

Chú ý: Ta chỉ được phép sử dụng biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận $\left[A|I\right]$ không được sử dụng trên cột.

5.4 Hạng của ma trận

5.4.1 Ma trận con

Xét ma trận *A* cấp *m* x *n*, gọi *p* là một số dương, $p\le\min(m,n)$.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&...&a_{2n}\\...&...&...&...\\a_{m1}&a_{m2}&...&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Định nghĩa

Ma trận vuông cấp *p* suy ra từ *A* bằng cách bỏ đi $m-p$ hàng và $n-p$ cột gọi là ma trận con cấp *p* của *A*.

Định thức của ma trận con đó gọi là định thức con cấp *p* của *A*.

Ví dụ 5.20. Liệt kê các ma trận con cấp 3 của ma trận $A_{3\times 4}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Giải

Trong 4 cột ta chọn ra 3 cột không lặp, do đó ta có số phương án:

$$C_4^3=\frac{4!}{3!(4-3)!}=4.$$

Các ma trận con cấp 3 gồm:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Ví dụ 5.21. Tìm số ma trận con cấp p của $A_{m\times n}$ với $p\le\min(m,n)$.

Giải

Trong m hàng ta chọn p hàng, do đó ta có số phương án: $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Vậy số ma trận con cấp p là: $C_m^pC_n^p=\dfrac{m!}{p!(m-p)!}\times\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

5.4.2 Hạng của ma trận

Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác không của A. Như vậy, nếu r là hạng của ma trận $A_{m\times n}$ thì r thoả mãn hai điều kiện sau:

- Trong A tồn tại một định con cấp r khác 0.
- Mọi định thức con cấp lớn hơn r trong ma trận A đều bằng 0 hoặc r là định thức con cấp cao nhất của A $\left(r=\min(m,n)\right)$.

Ký hiệu: $rank(A)=r(A)=r$.

Ví dụ 5.22. Tìm hạng của ma trận sau bằng phương pháp sử dụng định nghĩa:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 4\\ -1 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}.$$

Giải

- Tính các định thức con cấp 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vậy hạng của A không thể bằng 3 được.

- Xét các định thức con cấp 2:

Ta có định thức con cấp 2: $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$

Vậy $rank(A) = 2.$

Định lý

Cho A, B là hai ma trận cùng cấp. Nếu B là ma trận nhận được từ A sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp thì $r(A) = r(B)$.

Chú ý:

- Nếu $A = 0$ thì $r(A) = 0$.
- Nếu $A \neq 0$ thì $r(A)$ là cấp cao nhất của định thức con khác không của A.
- $0 \leq r(A) \leq \min(m,n)$, $A_{m\times n}$.
- A là ma trận bậc thang rút gọn hàng thì hạng của A bằng số hàng khác 0.
- Hạng của ma trận A không thay đổi qua phép chuyển vị $r(A) = r(A^T)$.
- Hạng của ma trận A không thay đổi qua phép biến đổi sơ cấp.

Ví dụ 5.23. Tìm hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Giải

Ta thực hiện các phép biến đổi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 = h_1 + h_3]{h_2 = -2h_1 + h_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 = 5h_2 + 7h_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy $r(A) = 2.$

Câu hỏi và bài tập chương 5

Bài 5.1. Cho hai ma trận *A*, *B*:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & 5 & 3 & 11 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 5 & 7 \\ -5 & 9 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Tìm X sao cho $A + X = B$.

b) Tìm X sao cho $2A - 3B = X$.

c) Tính $A^T + B^T$, $(A+B)^T$.

Bài 5.2. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

a) Tìm những cặp ma trận nào có thể nhân được với nhau.

b) Tìm chuỗi những ma trận có thể nhân được với nhau.

Bài 5.3. Cho $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Tính $A^k, k \in \mathbb{N}$.

Bài 5.4. Một công ty có 3 cửa hàng, cho số liệu tình hình kinh doanh như sau:

Đến 31/12/2009 báo cáo hàng tồn kho như sau:

Cửa hàng	Sản phẩm					
	A	B	C	D	E	F
1	50	40	100	150	8	100
2	70	40	80	70	12	80
3	80	50	70	100	14	100

Lượng tiêu thụ sản phẩm tháng 01/2010:

Cửa hàng	Sản phẩm					
	A	B	C	D	E	F
1	20	10	25	40	8	38
2	10	12	30	32	12	32
3	15	20	18	38	14	40

Lượng tiêu thụ sản phẩm tháng 02/2010:

Cửa hàng	Sản phẩm				
	A	B	C	D	F
1	15	20	10	30	28
2	12	24	20	38	42
3	10	30	12	18	50

Giá bán tháng 1 và tháng 2 không thay đổi:

	A	B	C	D	E	F
Giá bán	2	7	4	5	6	3

a) Tính doanh thu tháng 1, 2 và doanh thu 2 tháng.

b) Tính hàng tồn kho đến cuối tháng 2/2010.

Bài 5.5. Tính các định thức

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & 9 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Bài 5.6. Tính các định thức cấp 5 sau:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Bài 5.7. Tính A^n trong các trường hợp sau:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$

Bài 5.8. Tìm ma trận nghịch đảo:

a) $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 3 & 7\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 7 & 4\end{bmatrix}$

Bài 5.9. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 4 & 1 & 6\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}2 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 5 & 2\end{vmatrix}$

Bài 5.10. Tìm ma trận X và Y sao cho $A.X = B$ và $Y.A = B$, biết

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}.$$

Bài 5.11. Dùng phép khử Gauss – Jordan tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Bài 5.12. Tìm hạng của ma trận:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3 & 7\\ 6 & 7 & 3 & 0\\ 2 & 4 & -2 & 3\\ 4 & 6 & 0 & 4\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2 & 2 & 7\\ 2 & 3 & 2 & 1 & 4\\ -1 & 0 & 2 & -2 & -5\\ 2 & 8 & 12 & -4 & -6\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ -2 & 5 & 4\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

CHƯƠNG 6
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

6.1 Các khái niệm

6.1.1 Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Cho một hệ phương trình đại số bậc nhất gồm m phương trình n ẩn có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots. \quad \ldots \quad \ldots. \quad \ldots \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Trong đó:

x_j : là ẩn số.

a_{ij} : là hệ số phương trình thứ i của ẩn x_j, gọi tắt là hệ số của ẩn.

b_i : là vế phải của phương trình thứ *i*, gọi tắt là hệ số tự do.

Ta gọi hệ phương trình trên là hệ phương trình tuyến tính.

Các hệ số a_{ij} trong hệ phương trình tuyến tính (I) lập nên một ma trận cấp $m \times n$ là *A* và gọi là ma trận hệ số của hệ phương trình tuyến tính (I):

Ma trận các hệ số: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Ma trận cột của ẩn: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$,

Ma trận cột của hệ số tự do: $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_m \end{bmatrix}^T$.

Nếu ghép thêm ma trận *B* vào *A* thì ta được ma trận mở rộng của hệ phương trình (I):

$$C=\left[A\middle|B\right]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

Nhận xét: Từ hệ phương trình tuyến tính ta viết được ma trận mở rộng và ngược lại.

Hệ phương trình tuyến tính có thể được viết dưới dạng ma trận: $AX = B$ hay

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Mỗi bộ số $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)=\left(c_1, c_2, ..., c_n\right)$ gọi là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (I) nếu nó thỏa hệ phương trình đó.

Ví dụ 6.1. Cho hệ phương trình bậc nhất theo các ẩn x, y, z:

$$\begin{cases} x+4y-5z=0 \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$$

Đây là một hệ phương trình tuyến tính 2 phương trình 3 ẩn.

Hệ có ma trận hệ số là $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Ma trận mở rộng là: $C=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right].$

Có thể viết hệ phương trình tuyến tính trên qua dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Hay $A.X = B$ với $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bộ số $(1, 1, 1)$ là một trong các nghiệm của hệ phương trình trên.

6.1.2 Một vài hệ phương trình tuyến tính đặc biệt

6.1.2.1 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$:

Nếu $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$ thì hệ (I) trở thành:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ và được gọi là hệ phương trình thuần nhất.

Nhận xét: Hệ phương trình thuần nhất luôn có ít nhất 1 nghiệm là $(x_1;\ldots;x_n) = (0;\ldots;0)$ và nghiệm này được gọi là *nghiệm tầm thường* của hệ.

 Hệ quả:

Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số phương trình bằng số ẩn (ma trận hệ số A là ma trận vuông). Khi đó:

i) Hệ có nghiệm tầm thường $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

ii) Hệ có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow \det A = 0$.

6.1.2.2 Hệ Cramer

Hệ phương trình tuyến tính (I) gọi là *hệ Cramer* nếu $m = n$ (tức là số phương trình bằng với số ẩn) và ma trận hệ số A là không suy biến $(\det A \neq 0)$.

6.2 Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

Các phương pháp để giải phương trình tuyến tính:

- Phương pháp Gauss – sử dụng các phép biến đổi sơ cấp cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình, n ẩn (bất kỳ).
- Sử dụng quy tắc Cramer cho hệ phương trình tuyến tính: $m = n$, $\det(A) \neq 0$.
- Phương pháp tính ma trận nghịch đảo

6.2.1 Điều kiện để hệ phương trình có nghiệm

Định lý Corneker – Capelli: Cho hệ phương trình tuyến tính (I), A và C lần lượt là ma trận các hệ số và ma trận các hệ số mở rộng. Khi đó:

i) Nếu $r(A) < r(C)$ thì hệ (I) vô nghiệm.

ii) Nếu $r(A) = r(C) = r$ thì hệ (I) có nghiệm. Hơn nữa:

- Nếu $r = n$ (số ẩn) thì hệ (I) có nghiệm duy nhất.
- Nếu $r < n$ thì hệ (I) có vô số nghiệm phụ thuộc vào $n - r$ tham số.

6.2.2 Phương pháp Gauss

Nội dung cơ bản của phương pháp này dựa trên định lý quan trọng về nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính.

Ví dụ 6.2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 15 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 8 \end{cases}$$

Giải

Ta có: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; $C=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & -5 & 15 \\ 3 & -1 & 4 & 7 & 8 \end{array}\right)$

Dễ dàng thấy được $r(A)=r(C)=2$.

Mà số ẩn của hệ phương trình là $n=4>r=2$.

Nên theo định lý trên hệ phương trình có vô số nghiệm.

Nội dung phương pháp Gauss:

Bước 1: Lập ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình là $C=\left(A\,|\,B\right)$.

Bước 2: Đưa ma trận hệ số mở rộng $C=\left(A\,|\,B\right)$ về dạng bậc thang bằng biến đổi sơ cấp trên dòng.

Kiểm tra hệ có nghiệm hay không, nếu có thực hiện bước tiếp theo.

Bước 3: Viết lại hệ phương trình và giải hệ phương trình từ dưới lên.

Ví dụ 6.3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -7 \\ 2x_1 - 9x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 11x_2 - 7x_3 = 17 \end{cases}$$

Giải

Ta có $C=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -7 \\ 2 & -9 & -1 & 4 \\ 3 & -11 & -7 & 17 \end{array}\right)$

$$C=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -7 \\ 2 & -9 & -1 & 4 \\ 3 & -11 & -7 & 17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -9 & 18 \\ 0 & 4 & -19 & 38 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & 17 & -34 \end{array}\right)$$

Hay $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -7 & (1) \\ \quad x_2 - 9x_3 = 4 & (2) \\ \quad\quad 17x_3 = -34 & (3) \end{cases}$

Từ (3) suy ra $x_3=-2$, thay $x_3=-2$ lần lượt lên (1) và (2) ta được $x_2=0; x_1=1$.

Ví dụ 6.4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

Giải

Ta có: $C=\left(A\,|\,B\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 1 & -3 & 7\\ 1 & -1 & 1 & 2 & 5\\ 2 & 3 & -3 & 1 & 3\\ 4 & 1 & -1 & 5 & 1\end{array}\right)$

$$C=\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 1 & -3 & 7\\ 1 & -1 & 1 & 2 & 5\\ 2 & 3 & -3 & 1 & 3\\ 4 & 1 & -1 & 5 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 5\\ 4 & 2 & 1 & -3 & 7\\ 2 & 3 & -3 & 1 & 3\\ 4 & 1 & -1 & 5 & 1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 6 & -3 & -11 & -13\\ 0 & 5 & -5 & -3 & -7\\ 0 & 5 & -5 & -3 & -19\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 6 & -3 & -11 & -13\\ 0 & 5 & -5 & -3 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12\end{array}\right)$$

Vì $r(A) < r(C)$ nên theo định lý trên suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

6.2.3 Quy tắc Cramer

Hệ phương trình tuyến tính n ẩn là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2\\ ...\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n\end{cases} \quad (*)$$

Đặt $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$

Với mỗi $j=\overline{1;n}$ ta gọi A_j là ma trận có được từ ma trận A bằng cách thay các phần tử của cột thứ j của A bởi các phần tử của cột b.

Định lý: Với hệ phương trình tuyến tính (*), ta có:

i) Nếu $|A|\neq 0$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=\left(x_1;x_2;\ldots;x_n\right)$, với $x_j=\dfrac{|A_j|}{|A|}$.

ii) Nếu $|A|=0$ và tồn tại $|A_j|\neq 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

iii) Nếu $|A|=0$ và $|A_j|=0, \forall j=\overline{1,n}$ thì hệ phương trình không có nghiệm duy nhất (nghĩa là vô nghiệm hay vô số nghiệm).

Ví dụ 6.5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

Giải

Ta có: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2;\ |A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6;$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 2;\ |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -2.$$

Suy ra nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{-2}{2} = -1. \end{cases}$

Ví dụ 6.6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

Giải

Ta có: $|A| = 0$ và $|A_1| = 8 \neq 0$ nên suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

6.2.4 Phương pháp tính ma trận nghịch đảo

Phương pháp này chỉ áp dụng đối với những hệ phương trình mà ma trận hệ số A của nó tồn tại ma trận nghịch đảo, tức là tồn tại A^{-1}.

Phương pháp giải:

Bước 1. Hệ phương trình có thể viết được dưới dạng: $AX = B$.

Bước 2. Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A.

Bước 3. Nghiệm của hệ phương trình là $X = A^{-1}.B$.

Ví dụ 6.7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình có thể được viết dưới dạng sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Hay $AX = B$.

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Vì $\det(A) = 2 \neq 0$ nên A có ma trận nghịch đảo là $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-37}{2} & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-11}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Nghiệm của hệ phương trình này là: $X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-37}{2} & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-11}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$.

6.3 Mô hình Input – Output Leontief

Trong một nền kinh tế hay một khu vực có nhiều ngành sản xuất, một vấn đề đặt ra là các ngành này sản xuất như thế nào để tránh tình trạng mất cân đối - lạm phát thừa hay thiếu. Đây là một vấn đề cần giải quyết và được khởi xướng bởi Giáo sư Wassily Leontief năm 1941 "Cấu trúc của nền kinh tế Hoa Kỳ" với 2 bảng I/O của năm 1919 và 1929, người đã đoạt giải Nobel kinh tế năm 1973.

6.3.1 Tổng cầu của một ngành

Đối với sản phẩm hàng hoá dịch vụ được chia ra thành 2 yếu tố:

- Cầu trung gian: Là sản phẩm hàng hoá dịch vụ của ngành này được dùng làm yếu tố đầu vào cho sản xuất của ngành khác. Như vậy đối với sản phẩm này là sản phẩm trung gian của sản phẩm khác, nên khi tiêu dùng nó sẽ không bị mất đi.

- Cầu tiêu cuối cùng: Là sản phẩm hàng hoá dịch vụ dùng cho tiêu dùng và xuất khẩu. Tiêu dùng ở có thể có thể là người dân hoặc chính phủ. Đối với sản phẩm này khi tiêu dùng sản phẩm sẽ bị mất đi hay đi ra khỏi nền kinh tế đang xem xét.

6.3.2 Xây dựng mô hình

Giả sử nền kinh tế của một qua gia hay khu vực có n ngành sản xuất N_i, giá trị sản phẩm được tính bằng tiền x_i. Ta có mô hình như sau:

- x_i: là tổng cầu của ngành i (tổng giá trị sản phẩm của ngành i).
- x_{ij}: là giá trị sản phẩm của ngành i mà ngành j sử dụng làm yếu tố đầu vào.
- b_i: Giá trị sản phẩm cho tiêu dùng và xuất khẩu.

Vậy tổng cầu của ngành i là:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + b_i,\ i = \overline{1,n}$$

$$\Leftrightarrow x_i = \frac{x_{i1}}{x_1}x_1 + \frac{x_{i2}}{x_2}x_2 + \ldots + \frac{x_{in}}{x_n}x_n + b_i,\ \ i = \overline{1,n}.$$

Ta có bảng I/O

Output	Input			
	N_1	N_2	…	N_n
N_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}
N_2	x_{21}	…	…	x_{2n}
…	…	…	…	…
N_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}

Trong đó x_{ij} : là giá trị sản phẩm dịch vụ mà ngành j mua của ngành i làm yếu tố đầu vào.

Đặt $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}, i = \overline{1,n},$ ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1-a_{nn})x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

Vậy để tìm được tổng cầu của từng ngành ta giải hệ phương trình (*).

Đặt $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$

Phương trình (*) được trình bày dưới dạng ma trận: $(I - A)X = B$.

Trong đó: X: là ma trận tổng cầu của nền kinh tế

B: là ma trận cầu cuối cùng hay cầu tiêu dùng và xuất khẩu.

$(I - A)$: là ma trận Leontief.

6.3.3 Phương pháp giải

Để giải hệ phương trình này ta có nhiều cách:

- Sử dụng phương pháp Crame, ma trận nghịch đảo.
- Sử dụng phương pháp khử của Gauss.

Xét ma trận A

- A: Ma trận hệ số chi phí trực tiếp hay ma trận hệ số kỹ thuật.
- a_{ij}: Hệ số chi phí yếu tố đầu vào. Để sản xuất được 1\$ sản phẩm, ngành j phải mua của ngành i là a_{ij}\$. Hay trong tổng giá trị sản phẩm của ngành j, ngành j phải chi trả cho ngành i là a_{ij} 100%.
- $0 \le a_{ij} < 1, \sum a_{ij} < 1.$
- Hàng i: Hệ số giá trị sản phẩm ngành i bán cho các ngành khác.
- Cột j: Hệ số giá trị sản phẩm mà ngành j mua của những ngành khác để làm yếu tố đầu vào.

Ví dụ 6.8. Giả sử trong nền kinh tế có 3 ngành sản xuất và có ma trận hệ số chi phí trực tiếp như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}$$

a) Hãy cho biết ý nghĩa của hệ số 0,4 trong ma trận A?

b) Cho biết tỷ trọng % giá trị gia tăng của các ngành đóng góp cho nền kinh tế?

c) Cho biết nhu cầu cho tiêu dùng và xuất khẩu của từng ngành: $b_1 = 8\$, b_2 = 10\$$, $b_3 = 6\$$. Hãy tính tổng cầu của từng ngành?

Giải

a) Để sản xuất ra 1\$ sản phẩm ngành 2 phải mua của ngành 3 là 0,4\$ yếu tố đầu vào. Hay trong tổng giá trị sản phẩm của ngành 3, ngành 3 mua của ngành 2 là 40% giá trị yếu tố đầu vào.

b) Tỷ trọng giá trị gia tăng của từng ngành:

Ngành 1: 0,2 + 0,3 + 0,1 = 0,6

1 – 0,6 = 0,4 tương ứng tỷ trọng giá trị gia tăng là 40%.

Ngành 2: 0,3 + 0,1 + 0,3 = 0,7

1 – 0,7 = 0,3 tương ứng tỷ trọng giá trị gia tăng là 30%.

Ngành 3: 0,2 + 0,4 + 0,2 = 0,8

1 – 0,8 = 0,2 tương ứng tỷ trọng giá trị gia tăng là 20%.

c) Tổng cầu của từng ngành:

$$(I-A)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,2 & 0,3 & 0,2\\ 0,3 & 0,1 & 0,4\\ 0,1 & 0,3 & 0,2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,8 & -0,3 & -0,2\\ -0,3 & 0,9 & -0,4\\ -0,1 & -0,3 & 0,8\end{bmatrix}$$

$$(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}1,67 & 0,83 & 0,83\\ 0,78 & 1,72 & 1,06\\ 0,50 & 0,75 & 1,75\end{bmatrix}$$

$$X=(I-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1,67 & 0,83 & 0,83\\ 0,78 & 1,72 & 1,06\\ 0,50 & 0,75 & 1,75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ 10\\ 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26,67\\ 29,78\\ 22,00\end{bmatrix}.$$

Ví dụ 6.9. Giả sử trong nền kinh tế có 3 ngành, ta có bảng I/O giá trị trao đổi giữa các ngành như sau:

Output	Input			Cầu cuối cùng
	N_1	N_2	N_3	
N_1	20	10	8	62
N_2	10	10	16	14
N_3	10	10	8	12

Yêu cầu: Xây dựng ma trận hệ số chi phí.

Giải

Xác định tổng cầu:

Output	Input			Cầu cuối cùng	Tổng cầu
	N_1	N_2	N_3		
N_1	20	10	8	62	100
N_2	10	10	16	14	50
N_3	10	10	8	12	40

Ma trận hệ số kỹ thuật:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{20}{100} & \frac{10}{50} & \frac{8}{40}\\ \frac{10}{100} & \frac{10}{50} & \frac{16}{40}\\ \frac{10}{100} & \frac{10}{50} & \frac{8}{40}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,2 & 0,2 & 0,2\\ 0,1 & 0,2 & 0,4\\ 0,1 & 0,2 & 0,2\end{bmatrix}.$$

Ví dụ 6.10. Công ty điện máy Tự Do có 3 cửa hàng bán các đồ dùng gia dụng. Đến 31/12/2008 báo cáo hàng tồn như sau:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} TV21 & TV32 & MG & TL & ML & MA \end{array}\\
\begin{array}{c} TD\\ CH1\\ CH2\\ CH3 \end{array} & \begin{bmatrix} 50 & 40 & 100 & 150 & 100 & 100\\ 70 & 40 & 80 & 70 & 50 & 80\\ 80 & 50 & 70 & 100 & 140 & 100 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Trong đó:

- TD: công ty Tự Do.
- CH1, CH2, CH3: cửa hàng số 1, 2, 3.
- TV21: ti vi 21’, với giá bán là 2 (đơn vị 10^6\$)
- TV32: ti vi 32’, với giá bán là 7
- MG: máy giặt, với giá bán là 4
- TL: tủ lạnh, với giá bán là 5
- ML: máy lạnh, với giá bán là 6
- MA: máy ảnh kỷ thuật số, với giá bán là 3

Báo cáo kết quả kinh doanh 2 tháng đầu năm 2009 như sau:

$$T1/09=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} TV21 & TV32 & MG & TL & ML & MA \end{array}\\
\begin{array}{c} TD\\ CH1\\ CH2\\ CH3 \end{array} & \begin{bmatrix} 20 & 10 & 25 & 40 & 8 & 38\\ 10 & 12 & 30 & 32 & 12 & 32\\ 15 & 20 & 18 & 38 & 14 & 40 \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$T2/09=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} TV21 & TV32 & MG & TL & ML & MA \end{array}\\
\begin{array}{c} TD\\ CH1\\ CH2\\ CH3 \end{array} & \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 30 & 12 & 28\\ 12 & 24 & 20 & 38 & 14 & 42\\ 10 & 30 & 12 & 18 & 10 & 50 \end{bmatrix}
\end{array}$$

a) Tính doanh thu tháng 1, 2 và doanh thu 2 tháng

b) Tính hàng tồn ở thời điểm cuối tháng 2/2009.

Giải

Gọi A là ma trận số lượng bán được của 3 cửa hàng, và P là ma trận giá, ta có:

$$T1/09=\begin{bmatrix}20&10&25&40&8&38\\10&12&30&32&12&32\\15&20&18&38&14&40\end{bmatrix}.$$

$$T2/09=\begin{bmatrix}15&20&10&30&12&28\\12&24&20&38&14&42\\10&30&12&18&10&50\end{bmatrix}.$$

$$P=\begin{bmatrix}2\\7\\4\\5\\6\\3\end{bmatrix}.$$

a) Khi đó doanh thu tháng 1, 2 năm 2009 lần lượt là:

$$TR1=\begin{bmatrix}20&10&25&40&8&38\\10&12&30&32&12&32\\15&20&18&38&14&40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\7\\4\\5\\6\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}572\\552\\636\end{bmatrix}.$$

$$TR2=\begin{bmatrix}15&20&10&30&12&28\\12&24&20&38&14&42\\10&30&12&18&10&50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\7\\4\\5\\6\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}516\\672\\578\end{bmatrix}.$$

Tổng doanh thu 2 tháng đầu năm là:

$$TR1+TR2=\begin{bmatrix}572\\552\\636\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}516\\672\\578\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1088\\1224\\1214\end{bmatrix}$$

$$TR1+TR2=3526;\ (3.526.000.000\text{ đ}).$$

b) Lượng sản phẩm đã xuất bán trong hai tháng là:

$$T12 = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 25 & 40 & 8 & 38 \\ 10 & 12 & 30 & 32 & 12 & 32 \\ 15 & 20 & 18 & 38 & 14 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 30 & 12 & 28 \\ 12 & 24 & 20 & 38 & 14 & 42 \\ 10 & 30 & 12 & 18 & 10 & 50 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 35 & 30 & 35 & 70 & 20 & 56 \\ 22 & 36 & 50 & 70 & 26 & 74 \\ 25 & 50 & 30 & 56 & 24 & 90 \end{bmatrix}.$$

Số sản phẩm tồn tại của cửa hàng là:

$$\begin{bmatrix} 50 & 40 & 100 & 150 & 100 & 100 \\ 70 & 40 & 80 & 70 & 50 & 80 \\ 80 & 50 & 70 & 100 & 140 & 100 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 35 & 30 & 35 & 70 & 20 & 56 \\ 22 & 36 & 50 & 70 & 26 & 74 \\ 25 & 50 & 30 & 56 & 24 & 90 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 10 & 65 & 80 & 80 & 44 \\ 48 & 4 & 30 & 0 & 24 & 6 \\ 55 & 0 & 40 & 44 & 116 & 10 \end{bmatrix}.$$

6.4 Mô hình cân bằng thị trường

6.4.1 Thị trường một loại hàng hóa

Theo quy luật kinh tế, trong điều kiện các yếu tố không đổi:

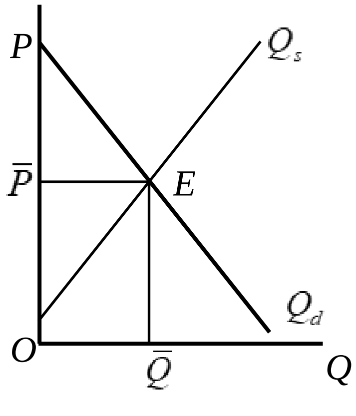
- Nếu giá của sản phẩm tăng lên thì cầu sẽ giảm, tức là nếu giá tăng sản phẩm lên thì lượng hàng hoá tiêu thụ sẽ giảm.
- Nếu giá sản phẩm tăng lên thì cung sẽ tăng, tức là nếu giá sản phẩm tăng lên thì người sản xuất, kinh doanh sẽ cung cấp cho thị trường nhiều hơn.

Hàm cung: $Q_s = a_0 + a_1 P$.

Hàm cầu: $Q_d = b_0 + b_1 P$.

Mô hình cân bằng thị trường có dạng: $Q_s = Q_d$.

Giải phương trình này ta sẽ tìm được giá cân bằng $\bar{P}$ và sản lượng cân bằng $\bar{Q}$. Ta có thể biểu diễn bằng đồ thị như sau:



Ví dụ 6.11. Một sản phẩm lưu thông trên thị trường có các thông tin như sau:

Hàm cung: $Q_s = -1 + P.$

Hàm cầu: $Q_d = 3 - P.$

Hãy xác định giá cân bằng và sản phẩm cân bằng của sản phẩm trên.

Giải

Ta có phương trình cân bằng:

$$Q_s = Q_d \Leftrightarrow -1 + P = 3 - P$$

$$\Leftrightarrow 2P = 4 \Leftrightarrow P = 2.$$

Vậy $\bar{P} = 2,\ \bar{Q} = 1.$

6.4.2 Thị trường có nhiều loại hàng hóa

Theo qui luật kinh tế, cung cầu của một hàng hoá không chỉ phụ thuộc vào chính giá của sản phẩm đó mà còn phụ thuộc vào giá của các sản phẩm có liên quan như sản phẩm thay thế và sản phẩm bổ sung.

- *Sản phẩm bổ sung*: Nếu giá của sản phẩm bổ sung tăng thì cầu của sản phẩm đang xem xét sẽ giảm. Ví dụ sản phẩm xăng là sản phẩm bổ sung của xe mô tô.
- *Sản phẩm thay thế*: Nếu giá của sản phẩm thay thế tăng thì cầu cura sản phẩm đang xem xét sẽ tăng theo. ví dụ sản phẩm thịt heo là sản phẩm thay thế của sản phẩm thịt gà.

Giả sử có *n* sản phẩm đang lưu thông trên thị trường, ta có mô hình tổng quát như sau:

Giả định rằng các yếu tố khác không đổi, hàm cung và hàm cầu của sản phẩm thứ *i* là:

$$\begin{cases} Q_{s_i} = a_{i0} + a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2 + \ldots + a_{in}P_n \\ Q_{d_i} = b_{i0} + b_{i1}P_1 + b_{i2}P_2 + \ldots + b_{in}P_n \end{cases} \text{ với } i = \overline{1,n}.$$

Thị trường cân bằng khi: $Q_{s_i} = Q_{d_i},\ i = \overline{1,n}$.

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a_{10} + a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + \ldots + a_{1n}P_n = b_{10} + b_{11}P_1 + b_{12}P_2 + \ldots + b_{1n}P_n \\ a_{20} + a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + \ldots + a_{2n}P_n = b_{20} + b_{21}P_1 + b_{22}P_2 + \ldots + b_{2n}P_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n0} + a_{n1}P_1 + a_{n2}P_2 + \ldots + a_{nn}P_n = b_{n0} + b_{n1}P_1 + b_{n2}P_2 + \ldots + b_{nn}P_n \end{cases}$$

Đặt $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, hệ phương trình được viết như sau:

$$\begin{cases} c_{11}P_1 + c_{12}P_2 + \ldots + c_{1n}P_n = -c_{10} \\ c_{21}P_1 + c_{22}P_2 + \ldots + c_{2n}P_n = -c_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}P_1 + c_{n2}P_2 + \ldots + c_{nn}P_n = -c_{n0} \end{cases}$$

Đặt $A=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ \dots\dots \\ -c_n \end{bmatrix}$.

Hệ phương trình được trình bày dưới dạng ma trận: $AX = B$.

Giải hệ phương trình tuyến tính này ta tìm được các giá cân bằng và sản lượng cân bằng.

Ví dụ 6.12. Trên thị trường có hai sản phẩm, thông tin có được như sau:

Sản phẩm 1: $Q_{s_1} = -2 + 3P_1$

$Q_{d_1} = 10 - 2P_1 + P_2.$

Sản phẩm 2: $Q_{s_2} = -1 + 2P_2$

$Q_{d_2} = 15 + P_1 - P_2$

Thị trường cân bằng khi:

$$\begin{cases} Q_{s_1} = Q_{d_1} \\ Q_{s_2} = Q_{d_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 3P_1 = 10 - 2P_1 + P_2 \\ -1 + 2P_2 = 15 + P_1 - P_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5P_1 - P_2 = 12 \\ -P_1 + 3P_2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = \dfrac{26}{7};\ Q_{s_1} = Q_{d_1} = \dfrac{64}{7} \\ P_2 = \dfrac{46}{7};\ Q_{s_2} = Q_{d_2} = \dfrac{85}{7} \end{cases}$$

Ví dụ 6.13. Thị trường có 3 sản phẩm đang lưu thông trong thị trường, hàm cung và hàm cầu được cho như sau:

Sản phẩm 1: $Q_{s_1} = -6 + 5P_1 - P_2 - P_3$

$Q_{d_1} = 10 - 2P_1 + P_2 + P_3$

Sản phẩm 2: $Q_{s_2} = -4 - P_1 + 3P_2 - P_3$

$Q_{d_2} = 12 + P_1 - 2P_2 + P_3$

Sản phẩm 3: $Q_{s_3} = -3 - P_1 - P_2 + 4P_3$

$Q_{d_3} = 16 + P_1 + P_2 - 3P_3$

a) Tìm giá cân bằng và sản lượng cân bằng của các sản phẩm?

b) Tại một thời điểm, xuất 3 sản phẩm 1, 2 sản phẩm 2 và nhập 2 sản phẩm 3. Tìm điểm cân bằng mới trên thị trường.

Giải

a) Ta có hệ phương trình cân bằng như sau: $\begin{cases} 7P_1 - 2P_2 - 2P_3 = 16 \\ -2P_1 + 5P_2 - 2P_3 = 16 \\ -2P_1 - 2P_2 + 7P_3 = 19 \end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix}7 & -2 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 7\end{bmatrix};\ P=\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}16\\ 16\\ 19\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix}7 & -2 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 7\end{vmatrix}=153.$$

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix}16 & -2 & -2\\ 16 & 5 & -2\\ 19 & -2 & 7\end{vmatrix}=1050.$$

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix}7 & 16 & -2\\ -2 & 16 & -2\\ -2 & 19 & 7\end{vmatrix}=1350$$

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix}7 & -2 & 16\\ -2 & 5 & 16\\ -2 & -2 & 19\end{vmatrix}=1101$$

Giá cân bằng: $P_1=6,9;\ P_2=8,8;\ P_3=7,2.$

Sản lượng cân bằng: $Q_1=12,3;\ Q_2=8,4;\ Q_3=10,1.$

b) Ta có hàm cung và hàm cầu mới như sau:

Sản phẩm 1: $Q_{s_1}-3=-3-6+5P_1-P_2-P_3$

$Q_{d_1} \quad = \quad 10-2P_1+P_2+P_3$

Sản phẩm 2: $Q_{s_2}-2=-2-4-P_1+3P_2-P_3$

$Q_{d_2} \quad = \quad 12+P_1-2P_2+P_3$

Sản phẩm 3: $Q_{s_3} \quad = \quad -3-P_1-P_2+4P_3$

$Q_{d_3}+3=3+16+P_1+P_2-3P_3$

Hệ phương trình cân bằng mới:

$$\begin{cases}7P_1-2P_2-2P_3=19\\ -2P_1+5P_2-2P_3=18\\ -2P_1-2P_2+7P_3=22\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được:

Giá cân bằng: $P_1=8,0;\ P_2=10,1;\ P_3=8,3.$

Sản lượng cân bằng: $Q_1=12,5;\ Q_2=8,1;\ Q_3=12,2.$

Câu hỏi và bài tập chương 6

Bài 6.1. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau bằng định lý Cramer và bằng phương pháp ma trận nghịch đảo

a) $\begin{cases} x + 5z = 3 \\ x + 5y = 5 \\ 4y + 7z = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 2x + 3z = 7 \\ 3y + 2z = 5 \end{cases}$

Bài 6.2. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ x - z + 2t = 0 \\ -x + 2y - 2z + 7t = -7 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x + 4y + 9z = -9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

Bài 6.3. Tìm điều kiện cần và đủ để hệ phương trình có nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = a \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = b \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = c \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = d \end{cases}$$

Bài 6.4. Giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số:

a) $\begin{cases} x + 2y + az = 3 \\ 3x - y - az = -3 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$

Bài 6.5. Cho bảng I/O:

I/O	1	2	3	4	d
1	10	30	50	40	40
2	20	50	80	30	10
3	60	20	30	10	60
4	70	40	10	80	30

a) Lập ma trận hệ số kỹ thuật?

b) Tính giá trị gia tăng của mỗi ngành và cho biết ngành nào sản xuất hiệu quả nhất?

Bài 6.6. Cho ma trận kỹ thuật:

$$A=\begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,25 & 0,1 & 0,2 \\ 0,15 & 0,2 & 0,2 & 0,15 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

a) Cho biết hệ số 0,25 có ý nghĩa gì?

b) Cho tổng cầu của 4 ngành lần lượt là 160, 170, 180, 190, hãy lập bảng I/O?

Bài 6.7. Cho ma trận hệ số kỹ thuật và cầu cuối cùng của ngành 1, 2, 3 lần lượt là 2,5; 4,0; 3,0. Tìm tổng cầu của từng ngành?

$$A=\begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Bài 6.8. Trong mô hình Input – Output Leontief, biết bảng cột đàu vào cho 1 đơn vị giá trị đầu ra các ngành công nghiệp, nông nghiệp, dịch vụ trong bảng sau:

Đầu ra / Đầu vào	Công nghiệp	Nông nghiệp	Dịch vụ
Công nghiệp	0,2	0,2	0
Nông nghiệp	0,3	0,1	0,3
Dịch vụ	0,1	0	0,2

Biết nhu cầu cuối cùng các ngành trên là 40, 60, 80 (đơn vị giá trị).

a) Lập ma trận hệ số đầu vào.

b) Đây có phải là mô hình Input – Output mở không?

c) Yêu cầu tìm phương án mức sản xuất (tức đầu ra) mỗi ngành.

(Giải hệ Input – Output bằng phương pháp ma trận và giải bằng phép khử Gauss)

Bài 6.9. Tương tự bài trên với bảng cột đầu vào cho 1 đơn vị giá trị đầu ra các ngành 1, 2, 3 trong bảng sau:

Đầu ra / Đầu vào	Ngành 1	Ngành 2	Ngành 3
Ngành 1	0,4	0,1	0
Ngành 2	0	0,3	0,2
Ngành 3	0,1	0	0,4

Biết nhu cầu cuối cùng các ngành trên là 50, 40, 60 (đơn vị giá trị).

a) Lập ma trận hệ số đầu vào.

b) Đây có phải là mô hình Input – Output mở không?

c) Yêu cầu tìm phương án mức sản xuất (tức đầu ra) mỗi ngành.

Bài 6.10. Xét thị trường một loại hàng hóa (trong một khoảng thời gian ngắn nào đó) có hàm cung $Q_s = 3p - 15$ và hàm cầu $Q_d = -2p + 25$ với p là giá của loại hàng đó. Tìm điểm cân bằng của thị trường.

Bài 6.11. Biết thị trường 2 loại hàng hóa 1, 2 có các hàm cung và hàm cầu là:

$Q_{s_1} = -2 + 3p_1 + p_2;$ $\quad Q_{s_2} = -3 + 2p_1 + 5p_2$

$Q_{d_1} = 6 - p_1 - p_2;$ $\quad Q_{d_2} = 17 - 2p_1 - 3p_2.$

Tìm điểm cân bằng thị trường.

Bài 6.12. Biết thị trường 3 loại hàng hóa 1, 2, 3 có các hàm cung và hàm cầu là:

$Q_{s_1} = -11 + p_1 + 3p_2;$ $\quad Q_{d_1} = 5 - p_1 - p_2$

$Q_{s_2} = -15 + 2p_1 + p_2;$ $\quad Q_{d_2} = 9 - p_1 - 3p_2$

$Q_{s_3} = -15 + p_1 + 2p_3;$ $\quad Q_{d_3} = 23 - p_1 - p_2 - p_3.$

Tìm điểm cân bằng thị trường.

CHƯƠNG 7

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

7.1 Các ví dụ dẫn đến bài toán quy hoạch tuyến tính

7.1.1 Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Một xí nghiệp có 3 loại nguyên liệu khác nhau: A, B, C với lượng dư trữ tối đa là 12, 18, 22 tấn. Người ta dùng để sản xuất 4 loại sản phẩm I, II, III, IV. Định mức kỹ thuật về từng loại nguyên liệu để sản xuất ra 1 tấn sản phẩm và tiền lãi của mỗi loại sản phẩm cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Dự trữ	Định mức kỹ thuật			
		I	II	III	IV
A (tấn)	12	2	3	3	4
B (tấn)	18	3	2	2	3
C (tấn)	22	4	2	3	3
Lãi (triệu đ/tấn)		5	6	7	4

Hãy lập kế hoạch sản xuất các loại sản phẩm sao cho thỏa mãn yêu cầu hạn chế về nguyên liệu, đồng thời tổng số tiền lãi thu được lớn nhất.

Lập mô hình bài toán

Bước 1. Xác định các biến quyết định.

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là số tấn sản phẩm loại I, II, III, IV cần được sản xuất.

Bước 2. Xác định hàm mục tiêu

Hàm mục tiêu là tổng số tiền lãi thu được (lợi nhuận):

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4.$$

Cực đại lợi nhuận: $f(x) = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$

Bước 3. Xác định các ràng buộc:

Ràng buộc về nguyên liệu A: $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_1 \le 12$

Ràng buộc về nguyên liệu B: $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 18$

Ràng buộc về nguyên liệu C: $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \le 22$

Như vậy, ta có: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_1 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 18 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \le 22 \end{cases}$

Điều kiện: $x_j \ge 0$ với $j = \overline{1,4}$.

Ta nói đây là bài toán quy hoạch tuyến tính 3 ẩn tìm cực đại của hàm mục tiêu.

7.1.2 Bài toán xác định khẩu phần thức ăn

Để nuôi 1 loại gia súc, một đội sản xuất dùng 3 loại thức ăn T1, T2, T3. Trong 3 loại thức ăn đó có chứa 3 loại chất dinh dưỡng đạm, đường, khoáng. Số đơn vị chất dinh dưỡng (g) có trong 1 đơn vị thức ăn (kg) như sau:

Chất dinh dưỡng	Lượng dinh dưỡng có trong 1 kg thức ăn		
	T1	T2	T3
Đạm	2	4	4
Đường	3	2	3
Khoáng	2	2	2

Nhu cầu tối thiểu trong khẩu phần hàng ngày của gia súc là: 13, 15, 17 đơn vị chất đạm, đường, khoáng. Giá thức ăn mỗi loại là 4, 6, 8 (ngàn đ/kg). Hãy xác định lượng thức ăn mỗi loại cần có trong khẩu phần ăn hàng ngày để đảm bảo yêu cầu về chất dinh dưỡng, đồng thời tổng số tiền mua thức ăn hàng ngày là nhỏ nhất.

Lập mô hình bài toán

Bước 1. Xác định các biến quyết định

Gọi x_j là số đơn vị thức ăn (kg) loại T_j cần cho ăn hàng ngày, $j=\overline{1,3}$.

Bước 2. Xác định hàm mục tiêu

Hàm mực tiêu là tổng số tiền mua thức ăn hàng ngày: $f(x)=4x_1+6x_2+8x_3$.

Bài toán là tìm số tiền chi cho mua thức ăn ít nhất nên:

$$f(x)=f(x_1,x_2,x_3)=4x_1+6x_2+8x_3\to \min$$

Bước 3. Xác định các ràng buộc

Để đáp ứng được nhu cầu dinh dưỡng tối thiểu mỗi ngày thì tổng khối lượng các chất dinh dưỡng có trong thwusc ăn cần mua không thể nhỏ hơn các nhu cầu tối thiểu mỗi ngày về chất dinh dưỡng đó, nên ta có các điều kiện:

Chất đạm: $2x_1+4x_2+4x_3\ge 13$

Chất đường: $3x_1+2x_2+3x_3\ge 15$

Chất khoáng: $2x_1+2x_2+2x_3\ge 17$

Vậy lượng dinh dưỡng có trong thức ăn là: $\begin{cases}2x_1+4x_2+4x_3\ge 13\\3x_1+2x_2+3x_3\ge 15\\2x_1+2x_2+2x_3\ge 17\end{cases}$

Điều kiện: $x_j\ge 0$ với $j=\overline{1,3}$.

Trong thực tế có nhiều bài toán đưa đến các mô hình toán là bài toán quy hoạch tuyến tính (QHTT) mà ta sẽ xét sau.

7.2 Các dạng của bài toán quy hoạch tuyến tính

7.2.1 Dạng tổng quát

Tìm một bộ thứ tự *n* số thực nào đó $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sao cho hàm mục tiêu

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min\ (\max) \qquad (7.1)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \begin{bmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{bmatrix} b_i,\ i = \overline{1,m} & (7.2) \\ x_j \begin{bmatrix} \ge 0 \\ \le 0 \\ \text{tuy y} \end{bmatrix},\ j = \overline{1,n} & (7.3) \end{cases}$$

Trong đó:

- Hàm mục tiêu: có thể là cực tiểu (min) hoặc cực đại (max).
- Các ràng buộc của bài toán (7.2): Là các phương trình hoặc bất phương trình suy ra từ điều kiện của bài toán.
- (7.3) là các ràng buộc về dấu của các biến số.

Bài toán trên gọi là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát.

Hệ các ràng buộc hàm và các ràng buộc dấu của bài toán gọi là hệ ràng buộc.

Cho bài toán QHTT *n* ẩn. Mỗi bộ *n* số $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ $(\in \mathbb{R}^n)$ thỏa điều kiện ràng buộc gọi là một phương án của bài toán.

Tập mọi phương án của bài toán gọi là tập phương án *D* của bài toán.

Mỗi phương án *x* thỏa (7.1), nghĩa là tại đó hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) trên tập các phương án được gọi là một phương án tối ưu (PATU) của bài toán.

Giải một bài toán QHTT là đi tìm một phương án tối ưu của nó hoặc chỉ ra rằng bài toán vô nghiệm, nghĩa là bài toán không có PATU.

Ví dụ 7.1. Bài toán QHTT tổng quát: $f = 2x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Điều kiện: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3$ tùy ý.

Khi đó vecto $X = (2,0,0)$ thỏa hệ ràng buộc bài toán nên là một phương án của bài toán.

7.2.2 Dạng chính tắc

Bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc là bài toán quy hoạch tuyến tính mà trong đó các ràng buộc đều là phương trình và các biến số đều không âm.

Cho hàm mục tiêu

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min\ (\max)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i,\ i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{7.4}$$

Ví dụ 7.2. Bài toán sau có dạng chính tắc:

Ta có hàm mục tiêu: $f(x) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 \to \min$

Hệ ràng buộc: $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_4 = 12 \\ 12x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -6 \end{cases}$

Điều kiện: $x_j \ge 0, j = \overline{1,4}.$

Nhận xét:

Mọi bài toán QHTT tổng quát đều có thể đưa về dạng chính tắc với các chú ý:

- Nếu ẩn $x_j \le 0$ thì thay $x_j = -x'_j$, với $x'_j \ge 0.$
- Nếu ẩn x_j không có ràng buộc dấu (có dấu tùy ý) thì thay x_j bằng hiệu hai ẩn không âm, chẳng hạn thay $x_j = x'_j - x''_j$ với $x'_j \ge 0,\ x''_j \ge 0.$
- Nếu ràng buộc hàm có dạng bất phương trình $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \le b_i$ thì ta đưa về dạng phương trình bằng cách cộng thêm vào vế trái một ẩn phụ không âm. Chẳng hạn, $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \le b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$ với $x_{n+i} \ge 0.$
- Nếu ràng buộc hàm có dạng bất phương trình $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \ge b_i$ thì ta đưa về dạng phương trình bằng cách lấy vế trái trừ cho một ẩn phụ không âm. Chẳng hạn, $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \ge b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i$ với $x_{n+i} \ge 0.$

Ví dụ 7.3. Đưa bài toán QHTT dạng tổng quát sau về dạng chính tắc:

Hàm mục tiêu: $f(x) = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \min.$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \text{ và } \{x_1 \ge 0;\ x_2 \le 0\}$$

Giải

Trước hết cần đưa đến bài toán tương đương có mọi ẩn không âm.

Bài toán đã cho có ẩn x_2 âm và x_3 có dấu tùy ý.

Đặt $\begin{cases} x_2 = -x'_2 \\ x_3 = x'_3 - x_4 \end{cases}$, với $\{x'_2, x'_3, x_4 \ge 0\}.$

Ta có bài toán tương đương: $f(x) = 2x_1 - 3x'_2 - 4x'_3 + 4x_4 \to \min.$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2' - 2x_3' + 2x_4 \le 5 \\ 2x_1 + x_2' + x_3' - x_4 = 4 \end{cases} \text{ với } \{x_1,\ x_2',\ x_3',\ x_4 \ge 0\}.$$

Bài toán mới này có mọi ẩn không âm nhưng vẫn còn một ràng buộc hàm dạng bất phương trình và ta cần đưa ràng buộc này về dạng phương trình.

Cộng thêm ẩn phụ $x_5 \ge 0$ vào vế trái ràng buộc hàm thứ nhất, đưa đến bài toán dạng chính tắc:

$$f(x) = 2x_1 - 3x_2' - 4x_3' + 4x_4 \to \min.$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2' - 2x_3' + 2x_4 + x_5 \le 5 \\ 2x_1 + x_2' + x_3' - x_4 \qquad\quad = 4 \end{cases}$$

$$\{x_1,\ x_2',\ x_3',\ x_4,\ x_5 \ge 0\}.$$

7.2.3 Dạng chuẩn tắc

Bài toán dạng chuẩn tắc là bài toán QHTT dạng chính tắc thỏa các điều kiện sau:

- Các b_i (hệ số tự do) của các ràng buộc chung không âm.
- Trong ma trận hệ số tự do có đủ m vector cột đơn vị: $e_1, e_2, ..., e_m$.

Khi đó:

- Các ẩn ứng với các vector cột đơn vị được gọi là các ẩn cơ bản. Cụ thể ẩn ứng với vector cột đơn vị e_k là ẩn cơ bản thứ *k*.
- Một phương án mà các ẩn cơ bản đều bằng 0 được gọi là phương án cơ bản.
- Một phương án cơ bản có đủ *m* thành phần dương được gọi là không suy biến. Ngược lại một phương án cơ bản có ít hơn *m* thành phần dương được gọi là suy biến.

Ví dụ 7.4. Xét bài toán QHTT có hàm mục tiêu: $f(x) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 12 \\ 12x_1 + x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Ta thấy bài toán trên có dạng chính tắc, hơn nữa các hệ số tự do đều không âm.

Ma trận hệ số ràng buộc *A* là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A có chứa đầy đủ 3 vector cột đơn vị e_1 (cột 5), e_2 (cột 6), e_3 (cột 2).

Do đó bài toán có dạng chuẩn, trong đó:

- Ẩn cơ bản thứ nhất là x_5,
- Ẩn cơ bản thứ hai là x_6,
- Ẩn cơ bản thứ ba là x_2.

Nhận xét. Trong bài toán trên, khi cho ẩn cơ bản thứ *k* bằng hệ số tự do thứ *k*, còn các ẩn không cơ bản bằng 0, nghĩa là cho $x_5 = 12,\ x_6 = 3,\ x_2 = 6,\ x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$ ta được một phương án cơ bản của bài toán $x = (0,\ 6,\ 0,\ 0, 12,\ 3)$.

Phương án này không suy biến vì có đủ 3 thành phần dương. Ta gọi đây là phương án cơ bản ban đầu của bài toán.

Chú ý. Tổng quát, trong bài toán QHTT dạng chuẩn bất kì, khi cho ẩn cơ bản thứ *k* bằng hệ số tự do thứ *k* ($k = 1,2,\ldots,m$), còn các ẩn không cơ bản bằng 0, ta được một phương án cơ bản của bài toán. Ta gọi đây là phương án cơ bản ban đầu của bài toán.

7.3 Phương pháp hình học

Phương pháp hình học chỉ áp dụng cho bài toán QHTT có hai biến, ba biến.

Để giải bài toán ta biểu diễn miền ràng buộc *D* trong mặt phẳng *Oxy*.

Cho hàm mục tiêu nhận giá trị thay đổi theo tham số *m*: $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 = m$.

Xét giao giữa hàm mục tiêu và miền *D*, tìm giá trị lớn nhất, hoặc nhỏ nhất của m sao cho với giá trị đó hàm mục tiêu vẫn giao với miền *D* ít nhất là 1 điểm. Và giá trị đó của m là giá trị tối ưu của hàm mục tiêu, và giao điểm của hàm mục tiêu với *D* chính là phương án tối ưu (PATU).

Ví dụ 7.5. Giải bài toán QHTT hai ẩn

$$f = x + y \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} x + 2y \ge 3 \\ 2x + y \ge 3 \text{ với } x, y \ge 0 \\ x - y \le 3 \end{cases}$$

Bước 1. Vẽ tập phương án *D*.

$$D = \{M(x, y) \mid (x, y) \text{ thỏa hệ ràng buộc của bài toán}\}$$

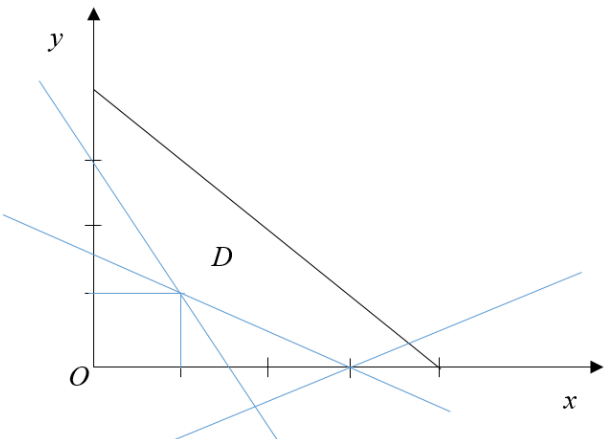
Bước 2. Vẽ đường thẳng $\Delta = x + y = m$ cắt *D* và vecto pháp tuyến của đường thẳng là $\vec{n} = (1,\ 1)$.

Giải bài toán min

Ta tìm điểm *M*(*x, y*) nằm trên Δ và ở miền *D* sao cho *f*(*M*) bé nhất.

Nhận xét: $f(x, y) = m$, $\forall$ điểm $(x, y) \in \Delta \cap D$. Khi tịnh tiến Δ theo hướng ngược $\vec{n}$, giá trị $f(x, y) = m$ giảm dần. Dựa vào hình vẽ và nhận xét suy ra

$$f_{\min} = f(1,\ 1) = 2 \text{ và phương án tối ưu là } \{x = 1;\ y = 1\}.$$



Giải bài toán max

Ta tìm điểm $M(x, y)$ nằm trên Δ và ở miền D sao cho $f(M)$ lớn nhất.

Nhận xét: $f(x, y) = m$, $\forall$ điểm $(x, y) \in \Delta \cap D$. Khi tịnh tiến Δ theo hướng $\vec{n}$, giá trị $f(x, y) = m$ tăng dần. Dựa vào hình vẽ và nhận xét suy ra

$$f_{\max} = +\infty \text{ và không có phương án tối ưu.}$$

Nhận xét. Bài toán ở ví dụ trên có thể đưa về dạng chính tắc sau: $f = x + y \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y - t = 3 \\ x - y + u = 3 \end{cases} \text{ với } x, y, z, t, u \geq 0.$$

Có thể coi tập phương án D' của bài toán mới này có hình ảnh là tập phương án D của bài toán ở trên.

7.4 Phương pháp đơn hình

7.4.1 Phương pháp đơn hình (dạng chuẩn → min/max)

Bước 1. Lập bảng đơn hình xuất phát

Biến cơ sở	c_j	Phương án	x_1	x_2	…	x_n
			c_1	c_2	…	c_n
x_{B1}	c_{B1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
x_{B2}	c_{B2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
.	.	.	.	.	…	.
.	.	.	.	.	…	.
.	.	.	.	.	…	.
x_{Bm}	c_{Bm}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
F		Δ_0	Δ_1	Δ_2	…	Δ_n

Từ bảng trên ta xác định nghiệm cơ sở đầu tiên x^0:

$$\begin{cases} x_{B_i}^0 = b_i,\ i = \overline{1,m} \\ x_j^0 = 0,\ j \notin B. \end{cases}$$

Và các hệ số: $\Delta_0 = \sum_{i=1}^{n} c_{Bi} x_i^0$ là giá trị hàm mục tiêu ứng với nghiệm cơ sở x^0.

$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} a_{ij} - c_j$ là các hệ số ước lượng, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ví dụ 7.6. $f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 2 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Giải

Ta có: $c = (1, -2, 2, -1, 1, -2)$

Các biến cơ sở là x_4, x_5, x_6

Các biến tự do là x_1, x_2, x_3

Cơ sở	c_j	PA	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1	-2	2	-1	1	-2
x_4	-1	5	1	-1	-5	1	0	0
x_5	1	4	1	-2	2	0	1	0
x_6	-2	2	-4	1	1	0	0	1
		-5	7	-1	3	**0**	**0**	**0**

Có nghiệm cơ sở đầu tiên là: $x^0 = (0, 0, 0, 5, 4, 2)$ và $f(x^0) = -5$.

Ví dụ 7.7. $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Cơ sở	c_j	PA	x_1	x_2	x_3	x_4
			1	1	1	–1
x_4	-1	2	1	0	1	1
x_2	1	1	1	1	–2	0
		–1	–1	**0**	–4	**0**

Bước 2: Xét dấu hiệu tối ưu

Trường hợp 1:

Nếu $\Delta_k \le 0$, $\forall k$ đối với bài toán cực tiểu (hoặc $\Delta_k \ge 0$, $\forall k$ đối với bài toán cực đại) thì x^0 là PATƯ của bài toán QHTT.

Trường hợp 2:

Ngược lại, nếu $\exists \Delta_j > 0,\ j = \overline{1,n}$ đối với bài toán cực tiểu (hoặc $\exists \Delta_j < 0,\ j = \overline{1,n}$ đối với bài toán cực đại). Khi đó, bài toán chưa có PATƯ ta chuyển sang bước 3.

Bước 3. Giả sử dấu hiệu tối ưu bị vi phạm ở cột *v*.

(i) Nếu $\forall a_{iv} \le 0, i = \overline{1,m}$ khi đó bài toán không có PATƯ, thuật toán kết thúc.

(ii) Nếu $\forall a_{iv} > 0$ thì ta xác định tỉ số đơn hình: $\lambda_V = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{iv}} \middle| \forall a_{iv} > 0 \right\}$.

Giả sử $\lambda_v = \frac{b_i}{a_{rv}}$ thì a_{rv} là phần tử trục, sử dụng phép biến đổi dòng để đưa cột *v* về dạng cột của ma trận đơn vị.

Sau đó ta thực hiện lại bước 1.

Lưu ý:

(i) Nếu trong trường hợp có nhiều cột $v_1, v_2, ..v_k$ cùng vi phạm. Ta xác định cột được chọn như sau: $|\Delta_v| = \max\left\{|\Delta_{v1}|, |\Delta_{v2}|, ..., |\Delta_{vk}|\right\}$.

Khi đó cột *v* là cột được chọn.

(ii) Bảng đơn hình đạt PATƯ duy nhất nếu các hệ số ước lượng Δ_j ứng với các biến tự do đều khác 0.

Ngược lại, nếu có hệ số ước lượng bằng 0 ứng với biến tự do thì ta lấy cột có ước lượng bằng 0 này làm cột xoay, ta tiến hành tìm tỉ số λ.

Nếu $\lambda > 0$ ta tiến hành phép khử phần tử trục để tìm PATƯ khác. Trong trường hợp này bài toán có vô số PATƯ.

Nếu $\lambda = 0$ thì bài toán có PATƯ như cũ.

Ví dụ 7.8. $f(x) = x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + 3x_6 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 5 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Cơ sở	c_j	PA	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1	4	-1	-1	1	3
x_4	-1	1	2	-1	5	1	0	0
x_5	1	2	2	(4)	-2	0	1	0
x_6	3	5	1	2	1	0	0	1
		16	2	(7)	-3	**0**	**0**	**0**
x_4	-1	3/2	5/2	0	(9/2)	1	1/4	0
x_2	4	1/2	1/2	1	-1/2	0	1/4	0
x_6	3	4	0	0	2	0	-1/2	1
		25/2	-3/2	**0**	(½)	**0**	-7/4	**0**
x_3	-1	1/3	5/9	0	1	2/9	1/18	0
x_2	4	2/3	7/9	1	0	1/9	5/18	0
x_6	3	10/3	-10/9	0	0	-4/9	-11/18	1
		37/3	-16/9	**0**	**0**	-1/9	-16/9	**0**

Ta có: $\Delta_k \le 0$, $\forall k$: phương án đang xét tối ưu.

Vậy bài toán có PATƯ là $x^* = (0, 2/3, 1/3, 0, 0, 10/3)$

$f\text{min} = f(x^*) = 37/3$

Ví dụ 7.9. $F(x) = 27x_1 - 2x_2 + x_3 + 14x_4 + 2x_5 + 6x_6 + 5x_7 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 + 2x_7 = 4 \\ -3x_1 + x_3 + 4x_4 + x_7 = 3 \\ -5x_1 + 2x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 5 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7} \end{cases}$$

x_j	c_j	PA	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			27	-2	1	14	2	6	5
x_2	-2	4	-2	1	0	3	0	-2	2
x_3	1	3	-3	0	1	**4**	0	0	1
x_5	2	5	-5	0	0	2	1	1	1
$F(x)$		5	18	0	0	**-12**	0	0	-6
x_2	-2	1.75	0.25	1	-0.75	0	0	-2	**1.25**
x_4	14	0.75	-0.75	0	0.25	1	0	0	0.25
x_5	2	3.50	-3.50	0	-0.50	0	1	1	0.50
$F(x)$		14	9	0	3	0	0	0	**-3**
x_7	5	1.40	0.20	0.80	-0.60	0	0	-1.60	1
x_4	14	0.40	-0.80	-0.20	0.40	1	0	**0.40**	0
x_5	2	2.80	-3.60	-0.40	-0.20	0	1	1.80	0
$F(x)$		18.20	9.60	2.40	1.20	0	0	**-4.80**	0
x_7	5	3	-3	0	1	4	0	0	1
x_6	6	1	-2	-0.50	1	2.50	0	1	0
x_5	2	1	0	**0.50**	-2	-4.50	1	0	0
$F(x)$		23	0	**0**	6	12	0	0	0

x_7	5	3	-3	0	1	4	0	0	1
x_6	6	2	-2	0	-1	-2	1	1	0
x_2	-2	2	0	1	-4	-9	2	0	0
$F(x)$		23	0	0	6	12	0	0	0

Phương án tối ưu của bài toán là: (0, 0, 0, 0, 1, 1, 3)

Giá trị hàm mục tiêu đạt được là: $F(x) = 23$.

Bài toán còn phương án tối ưu khác là (0, 2, 0, 0, 0, 2, 3)

Vậy bài toán có vô số phương án tối ưu.

7.4.2 Phương pháp đơn hình mở rộng

7.4.2.1 Bài toán mở rộng

Với một bài toán QHTT đã cho có dạng chính tắc nhưng chưa có dạng chuẩn thì ta có thể lập bài toán mở rộng để đưa nó về bài toán dạng chuẩn.

Bước 1. Nếu một trong số các ràng buộc có số hạng tự do âm thì ta nhân ràng buộc đó với (-1).

Bước 2. Ở các ràng buộc chưa có biến cơ sở, ta thêm các biến cơ sở không âm vào. Những biến thêm vào này được gọi là biến giả.

Trong hàm mục tiêu, các biến giả có hệ số là M (đối với bài toán min) và ($-M$) (đối với bài toán max) với điều kiện M là số vô cùng lớn.

Bài toán QHTT dạng chuẩn với biến giả được gọi là bài toán mở rộng.

Ví dụ 7.10. Lập bài toán mở rộng của bài toán sau:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 16 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 20 \end{cases}$$

Bài toán mở rộng

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + Mx_5 + Mx_6 \to \min$$

Các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 17 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 16 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 20 \end{cases}$$

Trong đó: x_5, x_6 là biến giả

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0$$

Ví dụ 7.11. Lập bài toán mở rộng của bài toán sau:

$$f(x) = x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ \quad x_2 \quad - x_4 \; + x_5 = 3 \\ \qquad x_3 \quad - 2x_5 = 2 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Bài toán mở rộng

$$f(x) = x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 + \mathbf{M}x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 + 2x_4 + x_5 \qquad = 1 \\ \quad x_2 \quad - x_4 \; + x_5 \qquad = 3 \\ \qquad x_3 \quad - 2x_5 + x_6 = 2 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6} \end{cases}$$

7.4.2.2 Phương pháp đơn hình giải bài toán mở rộng

Bước 1. Giải bài toán mở rộng

Các bước thực hiện phương pháp đơn hình để giải bài toán mở rộng cũng được thực hiện như bài toán dạng chuẩn thông thường. Nhưng do các hệ số của các ẩn giả trong hàm mục tiêu là *M* nên hệ số ước lượng của các ẩn trong trường hợp này có dạng $\Delta j = aM + b$. Do đó khi lập bảng đơn hình cần chú ý vấn đề sau:

(i) Khi các ẩn giả được đưa ra hệ ẩn cơ bản thì sẽ không được đưa trở lại, nên khi lập bảng đơn hình để giải bài toán mở rộng ta không cần đưa ẩn giả vào bảng.

(ii) Do trị số hàm mục tiêu và các hệ số ước lượng phụ thuộc vào 2 số thực nên ta chia dòng ghi trị số đó thành 2 dòng kép, dòng dưới ghi hệ số của *M*, dòng trên ghi số hạng tự do còn lại. Khi ẩn giả được đưa ra khỏi ẩn cơ bản thì các giá trị hàm mục tiêu và hệ số ước lượng sẽ trở lại bình thường.

(iii) Do *M* là một số dương lớn nên:

$a > 0 \Rightarrow \Delta j = aM + b > 0$

$a < 0 \Rightarrow \Delta j = aM + b < 0$

$a > c \Rightarrow aM + b > cM + d$

$a < c \Rightarrow aM + b < cM + d$

Bước 2. Tìm lời giải của bài toán gốc

- Nếu bài toán mở rộng không có PATƯ thì bài toán gốc cũng không có PATƯ
- Nếu bài toán mở rộng có PATƯ và các ẩn giả bằng 0 thì bài toán gốc có PATƯ là PATƯ của bài toán gốc bỏ đi phần ẩn giả.
- Nếu bài toán mở rộng có PATƯ và có ít nhất một ẩn giả khác 0 thi bài toán gốc không có PATƯ.

Ví dụ 7.12. Giải bài toán QHTT sau:

$$F(x) = 10x_1 + 10x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 60 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 \\ 6x_1 + 5x_2 = 75 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Lập bài toán mở rộng

$$F(x) = 10x_1 + 10x_2 - \mathbf{M}x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 60 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 36 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_5 = 75 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

x_i	c_i	PA	x_1	x_2	x_3	x_4
			10	10	0	0
x_3	0	60	3	5	1	0
x_4	0	36	**3**	2	0	1
x_5	-M	75	6	5	0	0
$F(x)$		0	**-10**	-10	0	0
		-75	-6	-5	0	0
x_3	0	24	0	3	1	-1
x_1	10	12	1	2/3	0	1/3
x_5	-M	3	0	**1**	0	-2
$F(x)$		120	0	**-10/3**	0	10/3
		-3	0	-1	0	2
x_3	0	15	0	0	1	**5**
x_1	10	10	1	0	0	5/3
x_2	10	3	0	1	0	-2
$F(x)$		130	0	0	0	**-10/3**
x_4	0	3	0	0	1/5	1
x_1	10	5	1	0	-1/3	0
x_2	10	9	0	1	2/5	0
$F(x)$		140	0	0	2/3	0

Phương án tối ưu của bài toán mở rộng là : (5,9,0,3,0)

Giá trị hàm mục tiêu đạt được là : $F(x) = 140$.

Ví dụ 7.13. Giải bài toán QHTT sau

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 5x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 30 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 23 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \ge -10 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Giải

Đưa bài toán về dạng chính tắc

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 5x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 30 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 23 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 + x_6 = 10 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Bài toán mở rộng

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 5x_5 + Mx_7 + Mx_8 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_7 = 30 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_8 = 23 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 + x_6 = 10 \end{cases}$$

x_7, x_8 là biến giả và $x_j \geq 0, j = \overline{1,6}$.

x_i	c_i	PA	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			-1	3	4	-1	-5	0
x_7	M	30	2	1	-3	**2**	0	0
x_8	M	23	0	1	-1	1	-1	0
x_6	0	10	-3	2	-1	-1	-4	1
$f(x)$		0	1	-3	-4	**1**	5	0
		53	2	2	-4	3	-1	0
x_4	-1	15	1	1/2	-3/2	1	0	0
x_8	M	8	-1	1/2	**1/2**	0	-1	0
x_6	0	25	-2	5/2	-5/2	0	-4	1
$f(x)$		-15	0	-7/2	**-5/2**	0	5	0
		8	-1	1/2	1/2	0	-1	0
x_4	-1	39	-2	2	0	1	-3	0
x_3	4	16	-2	1	1	0	-2	0
x_6	0	65	-7	5	0	0	-9	1
$f(x)$		25	-5	-1	0	0	0	0

Phương án tối ưu của bài toán mở rộng là : (0,0,16,39,0,65,0,0)

Giá trị hàm mục tiêu đạt được là : $f(x) = 25$.

7.5 Giải quyết bài toán bằng máy tính

7.5.1 Chức năng Solver trong Excel

Solver là một công cụ cao cấp của Excel, Solver có rất nhiều ứng dụng, từ sản xuất kinh doanh, marketing, xây dựng thời gian biểu, đầu tư cổ phiếu, giải các bài toán QHTT… Đều có thể sử dụng Solver và giải chúng một cách nhẹ nhàng.

Để mở Solver trong Excel 2003 bạn vào mục TOOL >> SOLVER.

Để mở Solver trong Excel 2010 bạn vào Tab Data và tìm biểu tượng Solver ở góc bên phải ngoài cùng.

7.5.2 Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Hướng dẫn giải một bài QHTT bằng Excel 2010. Chúng ta thống nhất làm theo 3 bước như sau.

Bước 1: Nhập đề bài và biểu diễn hàm mục tiêu và các ràng buộc trong Excel.

Bước 2: Sử dụng chức năng solver để giải bài toán.

Bước 3: Đọc và nghi kết quả.

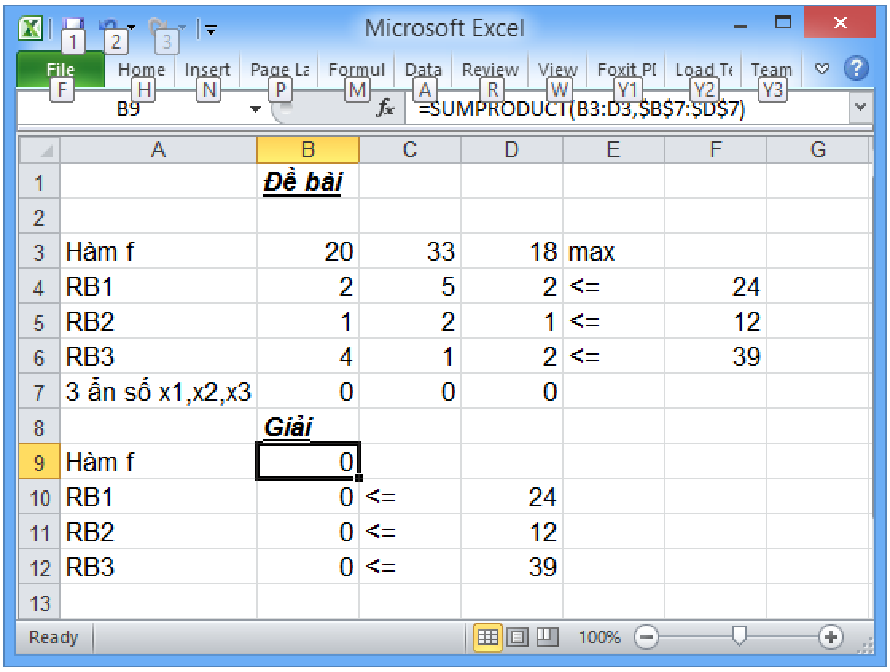
Ví dụ 7.14. Giải bài toán QHTT

$$F(x) = 20x_1 + 33x_2 + 18x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 39 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Giải

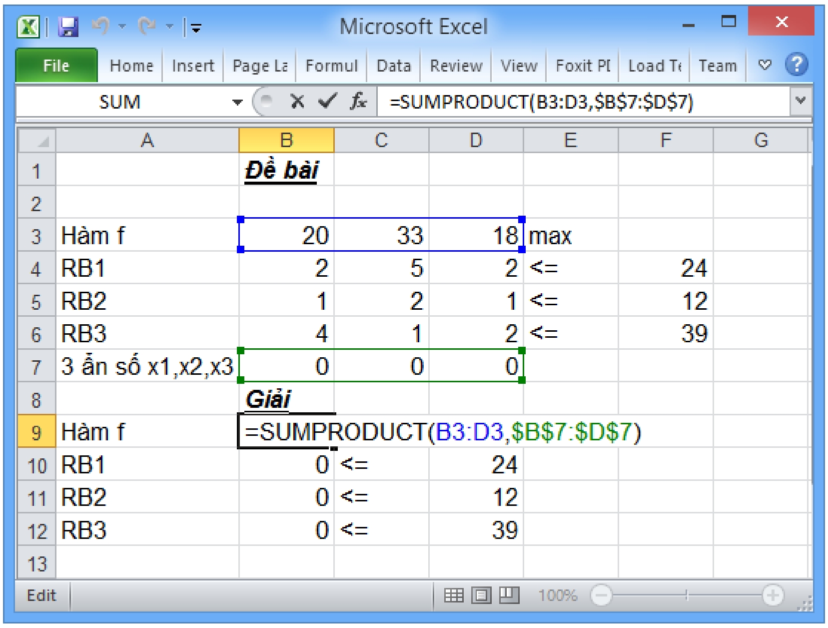
Bước 1. Nhập đề bài và biểu diễn hàm mục tiêu và các ràng buộc trong Excel



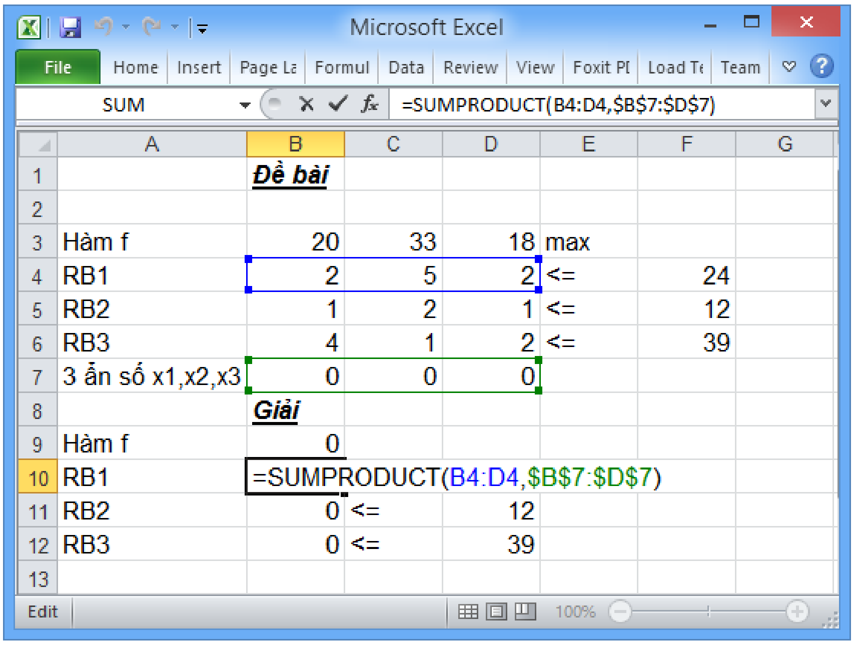
	A	B	C	D	E	F	G
1		Đề bài					
2							
3	Hàm f	20	33	18	max		
4	RB1	2	5	2	<=	24	
5	RB2	1	2	1	<=	12	
6	RB3	4	1	2	<=	39	
7	3 ẩn số x1,x2,x3	0	0	0			
8		Giải					
9	Hàm f	0					
10	RB1	0	<=	24			
11	RB2	0	<=	12			
12	RB3	0	<=	39			
13							

Lưu ý: SUMPRODUCT(**array1**, [array2], [array3], ...) là tích vô hướng của hai hay nhiều dãy ô ví dụ.

a) Ô B9 biểu diễn hàm mục tiêu *f*, do đó B9 là tích vô hướng của hệ số hàm mục tiêu 20, 33, 18 và ba ẩn x_1, x_2, x_3 như hình dưới đây :



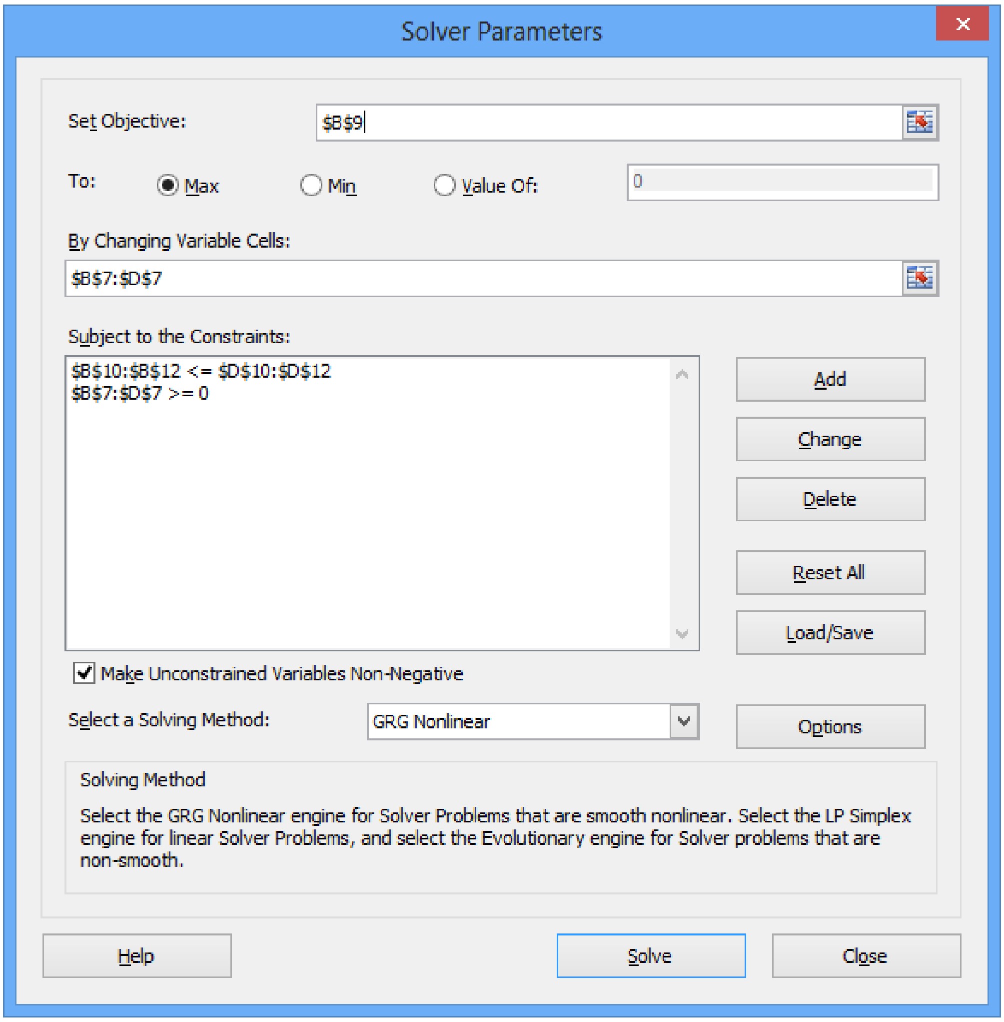
b) Ô B10 biểu diễn vế trái của ràng buộc 1



c) Tương tự Ô B11 biểu diễn vế trái của ràng buộc 2, ô B12 biểu diễn vế trái của ràng buộc 3.

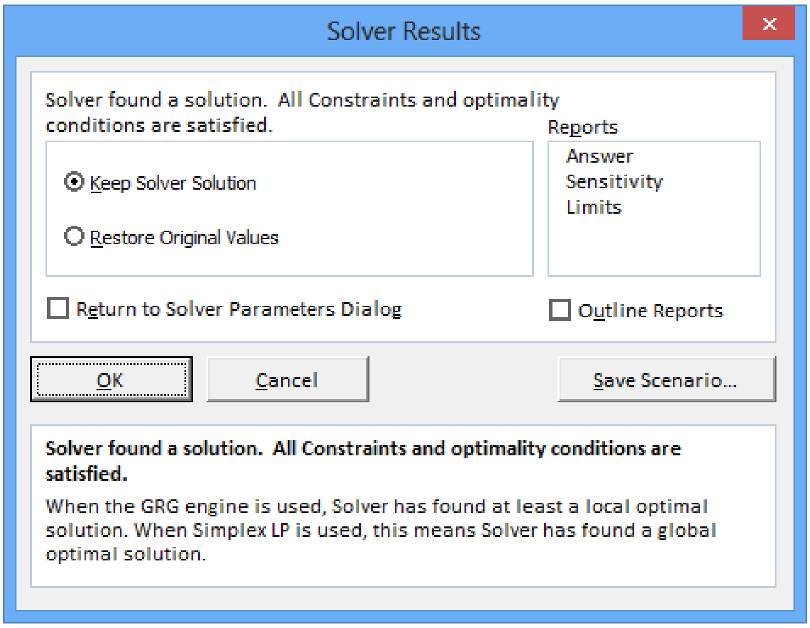
Bước 2. Sử dụng chức năng solver để giải bài toán

Mở solver và nhập liệu như sau

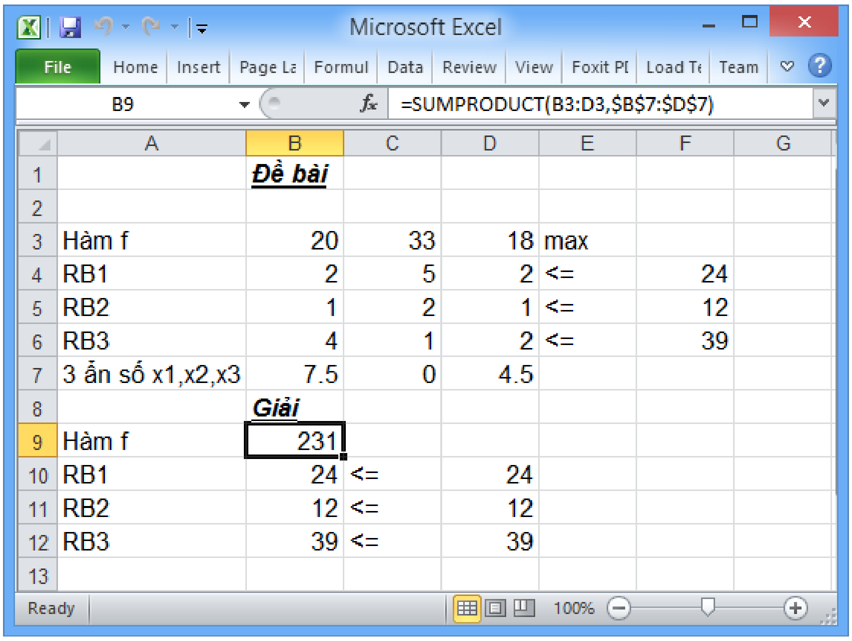


Bước 3. Đọc và ghi kết quả

Nhấn nút Solve thì màn hình xuất hiện



Nhấn nút OK được kết quả



B9 =SUMPRODUCT(B3:D3,$B$7:$D$7)

	A	B	C	D	E	F	G
1		***Đề bài***					
2							
3	Hàm f	20	33	18	max		
4	RB1	2	5	2	<=	24	
5	RB2	1	2	1	<=	12	
6	RB3	4	1	2	<=	39	
7	3 ẩn số x1,x2,x3	7.5	0	4.5			
8		***Giải***					
9	Hàm f	231					
10	RB1	24	<=	24			
11	RB2	12	<=	12			
12	RB3	39	<=	39			
13							

Vậy PATƯ là $x^* = (7.5, 0, 4.5)$ và $f_{max} = 231$.

Câu hỏi và bài tập chương 7

Bài 7.1. Giải bài toán bằng phương pháp hình học.

a) $z = 2x + y \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x - y \le 4 \\ 2x + y \ge 2 \\ y \le 5 \\ x, y > 0 \end{cases}$$

b) $g = -x + y \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x - y \le 3 \\ 2x + y \ge 2 \\ x + y \le 5 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

c) $f = x + y \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x - y \le 5 \\ 2x + y \ge 2 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Bài 7.2. Hai phân xưởng của 1 nhà máy cùng sản suất ra 2 mặt hàng *A*, *B*. Năng suất và chi phí trong một giờ của mỗi phân xưởng cho bởi bảng:

	Phân xưởng 1	Phân xưởng 2
A	60	10
B	10	40
Chi phí (ngàn)	200	400

Biết nhà máy nhận được đơn hàng 240 sản phẩm *A* và 270 sản phẩm *B*. Hãy tìm cách phân phối thời gian cho mỗi phân xưởng thỏa mãn sao cho thỏa mãn yêu cầu đặt hàng và chi phí ít nhất.

Bài 7.3. Giải các bài toán QHTT sau:

a) $f(x) = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2 \\ 3x_1 + x_3 \le 5 \\ x_j \ge 0, \forall j = \overline{1,3} \end{cases}$$

b) $f(x) = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 - x_6 = 3 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 12 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 2 \\ x_j \ge 0, \forall j = \overline{1,6} \end{cases}$$

c) $f(x) = x_2 - 2x_3 + 2x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 3 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -4x_2 + 2x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,6} \end{cases}$$

d) $f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 28 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 \leq 31 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,4} \end{cases}$$

e) $f(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,4} \end{cases}$$

f) $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 - 5x_6 \to \min$

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 4 \\ 2x_1 - \frac{1}{3}x_2 - x_3 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 3 \quad \text{với } x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,6} \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

Bài 7.4. Giải các bài toán QHTT sau:

a) $f(x) = 3x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -10x_2 + 5x_3 = 5 \\ -3x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

b) $f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq -6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

c) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 - 7x_2 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - 2x_4 \le 10 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_4 \le 6 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

d) $f(x) = 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_4 + x_5 = 12 \\ 12x_1 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 + 2x_6 = 4 \\ -11x_1 - 17x_4 - x_5 - 2x_6 + x_7 = 20 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Bài 7.5. Một cơ sở sản xuất đồ gỗ dự định sản xuất ba loại sản phẩm là bàn, ghế và tủ. Định mức sử dụng lao động, chi phí sản xuất và giá bán mỗi sản phẩm mỗi loại ước tính trong bảng sau:

Các yếu tố	Bàn	Ghế	Tủ
Lao động (ngày công)	2	1	3
Chi phí sản xuất (ngàn đồng)	100	40	250
Giá bán (ngàn đồng)	260	120	600

Hãy lập mô hình và tìm phương án tối ưu để xác định số sản phẩm mỗi loại cần phải sản xuất sao cho không bị động trong sản xuất và tổng doanh thu đạt được cao nhất, biết rằng cơ sở có số lao động tương đương với 500 ngày công, số tiền dành cho chi phí sản xuất là 40 triệu đồng và số bàn, ghế phải theo tỉ lệ 1/6.

Bài 7.6. Để nuôi một loại gia súc người ta sử dụng 3 loại thức ăn A_1, A_2, A_3. Tỷ lệ (%) các chất dinh dưỡng D_1, D_2 có trong các loại thức ăn A_1, A_2, A_3 và giá 1kg mỗi loại như sau:

Chất dinh dưỡng	Loại thức ăn		
	A_1	A_2	A_3
D_1	30	20	20
D_2	20	20	30
Giá mua	8000 đ	6000 đ	4000 đ

Yêu cầu trong khẩu phần thức ăn của loại gia súc này là: chất dinh dưỡng D_1 phải có ít nhất là 70g và nhiều nhất là 100g, chất dinh dưỡng D_2 phải có ít nhất là 50g và nhiều nhất là 80g. Hãy lập mô hình toán học và tìm phương án tối ưu của bài toán để xác định khối lượng thức ăn mỗi loại cần mua sao cho tổng chi phí thấp nhất và bảo đảm chất lượng theo yêu cầu.

Bài 7.7. Một xí nghiệp có kế hoạch sản xuất ba loại sản phẩm A_1, A_2, A_3 từ 3 loại nguyên liệu N_1, N_2, N_3 có trữ lượng tương ứng là 50kg, 70kg và 100kg. Định mức tiêu hao nguyên liệu (kg/SP) và lợi nhuận (ngàn đồng/SP) khi sản xuất một sản phẩm được cho trong bảng sau

Nguyên liệu	Sản phẩm		
	A_1	A_2	A_3
$N1$	0.2	0.1	0.1
N_2	0.1	0.2	0.1
N_3	0.1	0.3	0.0
Lợi nhuận	8000	6000	4000

Hãy lập mô hình toán học và tìm phương án để lập kế hoạch sản xuất tối ưu biết rằng lượng sản phẩm A_3 chỉ có thể tiêu thụ được tối đa 400 sản phẩm.

Bài 7.8. Có hai loại sản phẩm A, B được gia công trên 3 máy I, II, III. Thời gian gia công mỗi loại sản phẩm trên mỗi máy cho bởi bảng:

Loại SP	Máy		
	I	II	III
A	4	3	2
B	2	1	4

Thời gian cho phép của mỗi máy I, II, II lần lượt là 100, 300, 50 giờ. Một đơn vị sản phẩm A lãi 6000đ, B lãi 4000đ.

Vậy cần phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để lãi tối đa?

Bài 7.9. Để nuôi một loại gia súc trong 24h cần có khối lượng tối thiểu các chất: Protit, Gluxit, khoáng tương ứng là: 90, 130, 20 gram. Tỷ lệ phần trăm theo khối lượng các chất trên có trong các loại thức ăn A, B, C và giá mua 1kg thức ăn mỗi loại như sau:

Chất dinh dưỡng	Loại thức ăn		
	A	B	C
Protit	10	20	30
Gluxit	30	40	20
Khoáng	2	1	3
Giá mua	3000 đ	4000 đ	5000 đ

Hãy lập mô hình toán học và tìm PATƯ của bài toán để xác định khối lương thức ăn mỗi loại cần mua sao cho tổng chi phí thấp nhất và bảo đảm chất lượng theo yêu cầu.

Bài 7.10. Một nhà máy gốm sứ sản xuất 3 loại sản phẩm B_1, B_2, B_3 và chúng được gia công lần lượt trong cả hai phân xưởng A_1, A_2. Thời gian gia công chục sản phẩm mỗi loại tại phân xưởng ở bảng:

PX	B_1	B_2	B_3	Tổng quỹ thời gian/tháng
A_1	3	4	5	120 giờ
A_2	5	3	4	150 giờ

Diện tích kho là $200m^2$. Các sản phẩm không được đặt chồng lên nhau. Cứ chục sản phẩm B_1 cần $5m^2$, B_2 cần $4m^2$, B_3 cần $6m^2$.

Mỗi tuần chỉ dám chắc bán hết 50 (chục) sản phẩm B_1 còn B_2, B_3 dễ dàng bán hết. Lợi nhuận từ chục sản phẩm B_1, B_2, B_3 lần lượt 100, 50, 60 USD.

Lập phương án sản xuất sao cho tổng lợi nhuận trong 1 tuần là lớn nhất và giải phóng kho trong tuần.

Bài 7.11. Một chủ trang trại có 30 ha đất canh tác và muốn trồng 3 loại nông phẩm A, B, C với các thông số (đơn vị triệu đồng) ở bảng sau:

	Chi phí sản xuất cho 1 ha		Ước lợi nhuận/ha
	Vốn sản xuất	Lao động	
A	3	5	10
B	3,5	4	7,5
C	4	4,5	12

Khả năng chủ trang trại chi cho vốn sản xuất là 120 triệu đồng, cho lao động 160 (triệu đồng). Theo các hợp đồng đã ký thì phải gieo trồng ít nhất 6 ha nông sản A.

Lập phương án phân bố đất sản xuất sao cho tổng lợi nhuận là lớn nhất.

CHƯƠNG 8
BÀI TOÁN VẬN TẢI

8.1 Bài toán vận tải cân bằng thu phát

Có m địa điểm $A_1, A_2, ..., A_m$ cùng sản xuất 1 loại hàng với các lượng hàng tương ứng là $a_1, a_2, ..., a_m$. Có n địa điểm tiêu thụ loại hàng trên là $B_1, B_2, ..., B_n$ với các yêu cầu tương ứng là $b_1, b_2, ..., b_n$. Để đơn giản ta gọi A_i *là trạm phát thứ i,* B_j *là trạm thu thứ j*.

Hàng có thể chở từ trạm phát A_i bất kỳ đến trạm thu B_j bất kỳ.

Gọi c_{ij} là chi phí (cước phí) chuyên chở 1 đơn vị hàng từ trạm phát (i) đến trạm thu (j), $c_{ij} \geq 0$.

Tổng lượng hàng có ở m trạm phát bằng tổng lượng hàng yêu cầu ở n trạm thu:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Hãy lập phương án vận chuyển hàng sao cho các trạm phát thì phát hết hàng, các trạm thu thì thu đủ hàng và tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

F \ *T*	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Gọi x_{ij} là số đơn vị hàng chuyên chở từ trạm phát (i) đến trạm thu (j). Điều kiện cho biến: $x_{ij} \geq 0, \forall i,j$.

Yêu cầu của bài toán là tìm lượng hàng phân phối $x_{ij} \geq 0$ từ trạm phát thứ i đến trạm thu thứ j sao cho:

- Tổng chi phí vận chuyển thấp nhất

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (8.1)$$

- Các trạm phát phát hết hàng: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m}.$ (8.2)

- Các trạm thu thu đủ hàng: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, i = \overline{1,n}.$ (8.3)

- Ma trận $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$ (8.4)

thỏa các ràng buộc (8.2) và (8.3) được gọi là phương án chấp nhận được.

Tính chất:

(i) Bài toán vận tải cân bằng thu phát luôn có phương án tối ưu.

(ii) Ma trận hệ số các ràng buộc của bài toán vận tải có hạng bằng $m + n - 1$.

Bảng phân phối lượng hàng vận chuyển x_{ij} từ trạm phát thứ i đến trạm thu thứ j thường được trình bày như sau:

F \ T	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

8.2 Phương án cực biên của bài toán vận tải

8.2.1 Các định nghĩa

Ô chọn, Ô loại

Ta viết (i, j) là ô ở dòng i cột j.

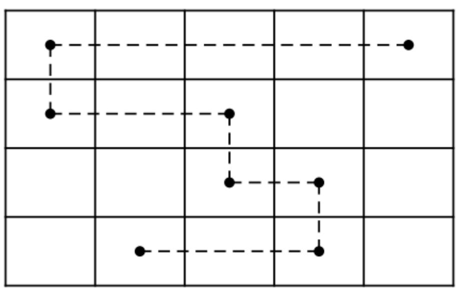
Trong bảng vận tải, những ô có $x_{ij} > 0$ đuược gọi là ô chọn, những ô có $x_{ij} = 0$ gọi là ô loại.

Đường đi

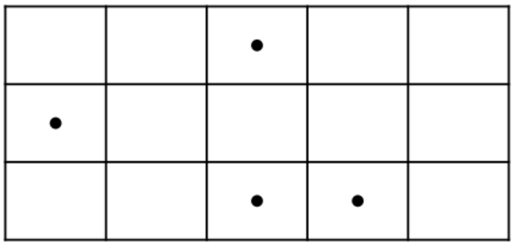
Ta gọi một đường đi là tập hợp các ô chọn sao cho:

- Trên cùng một dòng hay một cột không có quá hai ô chọn.
- Hai ô chọn liên tiếp thì nằm trên cùng một dòng hay một cột.

Ví dụ 8.1. Dãy các ô chọn sau tạo thành một đường đi:



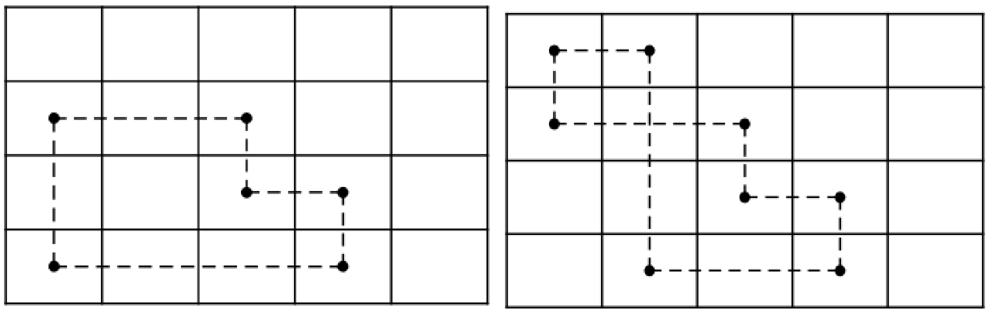
Ví dụ 8.2. Các ô chọn sau có lập thành đường đi không, tại sao?



Chu trình

Một đường đi khép kín được gọi là một chu trình.

Ví dụ 8.3. Dãy các ô chọn sau tạo thành một chu trình

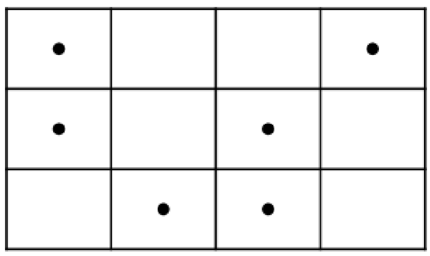


Tính chất

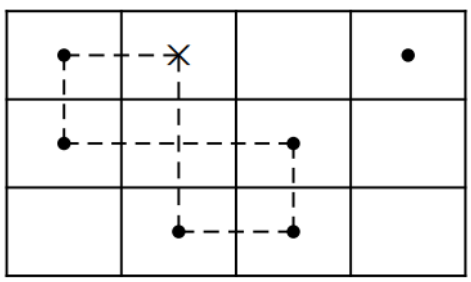
(i) Một bảng vận tải có m dòng, n cột thì tập các ô chọn không chứa chu trình có tối đa $m + n - 1$ ô.

(ii) Với một phương án có đủ $m + n - 1$ ô chọn không chứa chu trình, thì với bất kỳ một ô loại nào được đưa vào phương án thì sẽ tạo thành một chu trình và chu trình này là duy nhất.

Ví dụ 8.4. Xét bảng vận tải 3 dòng, 4 cột với một phương án có $3 + 4 - 1 = 6$ ô chọn cho như sau



Khi ta thêm một ô loại bất kỳ thì ô loại này kết hợp với một số ô chọn này tạo thành chu trình. Chẳng hạn, ta thêm ô loại (1, 2) vào phương án thì ô này sẽ kết hợp với các ô (3, 2); (3, 3); (2, 3); (2, 1); (1, 1) tạo thành chu trình.



Phương án cực biên

Một phương án được gọi là phương án cực biên của bài toán vận tải khi và chỉ khi tập các ô chọn của nó không chứa chu trình.

Một phương án cực biên có $m + n - 1$ ô chọn được gọi là phương án cực biên không suy biến. Ngược lại, một phương án cực biên có ít hơn $m + n - 1$ ô chọn được gọi là phương án cực biên suy biến.

Ví dụ 8.5. Phương án sau là phương án cực biên không suy biến

a_i \ b_j	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Ví dụ 8.6. Phương án sau là phương án cực biên suy biến

a_i \ b_j	**40**	**100**	**60**	**50**
80	1 **40**	2	4 **40**	3
70	2	4	5 **20**	1 **50**
100	4	1 **100**	2	5

Nhận xét. Một phương án cơ bản có các ô chọn có thể không lập thành một đường đi.

8.2.2 Phương pháp thành lập phương án cực biên

8.2.2.1 Phương pháp cước phí nhỏ nhất

- Trong bảng vận tải, ta tìm ô có chi phí bé nhất. Phân phối cho ô này 1 lượng hàng theo nguyên tắc phân phối tối đa có thể.
- Sau khi phân phối, sửa lại yêu cầu của dòng cột liên quan: Bỏ đi các ô nằm trên dòng đã phát hết hàng hay cột đã thu đủ hàng trong quá trình phân phối lần sau.

Ví dụ 8.7. Bằng phương pháp cước phí thấp nhất, thành lập một phương án cực biên của bài toán vận tải sau:

a_i \ b_j	**25**	**38**	**25**	**30**
30	15	10	9	12
50	13	21	14	8
38	10	11	16	12

Giải

b_j / a_i	**25**	**38**	**25**	**30**
30	15	10 **5**	9 **25**	12
50	13	21 **20**	14	8 **30**
38	10 **25**	11 **13**	16	12

8.2.2.2 Phương pháp góc Tây – Bắc

Ta ưu tiên phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô ở góc Tây - Bắc trên bảng vận tải. Khi đó nếu:

- Trạm phát nào đã hết hàng thì ta xóa dòng chứa trạm phát đó.
- Trạm thu nào đã nhận đủ hàng thì ta xóa cột chứa trạm thu đó.

Sau đó lặp lại quá trình trên đối với những ô còn lại. Phương án được thành lập bằng phương pháp góc Tây - Bắc là phương án cực biên.

Ví dụ 8.8. Bằng phương pháp góc Tây - Bắc, thành lập phương án cực biên của bài toán vận tải sau:

b_j / a_i	**25**	**38**	**25**	**30**
30	15	10	9	12
50	13	21	14	8
38	10	11	16	12

Giải

b_j / a_i	**25**	**38**	**25**	**30**
30	15 **25**	10 **5**	9	12
50	13	21 **33**	14 **17**	8
38	10	11	16 **8**	12 **30**

8.2.2.3 Phương pháp Vogel (Fogel)

Phương pháp Vogel cho ta một phương án cực biên khá tốt, theo nghĩa nó rất gần với phương án tối ưu.

(i) Trên mỗi dòng, mỗi cột của ma trận cước phí ta tính hiệu số giữa hai giá trị cước phí nhỏ nhất.

(ii) Chọn dòng hay cột có hiệu số này lớn nhất (nếu có nhiều dòng hay cột thỏa điều kiện này thì ta chọn một dòng hay một cột trong các dòng, cột này).

(iii) Phân lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí nhỏ nhất trên dòng haycột vừa chọn được. (Khi đó nếu nơi nào đã phát hết hàng thì ta xóa dòng chứa nơi phát đó. Nếu nơi nào nhận đủ hàng thì ta xóa cột chứa nơi nhận đó. Lúc đó cột (dòng) này hiệu số sẽ không tính cho bước sau).

(iv) Lặp lại ba bước nói trên với những ô còn lại cho đến hết. Ta thu được phương án cực biên.

Ví dụ 8.9. Bằng phương pháp Vogel tìm phương án cực biên của bài toán vận tải:

a_i \ b_j	**30**	**40**	**35**	**15**	**45**
40	1	8	7	2	13
20	5	1	10	5	4
45	5	7	3	7	6
60	6	10	4	9	3

Giải

a_i \ b_j	**30**	**40**	**35**	**15**	**45**
40	1 **25**	8	7	2 **15**	13
20	5	1 **20**	10	5	4
45	5	7 **20**	3 **25**	7	6
60	6 **5**	10	4 **10**	9	3 **45**

8.3 Thuật toán thế vị giải bài toán vận tải

Để giải bài toán vận tải, ta thực hiện bốn bước như sau:

Bước 1. Thành lập phương án cực biên bằng một trong các phương pháp: cước phí thấp nhất, Tây - Bắc, Vogel.

Bước 2. Xây dựng hệ thế vị u_i, v_j

u_i gọi là thế vị dòng

v_j gọi là thế vị cột

Nếu phương án xuất phát là không suy biến, có đủ $m + n - 1$ ô chọn. Ta xây dựng hệ thống thế vị (u_i, v_j) theo công thức:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ với mọi } \textbf{ô chọn } (i, j)$$

Cho $u_1 = 0$, tìm trên dòng 1 ô chọn $(1, j)$ tìm thế vị cho cột $v_j = c_{1j} - u_1$.

Biết thế vị v_j của cột j ta tìm trên cột j ô chọn (i, j) và tính thế vị $u_i = c_{ij} - v_j$.

Tương tự ta tiếp tục tìm thế vị cho các dòng, cột còn lại.

Bước 3. Kiểm tra điều kiện tối ưu

Tính các hệ số ước lượng Δ_{ij}

Hệ số ước lượng các ô chọn là 0 (quy không cước phí ô chọn).

Hệ số ước lượng của các ô còn lại được tính theo công thức: $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$

Nếu các hệ số ước lượng đều không dương thì phương án cơ bản xuất phát là phương án tối ưu.

Nếu có một ô loại có hệ số ước lượng dương thì phương án cơ bản xuất phát chưa tối ưu. Thuật toán tiếp tục bằng cách lập phương án cơ bản mới.

Bước 4. Xây dựng phương án cơ bản mới

a) Tìm ô điều chỉnh:

$\Delta_{rs} = \max\{\Delta_{ij} \mid \Delta_{ij} > 0\}$ ô (r, s) gọi là ô điều chỉnh *(là ô chọn trong bảng VT mới).*

Ô điều chỉnh là ô có Δ dương lớn nhất.

b) Tìm vòng điều chỉnh:

Lặp vòng điều chỉnh đi qua ô điều chỉnh (r, s) với các ô chọn.

<u>Lưu ý:</u> Vòng điều chỉnh này tồn tại duy nhất.

Vòng điều chỉnh không nhất thiết phải đi qua tất cả các ô chọn.

c) Xác định lượng điều chỉnh q:

Trên vòng điều chỉnh ta đánh dấu (+), (-) liên tiếp, với quy ước *ô điều chỉnh được đánh dấu đầu tiên và mang dấu* (+).

$q = \min\{x_{ij} \mid \text{với mọi ô } (i, j) \text{ mang dấu (-)}\} = x_{(t,h)}$. Ô (t,h) là *ô loại trong bảng VT mới.*

Tính lại lượng hàng trong các ô

- $x'_{ij} = x_{ij} - q$, ô (i, j) mang dấu (-).
- $x'_{ij} = x_{ij}$, ô (i, j) không mang dấu.
- $x'_{ij} = x_{ij} + q$, ô (i, j) mang dấu (+).

Ví dụ 8.10.

F \ T	**25**	**38**	**25**	**30**
30	15	10	9	12
50	13	21	14	8
38	10	11	16	12

Giải

Bước 1. Thành lập phương án cực biên

- Ô (2,4) có chi phí bé nhất là 8: phân phối cho ô (2,4) lượng hàng là min{50,30} =30 → bỏ cột 4, dòng 2 còn lại 50-30 = 20.
- Ô (1,3) có chi phí bé nhất là 9: phân phối cho ô (1,3) lượng hàng là min{30,25} =25 → bỏ cột 3, dòng 1 còn lại là 30−25=5.
- Có 2 ô có chi phí bé nhất là 10, đó là ô ((1,2) và ô ((3,1). Ta chọn ô nào trước cũng được. Chọn ô(1,2), phân phối cho ô (1,2) lượng hàng là min{5,38} = 5 → bỏ dòng 1, cột 2 còn lại là 38-5 = 33.
- Ô (3,1) có chi phí bé nhất là 10: phân phối cho ô (3,1) lượng hàng là min{38,25} =25 → bỏ cột 1, dòng 3 còn lại là 38−25=13.
- Ô (3,2) có chi phí bé nhất là 11: phân phối cho ô (3,2) lượng hàng là min{13,33} =13 → bỏ dòng 3, cột 2 còn lại là 33−13=20.
- Chỉ còn lại ô (2,2) có chi phí là 21: phân phối cho ô này lượng hàng là min{20,20} =20 → bỏ dòng 2, cột 2.

Vậy ta có bảng phân phối như sau :

F \ T	25	38	25	30
30	15	10 **5**	9 **25**	12
50	13	21 **20**	14	8 **30**
38	10 **25**	11 **13**	16	12

Bước 2. Xây dựng hệ thế vị u_i, v_j

Ô (1, 2) : $u_1 + v_2 = 10$; Ô (1, 3) : $u_1 + v_3 = 9$; Ô (2, 2) : $u_2 + v_2 = 21$

Ô (2, 4) : $u_2 + v_4 = 8$; Ô (3, 1) : $u_3 + v_1 = 10$; Ô (3, 2) : $u_3 + v_2 = 11$

Cho $u_1 = 0 \rightarrow u_2 = 11; u_3 = 1$

$v_1 = 9; v_2 = 10 ; v_3 = 9 ; v_4 = -3$

F \ T	25	38	25	30	u_i
30	15	10 **5**	9 **25**	12	**0**
50	13	21 **20**	14	8 **30**	11
38	10 **25**	11 **13**	16	12	1
v_j	9	10	9	−3	

Bước 3. Kiểm tra điều kiện tối ưu

$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -6$; $\Delta_{14} = -15$; $\Delta_{21} = 7$;

$\Delta_{23} = 6$; $\Delta_{33} = -6$; $\Delta_{34} = -14$

Ô loại (2,1) có $\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 11 + 9 - 13 = 7$

Ô loại (2,3) có $\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 11 + 9 - 14 = 6$

Phương án chưa tối ưu

F \ T	25	38	25	30	U_i
30	15 −6	10 **5**	9 **25**	12 −15	0
50	13 ***7***	21 **20**	14 ***6***	8 **30**	11
38	10 **25**	11 **13**	16 −6	12 −14	1
V_j	9	10	9	−3	

Xây dựng phương án cơ bản (PACB) mới.

F \ T	25	38	25	30	U_i
30	15 −6	10 **5**	9 **25**	12 −15	0
50	13 ***7*** +	21 - **20**	14 ***6***	8 **30**	11
38	10 - **25**	11 + **13**	16 −6	12 −14	1
V_j	9	10	9	−3	

Ta có PACB mới như sau :

F \ T	25	38	25	30
30	15	10 **5**	9 **25**	12
50	13 **20**	21	14	8 **30**
38	10 **5**	11 **33**	16	12

Tính lại Δ_{ij}

F \ T	25	38	25	30	U_i
30	15 −6	10 **5**	9 **25**	12 −8	**0**
50	13 **20**	21 −7	14 −1	8 **30**	4
38	10 **5**	11 **33**	16 −6	12 −7	1
V_j	9	10	9	4	

Ta có $\Delta_{ij} \leq 0, \forall\, i, j$: PA đang xét là tối ưu.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 25 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 30 \\ 5 & 33 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{\min} = f(X) = 10.5+9.25+13.20+8.30+10.5+11.33 = 1188.$$

Trường hợp gặp phương án cơ bản suy biến

Cách giải quyết: Thêm ô chọn đặc biệt

Ta thêm các ô chọn đặc biệt (i, j) thỏa:

- Có $x_{ij} = 0$
- Các ô chọn đặc biệt này không tạo thành vòng với các ô chọn đã có.
- Thêm các ô chọn đặc biệt sao cho dễ xác định các thế vị u_i, v_j.

<u>*Lưu ý:*</u> Số ô chọn đặc biệt thêm vào bằng $(m + n - 1)$ số ô chọn đã có.

Ví dụ 8.11.

T / P	60	70	40	30
100	12	6	9	12
80	9	8	7	11
20	11	7	6	10

Phương án xuất phát

T / P	60	70	40	30
100	12	6 **70**	9	12 **30**
80	9 **60**	8	7 **20**	11
20	11	7	6 **20**	10

Ta có số ô chọn là 5 < $m + n - 1 = 6$ => PACB suy biến.

Ta thêm ô chọn đặc biệt là ô (3,2)

T / P	60	70	40	30	ui
100	12 -5	6 + **70**	9 -4	12 - **30**	0
80	9 **60**	8 0	7 **20**	11 3	2
20	11 -3	7 - **0**	6 **20**	10 + 3	1
vj	7	6	5	12	

Ô (2,4) và (3,4) có cùng Δ dương lớn nhất, chọn ô nào làm ô điều chỉnh cũng được. Chọn ô điều chỉnh (3, 4).

Ô (3,2) có lượng hàng nhỏ nhất ⇒ loại ô (3,2), xây dựng lại bảng thế vị.

Ta có $\Delta ij \leq 0, \forall i,j$: PA đang xét tối ưu.

T / F	60	70	40	30	u_i
100	12 -2	6 **70**	9 -1	12 **30**	0
80	9 **60**	8 -3	7 **20**	11 0	-1
20	11 -3	7 -3	6 **20**	10 0	-2
v_j	7	6	8	12	

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 70 & 0 & 30 \\ 60 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.4 Các dạng khác nhau của bài toán vận tải

8.4.1 Bài toán vận tải không cân bằng thu phát

8.4.1.1 Trường hợp $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

Ta thêm trạm thu giả B_{n+1}, với yêu cầu là:

$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, đặt $C_{n+1,\, i} = 0, \forall i$.

Sau đó áp dụng thuật toán thế vị để giải.

8.4.1.2 Trường hợp $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

Ta thêm trạm phát giả A_{m+1}, với yêu cầu là:

$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, đặt $C_{m+1,\, j} = 0, \forall j$.

Sau đó áp dụng thuật toán thế vị để giải.

Chú ý: Khi dùng phương pháp chi phí bé nhất để tìm phương án cơ bản ban đầu, ta ưu tiên phân phối cho các ô thực của bảng trước.

Ví dụ 8.12. Giải bài toán vận tải có dạng bảng sau:

	B_1 =65	B_2 = 45	B_3 = 50	B_4 = 30
A_1 = 60	10	9	12	7
A_2 = 55	9	11	10	15
A_3 = 50	8	7	14	12

Kiểm tra điều kiện cân bằng thu phát: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 165 < \sum_{j=1}^{4} b_j = 190$.

Do vậy ta thêm trạm phát giả A_4 có yêu cầu là: A_4 = 190 – 165 = 25.

Các ô nằm trên dòng của trạm phát giả có c_{ij} = 0.

Bằng phương pháp chi phí thấp nhất ta tìm phương án cơ bản ban đầu trong bảng sau:

	B_1 =65	B_2 = 45	B_3 = 50	B_4 = 30
A_1 = 60	10 **5**	9	12 **25**	7 **30**
A_2 = 55	9 **55**	11	10	15
A_3 = 50	8 **5**	7 **45**	14	12
A_4 = 25	0	0	0 **25**	0

Xác định hệ thống thế vị:

$u_1 + v_1 = 10$; $u_1 + v_3 = 12$; $u_1 + v_4 = 7$;

$u_2 + v_1 = 9$; $u_3 + v_1 = 8$; $u_3 + v_2 = 7$; $u_4 + v_3 = 0$;

Cho $u_1 = 0$; $v_1 = 10$; $v_2 = 9$; $v_3 = 12$; $v_4 = 7$; $u_2 = -1$; $u_3 = -2$; $u_4 = -12$.

Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu:

$\Delta_{12} = 0$; $\Delta_{22} = -3$; $\Delta_{23} = 1$; $\Delta_{24} = -9$; $\Delta_{33} = -4$;

$\Delta_{34} = -7$; $\Delta_{41} = -2$; $\Delta_{42} = -3$; $\Delta_{44} = -5$

$\Delta_{23} = 1 \Rightarrow$ Phương án chưa tối ưu.

Chọn ô (2, 3) là ô điều chỉnh. Lượng điều chỉnh là $q = \min\{25, 55\} = 25$.

Ta xác định chu trình vận chuyển như bảng sau:

	B_1 =65	B_2 = 45	B_3 = 50	B_4 = 30
A_1 = 60	10 **30**	9	12	7 **30**
A_2 = 55	9 **30**	11	10 **25**	15
A_3 = 50	8 **5**	7 **45**	14	12
A_4 = 25	0	0	0 **25**	0

Xác định hệ thống thế vị:

$u_1 + v_1 = 10$; $u_1 + v_4 = 7$; $u_2 + v_1 = 9$;

$u_2 + v_3 = 10$; $u_3 + v_1 = 8$; $u_3 + v_2 = 7$; $u_4 + v_3 = 0$;

Cho $u_1 = 0$; $v_1 = 10$; $v_2 = 9$; $v_3 = 11$; $v_4 = 7$; $u_2 = -1$; $u_3 = -2$; $u_4 = -11$.

Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu:

$\Delta_{12} = 0$; $\Delta_{22} = -3$; $\Delta_{23} = 1$; $\Delta_{24} = -9$; $\Delta_{33} = -5$;

$\Delta_{34} = -7$; $\Delta_{41} = -2$; $\Delta_{42} = -2$; $\Delta_{44} = -4$

Phương án đã tối ưu. Với phương án trên tổng chi phí vận chuyển là:

$$f_{\min} = 10.30 + 7.30 + 9.30 + 10.25 + 8.5 + 7.45 = 1385.$$

8.4.2 Bài toán vận tải có ô cấm

Đây là bài toán vận tải mà vì một lý do nào đó có một nơi phát không thể chuyên chở hàng đến một nơi nhận nào đó được. Để giải quyết vấn đề này chúng ta cho cước phí ở ô đó là *M*; với *M* là số dương rất lớn, lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh. Sau đó chúng ta giải như những bài toán đã trình bày ở trên.

Ví dụ 8.13. Giải bài toán vận tải với hai ô cấm cho như sau:

a_i \ b_j	**100**	**65**	**95**	**40**
80	6	5	11	10
70	10		5	7
150	9	8	7	

8.4.3 Bài toán vận tải cực đại cước phí

Bước 1. Thành lập phương án cực biên bằng phương pháp cực đại cước phí, chúng ta phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí lớn nhất.

Bước 2. Xét xem phương án cực biên hiện thời đã tối ưu hay chưa bằng thuật toán quy không cước phí ô chọn.

- Nếu $c'_{ij} \le 0$ với mọi (i, j) thì phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu, thuật toán kết thúc.
- Nếu tồn tại $c'_{ij} > 0$ thì có thể tìm một phương án mới tốt hơn phương án hiện thời, chuyển sang bước 3.

Bước 3. Xây dựng phương án cực biên mới tốt hơn, chú ý ô vào là ô loại có $c'_{ij} > 0$ lớn nhất, các bước tiếp theo làm giống bài toán min.

Bước 4. Quay về bước 2.

Ví dụ 8.14. Giải bài toán vận tải cực đại cước phí sau:

a_i \ b_j	**70**	**55**	**85**	**60**
90	6	5	11	10
80	10	6	5	7
100	9	8	7	4

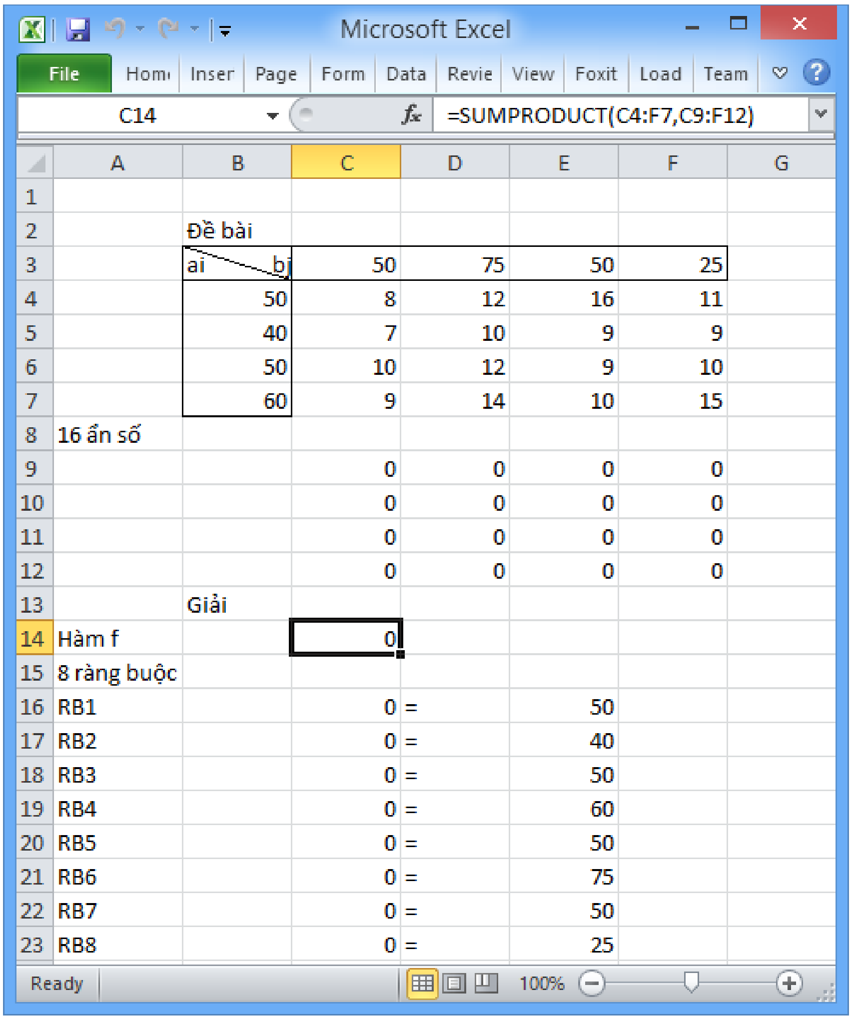
8.5 Giải bài toán vận tải bằng Excel

Ví dụ 8.15. Giải bài toán vận tải

a_i \ b_j	**50**	**75**	**50**	**25**
50	8	12	16	11
40	7	10	9	9
50	10	12	9	10
60	9	14	10	15

Giải

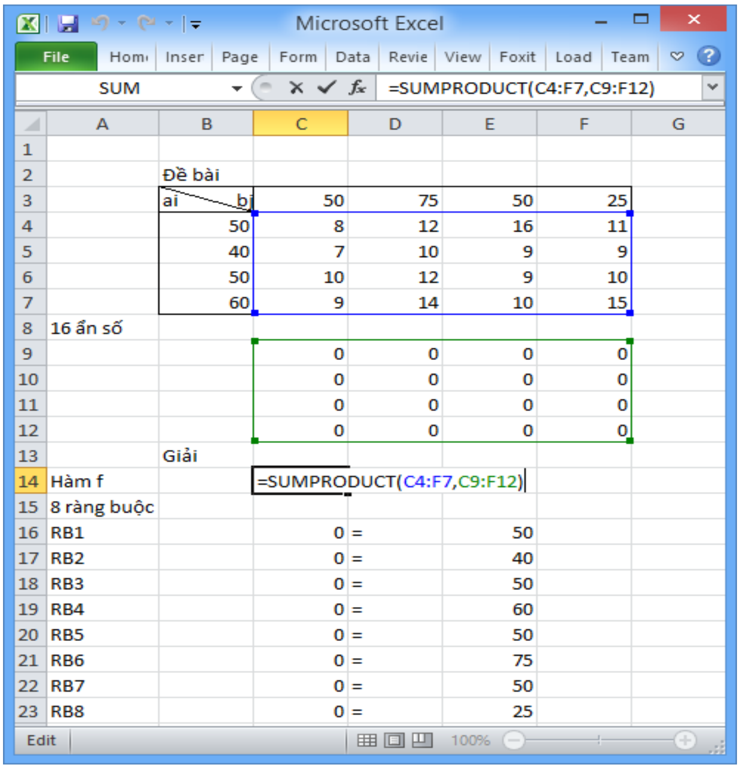
Bước 1. Nhập đề bài và biểu diễn hàm mục tiêu và các ràng buộc trong Excel



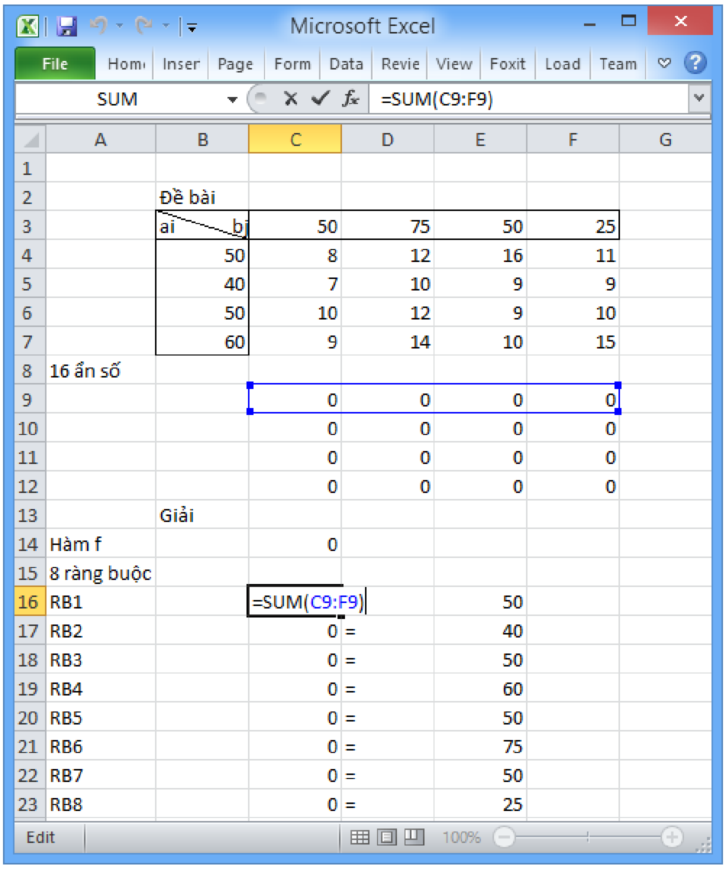
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Đề bài					
3		ai bj	50	75	50	25	
4		50	8	12	16	11	
5		40	7	10	9	9	
6		50	10	12	9	10	
7		60	9	14	10	15	
8	16 ẩn số						
9			0	0	0	0	
10			0	0	0	0	
11			0	0	0	0	
12			0	0	0	0	
13		Giải					
14	Hàm f		0				
15	8 ràng buộc						
16	RB1		0	=	50		
17	RB2		0	=	40		
18	RB3		0	=	50		
19	RB4		0	=	60		
20	RB5		0	=	50		
21	RB6		0	=	75		
22	RB7		0	=	50		
23	RB8		0	=	25		

Lưu ý:

a) Ô C14 biểu diễn hàm mục tiêu *f*, do đó C14 là tích vô hướng của 16 ô của ma trận cước vận chuyển và 16 ẩn số như hình dưới đây



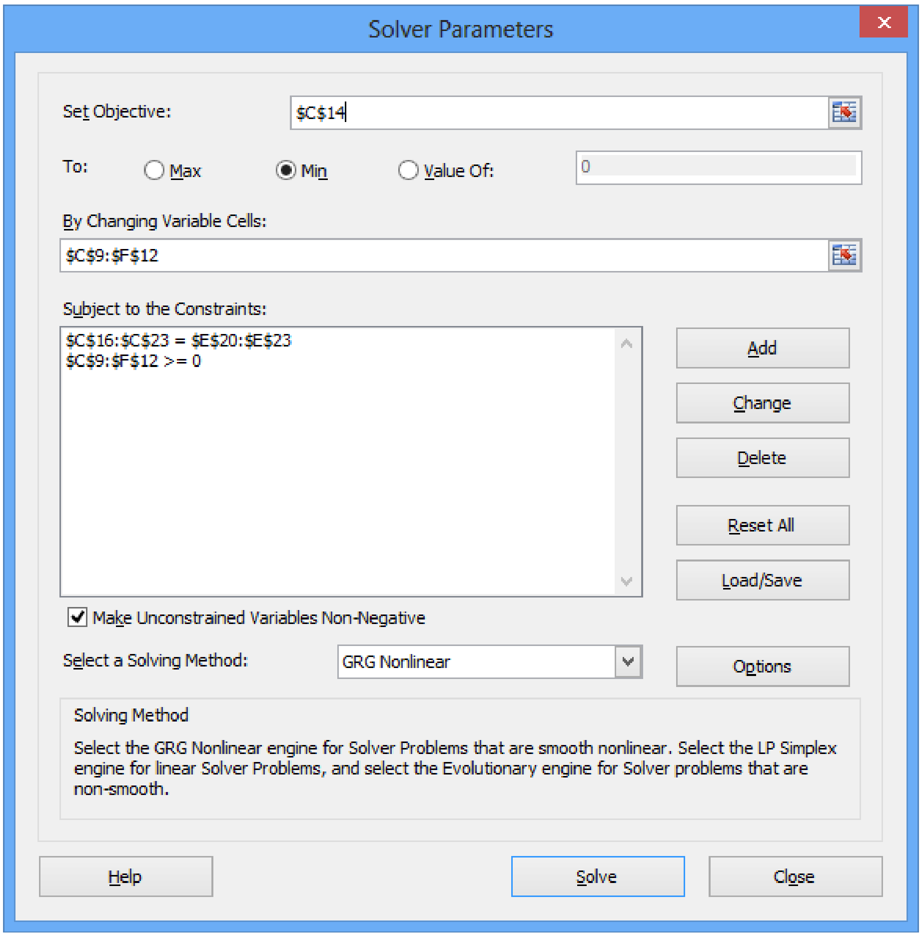
b) Ô C16 biểu diễn vế trái của ràng buộc 1



c) Tương tự Ô C17 đến C23 biểu diễn vế trái của ràng buộc 2 đến ràng buộc 8.

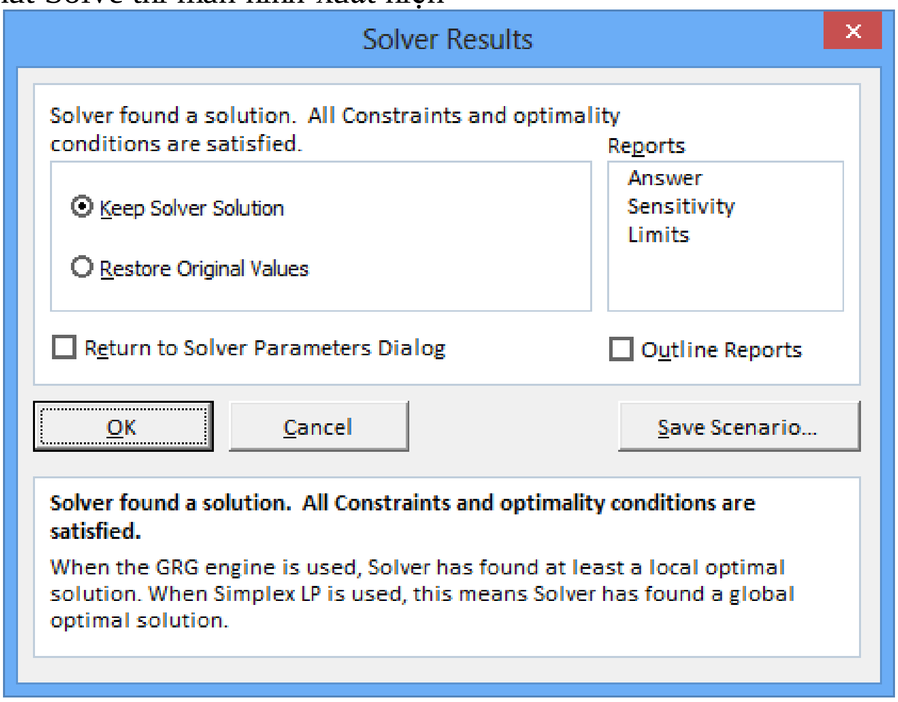
Bước 2. Sử dụng chức năng solver để giải bài toán

Mở solver và nhập liệu như sau

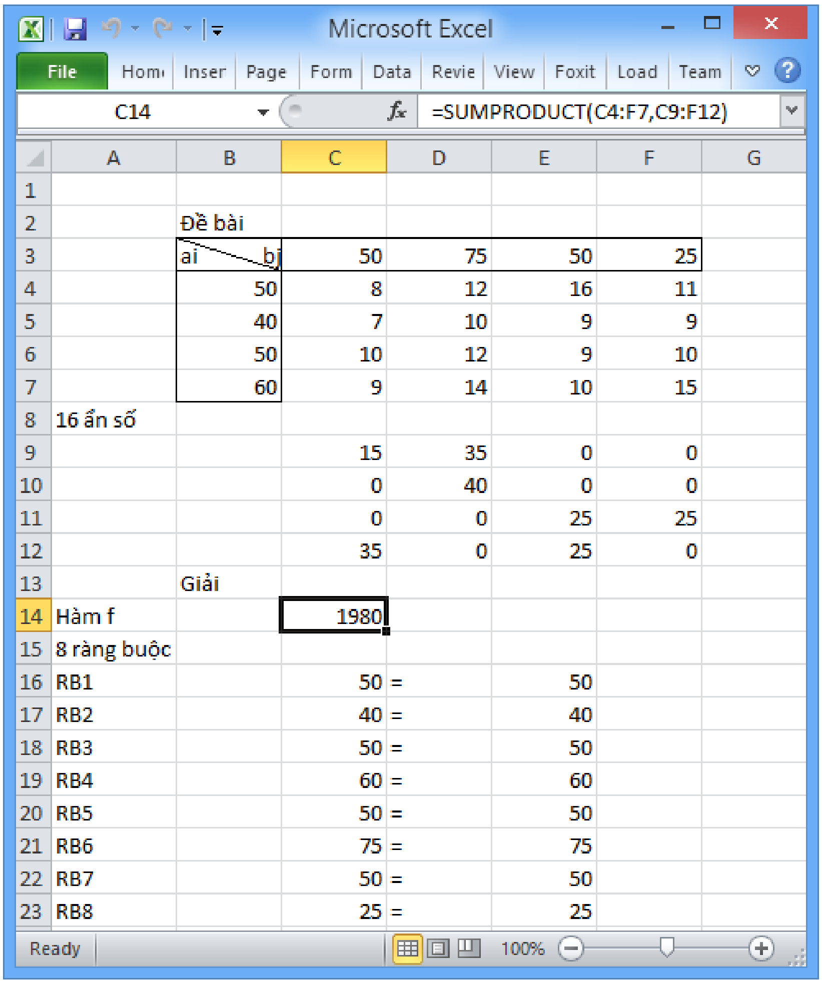


Bước 3. Đọc và ghi kết quả

Nhấn nút Solve thì màn hình xuất hiện



Nhấn nút OK được kết quả



Microsoft Excel

C14 =SUMPRODUCT(C4:F7,C9:F12)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Đề bài					
3		ai bj	50	75	50	25	
4		50	8	12	16	11	
5		40	7	10	9	9	
6		50	10	12	9	10	
7		60	9	14	10	15	
8	16 ẩn số						
9			15	35	0	0	
10			0	40	0	0	
11			0	0	25	25	
12			35	0	25	0	
13		Giải					
14	Hàm f		1980				
15	8 ràng buộc						
16	RB1		50	=	50		
17	RB2		40	=	40		
18	RB3		50	=	50		
19	RB4		60	=	60		
20	RB5		50	=	50		
21	RB6		75	=	75		
22	RB7		50	=	50		
23	RB8		25	=	25		

Ready 100%

Vậy PATƯ là $x^* = \begin{bmatrix} 15 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 25 \\ 35 & 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}$ và $f_{\min} = 1980.$

Câu hỏi và bài tập chương 8

Bài 8.1. Giải bài toán vận tải có ma trận cước phí

Phát \ Thu	60	70	40	30
100	2	1	4	3
80	5	3	2	6
20	6	2	1	5

Tìm phương án cho chi phí vận tải thấp nhất.

Bài 8.2. Giải bài toán vận tải có ma trận cước phí

Phát \ Thu	30	95	25	60
70	5	3	8	4
90	6	6	3	2
50	3	4	6	9

Tìm phương án cho chi phí vận tải thấp nhất.

Bài 8.3. Giải bài toán vận tải dưới dạng bảng sau đây

A_i \ B_j	60	40	80	70
80	8	9	5	5
50	5	6	7	6
70	7	6	8	9

Tìm phương án cho chi phí vận tải thấp nhất.

Bài 8.4. Giải bài toán vận tải với số liệu cho như sau:

A_i = (100, 130, 170) và B_i = (150, 120, 80, 50)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

Bài 8.5. Giải bài toán vận tải sau:

	50	80	100	65
100	3	2	6	2
90	1	4	5	3
120	1	5	6	4
97	3	6	7	1

Bài 8.6. Giải bài toán vận tải có ô cấm

b_j / a_i	45	100	50	60
70		16	15	11
100	10	17	9	
85	12	14	10	13

Bài 8.7. Cho bài toán vận tải cân bằng thu phát và một phương án:

b_j / a_i	40	45	60	65
90	4 **25**	5	7	2 **65**
65	5	1 **45**	2 **20**	10
55	11 **15**	2	3 **40**	6

a) Tính cước phí vận chuyển của phương án này, chứng minh phương án cực biên đã cho không phải là phương án tối ưu.

b) Xuất phát từ phương án trên hãy xây dựng một phương án mới tốt hơn (chỉ cần một phương án mới tốt hơn).

Bài 8.8. Một hợp tác xã nông nghiệp có 3 vùng đất A_1, A_2, A_3 có diện tích lần lượt là 110 ha, 90 ha, 180 ha định dùng để trồng các loại cây B_1, B_2, B_3, B_4 theo diện tích lần lượt là: 100 ha, 80 ha, 120 ha, 60 ha. Biết năng suất cây trồng quy ra tiền (triệu đồng/ha) cho ở bảng sau. Do điều kiện khí hậu không thể trồng loại cây B_4 trên đất A_1 và yêu cầu diện tích đất A_2 phải được trồng hết. Hãy lập phương án phân bố đất trồng các loại cây sao cho tổng lợi nhuận là cao nhất.

Loại đất	Loại cây			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	20	25	22	15
A_2	26	21	20	18
A_3	18	20	15	24

Bài 8.9. Cần bố trí các công nhân 3 nhóm A, B, C (với số lượng lần lượt 40, 35, 25 người) làm việc trên các loại máy 1, 2, 3, 4 (với số lượng lần lượt: 20, 30, 20, 30 máy).

Mỗi công nhân chỉ được làm việc riêng với một máy. Biết năng suất trong một tháng của mỗi công nhân trong các nhóm trên một máy (quy ra tiền: triệu đồng) cho ở bảng sau. Hãy lập phương án bố trí các công nhân làm việc trên các máy sao cho tổng năng suất trong một tháng là lớn nhất.

Nhóm Công nhân	Loại máy			
	1	**2**	**3**	**4**
A	4	3	2	5
B	3	4	3	4
C	2	3	4	2

Bài 8.10. Một nhà máy chế biến thịt, sản xuất ba loại thịt: bò, lợn, cừu, với tổng lượng mỗi ngày là 480 tấn bò; 400 tấn lợn; 230 tấn cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt nấu chín để bán trong giờ làm việc là 420 tấn. Ngoài ra nấu thêm ngoài giờ 250 tấn (với giá cao hơn). Lợi nhuận thu được trên một tấn được cho bằng bảng sau: (với đơn vị là triệu đồng)

	Tươi	Nấu chín	Nấu chín Ngoài giờ
Bò	8	11	14
Lợn	4	7	12
Cừu	4	9	13

Mục đích của nhà máy là tìm phương án sản xuất để làm cực đại lợi nhuận. Hãy tìm phương án tối ưu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng việt

[1] Nguyễn Đình Ái – Phạm Gia Hưng – Thái Bảo Khánh, Bài giảng Toán kinh tế 1, trường Đại học Nha Trang.

[2] Đặng Hấn, (1995), Quy hoạch tuyến tính, NXB Đại học kinh tế - TP. HCM.

[3] Nguyễn Quốc Hưng, (2009), Toán cao cấp C1 và một số ứng dụng trong kinh doanh, NXB Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.

[4] Nguyễn Quốc Hưng, (2009), Toán cao cấp C2 và một số ứng dụng trong kinh doanh, NXB Giao thông vận tải.

[5] Nguyễn Quãng – Nguyễn Thượng Thái, (2007), Toán kinh tế, Học viện CN Bưu chính viễn thông.

[6] Lê Đình Thúy, (2012), Toán cao cấp cho các nhà kinh tế, Phần I, II, NXB Đại học Kinh tế Quốc Dân.

[7] Phạm Thị Thương, (2016), Bài giảng toán kinh tế, Đại học Kiên Giang.

Tiếng Anh

[8] Alpha C. Chiang, (2005), Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw – Hill/Irwin.

[9] Knut Sydsæter – Peter Hammond, (2006), Esential Mathematics for Economic Analysis, FT Prentice.