BỘ CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG
HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

PGS. TS PHẠM NGỌC ANH, PGS. TS LÊ BÁ LONG

GIÁO TRÌNH

TOÁN CAO CẤP 2

Hà Nội, tháng 4 năm 2021

Lời nói đầu

Giáo trình Toán cao cấp 2 được biên soạn theo Đề cương tín chỉ học phần Toán cao cấp 2 đã được Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông ban hành năm 2012 dành cho sinh viên đại học hệ chính qui nhóm ngành kinh tế, bao gồm: Khoa Quản trị kinh doanh, Khoa Tài chính Kế toán, Khoa Đa phương tiện và Khoa Marketing của Học viện. Gần như độc lập với môn Toán cao cấp 1, nội dung môn Toán cao cấp 2 là các kiến thức cơ bản về Đại số tuyến tính nhằm cung cấp và hỗ trợ cho cho sinh viên khối ngành Kinh tế trong việc học tập, nghiên cứu, phân tích các mô hình kinh tế.

Giáo trình được thiết kế theo 5 chương tương ứng với thời lượng hai tín chỉ gồm các nội dung sau:

Chương 1: Lôgic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ.

Chương 2: Không gian véc tơ n chiều.

Chương 3: Ma trận và định thức.

Chương 4: Hệ phương trình tuyến tính.

Chương 5: Phép biến đổi tuyến tính và dạng toàn phương trên không gian $\mathbb{R}^n$.

Nội dung của cuốn sách được tổng kết từ bài giảng của hai tác giả trong nhiều năm và có tham khảo các giáo trình của các trường đại học khác. Chính vì thế, giáo trình này cũng có thể dùng làm tài liệu học tập, tài liệu tham khảo cho sinh viên của các trường đại học và cao đẳng khối ngành Kinh tế.

Toán học ngoài vai trò là công cụ cho các ngành khoa học khác, còn cung cấp phương pháp tư duy lập luận chính xác chặt chẽ. Vì vậy việc học toán cũng giúp ta rèn luyện phương pháp tư duy. Một vài phương pháp tư duy Toán học đã được giảng dạy và cung cấp từng bước trong quá trình học tập ở phổ thông nhưng chỉ với mức độ đơn giản. Trong Chương 1 các vấn đề này được trình bày lại một cách có hệ thống. Các chương còn lại của giáo trình là đại số tuyến tính. Kiến thức của các chương liên hệ chặt chẽ với nhau, kết quả của chương này là công cụ của chương khác. Vì vậy người học cần thấy được mối liên hệ giữa các chương. Đặc điểm của môn học này là tính khái quát hoá và trừu tượng cao. Một số khái niệm được khái quát hoá từ những kết quả của Hình học giải tích ở phổ thông, vì vậy khi học ta nên liên hệ đến các kết quả đó.

Giáo trình được trình bày theo cách thích hợp đối với người tự học. Trước khi nghiên cứu các nội dung chi tiết, người đọc nên xem phần giới thiệu của mỗi chương để thấy được mục đích, ý nghĩa, yêu cầu chính của chương đó. Trong mỗi chương, mỗi nội dung, người đọc có thể tự đọc và hiểu được cặn kẽ thông qua cách diễn đạt và chứng minh rõ ràng. Đặc biệt người học nên chú ý đến các nhận xét, bình luận để hiểu sâu hơn hoặc mở rộng tổng quát hơn các kết quả. Hầu hết các bài toán được xây dựng theo lược đồ: Đặt bài toán, chứng minh sự tồn tại lời giải bằng lý thuyết và cuối cùng nêu thuật toán giải quyết bài toán này. Các ví dụ là để minh họa trực tiếp khái niệm, định lý hoặc các thuật toán, vì vậy sẽ giúp người đọc dễ dàng hơn khi tiếp thu bài học. Cuối mỗi chương đều có các bài tập sắp xếp từ dễ đến khó. Các bài tập dễ chỉ kiểm tra trực tiếp nội dung vừa học còn các bài tập khó đòi hỏi phải sử dụng các kiến thức tổng hợp. Một số nội dung của cuốn sách đã được dạy hoặc dạy một phần ở phổ thông.

Tài liệu này có nội dung thuần túy toán học, tuy nhiên ở mức độ có thể chúng tôi giới thiệu một số ví dụ, bài tập liên quan đến chuyên ngành nhằm minh họa và thấy được ứng dụng của Toán cao cấp 2. Mặc dù vậy nội dung vẫn ở dạng cơ bản vì đối tượng chủ yếu là sinh viên năm thứ nhất Đại học - Cao đẳng, chưa được trang bị kiến thức về chuyên ngành.

Tuy rằng tác giả đã rất cố gắng, song các thiếu sót còn tồn tại trong giáo trình là điều khó tránh khỏi. Tác giả rất mong sự đóng góp ý kiến của bạn bè đồng nghiệp, học viên xa gần và xin cám ơn vì điều đó.

Cuối cùng chúng tôi bày tỏ sự cám ơn đối với Ban Giám đốc Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông, Khoa Cơ bản 1 và bạn bè đồng nghiệp đã khuyến khích động viên, tạo nhiều điều kiện thuận lợi để chúng tôi hoàn thành giáo trình này.

Hà nội, ngày 15 tháng 04 năm 2021.

Bảng ký hiệu

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Tập số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ, số thực, số phức
$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$	Tập số tương ứng loại trừ số 0
$a \in X$	a là phần tử của X, a thuộc X
$A \subset X$	A chứa trong X, A là tập con của X
$\forall$	lượng từ phổ biến; với mọi
$\exists$	lượng từ tồn tại; tồn tại
$f : X \to Y$	ánh xạ f từ X vào Y
$g \circ f$	hợp của ánh xạ f và ánh xạ g
$P_n[x]$	Tập hợp các đa thức biến x bậc $\leq n$
θ	Véc tơ không, ma trận không
SpanS	Không gian véc tơ con sinh bở hệ véc tơ S
$r(S), r(A)$	Hạng của hệ véc tơ S, hạng của ma trận A
dimV	Chiều của không gian véc tơ V
$(v)_{\mathcal{B}}$	Tọa độ véc tơ v trong cơ sở $\mathcal{B}$
$[v]_{\mathcal{B}}$	Ma trận cột có phần tử là tọa độ véc tơ v trong cơ sở $\mathcal{B}$
$[a_{ij}]_{m\times n}$	Ma trận cỡ $m \times n$ có phần tử a_{ij}
A^t	Ma trận chuyển vị của ma trận A
A^{-1}	Ma trận nghịch đảo của ma trận A
C_A	Ma trận phụ hợp của ma trận A
det(A), |A|	Định thức của ma trận A
$D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_n\}$	Định thức của hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ trong cơ sở $\mathcal{B}$
Home(V, W)	Tập các ánh xạ tuyến tính từ V vào W
End(V)	Tập các phép biến đổi tuyến tính của V
$[f]_{\mathcal{B}}$	Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong cơ sở $\mathcal{B}$
$\mathcal{P}_A(\lambda), \mathcal{P}_f(\lambda)$	Đa thức đặc trưng của ma trận A, ánh xạ f

Mục lục

Chương 1
Mở đầu về lôgic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ

Toán học là một ngành khoa học lý thuyết được phát triển trên cơ sở tuân thủ nghiêm ngặt các quy luật lập luận của tư duy lôgic hình thức. Các quy luật cơ bản của lôgic hình thức đã được phát triển từ thời Aristote (Arít-xtốt) (thế kỷ thứ 3 trước công nguyên) cùng với sự phát triển rực rỡ của văn minh cổ Hy Lạp. Tuy nhiên mãi đến thế kỷ 17 với những công trình của De Morgan (Đờ Mocgan), Boole ... thì lôgic hình thức mới có một cấu trúc đại số đẹp đẽ và cùng với lý thuyết tập hợp giúp làm chính xác hoá các khái niệm toán học và thúc đẩy toán học phát triển mạnh mẽ. Việc nắm vững lôgic hình thức không những giúp sinh viên học tốt môn toán mà còn có thể vận dụng trong thực tế và biết lập luận một cách chính xác.

Khái niệm tập hợp, ánh xạ là các khái niệm cơ bản: vừa là công cụ vừa là ngôn ngữ của toán học hiện đại. Vì vai trò nền tảng của nó nên khái niệm tập hợp được đưa rất sớm vào chương trình toán phổ thông (toán lớp 6). Khái niệm tập hợp được Cantor (Căng-to) đưa ra vào cuối thế kỷ 19. Sau đó được chính xác hoá bằng hệ tiên đề về tập hợp. Có thể tiếp thu lý thuyết tập hợp theo nhiều mức độ khác nhau. Chúng ta chỉ tiếp cận lý thuyết tập hợp ở mức độ trực quan kết hợp với các phép toán lôgic hình thức như "và", "hoặc", phép kéo theo, phép tương đương, lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại. Với các phép toán lôgic này ta có tương ứng các phép toán giao, hợp, hiệu các tập hợp con của các tập hợp.

Khái niệm ánh xạ là sự mở rộng khái niệm hàm số đã được biết. Khái niệm này giúp ta mô tả các phép tương ứng từ một tập này đến tập kia thoả mãn điều kiện rằng mỗi phần tử của tập nguồn chỉ cho ứng với một phần tử duy nhất của tập đích và mọi phần tử của tập nguồn đều được cho ứng với phần tử của tập đích. Ở đâu có tương ứng thì ta có thể mô tả được dưới ngôn ngữ ánh xạ.

Nắm vững và sử dụng một cách chính xác các luật lôgic mệnh đề, vận dụng triệt để các kiến thức về lý thuyết tập hợp, ánh xạ là một yếu tố quan trọng đối với bất kỳ sinh viên nào muốn đạt kết quả tốt trong học tập các môn toán nói riêng cũng như trong mọi lĩnh vực nghiên cứu khác.

1.1. Lôgic mệnh đề

1.1.1. Mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề

a. Khái niệm mệnh đề

Lôgic mệnh đề là một hệ thống lôgic đơn giản nhất, với đơn vị cơ bản là các mệnh đề mang nội dung của các phán đoán, mỗi phán đoán được giả thiết là có một giá trị chân lý nhất định là đúng hoặc sai. Như vậy mệnh đề thường được phát biểu dưới dạng câu khẳng định hoặc phủ định. Câu dưới dạng nghi vấn, mệnh lệnh, yêu cầu không phải dạng mệnh đề ta xét.

Để chỉ các mệnh đề chưa xác định nào đó ta dùng các chữ cái $p, q, r, ...$ và gọi chúng là các biến mệnh đề. Nếu mệnh đề p đúng ta cho p nhận giá trị 1 và p sai ta cho nhận giá trị 0. Giá trị 1 hoặc 0 được gọi là *thể hiện* của p.

Chẳng hạn: “$7 > 9$” là mệnh đề sai, “tam giác đều là một tam giác cân”, hay “tam giác ABC là tam giác vuông tại đỉnh A khi và chỉ khi $BC^2 = AC^2 + AB^2$” là những mệnh đề đúng, “$x \vdots 3$” không phải là một mệnh đề.

Phủ định của mệnh đề p là mệnh đề được ký hiệu $\overline{p}$, đọc là *không p* . Mệnh đề $\overline{p}$ đúng khi p sai và $\overline{p}$ sai khi p đúng.

Tương tự ngôn ngữ thông thường, người ta dùng các liên từ để nối các câu đơn thành câu phức hợp, các liên từ thường gặp như “và”, “hay là”, “hoặc... hoặc..”, “nếu ... thì”...

Mệnh đề phức hợp được xây dựng từ các mệnh đề đơn giản bằng các phép liên kết lôgic mệnh đề.

b. Các phép liên kết lôgic mệnh đề

1) Phép hội: *Hội* của hai mệnh đề p, q là một mệnh đề, được kí hiệu là

$p \wedge q$ (đọc là p và q). Mệnh đề $p \wedge q$ chỉ đúng khi p và q cùng đúng, sai khi ít nhất một trong hai mệnh đề p hoặc q sai. Có thể kí hiệu là $\begin{cases} p \\ q. \end{cases}$

2) Phép tuyển: *Tuyển* của hai mệnh đề p, q là một mệnh đề, được kí hiệu là $p \vee q$ (đọc là p hoặc q). Mệnh đề $p \vee q$ chỉ sai khi p và q cùng sai, đúng khi ít nhất một trong hai mệnh đề p hoặc q đúng. Có thể kí hiệu là $\left[\begin{array}{l} p \\ q. \end{array}\right.$

Ở đây "p hoặc q" không được hiểu theo nghĩa loại trừ, tách biệt trong đó cả p, q không thể cùng đúng, mà tất nhiên $p \vee q$ đúng khi cả p, q cùng đúng.

3) Phép kéo theo: Mệnh đề *p kéo theo q* , ký hiệu $p \Rightarrow q$, là mệnh đề chỉ sai khi p đúng q sai.

Chú ý 1.1.

- Nếu p sai thì mệnh đề $p \Rightarrow q$ luôn đúng. Hay "từ điều sai suy ra mọi điều tuỳ ý".
- Hai mệnh đề p, q ở đây phải thuộc cùng một vấn đề, không thể là hai mệnh đề "xa lạ" không có liên quan gì với nhau.
- Trong phép kéo theo $p \Rightarrow q$, p được gọi là giả thiết, q là kết luận.
- Phép kéo theo $q \Rightarrow p$ được gọi là *đảo* hoặc *mệnh đề đảo* của phép kéo theo $p \Rightarrow q$.

Ta còn diễn tả $p \Rightarrow q$ bằng một trong các cách sau:

- Nếu p thì q;
- Muốn có p cần có q;
- Muốn có q thì có p là đủ;
- p là một điều kiện đủ của q;
- q là một điều kiện cần của p.

Phép kéo theo là liên kết lôgic mệnh đề thường gặp nhất trong các định lý.

Ví dụ 1.1. (tính chất của tam giác đều) Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì đó là một tam giác cân.

Ví dụ 1.2.

a) (Định lý Vi-et thuận) Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ và $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

b) (Định lý Vi-et đảo) Nếu có hai số x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = S, x_1x_2 = P$ và $S^2 \geq 4P$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - Sx + P = 0$.

Ví dụ 1.3. (Định lý điều kiện cần về cực trị của hàm số) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D_f, a \in D_f$. Nếu hàm số khả vi tại a và đạt cực trị địa phương tại a thì $f'(a) = 0$.

Ta đều đã biết điều ngược lại của các mệnh đề trên chưa chắc đúng, nghĩa là điều kiện $f'(a) = 0$ chỉ là điều kiện cần để đạt cực trị tại a và không phải là điều kiện đủ.

4) Phép tương đương: Mệnh đề $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ được gọi là mệnh đề *p tương đương q*, ký hiệu $p \Leftrightarrow q$.

Mệnh đề tương đương còn được phát biểu dưới dạng: khi và chỉ khi, điều kiện cần và đủ, điều kiện ắt có và đủ.

Ví dụ 1.4. (Định lý Pi-ta-go) Tam giác ABC là tam giác vuông tại đỉnh A khi và chỉ khi $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

Một công thức gồm các biến mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề được gọi là một công thức mệnh đề. Bảng liệt kê các thể hiện của công thức mệnh đề được gọi là *bảng chân trị*.

Bảng 1.1 Bảng chân trị của phép phủ định

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Từ định nghĩa ta có bảng chân trị của các phép liên kết mệnh đề $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$ và $q \Leftrightarrow p$ như sau:

Từ bảng chân trị ta nhận thấy $p \Leftrightarrow q$ là một mệnh đề đúng khi cả hai mệnh đề p và q cùng đúng hoặc cùng sai và mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ sai trong trường hợp ngược lại.

Bảng 1.2 Bảng chân trị thể hiện giá trị các liên kết mệnh đề

p	q	$\overline{p}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$\overline{p} \vee q$
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1

Chú ý 1.2.

- Mỗi định lý sau khi được chứng minh là một mệnh đề đúng.
- Mỗi định lý đã được chứng minh lại là căn cứ để chứng minh định lý khác.
- Có hai loại mệnh đề được sử dụng làm căn cứ để chứng minh một mệnh đề:
  1. Các mệnh đề đã được thừa nhận là đúng: đó là các định nghĩa và tiên đề.
  2. Các mệnh đề đã được chứng minh là đúng.

Một công thức mệnh đề được gọi là *hằng đúng* nếu nó luôn nhận giá trị 1 với mọi thể hiện của các biến mệnh đề có trong công thức.

1.1.2. Các tính chất (hay còn gọi là các luật lôgic)

Ta ký hiệu mệnh đề tương đương hằng đúng là "$\equiv$" đọc là "*đồng nhất bằng*" thay cho ký hiệu "$\Leftrightarrow$".

Tính chất 1.1. Dùng bảng chân trị ta dễ dàng kiểm chứng các mệnh đề hằng đúng sau:

1) Luật phủ định kép:

$$\overline{\overline{p}} \equiv p.$$

2) Luật giao hoán:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p.$$

3) Luật kết hợp:

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r.$$

4) Luật phân phối:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

5) Luật bài trung: mệnh đề $p \vee \overline{p}$ luôn đúng ($p \vee \overline{p} \equiv 1$).

Luật mâu thuẫn: mệnh đề $p \wedge \overline{p}$ luôn sai ($p \wedge \overline{p} \equiv 0$).

6) Luật De Morgan:

$$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q};$$
$$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}.$$

7) $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$

8) Luật phản chứng:

$$p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}.$$

9) Luật lũy đẳng:

$$p \vee p \equiv p; p \wedge p \equiv p.$$

10) Luật hấp thu:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$
$$p \wedge (p \vee q) \equiv p.$$

Luật lôgic 7) cho ta biểu diễn phủ định của mệnh đề $p \Rightarrow q$ như sau:

$$\overline{p \Rightarrow q} \equiv \overline{\overline{p} \vee q} \equiv p \wedge \overline{q}.$$

Theo luật phản chứng mệnh đề $p \Rightarrow q$ và $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ tương đương hằng đúng với nhau. Vì vậy có thể sử dụng một trong hai dạng trên phụ thuộc tính trực quan dễ hiểu khi phát biểu.

Phương pháp suy luận phản chứng:

Để chứng minh mệnh đề $p \Rightarrow q$ là đúng, ta giả thiết là p đúng và q sai. Nếu ta chỉ ra được rằng từ giả thiết đó dẫn đến mâu thuẫn thì mệnh đề $p \wedge \overline{q}$ là sai. Theo Luật phủ định kép và Luật De Morgan thì $\overline{p} \vee q$ là đúng, khi đó theo Luật Lôgic 7) thì $p \Rightarrow q$ là mệnh đề đúng.

1.2. Tập hợp

1.2.1. Khái niệm tập hợp

Khái niệm tập hợp và phần tử là các khái niệm cơ bản của toán học, không thể định nghĩa qua những khái niệm đã biết (cũng giống như khái niệm điểm, đường thẳng, mặt phẳng). Các khái niệm "tập hợp", "phần tử" xét trong mối quan hệ phần tử của tập hợp trong lý thuyết tập hợp là giống với khái niệm "đường thẳng", "điểm" và quan hệ điểm thuộc đường thẳng được xét trong hình học.

Một cách trực quan, ta có thể xem tập hợp như một sự tụ tập các vật, các đối tượng nào đó mà mỗi vật hay đối tượng là một phần tử của tập hợp. Tập hợp được đặc trưng bởi tính chất rằng một phần tử bất kỳ chỉ có thể hoặc thuộc hoặc không thuộc tập hợp. Có thể lấy ví dụ về các tập hợp có nội dung toán học hoặc không toán học. Chẳng hạn: tập hợp các số tự nhiên là tập hợp mà các phần tử của nó là các số 0, 1, 2, 3, ... còn tập hợp các cuốn sách trong thư viện của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông là tập hợp mà các phần tử của nó là các cuốn sách có đóng dấu thư viện.

Thường ký hiệu các tập hợp bởi các chữ in $A, B, ..., X, Y, ...$ và các phần tử bởi các chữ thường $x, y, ...$ Nếu phần tử x thuộc A ta ký hiệu $x \in A$, nếu x không thuộc A ta ký hiệu $x \notin A$. Ta cũng nói tắt "tập" thay cho thuật ngữ "tập hợp".

Tập rỗng là tập không chứa phần tử nào, ký hiệu $\emptyset$. Chẳng hạn tập nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập rỗng.

Một số cách biểu diễn tập hợp

1. Liệt kê các phần tử của tập hợp trong dấu ngoặc nhọn

Trường hợp tập hợp có hữu hạn phần tử hoặc các phần tử của tập hợp có thể biểu diễn theo một quy luật dễ nhận biết thì ta có thể liệt kê các phần tử trong dấu ngoặc nhọn.

Ví dụ 1.5.

- Mỗi tập thể lớp sinh viên Học viện là một tập hợp và có thể liệt kê theo danh sách lớp.
- Bộ ba cán bộ lớp: lớp trưởng, lớp phó, bí thư chi đoàn của một lớp cụ thể là một tập hợp, có thể liêt kê theo tên.
- Tập các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 10 là $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

- Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ là $\{-1, 1\}$.

2. Nêu đặc trưng tính chất của các phần tử tạo thành tập hợp

Có những tập hợp không thể liệt kê các phần tử của chúng, khi đó ta mô tả tập hợp này bằng cách đặc trưng các tính chất của phần tử tạo nên tập hợp.

Ví dụ 1.6.

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$. Tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập rỗng.
- $W = \{x, y, z \in \mathbb{R} \mid x + y + z = 0\}$ là tập hợp các số thực thỏa mãn $x + y + z = 0$ hoặc tập hợp những điểm (x, y, z) thỏa mãn phương trình $x + y + z = 0$, đó là mặt phẳng qua gốc O có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1, 1, 1)$.
- Ký hiệu $C_{[a,b]}$ là tập hợp các hàm số liên tục trên $[a, b]$.

Các tập hợp số thường gặp:

- Tập các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$;
- Tập các số nguyên $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$;
- Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q} \mid q \neq 0, p, q \in \mathbb{Z}\right\}$;
- Tập các số thực $\mathbb{R}$;
- Tập các số phức $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$.

Ví dụ 1.7.

a) $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, \ldots\}$ là tập các số tự nhiên chẵn. Trường hợp này ta có thể biểu diễn tập hợp bằng cách liệt kê một số phần tử ban đầu của tập hợp, các phần tử tiếp theo dễ dàng nhận được theo quy luật hình thành các phần tử của tập hợp, chẳng hạn tiếp sau 4 là 6 ...;

b) $P = \left\{p \in \mathbb{Q} \mid p = \dfrac{n^3 - 1}{3n^2 + 1}; n \in \mathbb{N}\right\}$ là tập các số hữu tỷ có dạng $p = \dfrac{n^3 - 1}{3n^2 + 1}$ trong đó n là số tự nhiên. Trường hợp này tập hợp được đặc trưng bởi tính chất tạo nên phần tử của tập hợp.

3. Giản đồ Venn:

Để có hình ảnh trực quan về tập hợp, người ta thường biểu diễn tập hợp như là miền phẳng giới hạn bởi đường cong khép kín không tự cắt được gọi là *giản đồ Venn*.

Giản đồ Venn của tập A là hình ảnh minh họa cho A và không phải chính tập A (điều này cũng giống như không thể lấy bức ảnh của anh A thay cho anh A). Vì vậy khi chứng minh ta chỉ sử dụng giản đồ Venn như hình ảnh minh họa.

1.2.2. Tập con

Định nghĩa 1.1. Tập A được gọi là *tập con* của B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, khi đó ta ký hiệu $A \subset B$ hay $B \supset A$.

Khi A là tập con của B ta còn nói A bao hàm trong B , hay B bao hàm A, hay B chứa A.

Ta có $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Một cách hình thức ta có thể xem tập rỗng là tập con của mọi tập hợp, nghĩa là với mọi tập $X : \emptyset \subset X$.

Tập hợp tất cả các tập con của X được ký hiệu là $\mathcal{P}(X)$. Vậy

$$A \in \mathcal{P}(X) \text{ khi và chỉ khi } A \subset X.$$

Tập $X \subset X$ là tập con của chính nó nên là phần tử lớn nhất, còn $\emptyset$ là phần tử nhỏ nhất trong $\mathcal{P}(X)$.

Ví dụ 1.8. Cho $X = \{a, b, c\}$. Ta có

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, X\}.$$

Ta thấy X có 3 phần tử thì $\mathcal{P}(X)$ có $2^3 = 8$ phần tử.

Ta có thể chứng minh tổng quát rằng nếu X có n phần tử thì $\mathcal{P}(X)$ có 2^n phần tử.

Định nghĩa 1.2. Hai tập A, B bằng nhau, kí hiệu $A = B$, khi và chỉ khi $A \subset B$ và $B \subset A$

Để chứng minh $A \subset B$ ta chỉ cần chứng minh $x \in A \Rightarrow x \in B$ và vì vậy khi chứng minh $A = B$ ta cần chứng minh $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

1.2.3. Các phép toán trên các tập hợp

a. Phép hợp *Hợp của hai tập* A và B, ký hiệu $A \cup B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp A, B. Nghĩa là

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Vậy $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$ hay $x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B. \end{array}\right.$

b. Phép giao: *Giao của hai tập* A và B, ký hiệu $A \cap B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc đồng thời hai tập hợp A, B. Nghĩa là

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

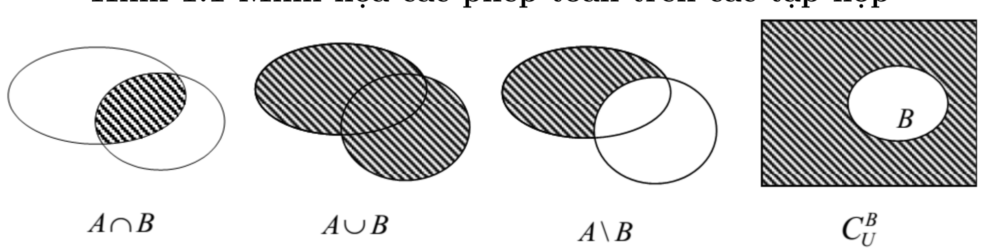
Vậy $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$ hay $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$

c. Hiệu hai tập: *Hiệu của hai tập* A và B, ký hiệu $A \setminus B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B. Nghĩa là

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Vậy $x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$ hay $x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B. \end{cases}$

Hình 1.1 Minh họa các phép toán trên các tập hợp



Chú ý 1.3.

- Phép hợp, phép giao còn được mở rộng cho một họ các tập hợp:

  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ hoặc $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ là tập các phần tử thuộc ít nhất một trong các tập A_k.

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ hoặc $\bigcap_{k=1}^n A_k$ là tập các phần tử thuộc đồng thời tất cả các tập A_k.
Vậy

$$x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \Leftrightarrow \exists k_0 : x \in A_{k_0};\ k_0 \in \{1, \ldots, n\}.$$

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k \Leftrightarrow x \in A_k; \forall k \in \{1, \ldots, n\}.$$

- Trường hợp $B \subset U$ thì tập $U \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong U, ký hiệu là C_U^B. Khi U đã xác định (không sợ nhầm lẫn) thì ta ký hiệu tắt $\overline{B}$ thay cho C_U^B.

Áp dụng lôgic mệnh đề ta dễ dàng kiểm chứng lại các tính chất sau đúng với mọi tập con của tập U nào đó.

1. $A \cup A = A, A \cap A = A$ (tính lũy đẳng);
2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ (tính giao hoán);
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (tính kết hợp);
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (tính phân bố);
5. $\overline{\overline{A}} = A, A \cup \emptyset = A, A \cap U = A$;
6. $A \cup \overline{A} = U, A \cap \overline{A} = \emptyset$;
7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (luật De Morgan);
8. $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap (\overline{A \cap B}) = A \setminus (A \cap B) = C_A^{A \cap B}$;
9. $A \cap B \subset A \subset A \cup B, A \cap B \subset B \subset A \cup B$;
10. $\begin{cases} A \subset C \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \cup B \subset C; \begin{cases} D \subset A \\ D \subset B \end{cases} \Rightarrow D \subset A \cap B.$

1.2.4. Hàm mệnh đề, lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại

a. Hàm mệnh đề

Một mệnh đề phụ thuộc vào biến $x \in D$, ký hiệu $S(x)$, được gọi là hàm mệnh đề xác định trên tập hợp D. Khi cho biến x một giá trị cụ thể thì ta được mệnh đề.

Ta gọi tập $D_{S(x)} := \{x \in D \mid S(x)\}$ là miền đúng của mệnh đề $S(x)$.

Ví dụ 1.9.

- $S(x) : x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}$ thì $D_{S(x)} = \{-1, 1\}$;
- $S(x) : x^2 - 5x + 6 \leq 0, x \in \mathbb{R}$ thì $D_{S(x)} = [2, 3]$.

b. Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại

Ký hiệu $\forall$ (đọc là với mọi) được gọi là *lượng từ phổ biến.*

Ký hiệu $\exists$ (đọc là tồn tại) được gọi là *lượng từ tồn tại.*

Cho $S(x)$ là một *hàm mệnh đề* xác định trên tập hợp D. Khi đó:

- Mệnh đề $(\forall x \in D)S(x)$ (đọc là với mọi $x \in D, S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} = D$ và sai trong trường hợp ngược lại. Khi D đã xác định thì ta thường viết tắt $\forall x, S(x)$ hay $(\forall x), S(x)$.
- Mệnh đề $(\exists x \in D)S(x)$ (đọc là tồn tại $x \in D, S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} \neq \emptyset$ và sai trong trường hợp ngược lại.
- Để chứng minh một mệnh đề với lượng từ phổ biến là đúng thì ta phải chứng minh mệnh đề đúng trong mọi trường hợp, còn với mệnh đề tồn tại đúng ta chỉ cần chứng minh ít nhất một trường hợp đúng là đủ.
- Trường hợp $D_{S(x)}$ chỉ có đúng một phần tử thì lượng từ tồn tại tương ứng được ký hiệu là $(\exists!\ x \in D, S(x))$ và đọc tồn tại duy nhất $x \in D, S(x)$.
- Phép phủ định lượng từ

$$\overline{\forall\ x \in D, S(x)} \equiv \left(\exists x \in D, \overline{S(x)}\right);$$
$$\overline{\exists\ x \in D, S(x)} \equiv \left(\forall x \in D, \overline{S(x)}\right).$$

Ví dụ 1.10.

- $(\forall x \in [2,3]) : x^2 - 5x + 6 \leq 0; (\exists x \in \mathbb{Q}) : x^2 - 5x + 6 \geq 0$ là các mệnh đề đúng.

- Mỗi một phương trình $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ là một hàm mệnh đề trong $\mathbb{R}$ có miền đúng là tập hợp nghiệm của phương trình. Chẳng hạn $x \in \mathbb{R}, S(x) : x^2 + bx + c = 0$ có miền đúng $\mathbb{R}_{S(x)} \neq \emptyset$ khi và chỉ khi $b^2 - 4c > 0$.

1.2.5. Tích Đề Các

Định nghĩa 1.3. *Tích Đề Các của hai tập hợp* X, Y là một tập hợp, ký hiệu $X \times Y$, gồm các phần tử có dạng (x, y) trong đó $x \in X$ và $y \in Y$. Nghĩa là

$$X \times Y = \{(x, y) \mid (x \in X) \wedge (y \in Y)\}.$$

Tích Đề Các của n tập hợp bất kỳ $X_1, X_2, \dots, X_n$ được định nghĩa và ký hiệu như sau

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Khi $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$ ta ký hiệu X^n thay cho $\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ lần}}$.

Tích Đề Các $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ còn được ký hiệu là $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Ví dụ 1.11. Cho $X = \{a, b, c\}, Y = \{1, 2\}$. Khi đó

$$X \times Y = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\};$$

$$Y \times X = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}.$$

Chú ý 1.4.

1. Dễ dàng chứng minh được nếu X có n phần tử, Y có m phần tử thì $X \times Y$ có $n \times m$ phần tử.

2. Giả sử $(x_1, \dots, x_n) \in \prod\limits_{i=1}^{n} X_i, (x'_1, \dots, x'_n) \in \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ thì

$$(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n) \Leftrightarrow x_i = x'_i, \ \forall \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Chẳng hạn: $(x, y) = (-1, 3) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3. \end{cases}$

3. Tích Đề Các của các tập hợp không có tính giao hoán.

Ví dụ 1.12. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Sử dụng phương pháp tọa độ người ta đồng nhất $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ tương ứng với mặt phẳng Oxy và không gian $Oxyz$ quen thuộc, trong đó mỗi điểm đồng nhất với tọa độ của chúng.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}; \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

1.3. Ánh xạ

1.3.1. Các định nghĩa và ví dụ

Khái niệm ánh xạ được khái quát hoá từ khái niệm hàm số trong đó hàm số thường được cho dưới dạng công thức tính giá trị của hàm số phụ thuộc vào biến số. Chẳng hạn, hàm số $y = 2x, x \in \mathbb{N}$ là quy luật cho ứng:

$$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 6...$$

Ta có thể định nghĩa ánh xạ một cách trực quan như sau:

Định nghĩa 1.4. Một ánh xạ f từ tập X vào tập Y là một quy luật cho tương ứng mỗi một phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y = f(x)$ của Y gọi là ảnh của x.

Như vậy ánh xạ phải thoả mãn 2 điều kiện sau:

1) Mọi $x \in X$ đều có ảnh tương ứng $f(x)$,

2) Mỗi $x \in X$ có ảnh tương ứng $y = f(x)$ là duy nhất.

Ta ký hiệu ánh xạ dưới dạng

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{f} Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

X được gọi là tập nguồn (hay còn gọi là tập xác định của ánh xạ), Y được gọi là tập đích.

Phần tử $y = f(x)$ gọi là ảnh của x qua ánh xạ f.

Hai ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$, $g : X' \longrightarrow Y'$ là bằng nhau, ký hiệu $f = g$ nếu

$$\begin{cases} X = X', Y = Y' \\ f(x) = g(x) \text{ với mọi } x \in X. \end{cases}$$

Ví dụ 1.13.

- Mỗi hàm số $y = f(x)$ bất kỳ là ánh xạ từ tập xác định D_f vào $\mathbb{R}$ hoặc vào tập giá trị của f. Chẳng hạn:
  - Hàm số bậc nhất $y = ax + b, a \neq 0$ là ánh xạ
  $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = ax + b \end{aligned}$$
  - Hàm phân thức $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ là ánh xạ
  $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \frac{x+1}{x-2} \end{aligned}$$
  - Hàm số logarit $y = \log_a x; a > 0, a \neq 1$ là ánh xạ
  $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \log_a x \end{aligned}$$
- Mỗi ánh xạ từ $D \subset \mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$ được gọi là hàm n biến.

Ví dụ 1.14.

a) Danh sách theo thứ tự sinh viên trong một tập thể lớp là một ánh xạ từ tập hợp con của tập số tự nhiên vào tập các sinh viên của lớp.

b) Qui tắc tương ứng theo quan hệ đồng hương mỗi sinh viên của tập thể lớp A với sinh viên tập thể lớp B không là ánh xạ từ tập thể lớp A vào tập thể lớp B nếu:

   - Trong lớp B có hội đồng hương hơn 2 người và có cùng đồng hương với A (không thỏa mãn điều kiện 2) của Định nghĩa 1.4),

- Hoặc lớp A có sinh viên mà trong lớp B không có sinh viên cùng đồng hương (không thỏa mãn điều kiện 1) của Định nghĩa 1.4).

Định nghĩa 1.5. Cho ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ và $A \subset X, B \subset Y$.

- Ảnh của A qua ánh xạ f là tập $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset Y$.

  Nói riêng $f(X) = \operatorname{Im} f$ được gọi là tập ảnh hay tập giá trị của f.

  Vậy $y \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists x \in X : y = f(x)$.

- Nghịch ảnh của tập con B của Y là tập

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X.$$

- Trường hợp B là tập hợp chỉ có một phần tử y ta viết

$$f^{-1}(y) \text{ thay cho } f^{-1}\left(\{y\}\right).$$

  Khi đó $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid y = f(x)\}$.

1.3.2. Phân loại ánh xạ

a. Đơn ánh

Định nghĩa 1.6. Ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ được gọi là một *đơn ánh* nếu ảnh của hai phần tử phân biệt của X là hai phần tử phân biệt của Y. Nghĩa là,

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

hoặc một cách tương đương

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Nói cách khác mọi $y \in Y, f^{-1}(y)$ là tập có nhiều nhất một phần tử.

b. Toàn ánh

Định nghĩa 1.7. Ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ được gọi là một *toàn ánh* nếu mọi phần tử của Y là ảnh của một phần tử nào đó của X. Nghĩa là $\operatorname{Im} f = Y$, hay

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ sao cho } y = f(x).$$

Mỗi hàm số là một toàn ánh từ tập xác định vào tập giá trị của nó.

c. Song ánh

Định nghĩa 1.8. Ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ vừa đơn ánh vừa toàn ánh được gọi là một *song ánh*.

Chú ý 1.5.

- Một ánh xạ hoàn toàn xác định khi biết tập nguồn, tập đích, công thức xác định $y = f(x)$.
- Khi ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ được cho dưới dạng công thức xác định ảnh $y = f(x)$ thì ta có thể xác định tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh của ánh xạ f bằng cách giải và biện luận phương trình

$$y = f(x), y \in Y \tag{1.1}$$

  trong đó ta xem x là ẩn và y là tham biến. Khi đó

  - Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (1.1) luôn có nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là toàn ánh.
  - Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (1.1) có không quá một nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là đơn ánh.
  - Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (1.1) luôn có duy nhất nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là song ánh.

Ví dụ 1.15.

(a) Cho ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = x^2 + x \end{aligned}$$

Xét phương trình $y = f(x) = x^2 + x$ hay $x^2 + x - y = 0$. (*)

Biệt số $\Delta = 1 + 4y$ ($y \in \mathbb{R}$).

Nếu $y < -\dfrac{1}{4}$ thì phương trình (*) không có nghiệm trong $\mathbb{R}$. Vậy f không toàn ánh.

Nếu $y > -\dfrac{1}{4}$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt trong $\mathbb{R}$. Vậy f không đơn ánh.

(b) Cho ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto y = x^2 + x \end{aligned}$$

Xét phương trình $y = f(x) = x^2 + x$ hay $x^2 + x - y = 0$. (**) $(y \in \mathbb{N})$

Biệt số $\Delta = 1 + 4y > 0$ (vì $y \in \mathbb{N}$). Phương trình (**) luôn có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+4y}}{2}.$$

Vì $x_2 < 0$ nên (**) chỉ có nhiều nhất một nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy f đơn ánh.

Với $y = 1$, phương trình $(**)$ không có nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy f không toàn ánh.

Ví dụ 1.16. Các hàm số đơn điệu chặt:

Đồng biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

Nghịch biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

là các đơn ánh, do đó là song ánh từ tập xác định lên miền giá trị của nó.

Ví dụ 1.17. Ánh xạ đồng nhất của mọi tập X xác định và ký hiệu như sau là một song ánh

$$\begin{aligned} Id_X : X &\longrightarrow X \\ x &\mapsto Id_X(x) = x. \end{aligned}$$

1.3.3. Ánh xạ hợp, ánh xạ ngược

a. Hợp của hai ánh xạ

Định nghĩa 1.9. Với hai ánh xạ $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ thì tương ứng $x \mapsto g(f(x))$ xác định một ánh xạ từ X vào Z được gọi là *hợp* của hai ánh xạ f và g, ký hiệu $g \circ f$.

Vậy $g \circ f : X \longrightarrow Z$ có công thức xác định ảnh là $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ví dụ 1.18. Cho $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ với công thức xác định ảnh

$$f(x) = 3x + 5, g(x) = \sin x.$$

Ta có thể thiết lập hai hàm hợp $g \circ f$ và $f \circ g$ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ là

$$f \circ g(x) = 3\sin x + 5; g \circ f(x) = \sin(3x + 5).$$

Dễ thấy $3\sin x + 5 > 1, \sin 3x + 5 < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $f \circ g(x) \neq g \circ f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

b. Ánh xạ ngược

Định nghĩa 1.10. Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là một song ánh. Khi đó với mỗi $y \in Y$ tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy tương ứng mỗi phần tử $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$ là một ánh xạ từ Y vào X. Ánh xạ này được gọi là *ánh xạ ngược* của f và được ký hiệu là f^{-1}. Vậy

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X \text{ xác định bởi } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

Ví dụ 1.19. Hàm số bậc nhất $y = ax + b, a \neq 0$ là hàm đơn điệu

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = ax + b \end{aligned}$$

nên là song ánh.

Cách khác, bằng cách giải phương trình (1.1) tương ứng: $ax + b = y, a \neq 0$.

Phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{a}y - \dfrac{b}{a}$, do đó f là một song ánh.

f có ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y \mapsto x = \dfrac{1}{a}y - \dfrac{b}{a}$.

Vậy hàm số $y = ax + b, a \neq 0$ có hàm ngược là hàm số bậc nhất $y \mapsto x = \dfrac{1}{a}y - \dfrac{b}{a}, a \neq 0$.

Ví dụ 1.20. Hàm mũ cơ số a: $y = a^x, 0 < a \neq 1$ là một song ánh (vì hàm mũ đơn điệu chặt) có hàm ngược là hàm lôgarit cơ số a:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

Ví dụ 1.21. Các hàm số lượng giác ngược

a) Xét hàm số

$$\begin{aligned} \sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

Hàm số này tăng ngặt và là toàn ánh nên là một song ánh. Hàm số có hàm số ngược

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1; 1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ y &\mapsto \arcsin y \end{aligned}$$

Vậy $x = \arcsin y \Leftrightarrow \sin x = y, \forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1; 1]$.

Nếu ký hiệu giá trị của hàm arcsin là y và biến là x thì $y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x, \forall y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right], \forall x \in [-1; 1]$.

Mặc dù vậy người ta cũng thường nói hàm $y = \arcsin x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \sin x$.

b) Tương tự

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x, \forall y \in [0; \pi], \forall x \in [-1; 1];$$
$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x, \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \forall x \in (-\infty, +\infty);$$
$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \cot y = x, \forall y \in (0; \pi), \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Chú ý 1.6.

- Nói chung $f \circ g \neq g \circ f$, nghĩa là phép hợp ánh xạ không có tính giao hoán.
- Theo thói quen người ta thường ký hiệu hàm số là y còn biến số là x, kể cả trường hợp hàm ngược của một hàm nào đó. Từ định nghĩa suy ra rằng đồ thị của hàm số và hàm số ngược của nó đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất: $y = x$.
- Nếu $f : X \longrightarrow Y$ là một song ánh có ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, khi đó có thể kiểm tra lại được $f^{-1} \circ f = Id_X$ và $f \circ f^{-1} = Id_Y$.
- Chỉ ánh xạ là song ánh mới có ánh xạ ngược.
- Ánh xạ ngược của một song ánh cũng là một song ánh.

Bài tập Chương 1

▷ **1.1.** Tìm mối liên hệ giữa hai tập hợp sau:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x > -3\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 < 0\}$;

b) A là tập tất cả các số thực không âm, B là tập tất cả các số thực lớn hơn hoặc bằng giá trị tuyệt đối của chính nó.

▷ **1.2.** Cho A, B, C, D là các tập con của E. Chứng minh rằng:

a) $A \setminus B = \emptyset$ khi và chỉ khi $A \subset B$;

b) Nếu $A \subset B, C \subset D$ thì $A \cup C \subset B \cup D, A \cap C \subset B \cap D$;

c) Nếu $A \cup C \subset A \cup B, A \cap C \subset A \cap B$ thì $C \subset B$.

▷ **1.3.** Cho A, B là hai tập con của E. Chứng minh rằng

a) $A \subset B \longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$;

b) $A \subset B \longrightarrow A \cup B = B \longrightarrow \overline{A} \cup B = E$;

c) $A \subset B \longrightarrow A \cap B = A \longrightarrow \overline{B} \cap A = \emptyset$;

d) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

e) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

f) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

▷ **1.4.** Cho A, B, C, D là các tập con của E. Chứng minh rằng

a) $A \cap B \neq \emptyset \longrightarrow (A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset$;

b) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

▷ **1.5.** Cho tập $A = \{x, y, z\}$, viết $\mathcal{P}(A)$.

▷ **1.6.** Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{4, 5, 6\}$ và $D = \{2, 5, 8\}$ là các tập con của $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

a) Liệt kê các phần tử trong các tập $A \cap \left(B \cup \overline{C}\right)$ và $\left(\overline{D} \cap B\right) \cup C$;

b) Biểu diễn mỗi một tập $\{5\}$; $\{2, 8\}$; $\{4, 6, 10\}$ theo các tập A, B, C, D.

▷ **1.7.** Chứng tỏ các ánh xạ với công thức xác định ảnh sau là đơn ánh nhưng không toàn ánh

a) $f(x) = \dfrac{x + 4}{2x + 1}$; b) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x - 5}$.

▷ **1.8.** Chứng tỏ các ánh xạ với công thức xác định ảnh sau là toàn ánh nhưng không đơn ánh

a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$.

▷ **1.9.** Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có công thức xác định ảnh $f(x) = x^3 + 5$ là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Tìm công thức xác định ảnh của ánh xạ ngược nếu tồn tại.

▷ **1.10.** Ánh xạ $f : [-1; 1] \to [-1; 3]$ có công thức xác định ảnh $f(x) = x^2 - 2x$ là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Tìm công thức xác định ảnh của ánh xạ ngược nếu tồn tại.

▷ **1.11.** Cho hai ánh xạ $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh như sau

$$f(x,y) = (2x+y, 5x+3y);$$
$$g(x,y) = (2x+4y, x+2y).$$

a) Chứng tỏ ánh xạ f với công thức xác định ảnh trên là song ánh;

b) Ánh xạ g với công thức xác định ảnh trên có phải một song ánh không?

c) Viết công thức xác định f^{-1};

d) Tìm tập ảnh của mỗi ánh xạ;

e) Xác định các tập $f^{-1}(\theta), g^{-1}(\theta)$, với $\theta = (0,0)$.

▷ **1.12.** Cho ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$, $A, B \subset X$. Chứng minh rằng:

a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$;

Tìm ví dụ chứng tỏ $f(A) \subset f(B)$ nhưng $A \not\subset B$;

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Tìm ví dụ chứng tỏ $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$;

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Nếu f đơn ánh thì

d) $f(A) \subset f(B) \Rightarrow A \subset B$;

e) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

▷ **1.13.** Cho ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$, $C, D \subset Y$. Chứng minh rằng:

a) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;

b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;

c) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

▷ **1.14.** Ký hiệu $h = g \circ f$ là hợp của hai ánh xạ $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$. Chứng minh rằng:

a) Nếu f, g đơn ánh thì h đơn ánh;

b) Nếu f, g toàn ánh thì h toàn ánh;

c) Nếu h toàn ánh thì g toàn ánh;

d) Nếu h đơn ánh thì f đơn ánh;

e) Nếu h đơn ánh và f toàn ánh thì g đơn ánh;

f) Nếu h toàn ánh và g đơn ánh thì f toàn ánh.

▷ **1.15.** Cho hai song ánh σ, μ của tập $\{1, 2, 3, 4\}$, ký hiệu như sau

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

trong đó hàng dưới là ảnh của ánh xạ.

a) Xác định $\sigma \circ \mu, \mu \circ \sigma$;

b) Xác định σ^{-1}, μ^{-1};

c) Chứng minh $(\sigma \circ \mu)^{-1} = \mu^{-1} \circ \sigma^{-1}$.

Hướng dẫn giải bài tập Chương 1

▷ **1.1.** a) $A = (-\infty, 1) \cup (3, \infty), B = (-\infty, 1) \Rightarrow B \subset A$;

b) $A = B = \mathbb{R}_+$.

▷ **1.2.** a) $A \backslash B \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \in A \backslash B \Leftrightarrow \exists x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow A \not\subset B$;

b) $x \in A \cup C \Rightarrow (x \in A) \vee (x \in C) \Rightarrow (x \in B) \vee (x \in D) \Rightarrow x \in B \cup D$,
$x \in A \cap C \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in C) \Rightarrow (x \in B) \wedge (x \in D) \Rightarrow x \in B \cap D$;

c) $x \in C$:

- Nếu $x \in A$ thì $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$,
- Nếu $x \notin A$ vì $x \in A \cup C \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$.

$\triangleright$ **1.3.** Sử dụng lôgic mệnh đề.

$\triangleright$ **1.4.** Sử dụng lôgic mệnh đề.

$\triangleright$ **1.5.** $\mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, A\Big\}$.

$\triangleright$ **1.6.** a) $A \cap (B \cup \overline{C}) = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$, $(\overline{D} \cap B) \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$;

b) $\{5\} = A \cap B \cap C \cap D$; $\{2, 8\} = (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \cap D$, $\{4, 6, 10\} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{D})$.

$\triangleright$ **1.7.** Xét phương trình $f(x) = y$.

a) $\dfrac{x+4}{2x+1} = y \Leftrightarrow x + 4 = y(2x + 1), \forall x \neq -\frac{1}{2}$;
Phương trình có duy nhất nghiệm $x = \dfrac{y-4}{1-2y}, \forall y \neq \frac{1}{2}$.
Vậy f đơn ánh nhưng không toàn ánh.

b) $\dfrac{2x-3}{x-5} = y \Leftrightarrow 2x - 3 = y(x - 5), \forall x \neq 5$;
Phương trình có duy nhất nghiệm $x = \dfrac{3-5y}{2-y}, \forall y \neq 2$.
Vậy f đơn ánh nhưng không toàn ánh.

$\triangleright$ **1.8.** Chứng minh rằng phương trình $f(x) = y$ luôn tồn tại nghiệm với mọi y và nghiệm không duy nhất.

$\triangleright$ **1.9.** Phương trình $x^3 + 5 = y$ luôn tồn tại duy nhất nghiệm $x = \sqrt[3]{y-5}$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Vậy f là một song ánh, do đó f có ánh xạ ngược $y \mapsto x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-5}$.

$\triangleright$ **1.10.** Phương trình $x^2 - 2x = y, y \in [-1; 3]$ luôn tồn tại duy nhất nghiệm $x = 1 - \sqrt{y+1}$ với mọi $y \in [-1; 3]$. Vậy f là một song ánh, do đó f có ánh xạ ngược $y \mapsto x = f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y+1}$.

▷ **1.11.** a) Phương trình $f(x,y) = (X,Y) \Leftrightarrow (2x+y, 5x+3y) = (X,Y)$ tương đương với hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y = X \\ 5x+3y = Y. \end{cases}$

Với mọi $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ hệ phương trình luôn có duy nhất nghiệm $x = 3X - Y, y = -5X + 2Y$. Vậy f là một song ánh;

b) Phương trình $g(x,y) = (X,Y) \Leftrightarrow (2x+4y, x+2y) = (X,Y)$ tương đương với hệ phương trình $\begin{cases} 2x+4y = X \\ x+2y = Y. \end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $X = 2Y$.
Khi $X = 2Y$ thì hệ phương trình tương đương với một phương trình nên có vô số nghiệm.
Vậy g không toàn ánh và không đơn ánh;

c) Công thức xác định ảnh của ánh xạ ngược f^{-1}:

$$(X,Y) \mapsto (x,y) = f^{-1}(X,Y) = (3X - Y, -5X + 2Y);$$

d) $\mathrm{Im}f = f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}g = g(\mathbb{R}^2) = \{Y(2,1) \mid Y \in \mathbb{R}\}$;

e) $f^{-1}(0,0) = \{(0,0)\}$, $g^{-1}(0,0) = \{y(-2,1) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

▷ **1.12.** a) $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A : y = f(x) \Rightarrow x \in B \Rightarrow y = f(x) \in f(B)$;
Xét $y = f(x) = x^2; A = [-1,1], B = [0,2]$ có $f(A) \subset f(B)$ nhưng $A \not\subseteq B$.

b) $f(A \cap B) \subset f(A)$ và $f(A \cap B) \subset f(B) \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Xét $y = f(x) = x^2; A = [-2,1], B = [0,2]$ có $f(A) \cap f(B) \not\subseteq f(A \cap B)$;

c) $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x \in (A \cup B) : y = f(x) \Leftrightarrow y = f(x) : x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$.
Khi f đơn ánh

d) $x \in A \Rightarrow y = f(x) \in f(A) \Rightarrow y \in f(B) \Rightarrow \exists x' \in B : y = f(x')$. Vì f đơn ánh nên $x = x' \in B$;

e) $y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow \exists x \in A, \exists x' \in B : y = f(x) = f(x')$. Vì f đơn ánh nên $x = x' \in A \cap B \Rightarrow y \in f(A \cap B)$.

▷ **1.13.** a) $x \in f^{-1}(C \cap D) \Leftrightarrow y = f(x) \in (C \cap D) \Leftrightarrow \Big(y = f(x) \in C\Big) \wedge \Big(y = f(x) \in D\Big) \Leftrightarrow \Big(x \in f^{-1}(C)\Big) \wedge \Big(x \in f^{-1}(D)\Big) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;

b) $x \in f^{-1}(C \cup D) \Leftrightarrow y = f(x) \in (C \cup D) \Leftrightarrow \Big(y = f(x) \in C\Big) \vee \Big(y = f(x) \in D\Big) \Leftrightarrow \Big(x \in f^{-1}(C)\Big) \vee \Big(x \in f^{-1}(D)\Big) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;

c) $x \in f^{-1}(C \setminus D) \Leftrightarrow y = f(x) \in (C \setminus D) \Leftrightarrow \Big(y = f(x) \in C\Big) \wedge \Big(y = f(x) \notin D\Big) \Leftrightarrow \Big(x \in f^{-1}(C)\Big) \wedge \Big(x \notin f^{-1}(D)\Big) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

▷ **1.14.** a) $h(x) = h(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;

b) $h(X) = (g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$;

c) $h(X) = (g \circ f)(X) = g(f(X)) = Z \Rightarrow Z = g(f(X)) \subset g(Y) \subset Z \Rightarrow g(Y) = Z$.

d) $f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow h(x) = h(x') \Rightarrow x = x'$;

e) $g(y) = g(y')$; $g(y) = g(f(x))$, $g(y') = g(f(x'))$; $\Rightarrow x = x' \Rightarrow y = y'$;

f) $\forall y \in Y$; $\exists x \in X :\ h(x) = g(y)$; g đơn ánh do đó $y = f(x)$.

▷ **1.15.** a)

$$\sigma \circ \mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mu \circ \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix};$$

b)

$$\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mu^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

c)

$$\begin{cases} 1 \xrightarrow{\sigma^{-1}} 3 \xrightarrow{\mu^{-1}} 2 \\ 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 1 \\ 3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 4 \\ 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \end{cases} \Rightarrow \mu^{-1} \circ \sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (\sigma \circ \mu)^{-1}.$$

Chương 2
Không gian véc tơ n chiều

Khái niệm không gian véc tơ có nguồn gốc từ vật lý. Ban đầu các véc tơ là những đoạn thẳng có định hướng, với khái niệm này người ta đã sử dụng để biểu diễn các đại lượng vật lý như: véc tơ vận tốc, lực tác động, lực điện từ .... Các nhà vật lý còn sử dụng phương pháp véc tơ Fresnel để tổng hợp các dao động điều hoà. Ở phổ thông trung học ta đã dùng véc tơ để nghiên cứu hình học, vật lý. Đó là một đại lượng có hướng.

Cuối thế kỷ 17 Đề Các đã đề xuất phương pháp tọa độ để giải quyết các bài toán hình học. Với phương pháp này mỗi véc tơ trong mặt phẳng được đồng nhất với một cặp số là hoành độ và tung độ còn véc tơ trong không gian được đồng nhất với bộ ba số. Các phép toán của véc tơ (cộng véc tơ, nhân 1 số với véc tơ) có thể chuyển tương ứng bằng phép toán trên các bộ số và thoả mãn một số tính chất nào đó. Trong nhiều lĩnh vực khác chúng ta cũng thấy những đối tượng khác như các đa thức, hàm số, v.v... có các phép toán thoả mãn các tính chất tương tự các véc tơ. Điều này dẫn đến việc khái quát hoá khái niệm véc tơ.

Khái niệm véc tơ được sử dụng trong các mô hình kinh tế và các bài toán về qui hoạch tuyến tính. Học tốt chương này sẽ giúp sinh viên khối ngành kinh tế có kiến thức để học tốt môn Toán kinh tế và các môn chuyên ngành. Không gian véc tơ (còn gọi là không gian tuyến tính) là nền tảng của môn đại số tuyến tính. Trong khuôn khổ học phần Toán cao cấp 2, ta chỉ xét không gian véc tơ thực n chiều, với n là số tự nhiên.

Chúng ta thấy khái niệm không gian véc tơ được hình thành qua một quá trình lâu dài trên cơ sở các thành tựu về lý thuyết cũng như ứng dụng thực tế và có tính khái quát hoá cao. Vì vậy để học tốt chương này đòi hỏi người học phải nắm vững khái niệm không gian véc tơ với mức độ trừu tượng cao, còn các mô hình cụ thể là các không gian 2 chiều, 3 chiều mà ta đã biết ở chương trình phổ thông.

Mặc dù phạm vi áp dụng của chương đối với sinh viên khối ngành kinh tế chỉ giới hạn trong không gian $\mathbb{R}^n$, nhưng chúng tôi vẫn trình bày chương này một cách tổng quát trong mức độ có thể để cung cấp cho người học những kiến thức cơ bản về không gian véc tơ.

2.1. Khái niệm và tính chất của không gian véc tơ

Trước hết, chúng ta nghiên cứu một cách khái quát về không gian véc tơ.

2.1.1. Định nghĩa không gian véc tơ

Định nghĩa 2.1. Tập hợp V khác $\emptyset$ được gọi là *không gian véc tơ* thực nếu:

1. Trên V có phép toán trong

$$\begin{aligned}(+) : V \times V &\longrightarrow V\\ (u, v) &\mapsto u + v.\end{aligned}$$

2. Trên V có phép toán ngoài

$$\begin{aligned}(.) : \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V\\ (\alpha, u) &\mapsto \alpha u.\end{aligned}$$

Hai phép toán trên thỏa mãn 8 tiên đề sau, đúng với mọi $u, v, w \in V$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

V1) $(u + v) + w = u + (v + w)$;

V2) Tồn tại phần tử không $\theta \in V$ sao cho $u + \theta = \theta + u = u$;

V3) Với mỗi $u \in V$ tồn tại phần tử đối $-u \in V$ sao cho

$$u + (-u) = (-u) + u = \theta;$$

V4) $u + v = v + u$;

V5) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$;

V6) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$;

V7) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;

V8) $1u = u$.

Các phần tử của V được gọi là các véc tơ, các phần tử của $\mathbb{R}$ được gọi là các phần tử vô hướng. Ta cũng không cần sử dụng ký hiệu mũi tên cho các véc tơ của V.

Bốn tiên đề V1-V4 chứng tỏ phép cộng véc tơ (+) có 4 tính chất: kết hợp, tồn tại véc tơ không, mọi véc tơ có véc tơ đối, phép cộng véc tơ có tính giao hoán. Bốn tiên đề V5-V8 chứng tỏ phép nhân (.) có 4 tính chất: phân bố, kết hợp và phép nhân véc tơ với đơn vị. Các tính chất này được khái quát hóa từ các phép toán cộng véc tơ và nhân một số với véc tơ mà ta đã biết trong chương trình Toán phổ thông.

Ví dụ 2.1. Ký hiệu R_2 là tập hợp các véc tơ tự do trong trong mặt phẳng, R_3 là tập hợp các véc tơ tự do trong không gian (trong đó ta đồng nhất các véc tơ tương đẳng: các véc tơ cùng phương, cùng hướng, cùng độ dài). Xét phép cộng hai véc tơ theo quy tắc hình bình hành và phép nhân một số thực với một véc tơ theo nghĩa thông thường thì R_2, R_3 là hai không gian véc tơ thực.

Ví dụ 2.2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy mỗi véc tơ đồng nhất với tọa độ là cặp số thực (hoành độ, tung độ).

$\overrightarrow{u} = (x, y); \overrightarrow{v} = (x', y')$ thì $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x + x', y + y'); k\overrightarrow{u} = (kx, ky), \forall k \in \mathbb{R}$.

Tương tự trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ mỗi véc tơ đồng nhất với tọa độ là bộ ba số thực (hoành độ, tung độ, cao độ), khi đó phép cộng hai véc tơ và phép nhân một số với véc tơ được thực hiện qua tọa độ như sau:

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z'); k(x, y, z) = (kx, ky, kz), \forall k \in \mathbb{R}.$$

Khái quát hoá phép cộng hai véc tơ và phép nhân một số với véc tơ như trên ta có hai phép toán xác định trong $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ như sau:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n);$$
$$k(x_1, \dots, x_n) = (kx_1, \dots, kx_n),\ \forall\ k \in \mathbb{R}.$$

Hai phép toán này thỏa mãn 8 điều kiện V1)-V8) của Định nghĩa 2.1 do đó $\mathbb{R}^n$ là không gian véc tơ với véc tơ không của $\mathbb{R}^n$ là $\theta = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n \text{ phần tử}}$, véc tơ đối của $x = (x_1, \ldots, x_n)$ là $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

Ví dụ 2.3. Đặt $P_n[x]$ là tập các đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng n, n là số nguyên dương cho trước

$$P_n[x] = \{p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n; a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Xét $P_n[x]$ với phép cộng hai đa thức và phép nhân một số với một đa thức. Vì tổng hai đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng n, tích một số với một đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng n cũng là một đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng n.

Hai phép toán này thỏa mãn 8 điều kiện V1)-V8) của Định nghĩa 2.1 với véc tơ không tương ứng là đa thức θ (đa thức bậc 0 với hệ số bằng 0). Vậy $P_n[x]$ là một không gian véc tơ thực.

Có thể kiểm tra được rằng tập hợp các đa thức bậc bằng n, n là số nguyên dương cho trước với phép cộng đa thức và phép nhân một số với một đa thức không phải là không gian véc tơ. Vì tổng hai đa thức bậc n chưa chắc là đa thức bậc n, không tồn tại phần tử 0 đối với phép cộng.

Chú ý 2.1. Từ đây ta qui ước chỉ nói gọn là không gian véc tơ hay không gian thay cho không gian véc tơ thực.

2.1.2. Tính chất cơ bản của không gian véc tơ

Định lý 2.1.

1) Trong không gian véc tơ, véc tơ không θ là duy nhất.

2) Với mọi $u \in V$, véc tơ đối $-u$ của u là duy nhất.

3) $ku = \theta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ u = \theta. \end{array}\right.$

4) $(-k)u = k(-u) = -(ku), \forall k \in \mathbb{R}, \forall u \in V$. Đặc biệt, $(-1)u = -u$.

5) Giả sử $u_1, \ldots, u_n$ là các véc tơ của không gian véc tơ V, khi đó với mọi số thực $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ thì $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ (gọi là *một tổ hợp tuyến tính* của $u_1, \ldots, u_n$) cũng là một véc tơ của V.

Chứng minh.

1) Giả sử có hai véc tơ không là θ_1, θ_2, khi đó từ V2) ta có $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2$.

2) Giả sử u có hai véc tơ đối u_1, u_2, khi đó

$$u_1 = u_1 + \theta = u_1 + (u + u_2) = (u_1 + u) + u_2 = \theta + u_2 = u_2.$$

3) ($\Leftarrow$): Nếu $k = 0$ ta có

$$0u = 0u + \theta = 0u + (u + (-u)) = 0u + 1u + (-u) = (0+1)u + (-u) = u + (-u) = \theta.$$

Nếu $u = \theta$ ta có

$$\begin{aligned} k\theta &= k\theta + (k\theta + (-k\theta)) = k\theta + k\theta + (-k\theta) \\ &= k(\theta + \theta) + (-k\theta) = k\theta + (-k\theta) = \theta. \end{aligned}$$

($\Rightarrow$): Giả sử có $ku = \theta$. Nếu $k \neq 0$ thì tồn tại $\dfrac{1}{k} \in \mathbb{R}$. Do đó,

$$u = 1.u = \left(\frac{1}{k}.k\right) u = \frac{1}{k}.(ku) = \frac{1}{k}\theta = \theta.$$

4) $\forall k \in \mathbb{R}, \forall u \in V : \theta = k\theta = k\,(u + (-u)) = ku + k(-u) = ku + (-k)u$
$\Rightarrow (-k)u = k(-u) = -(ku)$.

5) Được chứng minh quy nạp theo n. $\square$

Từ định nghĩa và tính chất của không gian véc tơ ta có thể mở rộng các khái niệm sau:

a) Hiệu của hai véc tơ: $u - v := u + (-v)$;

b) Luật chuyển vế: $u + v = w \Leftrightarrow u = w - v$;

c) Luật giản ước: $u + v = u + w \Rightarrow v = w$.

Định nghĩa 2.2. Trong không gian véc tơ V, véc tơ v bất kỳ gọi là *biểu diễn được thành một tổ hợp tuyến tính* của các véc tơ $u_1, \ldots, u_n$, nếu tồn tại các số thực $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sao cho v có thể viết dưới dạng

$$v = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

2.2. Không gian véc tơ con

2.2.1. Khái niệm không gian véc tơ con

Định nghĩa 2.3. Giả sử $W \neq \emptyset$ là tập con của không gian véc tơ $(V, +, .)$. Nếu hai phép toán trong V có thể thu hẹp vào W và thỏa mãn 8 tiên đề V1)-V8) trong Định nghĩa 2.1 thì W được gọi là một *không gian véc tơ con* của không gian véc tơ V (hay nói tắt: không gian con của V).

Ví dụ 2.4. Giả sử $(V, +, .)$ là không gian véc tơ. Khi đó V là không gian con của V và $\{\theta\}$ cũng là không gian con của V.

Định lý sau đây chỉ ra rằng nếu 2 phép toán trong V có thể thu hẹp được vào W thì các tiên đề V1-V8 luôn thoả mãn, do đó W là không gian véc tơ con của V.

Định lý 2.2. Giả sử W là một tập con khác rỗng của V. Hai mệnh đề sau đây tương đương:

i) W là không gian véc tơ con của V;

ii) W ổn định với hai phép toán của V, nghĩa là:

Với mọi $u, v \in W$ thì $u + v \in W$ (W ổn định với phép cộng);
Với mọi $u \in W$, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\alpha u \in W$ (W ổn định với phép nhân).

Chứng minh.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Hiển nhiên theo định nghĩa.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Vì $W \neq \emptyset$ nên tồn tại $u \in W$. Do tính ổn định của hai phép toán từ V vào W và áp dụng Định lý 2.1 ta có: $\theta = 0u \in W$ (thỏa mãn V2), với mọi $u \in W, -u = (-1)u \in W$ (thỏa mãn V3)). Các tiên đề còn lại hiển nhiên đúng. Vậy W là không gian véc tơ con của V. □

Ví dụ 2.5. Áp dụng Định lý 2.2, ta chứng minh được:

a) $W_1 = \{v = (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$;

b) $W_2 = \{v = (y, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$;

c) $W_3 = \{v = (x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$;

d) $W_4 = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0; x - y + 3z = 0\}$;

e) $W_5 = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y + 3z = 0\}$
là các không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 2.6.

a) Tập $W_6 = \{v = (x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$;

b) Tập $W_7 = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y - 5z = 0\}$,
không phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$ vì không thỏa mãn điều kiện của Định lý 2.2. Ta cũng nhận thấy rằng véc tơ θ không thuộc W_6.

2.2.2. Sự hình thành không gian véc tơ con

Ta sẽ chỉ ra một vài cách hình thành nên các không gian con của V.

a. Không gian con sinh bởi hệ véc tơ

Định lý 2.3. Cho hệ $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, u_i \in V, i = 1, \ldots, n$. Tập hợp W gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính của S là một không gian con của V. Đó là không gian con nhỏ nhất của V chứa hệ S, ký hiệu Span$S$.

$$W = \left\{ v \in V \mid v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\} =: \text{ Span}S.$$

Chứng minh.

Gọi W là tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của S. Ta chứng minh W là không gian con bé nhất của V chứa S.

i) Với mọi $u_i \in S$ thì $u_i = 1u_i \in W$, vậy $\emptyset \neq S \subset W$.

ii) Với mọi $u \in W, v \in W : u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n, v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n \in W$.
Với mọi $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\gamma u + \delta v &= \gamma(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) + \delta(\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n)\\ &= (\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1)u_1 + \cdots + (\gamma\alpha_n + \delta\beta_n)u_n \in W.\end{aligned}$$

Vậy W ổn định với hai phép toán của V. Theo Định lý 2.2 thì W là không gian con của V chứa S.

Giả sử W' là không gian con của V chứa S, khi đó với mọi

$$u \in W : u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Vì W' chứa S nên $u_1, \ldots, u_n \in W'$, do đó (theo ý 5) Định lý 2.1)

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in W'.$$

Vậy $W \subset W'$. Nói cách khác W là không gian con nhỏ nhất của V chứa S. □

Định nghĩa 2.4. $W = \operatorname{Span} S$ được gọi là *không gian véc tơ con của V sinh bởi hệ véc tơ S*. Đồng thời S được gọi là *hệ sinh* của W.

Ví dụ 2.7.

a) $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$ vì

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

b) Tương tự $\{e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,\ldots,0,1)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^n$.

c) Tập $W_1 = \{u = (x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ ở Ví dụ 2.5 là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi hệ hai véc tơ $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)\}$.

Ta cũng có thể viết

$$u = (x,y,0) = x(1,0,0) + y(0,1,0) = x(1,1,0) + (y-x)(0,1,0).$$

Nói cách khác $W_1 = \operatorname{Span}\{(1,0,0),(0,1,0)\} = \operatorname{Span}\{(1,1,0),(0,1,0)\}$.

Điều này chứng tỏ một không gian véc tơ con có thể được sinh bởi nhiều hệ véc tơ khác nhau.

d) Tập $W_2 = \{u = (y,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$ ở Ví dụ 2.5 là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi hệ hai véc tơ $\{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,0,1)\}$.

Chú ý 2.2.

- Giả sử $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là hệ sinh của V, nghĩa là $\operatorname{Span} S = V$. Khi đó với mọi $v \in V$:

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

- Không gian véc tơ có một hệ sinh hữu hạn gọi là không gian hữu hạn sinh. Giáo trình này chỉ hạn chế xét các không gian hữu hạn sinh.

b. Giao của các không gian con

Định lý 2.4. Nếu W_1, W_2 là hai không gian con của V thì $W_1 \cap W_2$ cũng là không gian con của V. Ta gọi không gian véc tơ con này là giao của các không gian con W_1, W_2.

Chứng minh.

Áp dụng Định lý 2.2 ta dễ dàng suy ra điều cần chứng minh. □

Ví dụ 2.8. Xét W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 ở Ví dụ 2.5 thì

$$v = (x, y, z) \in W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v = (x, y, z) \in W_1 \\ v = (x, y, z) \in W_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow v = (y, y, 0); y \in \mathbb{R}.$$

Vậy $W_1 \cap W_2 = \{y(1, 1, 0); y \in \mathbb{R}\} = \text{Span}\{(1, 1, 0)\}$.
Tương tự ta có

$$v = (x, y, z) \in W_2 \cap W_3 \Leftrightarrow \begin{cases} v = (x, y, z) \in W_2 \\ v = (x, y, z) \in W_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow v = (0, 0, 0).$$

Vậy $W_2 \cap W_3 = \{\theta = (0, 0, 0)\}$.

$$v = (x, y, z) \in W_4 \cap W_5 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v = (0, 0, 0).$$

Vậy $W_4 \cap W_5 = \{\theta = (0, 0, 0)\}$.

2.3. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

2.3.1. Các khái niệm

a. Biểu diễn véc tơ thành tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ bất kỳ

Theo Định nghĩa 2.2, véc tơ v bất kỳ được gọi là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, \ldots, u_n$ nếu v có thể viết dưới dạng

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Khi đó ta nói v biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, \ldots, u_n$, hay v biểu thị tuyến tính qua các véc tơ $u_1, \ldots, u_n$.

Nhận xét 2.1.

1) Từ Định lý 2.3 ta thấy rằng véc tơ v biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, \dots, u_n$ khi và chỉ khi $v \in \text{Span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

2) Khi véc tơ v có thể biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, \dots, u_n$ thì cách biểu diễn có thể duy nhất hoặc không duy nhất, điều này phụ thuộc vào đặc điểm của từng hệ véc tơ cụ thể.

3) Véc tơ θ luôn có một cách biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính qua mọi hệ các véc tơ $u_1, \dots, u_n$ bất kỳ như sau $\theta = 0u_1 + \cdots + 0u_n$, ta gọi đây là một cách biểu diễn tầm thường của véc tơ θ qua hệ các véc tơ $u_1, \dots, u_n$. Từ đó suy ra nếu tồn tại một hệ số $\alpha_i \neq 0$ sao cho $\theta = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ thì ta nói véc tơ θ biểu diễn không tầm thường qua hệ các véc tơ $u_1, \dots, u_n$.

Ví dụ 2.9. Trong không gian $\mathbb{R}^2$ xét hệ véc tơ $\{u_1 = (0, -1), u_2 = (1, 4)\}$ và $v = (a, b)$.

Giả sử $v = xu_1 + yu_2$. Khi đó

$$(a, b) = xu_1 + yu_2 = x(0, -1) + y(1, 4) = (y, -x + 4y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4a - b \\ y = a. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất với mọi a, b. Vậy véc tơ $v = (a, b)$ bất kỳ nào cũng chỉ có duy nhất một cách biểu diễn qua hệ véc tơ $\{u_1 = (0, -1), u_2 = (1, 4)\}$.

Do đó véc tơ $\theta \in \mathbb{R}^2$ cũng chỉ có duy nhất một cách biểu diễn tầm thường qua hệ véc tơ đã cho. Nghĩa là chỉ có thể viết duy nhất dưới dạng $\theta = (0, 0) = 0u_1 + 0u_2$.

Ví dụ 2.10. Trong không gian $\mathbb{R}^2$ xét hệ véc tơ $\{u_1 = (0, -1), u_2 = (1, 4), u_3 = (2, 3)\}$ và $v = (a, b)$.

Giả sử $v = xu_1 + yu_2 + zu_3$. Khi đó

$$\begin{aligned} (a, b) &= x(0, -1) + y(1, 4) + z(2, 3) = (y + 2z, -x + 4y + 3z) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z & = a \\ -x + 4y + 3z & = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4a - b - 5z \\ y = a - 2z; z \text{ tùy ý}. \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ phương trình trên có vô số nghiệm phụ thuộc z tùy ý.
Chẳng hạn trường hợp $v = \theta = (0, 0)$ và $v = (1, 6)$:

Với $z = 0$:

$$\theta = (0,0) = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3; (1,6) = -2u_1 + u_2 + 0u_3.$$

Với $z = -1$:

$$\theta = (0,0) = 5u_1 + 2u_2 - u_3; (1,6) = 3u_1 + 3u_2 - u_3.$$

Trong ví dụ này ta thấy véc tơ θ, cũng như véc tơ $(1,6)$ có nhiều hơn một cách biểu diễn thành một tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ đã cho.

Ví dụ 2.11. Trong không gian $\mathbb{R}^2$ xét hệ véc tơ $\{u_1 = (1,-3), u_2 = (-2,6)\}$. Ta kiểm tra được kết quả sau:

- Mọi véc tơ $u = (a,b), 3a + b \neq 0$ không thể biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của hệ $\{u_1, u_2\}$;
- Véc tơ $\theta = (0,0)$ và các véc tơ $v = (a,b), 3a + b = 0$ lại có vô số cách biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của hệ $\{u_1, u_2\}$, cụ thể:

$$\theta = (0,0) = 0u_1 + 0u_2 = 2u_1 + 1u_2 = 2tu_1 + tu_2, \forall t \in \mathbb{R};$$

$$v = (a,-3a) = \frac{a}{t}\big(3tu_1 + tu_2\big), \forall t \neq 0.$$

b. Độc lập tuyến tính

Qua các ví dụ trên ta nhận thấy rằng: nếu véc tơ θ có nhiều cách biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của một hệ véc tơ nào đó thì mọi véc tơ bất kỳ cũng biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ này theo nhiều cách.

Ta xét hệ véc tơ S thỏa mãn điều kiện nếu có thể biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của S thì cách biểu diễn này là duy nhất.

Định nghĩa 2.5. Cho hệ $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ gồm n véc tơ của không gian véc tơ V. Hệ S được gọi là *hệ độc lập tuyến tính* nếu

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \theta \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Nói cách khác hệ S được gọi là độc lập tuyến tính nếu: véc tơ θ chỉ có duy nhất một cách biểu diễn thành một tổ hợp tuyến tính tầm thường qua hệ S.

c. Phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa 2.6. Hệ không độc lập tuyến tính được gọi là *phụ thuộc tuyến tính*.

Vậy hệ $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi ta có thể tìm được $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \theta$.

Nói cách khác hệ S được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu: ngoài cách biểu diễn tầm thường, véc tơ θ còn có ít nhất một cách biểu diễn không tầm thường qua hệ S.

Ví dụ 2.12.

a) Hệ chứa véc tơ θ là hệ phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy

$$0u_1 + \cdots + 0u_n + 1\theta = \theta;$$

b) Hệ chỉ có một véc tơ $u \neq \theta$ là hệ độc lập tuyến tính;

c) Hệ hai véc tơ $\{u_1, u_2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng tỉ lệ, nghĩa là $u_1 = \alpha u_2$ hoặc $u_2 = \alpha u_1, \alpha \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2.13.

a) Trong R_2, hai véc tơ phụ thuộc tuyến tính khi và chi khi chúng cùng phương.

b) Trong R_3, ba véc tơ phụ thuộc tuyến tính khi và chi khi chúng đồng phẳng.

c) Trong Ví dụ 2.11, hệ véc tơ $\{u_1 = (1, -3), u_2 = (-2, 6)\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính của $\mathbb{R}^2$.

d) Trong Ví dụ 2.9, hệ véc tơ $\{u_1 = (0, -1), u_2 = (1, 4)\}$ là hệ độc lập tuyến tính của $\mathbb{R}^2$.

e) Hệ $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, -1), v_3 = (1, 3, 1)\}$ là hệ độc lập tuyến tính của $\mathbb{R}^3$.

2.3.2. Tính chất của các hệ độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

Định lý 2.5.

1) Hệ véc tơ chứa hệ con phụ thuộc tuyến tính là hệ phụ thuộc tuyến tính. Vì vậy, mọi hệ con của hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.

2) Một hệ véc tơ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại.

3) Giả sử hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính và u có thể biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ thì cách biểu diễn này là duy nhất, nghĩa là

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \text{ thì } \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n.$$

4) Giả sử hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $\{v_1, \ldots, v_n, u\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi u có thể biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Chứng minh.

1), 2) dễ dàng chứng minh. 3) Giả sử $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, vì hệ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính nên từ

$$\theta = u - u = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n$$

suy ra $\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$. Do đó $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.
4) Giả sử $\{v_1, \ldots, v_n, u\}$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta u = 0$. Rõ ràng $\beta \neq 0$, vì nếu ngược lại mâu thuẫn với giả thiết hệ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính.

$$\beta \neq 0 \Rightarrow u = -\frac{1}{\beta}(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n).$$

Cách viết duy nhất suy từ 3). □

2.4. Cơ sở - Số chiều của không gian véc tơ

2.4.1. Hạng của hệ véc tơ

a. Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ hữu hạn véc tơ

Định nghĩa 2.7. Cho hệ véc tơ S gồm hữu hạn các véc tơ của không gian V. Hệ con S'của hệ S được gọi là một *hệ con độc lập tuyến tính tối đại* của S nếu S' là hệ độc lập tuyến tính và không nằm trong bất kỳ hệ độc lập tuyến tính nào khác của S.

Nói cách khác S' là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S nếu:

- S' độc lập tuyến tính,

- Nếu thêm bất kỳ véc tơ nào của S vào S' thì ta nhận được hệ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 2.14. Trong không gian $\mathbb{R}^2$ tìm một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ véc tơ sau

$$S = \{u_1 = (0, -1), u_2 = (1, 4), u_3 = (2, 3), u_4 = (3, 8)\}.$$

Giải.

- Các hệ con có một véc tơ của S đều độc lập tuyến tính vì khác không.
- Hệ hai véc tơ bất kỳ của S là độc lập vì không tỉ lệ, chẳng hạn $\{u_1, u_2\}$ là một hệ độc lập tuyến tính. Nhưng khi thêm véc tơ khác: $\{u_1, u_2, u_3\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính vì $u_3 = 5u_1 + 2u_2$, $\{u_1, u_2, u_4\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính vì $u_4 = 4u_1 + 3u_2$.
  Vậy $\{u_1, u_2\}$ là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S đã cho.
- Tương tự, các hệ $\{u_1, u_3\}, \{u_1, u_4\}, \{u_2, u_3\}, \{u_3, u_4\}$ cũng là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ đã cho.

Tính chất của hệ con độc lập tuyến tính tối đại như sau

1) Nếu S' là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S thì mọi véc tơ của S đều biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính các véc tơ của S' một cách duy nhất (ý 4) Định lý 2.5).

2) Giả sử $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là hệ con độc lập tuyến tính của một hệ hữu hạn S. Khi đó ta có thể bổ sung thêm để được một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S chứa $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Thật vậy, nếu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ không tối đại thì tồn tại một véc tơ của S, ký hiệu v_{n+1} sao cho hệ $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ độc lập tuyến tính. Lập luận tương tự và vì hệ S hữu hạn nên quá trình bổ sung thêm này sẽ dừng lại, cuối cùng ta được hệ $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}\}$ độc lập tuyến tính tối đại của S. □

Định lý dưới đây cho ta một tính chất quan trọng của các hệ con độc lập tuyến tính tối đại trong một hệ hữu hạn véc tơ.

Định lý 2.6. Mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ hữu hạn đều có số véc tơ bằng nhau.

Bổ đề 2.1. (Định lý thế Steinitz, hay còn gọi là Định lý tráo véc tơ) Nếu hệ S độc lập tuyến tính có n véc tơ và mỗi véc tơ của S biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ R có k véc tơ thì $n \leq k$.

Chứng minh.

Giả sử $S = \{v_1, \dots, v_n\}, R = \{u_1, \dots, u_k\}$. Ta sẽ chứng minh rằng có thể thay dần các véc tơ của hệ S bằng các véc tơ của hệ R để có các hệ $R^1, R^2, \dots$ mà mỗi véc tơ của hệ S vẫn còn là tổ hợp tuyến tính của $R^1, R^2, \dots$

Thật vậy, ta có $v_1 = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k, v_1 \neq \theta$ (vì S độc lập tuyến tính) nên $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0, ta giả sử $\alpha_1 \neq 0$ (có thể đánh lại số thứ tự của R), suy ra

$$u_1 = \frac{1}{\alpha_1} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} u_2 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} u_k.$$

Xét hệ $R^1 = \{v_1, u_2, \dots, u_k\}$. Rõ ràng mọi véc tơ của S vẫn còn là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của R^1.

Tương tự ta có $v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_k u_k$, vì $\{v_1, v_2\}$ độc lập tuyến tính, nên $\beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0, ta giả sử $\beta_2 \neq 0$. Khi đó

$$u_2 = \frac{1}{\beta_2} v_2 - \frac{\beta_1}{\beta_2} v_1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} u_3 - \cdots - \frac{\beta_k}{\beta_2} u_k.$$

Xét hệ $R^2 = \{v_1, v_2, u_3, \dots, u_k\}$, mọi véc tơ của S cũng là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của R^2.

Nếu $n > k$, tiếp tục quá trình này cuối cùng ta được mọi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ $R^k = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, là hệ con của S. Điều này mâu thuẫn với giả thiết hệ S độc lập tuyến tính. Vậy $n \leq k$. □

Chứng minh định lý 2.6. (Đây chính là hệ quả của Bổ đề 2.1)

Giả sử $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}, \{v_{j_1}, \dots, v_{j_n}\}$ là hai hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S. Từ tính tối đại của mỗi hệ, suy ra rằng mọi véc tơ của hệ này là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ kia. Do đó $n \leq k$ và $k \leq n$, vậy $n = k$. □

Chú ý 2.3.

- Khái niệm hệ con độc lập tuyến tính tối đại còn được mở rộng sang không gian véc tơ có hệ sinh hữu hạn. Đó là một hệ véc tơ: độc lập tuyến tính và không nằm trong bất kỳ hệ độc lập tuyến tính nào khác của không gian véc tơ.

- Theo tính chất của hệ độc lập tuyến tính tối đại suy ra: Mọi không gian véc tơ V hữu hạn sinh đều tồn tại hệ con độc lập tuyến tính tối đại S. Mọi véc tơ của V đều biểu thị tuyến tính một cách duy nhất qua hệ con độc lập tuyến tính tối đại S.
- Từ Định lý 2.6 suy ra mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S nào đó trong không gian hữu hạn sinh đều có số véc tơ bằng nhau.

b. Hạng của hệ véc tơ

Theo Chú ý 2.3 ta có thể định nghĩa hạng của một hệ véc tơ như sau.

Định nghĩa 2.8. Số các véc tơ của một hệ con độc lập tuyến tính tối đại nào đó của hệ S được gọi là *hạng (rank)* của S, ký hiệu $r(S)$.

Quy ước hệ chỉ có véc tơ θ có hạng là 0, nghĩa là $r(\{\theta\}) = 0$.

Ví dụ 2.15. Hệ véc tơ ở Ví dụ 2.14 có hạng bằng 2.

Tính chất của hạng hệ véc tơ

Nhận xét 2.2. Hạng của hệ véc tơ không đổi nếu thực hiện một số hữu hạn các phép biến đổi (gọi là phép biến đổi sơ cấp) sau lên hệ S:

1) Đổi chỗ các véc tơ của hệ (hạng của hệ véc tơ không phụ thuộc vào thứ tự các véc tơ trong hệ);

2) Thêm (bớt) một số véc tơ là tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của hệ;

3) Nhân một số khác 0 với một véc tơ của hệ S;

4) Cộng vào một véc tơ của hệ S một tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của S, thì hệ S biến thành S' có $r(S) = r(S')$.

Vì các phép biến đổi sơ cấp này không làm thay đổi số véc tơ trong một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ, do đó hạng của hệ véc tơ không thay đổi.

c. Một số phương pháp tìm hạng của hệ véc tơ

Để tìm hạng của hệ véc tơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ta có thể sử dụng 2 cách sau:

Cách 1. Áp dụng định nghĩa: chỉ ra hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ đó, theo từng bước như sau:

- Loại các véc tơ $v_i = \theta$;
- Giả sử $v_1 \neq \theta$, loại các véc tơ v_i tỷ lệ với v_1;
- Giả sử $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ độc lập tuyến tính, khi đó $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}, v_j\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi v_j không biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$.

Cách 2. Áp dụng Nhận xét 2.2 về tính chất của hạng hệ véc tơ, bằng cách thực hiện các phép biến đổi sơ cấp lên hệ véc tơ đã cho để đưa về hệ véc tơ mà ta dễ dàng nhận được hạng của nó. Khi thực hành ta có thể viết tọa độ các véc tơ thành một bảng, mỗi véc tơ nằm trên một hàng (hoặc một cột). Sau đó biến đổi bảng số này sao cho các phần tử khác 0 mà các phần tử bên trái (phía trên) đều bằng 0 có dạng bậc thang theo hàng (hoặc theo cột).

Rõ ràng hệ các véc tơ khác θ có tọa độ dạng hình bậc thang là hệ độc lập tuyến tính tối đại.

Ví dụ 2.16. Tìm hạng của hệ véc tơ sau

$$\{v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,-1,1,-1), v_3 = (1,3,1,3), v_4 = (1,2,0,2), v_5 = (1,2,1,2)\}.$$

Giải.
Cách 1. v_1, v_2 không tỉ lệ nên độc lập tuyến tính. Nếu $v_3 = xv_1 + yv_2$ thì

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \\ x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$$

Do đó $x = 2, y = -1$. Vậy $v_3 = 2v_1 - v_2$. Nghĩa là hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính, loại v_3.

Nếu $v_4 = xv_1 + yv_2$ thì

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \\ x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$$

hệ vô nghiệm. Vậy $\{v_1, v_2, v_4\}$ độc lập tuyến tính.

Nếu $v_5 = xv_1 + yv_2 + zv_4$ thì

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + y = 1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Do đó, $x = \dfrac{3}{2}, y = -\dfrac{1}{2}, z = 0$. Vậy $v_5 = \dfrac{3}{2}v_1 - \dfrac{1}{2}v_2$, nghĩa là $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ phụ thuộc tuyến tính, loại v_5.

Suy ra $\{v_1, v_2, v_4\}$ là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Do đó, hệ véc tơ có hạng là 3.

Cách 2. Viết các véc tơ thành một bảng số (mỗi cột ứng với một véc tơ), rồi biến đổi tương đương theo cột thành bảng có dạng bậc thang cột.

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \end{matrix}\right. \xrightarrow{\substack{c_1 \to c_1 \\ -c_1 + c_2 \to c_2 \\ -c_1 + c_3 \to c_3 \\ -c_1 + c_4 \to c_4 \\ -c_4 + c_5 \to c_5}} \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}\right.$$

$$\xrightarrow{\substack{c_1 \to c_1 \\ c_4 \to c_2 \\ c_5 \to c_3 \\ 2c_4 + c_2 \to c_4 \\ c_2 + c_3 \to c_5}} \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right. \xrightarrow{\substack{c_1 \to c_1 \\ c_2 \to c_2 \\ c_3 \to c_3 \\ 2c_3 + c_4 \to c_4 \\ c_5 \to c_5}} \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \end{matrix}\right.$$

Bảng số này có dạng bậc thang theo cột, có 3 cột khác không là 3 véc tơ độc lập tuyến tính tối đại. Vậy hạng của $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ là 3.

Chú ý 2.4.

- Việc sử dụng các phép biến đổi sơ cấp đối với một hệ véc tơ để đưa bảng số về bảng có dạng bậc thang hàng (hoặc bậc thang cột) còn gọi là sử dụng phép biến đổi Gauss.

- Có thể sử dụng định thức để tìm hạng của hệ véc tơ sẽ được xét trong Chương 3.

2.4.2. Cơ sở, số chiều của không gian véc tơ

a. Cơ sở của không gian véc tơ

Định nghĩa 2.9. Mỗi hệ sinh độc lập tuyến tính của không gian véc tơ V được gọi là một *cơ sở của không gian véc tơ* V.

Ví dụ 2.17. Từ Định nghĩa 2.9 ta có thể kiểm tra các trường hợp sau.

a) $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$, gọi là cơ sở chính tắc.

b) Tương tự cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}.$$

c) Một cách tổng quát, cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ là $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ trong đó

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Định lý 2.7. Giả sử $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một hệ các véc tơ của V. Ba mệnh đề sau là tương đương:

i) Hệ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V;

ii) Hệ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính tối đại của V;

iii) Với mỗi véc tơ $u \in V$ tồn tại một cách viết duy nhất

$$u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii): Hiển nhiên từ định nghĩa của cơ sở.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Suy ra từ tính chất của hệ độc lập tuyến tính tối đại.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Rõ ràng $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là hệ sinh. Ngoài ra nếu $x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = \theta$, đồng thời ta cũng có $\theta = 0e_1 + \cdots + 0e_n$. Do cách viết duy nhất suy ra $x_1 = \ldots = x_n = 0$, do đó $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ độc lập tuyến tính. Vậy nó là một cơ sở của V. $\square$

Định lý 2.8. Giả sử V là không gian hữu hạn sinh và $\{v_1, \ldots, v_k\}$ là hệ độc lập tuyến tính các véc tơ của V. Khi đó có thể bổ sung thêm để có được hệ $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}\}$ là một cơ sở của V.

Chứng minh. Giả sử V có một hệ sinh có n véc tơ. Nếu $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ không phải là cơ sở thì S không phải là hệ độc lập tuyến tính tối đại, do đó tồn tại một véc tơ, ta ký hiệu v_{k+1}, sao cho hệ $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$ độc lập tuyến tính. Tiếp tục quá trình này cuối cùng ta có hệ $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}\}$ độc lập tuyến tính và là hệ sinh, $k+m \leq n$ (theo Bổ đề 2.1). Vậy $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}\}$ là một cơ sở cần tìm. □

Hệ quả 2.1. Mọi không gian hữu hạn sinh đều tồn tại cơ sở.

Định lý 2.9. Số véc tơ của mọi cơ sở của một không gian véc tơ đều bằng nhau.

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 2.1 ta có hai cơ sở bất kỳ của V đều có số phần tử bằng nhau. □

Định lý 2.9 dẫn đến định nghĩa số chiều của không gian véc tơ.

b. Số chiều của không gian véc tơ

Định nghĩa 2.10. Số véc tơ của một cơ sở nào đó của V được gọi là *số chiều* của V, ký hiệu $\dim V$.

Nếu $\dim V = n$ thì ta nói V là không gian véc tơ n chiều.

Quy ước $\dim\{\theta\} = 0$.

Ví dụ 2.18.

a) Không gian $\mathbb{R}^n$ có cơ sở chính tắc là

$$\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)\}.$$

Vậy $\dim \mathbb{R}^n = n$.

b) Không gian $W_2 = \{v = (0, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ có một cơ sở là

$$\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Do đó $\dim W_2 = 2$.

Định lý 2.10. Giả sử $\dim V = n$ và $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ là một hệ m véc tơ của V. Khi đó:

i) Nếu hệ S độc lập tuyến tính thì $m \leq n$;

ii) Nếu hệ S là hệ sinh của V thì $m \geq n$;

iii) Nếu $m = n$ thì hệ S độc lập tuyến tính khi và chỉ khi S là hệ sinh.

Chứng minh. Gọi $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Áp dụng Bổ đề 2.1 cho hai hệ $\mathcal{B}$ và S suy ra các điều cần chứng minh. □

Hệ quả 2.2. Trong không gian véc tơ n chiều V, mọi hệ gồm n véc tơ độc lập tuyến tính hoặc hệ sinh đều là cơ sở của V.

Nhận xét 2.3.

1) Từ Định lý 2.10 có thể rút ra hệ quả sau: Trong không gian véc tơ n chiều, mọi hệ có nhiều hơn n véc tơ đều là hệ phụ thuộc tuyến tính, hệ ít hơn n véc tơ không phải là hệ sinh.

2) Theo Hệ quả 2.2 để tìm một cơ sở của không gian véc tơ n chiều ta chỉ cần tìm hệ n véc tơ độc lập tuyến tính hoặc hệ sinh.

   Chẳng hạn hệ hai véc tơ không tỷ lệ khác θ bất kỳ của không gian 2 chiều V tạo thành cơ sở của V.

Ví dụ 2.19.

a) Hệ $\{v_1 = (1, 5), v_2 = (3, -1)\}$ gồm 2 véc tơ khác θ không tỉ lệ nên độc lập tuyến tính, do đó là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

b) Hệ $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, -1)\}$ độc lập tuyến tính, nhưng chỉ có 2 véc tơ nên không phải là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

c) Hệ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^3$ là hệ phụ thuộc tuyến tính vì có nhiều hơn 3 véc tơ.

d) Hệ $\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^3$ không là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$ vì có ít hơn 3 véc tơ.

e) Hệ $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, -1), v_3 = (1, 3, 1)\}$ độc lập tuyến tính, do đó là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2.5. Tọa độ của véc tơ trong cơ sở

Ta đã biết, nếu $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V thì mọi $u \in V$ đều viết được một cách duy nhất (theo Định lý 2.7)

$$u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n; \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Định nghĩa 2.11. Bộ gồm n số thực $(x_1, \ldots, x_n)$ xác định theo công thức (2.1) được gọi là *tọa độ của véc tơ u trong cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$*.

Ta ký hiệu $(u)_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n)$ là tọa độ của véc tơ u trong cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Nhận xét 2.4.

1) Tọa độ của một véc tơ trong hai cơ sở khác nhau là khác nhau

$$(u)_{\mathcal{B}} \neq (u)_{\mathcal{B}'}.$$

2) Tọa độ của véc tơ trong bất kỳ không gian thực nào cũng là một bộ các số thực, số thành phần bằng số chiều của không gian véc tơ.

Sau khi học chương 3 ta sẽ có công thức liên hệ giữa hai tọa độ của cùng một véc tơ trong hai cơ sở khác nhau.

Ví dụ 2.20. Trong không gian $\mathbb{R}^2$ xét véc tơ $v = (1, 6)$.

a) $v = (1, 6) = (1, 0) + 6(0, 1)$ nên $(1, 6)$ là tọa độ của v trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

b) Xét cơ sở $\{e'_1 = (0, -1), e'_2 = (1, 4)\}$,

$$v = x'e'_1 + y'e'_2 \Leftrightarrow (1, 6) = x'(0, -1) + y'(1, 4) = (y', -x' + 4y')$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 1 \\ -x' + 4y' = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 1. \end{cases}$$

Vậy $(-2, 1)$ là tọa độ của v trong cơ sở $\{e'_1 = (0, -1), e'_2 = (1, 4)\}$.

Bài tập Chương 2

▷ **2.1.** Các tập hợp sau trong $\mathbb{R}^n$ có phải là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^n$ không? Vì sao?

a) $W = \{u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1\}$;

b) $W = \{u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}$;

c) $W = \{u = (0, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2 > 0\}$;

d) $W = \{u = (0, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2 + \cdots + x_n = 0\}$;

e) $W = \{u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_n^2 = 0\}$;

f) $W = \{u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_n = 1\}$.

▷ **2.2.** Tập $\mathbb{R}^3$ với các phép toán được định nghĩa trong các trường hợp sau có phải là không gian véc tơ không? Chỉ rõ tiên đề mà phép toán không thoả mãn.

a) $\begin{cases}(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \\ \alpha(x, y, z) = (\alpha x, y, z), \quad \alpha \in \mathbb{R};\end{cases}$

b) $\begin{cases}(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \\ \alpha(x, y, z) = (2\alpha x, 2\alpha y, 2\alpha z), \quad \alpha \in \mathbb{R};\end{cases}$

c) $\begin{cases}(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x' + 1, y + y' + 1, z + z' + 1) \\ \alpha(x, y, z) = (0, 0, 0), \quad \alpha \in \mathbb{R}.\end{cases}$

▷ **2.3.** Hãy biểu diễn véc tơ v thành tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

a) $v = (7, -2, 15), u_1 = (2, 3, 5), u_2 = (3, 7, 8), u_3 = (1, -6, 1)$;

b) $v = (2, 4, 5), u_1 = (3, 2, 5), u_2 = (2, 4, 7), u_3 = (5, 6, 0)$.

▷ **2.4.** Hệ véc tơ nào sau đây là cơ sở của $\mathbb{R}^2$:

a) $u_1 = (2, 3), u_2 = (3, 7), u_3 = (1, -6)$;

b) $u_1 = (2, 1), u_2 = (3, 7)$;

c) $u_1 = (1, -3), u_2 = (-3, 9)$;

d) $u_1 = (10, 7), u_2 = (2, 1), u_3 = (3, 0)$;

e) $u_1 = (0, 2), u_2 = (1, 4)$.

▷ **2.5.** Chứng minh hệ véc tơ $\{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, tìm toạ độ của u trong cơ sở này.

a) $u = (6, 9, 14); v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (1, 2, 3)$;

b) $u = (6, 9, 14); v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (1, 1, 1)$;

c) $u = (6, 2, -7); v_1 = (2, 1, -3), v_2 = (3, 2, -5), v_3 = (1, -1, 1)$.

▷ **2.6.** Mỗi hệ véc tơ sau có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không?

a) $u = (1, 1, 1), v = (2, 2, 0), w = (3, 0, 0)$;

b) $u = (1, 2, 3), v = (3, 1, 5)$;

c) $u = (3, 1, 4), v = (2, -3, 5), w = (5, -2, 9), s = (1, 4, -1)$.

▷ **2.7.** Các hệ véc tơ dưới đây độc lập hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $u = (4, -2, 6), v = (6, -3, 9)$ trong $\mathbb{R}^3$;

b) $u = (2, -3, 1), v = (3, -1, 5), w = (1, -4, 3)$ trong $\mathbb{R}^3$;

c) $u = (5, 4, 3), v = (3, 3, 2), w = (8, 1, 3)$ trong $\mathbb{R}^3$;

d) $u = (4, -5, 2, 6), v = (2, -2, 1, 3), w = (6, -3, 3, 9), s = (4, -1, 5, 6)$ trong $\mathbb{R}^4$.

▷ **2.8.** Tìm x, y, z nếu $(2,\ -3,\ 4) = x\,(1,\ 1,\ 1) + y\,(1,\ 1,\ 0) + z\,(1,\ 0,\ 0)$.

▷ **2.9.** Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con của $\mathbb{R}^4$.

a) Các véc tơ có dạng $(a, b, c, 0)$;

b) Các véc tơ có dạng (a, b, c, d) với $d = a + b$ và $c = a - b$;

c) Các véc tơ có dạng (a, b, c, d) với $a = b = c = d$.

▷ **2.10.** Với các phép toán được định nghĩa trong $\mathbb{R}^n, (n > 2)$. Hãy chứng tỏ các tập hợp sau là không gian véc tơ. Trong mỗi trường hợp hãy tìm một cơ sở và số chiều.

a) $W_1 = \{u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}$;

b) $W_2 = \{u = (0, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2 + \cdots + x_n = 0\}$;

c) $W_3 = \{u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_n = 0\}$;

d) $W_4 = \{u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 - 2x_n = 0; x_2 = \ldots = x_{n-1}\}$.

▷ **2.11.** Với giá trị nào của k thì véc tơ $u = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của $v = (3, 0, -2), w = (2, -1, -5)$.

▷ **2.12.** Cho 3 véc tơ v_1, v_2, v_3 của không gian véc tơ V. Chứng minh:

a) Nếu $\{v_1, v_2\}$ độc lập tuyến tính thì $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ cũng độc lập tuyến tính;

b) Nếu $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính thì $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ cũng độc lập tuyến tính.

▷ **2.13.** Chứng minh rằng $W = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ được sinh ra bởi hệ hai véc tơ $\{u, v\}$ trong hai trường hợp sau:

a) $u = (1, 2, 0), v = (0, 1, 0)$;

b) $u = (2, -1, 0), v = (1, 3, 0)$.

▷ **2.14.** Chứng minh rằng các tập con sau là các không gian con của $\mathbb{R}^3$.

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\};$$
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}.$$

Tìm một cơ sở của $V, W, V \cap W$. Suy ra số chiều của các không gian con $V, W, V \cap W$.

▷ **2.15.** Cho các véc tơ $u = (1, -2, 5), v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (2, -1, 1)$ của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$.

a) Chứng minh rằng $\{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$;

b) Tìm tọa độ của u trong cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$;

c) Biểu diễn v_3 thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_1, v_2, u\}$.

Hướng dẫn giải bài tập Chương 2

▷ **2.1.** Trường hợp b) và d) là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^n$. Các trường hợp còn lại không là không gian véc tơ con: a), c), f) không chứa véc tơ không. Trường hợp e) không chứa véc tơ đối.

▷ **2.2.** a) Không thỏa mãn Tiên đề 5;

b) Không thỏa mãn Tiên đề 7,8;

c) Không thỏa mãn Tiên đề 5,8.

▷ **2.3.** a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \ \gamma = 7 \\ 3\alpha + 7\beta - 6\gamma = -2 \\ 5\alpha + 8\beta + \ \gamma = 15 \end{cases}$

Nhận được nghiệm $\alpha = 11$; $\beta = -5$; $\gamma = 0$. Vậy $v = 11u_1 + (-5)u_2 + 0u_3$;

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\alpha + 2\beta + 5\gamma &= 2 \\ 2\alpha + 4\beta + 6\gamma &= 4 \\ 5\alpha + 7\beta &= 5 \end{cases}$

Nhận được nghiệm $\alpha = -\dfrac{1}{6}$; $\beta = \dfrac{5}{6}$; $\gamma = \dfrac{1}{6}$. Vậy $v = \dfrac{1}{6}(-u_1 + 5u_2 + u_3)$.

▷ **2.4.** $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ do đó mọi hệ hai véc tơ độc lập tuyến tính (không tỉ lệ) của $\mathbb{R}^2$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

- b) e) là cơ sở của $\mathbb{R}^2$;
- a) c) d) không phải là cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

▷ **2.5.** a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$

Nhận được nghiệm $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Vậy $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính, do đó là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
Giải hệ phương trình trên với vế sau là tọa độ tương ứng của $u = (6, 9, 14)$ suy ra $u = v_1 + 2v_2 + 3v_3$;

b) Tương tự trên và $u = 2v_1 + 3v_2 + v_3$;

c) Tương tự trên và $u = v_1 + v_2 + v_3$.

▷ **2.6.** $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ do đó mọi hệ sinh của $\mathbb{R}^3$ phải có ít nhất 3 véc tơ. Mọi hệ 3 véc tơ độc lập tuyến tính của $\mathbb{R}^3$ là cơ sở, do đó là hệ sinh.

a) Hệ véc tơ u, v, w độc lập tuyến tính, do đó là một cở sở và là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$;

b) Hệ hai véc tơ u, v không là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$;

c) $w = u + v, s = u - v$ do đó $\{u, v, w, s\}$ không là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

▷ **2.7.**

- $u = \dfrac{2}{3}v$ do đó hệ véc tơ $\{u, v\}$ trong a) phụ thuộc tuyến tính;
- Chứng minh tương tự Câu 2.5 suy ra Hệ b) độc lập tuyến tính;
- Hệ c) d) phụ thuộc tuyến tính.

▷ **2.8.** $(2,\ -3,\ 4) = (x + y + z,\ x + y,\ z) \Rightarrow\ x = 4,\ y = -7,\ z = 5.$

▷ **2.9.** a) $(a, b, c, 0) = a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0)$;

b) $(a, b, a - b, a + b) = a(1, 0, 1, 1) + b(0, 1, -1, 1)$;

c) $(a, a, a, a) = a(1, 1, 1, 1)$.

▷ **2.10.** Dễ dàng kiểm tra được:

$$\begin{cases} \forall u_1, u_2 \in W_k \Rightarrow u_1 + u_2 \in W_k \\ \forall u \in W_k, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in W_k \end{cases} \quad ; k = 1, 2, 3, 4.$$

Vậy W_k là các không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^n$.

a) $u \in W_1 \Leftrightarrow u = (x, x, \ldots, x) = x(1, 1, \ldots, 1)$; $\dim W_1 = 1$;

b)

$$\begin{aligned} u \in W_2 \Leftrightarrow u =& (0, -\sum_{k=3}^{n} x_k, x_3, \ldots, x_n) \\ =& x_3(0, -1, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, -1, 0, \ldots, 1); \end{aligned}.$$

$\dim W_2 = n - 2$;

c) $u \in W_3 \Leftrightarrow$
$u = x_1(1, 0, 0, \ldots, -1) + x_2(0, 1, 0 \ldots, 0) + \ldots + x_{n-1}(0, 0, \ldots, 1, 0)$;
$\dim W_3 = n - 1$;

d) $u \in W_4 \Leftrightarrow u = x_2(0, 1, 1, \ldots, 1, 0) + x_n(2, 0, 0, \ldots, 1); \dim W_4 = 2$.

▷ **2.11.** $u = (1, -2, k)$ biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của $v = (3, 0, -2), w = (2, -1, -5)$ nếu tồn tại x, y sao cho

$$(1, -2, k) = x(3, 0, -2) + y(2, -1, -5) = (3x + 2y, -y, -2x - 5y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -y = -2 \\ -2x - 5y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ k = -8 \end{cases}$$

▷ **2.12.** a) $\alpha(v_1+v_2)+\beta(v_1-v_2) = 0 \Rightarrow (\alpha+\beta)v_1+(\alpha-\beta)v_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$;

b) $\alpha(v_1 + v_2) + \beta(v_2 + v_3) + \gamma(v_1 + v_3) = 0$
$\Rightarrow (\alpha + \gamma)v_1 + (\alpha + \beta)v_2 + (\beta + \gamma)v_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

▷ **2.13.** a) $(a, b, 0) = xu + yv = x(1, 2, 0) + y(0, 1, 0) = (x, 2x + y, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ 2x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b - 2a; \end{cases}$$

b) $(a, b, 0) = xu + yv = x(2, -1, 0) + y(1, 3, 0) = (2x + y, -x + 3y, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = a \\ -x + 3y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7}(3a - b) \\ y = \frac{1}{7}(a + 2b). \end{cases}$$

▷ **2.14.**

- $u = (x, y, z) \in V \Leftrightarrow u = (x, y, -x-y) = x(1, 0, -1)+y(0, 1, -1)$. Do đó hệ véc tơ $(1, 0, -1); (0, 1, -1)$ là một cơ sở của V; $\dim V = 2$;

- $u = (x, y, z) \in W \Leftrightarrow u = (x, y, x - y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, -1)$. Do đó hệ véc tơ $(1, 0, 1); (0, 1, -1)$ là một cơ sở của W, $\dim W = 2$;

- $u = (x, y, z) \in V \cap W \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$
$\Leftrightarrow u = (0, y, -y) = y(0, 1, -1)$. Do đó hệ véc tơ $(0, 1, -1)$ là một cơ sở của $V \cap W$, $\dim(V \cap W) = 1$.

▷ **2.15.** a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases}$

Nhận được nghiệm $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Vậy hệ véc tơ $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập, do đó là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$;

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = -2 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 5 \end{cases}$

Nhận được nghiệm $\alpha = -6, \beta = 3, \gamma = 2$. Suy ra $u = -6v_1 + 3v_2 + 2v_3$;

c) Từ kết quả trên suy ra $v_3 = \dfrac{1}{2}(6v_1 - 3v_2 + u)$.

Chương 3
Ma trận và định thức

Lý thuyết ma trận có mặt khắp nơi, trong toán học cũng như trong các ngành khoa học khác. Vì vậy chúng ta dễ lầm tưởng rằng lý thuyết ma trận ra đời đã lâu lắm nhưng thực tế lý thuyết này mới ra đời từ đầu thế kỷ 19, mặc dù nhiều loại bảng số có tính chất đặc biệt đã được biết đến từ hàng trăm năm nay. Các ma trận vuông xuất hiện đầu tiên ở đầu thế kỷ 19 trong các công trình về dạng toàn phương hay về các phép thế tuyến tính. Phép nhân hai ma trận vuông cấp 3 được Gauss (Gau-xơ) đưa ra vào năm 1801. Tên gọi ma trận được nhà toán học Anh Sylvester (Synvét) đưa ra năm 1850. Cayley (Kê-li) là người đầu tiên mô tả một cách tổng quát các phép tính với các ma trận bất kỳ và ma trận nghịch đảo (1858). Peano là người đầu tiên đưa ra cách biểu diễn một ánh xạ tuyến tính qua các ma trận. Còn Gauss là người đầu tiên sử dụng ma trận để nghiên cứu các dạng toàn phương.

Ký hiệu ma trận cô đọng, rất có ích và thuận tiện trong khi thực hiện các phép biến đổi tuyến tính (chương 5) và cho phép ta phát triển một phương pháp hoàn chỉnh để giải các hệ phương trình vi phân tuyến tính. Sự quan tâm của các nhà vật lý đối với lý thuyết ma trận, đặc biệt tăng lên sau khi Heisenberg, Born, Jordan vào năm 1925 đã dùng nó trong các bài toán của cơ học lượng tử. Sự phát triển của máy tính hiện đại thực hiện dễ dàng những phép tính ma trận cơ bản càng thúc đẩy thêm sự ứng dụng rộng rãi ma trận vào những lĩnh vực khác.

Có người ví ma trận như là số học của toán cao cấp. Cách ví von này hoàn toàn hợp lý vì ma trận được sử dụng rộng rãi trong các chuyên ngành khác nhau của toán học. Với tư cách là sự biểu diễn của các phép biến đổi tuyến tính, ma trận được sử dụng trong các bài toán cực trị của hàm nhiều biến, đạo hàm hàm hợp, ma trận Jacobi trong phép đổi biến số, giải các hệ phương trình vi phân tuyến tính. Các ma trận dương dùng để mô tả các đặc trưng của véc tơ ngẫu nhiên, mô tả xác suất chuyển của chuỗi Markov trong lý thuyết xác suất. Ma trận còn được sử dụng để giải các bài toán quy hoạch tuyến tính, biểu diễn các mô hình kinh tế ...

Ma trận và định thức ngày nay luôn đi liền với nhau và ai cũng nghĩ là khái niệm định thức phải ra đời sau khái niệm ma trận, nhưng sự thực ngược lại. Định thức hình thành là nhằm để giải các hệ phương trình tuyến tính mà việc làm này đã có một lịch sử lâu đời trước đó. Khái niệm định thức lần đầu tiên được Leibniz (Lépnít) đưa ra vào năm 1693 khi bàn đến việc giải hệ phương trình tuyến tính. Định thức được tiếp tục phát triển và nghiên cứu qua các công trình của Cramer (Cờrame) (Thụy sĩ), Vandermonde (Vănđécmông) (Hà Lan), Laplace (Lapơlát) (Pháp), Jacobi (ia-cô-bi) (Đức)... Người đầu tiên nghiên cứu khái niệm định thức một cách hệ thống là Cauchy (Cô-si) (Pháp).

Trong chương này ta xét đến hai ứng dụng của định thức đó là tìm ma trận nghịch đảo và tìm hạng của ma trận, hạng của hệ véc tơ bằng cách tính các định thức con. Trong chương 4 ta sẽ ứng dụng định thức để giải hệ phương trình tuyến tính.

3.1. Ma trận

3.1.1. Khái niệm ma trận

Chúng ta bắt đầu khái niệm ma trận bằng ví dụ sau.

Giả sử rằng một công ty sản xuất ba loại hàng hóa là G1, G2 và G3 để bán cho hai khách hàng là C1 và C2. Doanh thu hàng tháng của những mặt hàng này được đưa ra trong Bảng 3.1:

Như vậy trong tháng công ty bán 3 mặt hàng G2 cho khách hàng C1, 6 mặt hàng G3 cho khách hàng C2, ... Khi đã xác định những con số này tương ứng với khách hàng nào mua mặt hàng nào, ta có thể bỏ qua các tiêu đề của bảng và viết thông tin này dưới dạng ngắn gọn hơn như sau

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Bảng 3.1 Doanh thu hàng tháng tính theo khách hàng

		Lượng hàng bán ra trong một tháng		
		G_1	G_2	G_3
Bán cho khách hàng	C_1	7	3	4
	C_2	1	5	6

Trong đó các số trên hàng 1 là lượng hàng C_1 mua, trên hàng 2 là lượng hàng C_2 mua. Cột 1 là lượng hàng tương ứng với mặt hàng G_1 ... Đây là một ví dụ về ma trận.

Khái niệm ma trận được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 3.1. Một bảng gồm m hàng n cột $(n, m \in \mathbb{N}^*)$ có dạng sau

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ hay } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

được gọi là *ma trận cỡ* $m \times n$.

Ma trận trong Công thức (3.1) cỡ 2×3.

Ma trận A cỡ $m \times n$ có thể được viết tắt dưới dạng

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\,. \tag{3.3}$$

a_{ij} là *phần tử ở hàng thứ* i *và cột thứ* j của ma trận A;

i gọi là *chỉ số chỉ hàng*, $i = 1, \dots, m$;

j gọi là *chỉ số chỉ cột*, $j = 1, \dots, n$.

Khi a_{ij} là số thì ta có ma trận số. Cụ thể, nếu a_{ij} là số nguyên, thực, phức tương ứng ta có ma trận nguyên, thực hoặc phức. Nếu không chỉ rõ a_{ij} thì ta quy ước là ma trận thực, nghĩa là $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Khái niệm ma trận còn được mở rộng cho những đối tượng khác. Chẳng hạn nếu a_{ij} là véc tơ thì ta có ma trận véc tơ, nếu a_{ij} là hàm số xác định trên tập X thì ta có ma trận hàm ...

Trong chương này ta chỉ xét ma trận số.

Hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}\,, B = [b_{ij}]_{m'\times n'}$ gọi là bằng nhau, viết là $A = B$, nếu chúng có cùng cỡ, đồng thời các phần tử ở vị trí tương ứng bằng nhau.

$$[a_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij}]_{m'\times n'} \Leftrightarrow \begin{cases} m = m' \\ n = n' \\ a_{ij} = b_{ij}; \forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{3.4}$$

Khi $m = n$ ta nói A là ma trận vuông cấp n. Các phần tử a_{ii} ở hàng thứ i và cột thứ i gọi là các phần tử trên đường chéo chính.

Tập hợp tất cả các ma trận cỡ $m \times n$ được ký hiệu $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu $\mathcal{M}_n$.

Ví dụ 3.1. $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 9 & -4 \\ 8 & 7 & \dfrac{1}{2} & 2 \\ x & y & z & t \end{bmatrix}$ là ma trận cỡ 3×4.

Ta có $a_{11} = 8, a_{12} = 1, a_{23} = \dfrac{1}{2}, a_{31} = x, a_{34} = t$ ...

Dưới đây là tên các ma trận thường gặp được định nghĩa thông qua hình thức của ma trận.

Ma trận hàng là ma trận có 1 hàng.

Ma trận cột là ma trận có 1 cột.

Ma trận không là ma trận có mọi phần tử là 0, ký hiệu là θ.

Ma trận đối của ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ là

$$-A = [b_{ij}]_{m\times n}, b_{ij} = -a_{ij}, \forall\ i = 1, \dots, m; \forall j = 1, \dots, n.$$

Nếu ta đổi các hàng của ma trận A cỡ $m \times n$ thành các cột (và do đó các cột thành các hàng) thì ta được ma trận mới cỡ $n \times m$, gọi là *ma trận chuyển vị* của ma trận A, ký hiệu là A^t. Cụ thể:

Ma trận chuyển vị của ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ là

$$A^t = [c_{ij}]_{n\times m} : c_{ij} = a_{ji}, \forall\ i = 1, \dots, n; \forall j = 1, \dots, m.$$

Trong Bảng 3.1, các con số trên hàng 1, hàng 2 tương ứng với lượng mua của hai khách hàng C_1, C_2 và các cột tương ứng với số lượng ba hàng hóa

Bảng 3.2 Doanh thu hàng tháng tính theo mặt hàng

		Bán cho khách hàng	
		C_1	C_2
Lượng hàng bán ra trong một tháng	G_1	7	1
	G_2	3	5
	G_3	4	6

G_1, G_2, G_3 mà hai khách hàng C_1, C_2 mua. Biểu diễn ma trận của Bảng 3.1 là

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Thông tin tương tự về doanh số hàng tháng có thể trình bày theo cách khác như trong Bảng 3.2, trong đó cột tương ứng với số liệu của khách hàng C_1, C_2 và hàng tương ứng với loại hàng hóa G_1, G_2, G_3. Biểu diễn ma trận tương ứng sẽ là

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Như vậy ma trận B là chuyển vị của ma trận A, nghĩa là $B = A^t$.

Một số ma trận vuông cấp n có dạng đặc biệt

- *Ma trận đường chéo* là ma trận vuông có các phần tử không nằm trên đường chéo chính (đường chéo thứ nhất) đều bằng 0.

$$D = Diag(d_{11}, \ldots, d_{nn}) = [d_{ij}]_{n\times n}; d_{ij} = 0 \text{ khi } i \neq j;$$

- *Ma trận đơn vị* là ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính bằng 1.

  Ma trận đơn vị cấp n, ký hiệu $I_n, I_n = [\delta_{ij}]_{n\times n} : \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{khi } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{khi } i \neq j \end{cases}$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

- *Ma trận tam giác trên* (*tam giác dưới*): $a_{ij} = 0 \; \forall \; i > j (a_{ij} = 0 \; \forall \; i < j)$.
- *Ma trận đối xứng*: Nếu $A = A^t$ thì A được gọi là ma trận đối xứng (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo chính).
- *Ma trận phản đối xứng*: Nếu $A = -A^t$ thì A được gọi là ma trận phản đối xứng (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng và trái dấu qua đường chéo chính, các phần tử trên đường chéo chính bằng 0).

Ví dụ 3.2. Với $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ thì $-A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$, $A^t = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

Xét $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}$ thì $B = B^t,\; C = -C^t$.

Vậy ma trận B đối xứng và C phản đối xứng.

3.1.2. Phép toán ma trận

1. Phép cộng ma trận

Định nghĩa 3.2. Cho hai ma trận cùng cỡ $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n}$. *Tổng của hai ma trận* A, B là ma trận cùng cỡ được ký hiệu và định nghĩa bởi

$$A + B = [c_{ij}]_{m\times n}; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ với mọi } i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n. \quad (3.5)$$

Ví dụ 3.3. Giả sử lượng mua của hai khách hàng C_1, C_2 tương ứng với ba loại hàng hóa G_1, G_2, G_3 của 6 tháng đầu năm và sáu tháng cuối năm được cho dưới dạng ma trận A_1, A_2 như sau

$$A_1 = \begin{bmatrix} 42 & 18 & 24 \\ 6 & 30 & 36 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 48 & 25 & 32 \\ 9 & 38 & 40 \end{bmatrix}$$

Khi đó lượng mua của hai khách hàng C_1, C_2 trong cả năm là

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 42 & 18 & 24 \\ 6 & 30 & 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 48 & 25 & 32 \\ 9 & 38 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 43 & 56 \\ 15 & 68 & 76 \end{bmatrix}.$$

Tính chất 3.1 Các tính chất sau đây đúng với các ma trận cùng cỡ:

1) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

2) $A + \theta = \theta + A = A$;

3) $A + (-A) = \theta$;

4) $A + B = B + A$.

2. Phép nhân một số với ma trận

Định nghĩa 3.3. Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và số thực k. *Tích của số thực k với ma trận A* là một ma trận cùng cỡ với A được định nghĩa và ký hiệu như sau

$$kA = [ka_{ij}]_{m\times n}. \tag{3.6}$$

Ví dụ 3.4.

a) Giả sử lượng mua của hai khách hàng C_1, C_2 tương ứng với ba loại hàng hóa G_1, G_2, G_3 trong mỗi tháng là không đổi và cho dưới dạng ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Khi đó lượng mua của hai khách hàng C_1, C_2 tương ứng với ba loại hàng hóa G_1, G_2, G_3 trong một năm là

$$12A = 12\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 & 36 & 48 \\ 12 & 60 & 72 \end{bmatrix};$$

b) Sử dụng phép nhân một số với ma trận ta có thể rút gọn

$$\begin{bmatrix} 25 & -15 & 0 \\ -5 & 50 & 35 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -1 & 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 3.5. Tìm x, y, z và w nếu $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$.

Giải. Theo Công thức (3.5) và (3.6) ta được

$$\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+w-1 & 2w+3 \end{bmatrix}.$$

Theo Công thức (3.4) ta có $\begin{cases} 3x = x+4 \\ 3y = x+y+6 \\ 3z = z+w-1 \\ 3w = 2w+3. \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} 2x = 4 \\ 2y = x+6 \\ 2z = w-1 \\ w = 3, \end{cases}$ vậy $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ w = 3. \end{cases}$

Tính chất 3.2. Ta có thể kiểm chứng được các tính chất sau đúng với mọi $h, k \in \mathbb{R}; A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$:

1) $k(A+B) = kA + kB$;

2) $(k+h)A = kA + hA$;

3) $k(hA) = (kh)A$;

4) $1.A = A$.

Nhận xét 3.1.

- Với 8 tính chất của hai phép toán nói trên, tập $\mathcal{M}_{m\times n}$ là một không gian véc tơ thực.
- Ký hiệu E_{ij} là ma trận cỡ $m \times n$ có các phần tử đều bằng 0 ngoại trừ phần tử ở hàng i cột j bằng 1.

  Hệ các ma trận $\{E_{ij} \mid i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$ là một cơ sở của $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Ví dụ 3.6. Ma trận cỡ 2×3 bất kỳ có thể biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{13}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ a_{21}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{23}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ là một cơ sở của $\mathcal{M}_{2\times 3}$.

3. Phép nhân ma trận

Phép cộng hai ma trận và phép nhân một số với ma trận được thực hiện tương đối quen thuộc, khá dễ dàng, dễ hiểu. Tuy nhiên phép nhân hai ma trận là khá xa lạ và phức tạp. Chúng ta có thể xét phép nhân ma trận qua ví dụ đơn giản sau.

Ví dụ 3.7. Ma trận A (Công thức (3.1)) biểu diễn lượng hàng mua của hai khách hàng C_1, C_2 với ba mặt hàng G_1, G_2, G_3. Giả sử giá bán của ba mặt hàng này tương ứng là \$150, \$300, \$500. Khi đó công ty sẽ nhận được từ khách hàng C_1 và C_2 số tiền:

$$C_1 : 7 \times \$150 + 3 \times \$300 + 4 \times \$500 = \$3950;$$

$$C_2 : 1 \times \$150 + 5 \times \$300 + 6 \times \$500 = \$4650.$$

Nếu ta biểu diễn bảng giá dưới dạng ma trân cột

$$P = \begin{bmatrix} 150 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix}$$

và biểu diễn số tiền công ty nhận được theo hai hàng tương ứng với hai khách hàng C_1, C_2

$$\begin{bmatrix} 3950 \\ 4650 \end{bmatrix},$$

theo định nghĩa phép nhân ma trận sau đây thì ta có thể viết kết quả trên dưới dạng

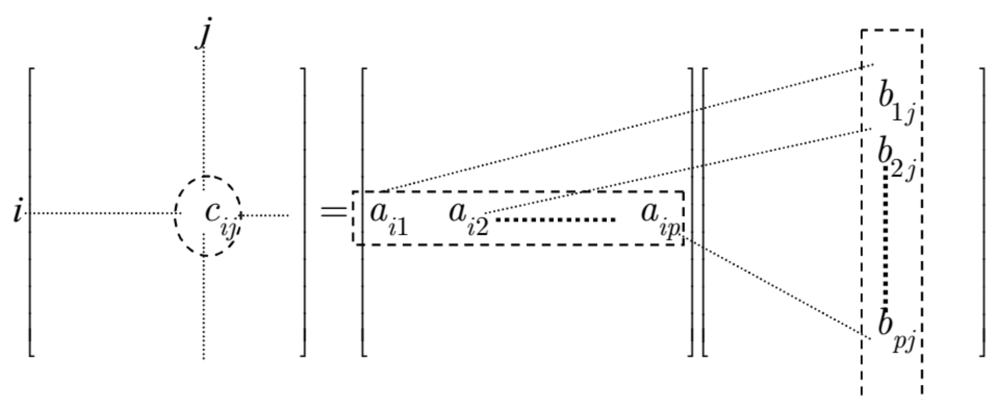
$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3950 \\ 4650 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 3.4. *Tích hai ma trận* $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ và $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ là ma trận cỡ $m \times n$, ký hiệu $AB = [c_{ij}]_{m\times n}$, trong đó c_{ij} được xác định bởi công thức:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}; \forall i = 1, \cdots, m; \forall j = 1, \cdots, n. \tag{3.7}$$

Nghĩa là phần tử ở hàng thứ i cột thứ j của AB bằng tổng của tích các phần tử của hàng thứ i của A nhân với các phần tử tương ứng của cột thứ j của B. Ta minh họa cách thực hiện tìm phần tử ở hàng thứ i cột thứ j của AB trong Hình 3.1.

Hình 3.1 Minh họa cách tìm phần tử của ma trận tích



Nhận xét 3.2.

- Ta thấy rằng tích của hai ma trận A và B chỉ xác định được khi số cột của A bằng số hàng của B. Vì vậy có thể định nghĩa AB nhưng không định nghĩa được BA nếu số cột của B không bằng số hàng của A.

  Ma trận giá P trong Ví dụ 3.7 có ba hàng lần lượt là giá tương ứng với ba loại sản phẩm G_1, G_2, G_3 viết theo cột của ma trận A. Nói cách khác khi thực hiện phép nhân AP thì số cột của A (ba loại sản phẩm) bằng số hàng của P (giá tiền của từng loại sản phẩm này).

- Khi thực hiện phép nhân AB số hàng ma trận A và số cột của ma trận B là tùy ý.

  Trở lại Ví dụ 3.7, nếu thêm khách hàng C_3 với lượng mua tương ứng a, b, c; khi đó ma trận lượng mua A' và ma trận biểu diễn lượng tiền công ty nhận được $A'P$ trở thành

$$A' = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ a & b & c \end{bmatrix}, A'P = \begin{bmatrix} 3950 \\ 4650 \\ 150a + 300b + 500c \end{bmatrix}.$$

  Nếu thêm loại giá mới là x, y, z cho ba mặt hàng G_1, G_2, G_3 này thì ma trận giá P trở thành P'

$$P' = \begin{bmatrix} 150 & x \\ 300 & y \\ 500 & z \end{bmatrix},$$

  khi đó ma trận biểu diễn lượng tiền công ty nhận được là

$$A'P' = \begin{bmatrix} 3950 & 7x + 3y + 4z \\ 4650 & x + 5y + 6z \\ 150a + 300b + 500c & ax + by + cz \end{bmatrix}.$$

Tính chất 3.3. Giả sử A, B, C là các ma trận với số cột và số hàng thích hợp để các phép toán sau xác định được, khi đó ta có các đẳng thức:

1) $A(BC) = (AB)C$: tính kết hợp;

2) $A(B + C) = AB + AC$: tính phân phối bên trái phép nhân ma trận với phép cộng;

3) $(B + C)A = BA + CA$: tính phân phối bên phải phép nhân ma trận với phép cộng;

4) Với mọi $k \in \mathbb{R}, k(AB) = (kA)B = A(kB)$;

5) Với mọi ma trận A cỡ $m \times n$

$$I_m A = A = A I_n; \tag{3.8}$$

6) Phép nhân hai ma trận không có tính giao hoán.

Phép nhân hai ma trận thực hiện được khi số cột của ma trận đầu bằng số hàng của ma trận sau. Vì vậy có thể thực hiện được phép nhân ma trận AB nhưng chưa chắc thực hiện được BA. Trường hợp hai ma trận A, B vuông cùng cấp ta có thể thực hiện được phép tính nhân AB và BA, nhưng kể cả trong trường hợp này thì AB chưa chắc bằng BA

Hai ma trận vuông A, B thỏa mãn $AB = BA$ được gọi là *hai ma trận giao hoán*.

Đa thức của ma trận

Định nghĩa 3.5. Giả sử $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ là một đa thức bậc k.

Với mọi ma trận A vuông cấp n, ta định nghĩa *đa thức của ma trận A* như sau

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_k A^k. \tag{3.9}$$

trong đó $A^0 = I, A^1 = A, A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ lần}}$. Ta có $p(A) \in \mathcal{M}_n$,

Ví dụ 3.8. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ và đa thức $p(x) = x^2 + 4x + 4$. Tìm $p(A)$.

Ta có $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$, do đó

$$p(A) = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ta cũng có: $p(x) = (x+2)^2, (A + 2I) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow p(A) = (A + 2I)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Tính chất của ma trận chuyển vị

Sử dụng định nghĩa của ma trận chuyển vị, các phép toán ma trận ta có các tính chất sau đối với ma trận chuyển vị.

Tính chất 3.4.

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$;

2) $(kA)^t = kA^t$;

3) $(AB)^t = B^tA^t$.

3.1.3. Ma trận chuyển cơ sở

a. Ma trận của một hệ véc tơ trong một cơ sở

Cho không gian véc tơ V với cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, khi đó mọi véc tơ $u \in V$ đều được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Ta ký hiệu và gọi

$$(u)_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n); [u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

lần lượt là tọa độ và ma trận của u trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Xét một hệ gồm m véc tơ $\{u_1, \ldots, u_m\}$ của không gian véc tơ V.

Định nghĩa 3.6. Ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ có các cột lần lượt là tọa độ của các véc tơ $u_j, (j = 1, 2, \ldots, m)$ trong cơ sở $\mathcal{B}$ được gọi là *ma trận của hệ véc tơ* $\{u_1, \ldots, u_m\}$ *trong cơ sở* $\mathcal{B}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 3.9. Tìm ma trận của hệ véc tơ $\{v_1 = (3, -2), v_2 = (1, 2), v_3 = (0, 5)\}$ trong cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^2$.

Giải. Ta biểu diễn các véc tơ đã cho trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} v_1 &= (3, -2) = 3(1, 0) - 2(0, 1); \\ v_2 &= (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1); \\ v_3 &= (0, 5) = 0(1, 0) + 5(0, 1). \end{aligned}$$

Do đó hệ véc tơ $\{v_1, v_2, v_3\}$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 3.10. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ

$$S = \{u_1 = (2, 2, 6), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (0, 1, 0)\}.$$

Tìm ma trận của hệ véc tơ đó trong cơ sở $\mathcal{B}$ và trong cơ sở $\mathcal{B}'$.

a) $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ (cơ sở chính tắc).

b) $\mathcal{B}' = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, -1), v_3 = (1, 3, 1)\}$ (đã chứng minh ở Ví dụ 2.19).

Giải.

a) Ma trận của hệ S trong cơ sở chính tắc có các cột là tọa độ của S:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Trong cơ sở $\mathcal{B}'$, ta xét tọa độ véc tơ bất kỳ theo cơ sở này:
$u = (x, y, z) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha - \beta + 3\gamma, \alpha - \beta + \gamma)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \alpha - \beta + 3\gamma = y \\ \alpha - \beta + \gamma = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(x - y) + z \\ \beta = \frac{1}{2}(x - z) \\ \gamma = \frac{1}{2}(y - z). \end{cases}$$

Do đó $u = (x, y, z)$ có tọa độ trong cơ sở $\mathcal{B}'$ là $(u)_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}(x - y + 2z, x - z, y - z)$.

Vậy $(u_1)_{\mathcal{B}'} = (6, -2, -2)$, $(u_2)_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}(0, 1, 1); (u_3)_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)$.

Do đó hệ S có ma trận trong cơ sở $\mathcal{B}'$ là:

$$A' = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nhận xét 3.3.

- Ma trận của hệ véc tơ của không gian $\mathbb{R}^n$ viết trong cơ sở chính tắc được gọi là *ma trận chính tắc*. Để viết ma trận chính tắc ta chỉ cần viết lần lượt tọa độ của véc tơ thành cột của ma trận.

- Hai ma trận của cùng một hệ véc tơ $\{u_1, \ldots, u_m\}$ trong hai cơ sở khác nhau của một không gian véc tơ là hai ma trận cùng cỡ nhưng không bằng nhau vì tọa độ của một véc tơ trong hai cơ sở khác nhau là khác nhau.

b. Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa 3.7. Giả sử $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}, \mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ là hai cơ sở của V. Ma trận của hệ véc tơ $\mathcal{B}'$ trong cơ sở $\mathcal{B}$ được gọi là *ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'$*.

Nghĩa là nếu: $e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ij} e_i;\ j = 1, \ldots, n,$

viết cụ thể:

$$\begin{aligned} e'_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \cdots + t_{n1}e_n \\ e'_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \cdots + t_{n2}e_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \cdots + t_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Khi đó ma trận của hệ véc tơ cơ sở $\mathcal{B}'$ viết trong cơ sở $\mathcal{B}$ có dạng:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Ma trận T được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'$. Ký hiệu $\mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{B}'$.

Hoàn toàn tương tự, ta định nghĩa ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}'$ sang cơ sở $\mathcal{B}$ là ma trận của hệ véc tơ $\mathcal{B}$ trong cơ sở $\mathcal{B}'$, ký hiệu

$$\mathcal{B}' \xrightarrow{T} \mathcal{B}. \tag{3.11}$$

Ví dụ 3.11. Trong không gian $\mathbb{R}^2$, tìm ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'$ và chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}'$ sang cơ sở $\mathcal{B}$, trong đó

$$\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}, \mathcal{B}' = \{e_1' = (4,3), e_2' = (1,1)\}.$$

Giải. $\mathcal{B}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ nên ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ là ma trận chính tắc của $\mathcal{B}'$. Vậy $T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Tọa độ của véc tơ $u = (x, y)$ bất kỳ theo cơ sở $\mathcal{B}'$ xác định như sau:

$$(x,y) = x'(4,3) + y'(1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x' + y' = x \\ 3x' + y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -3x + 4y. \end{cases}$$

Vậy $u = (x, y)$ thì $\big(u\big)_{\mathcal{B}} = (x, y)$ và $\big(u\big)_{\mathcal{B}'} = (x - y, -3x + 4y)$.

Có $\big(e_1\big)_{\mathcal{B}'} = (1, -3)$, $\big(e_2\big)_{\mathcal{B}'} = (-1, 4)$.

Do đó ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$ là $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 3.12. Trên $\mathbb{R}^3$, tìm ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'$ và ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}'$ sang cơ sở $\mathcal{B}$, trong đó

$$\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$$
$$\mathcal{B}' = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,-1,-1), v_3 = (1,3,1)\}.$$

Giải. $\mathcal{B}$ là cơ sở chính tắc nên ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'$ là ma trận chính tắc của hệ véc tơ $\mathcal{B}'$ xác định như sau: $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Từ công thức tọa độ của véc tơ trong cơ sở $\mathcal{B}'$ xác định trong Ví dụ 3.10 ta tìm được ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}'$ sang cơ sở $\mathcal{B}$ là:

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c. Công thức đổi tọa độ của một véc tơ trong hai cơ sở khác nhau

Định lý sau cho ta công thức liên hệ giữa hai tọa độ của cùng một véc tơ trong hai cơ sở khác nhau.

Định lý 3.1. Giả sử $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}, \mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ là hai cơ sở của V. Với véc tơ bất kỳ $u \in V$, giả sử $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e'_i$ và T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$, P là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$. Khi đó

$$[u]_{\mathcal{B}} = T[u]_{\mathcal{B}'}. \tag{3.12}$$

Tương tự ta cũng có công thức

$$[u]_{\mathcal{B}'} = P[u]_{\mathcal{B}}. \tag{3.13}$$

(3.12), (3.13) được gọi là công thức đổi tọa độ véc tơ.

Chứng minh. Ta chứng minh công thức (3.12).

Giả sử

$$u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \tag{*}$$

và

$$u = y_1e'_1 + \cdots + y_ne'_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}. \tag{**}$$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} e'_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \cdots + t_{n1}e_n \\ e'_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \cdots + t_{n2}e_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \cdots + t_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Thay các $e_i', i = 1, 2, \ldots, n$ vào (**) ta có

$$\begin{aligned} u = & \, y_1(t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \cdots + t_{n1}e_n) + \\ & + y_2(t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \cdots + t_{n2}e_n) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + y_n(t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \cdots + t_{nn}e_n). \end{aligned}$$

Viết lại biểu thức trên ta nhận được

$$\begin{aligned} u = & \, (t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \cdots + t_{1n}y_n)e_1 + \\ & + (t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \cdots + t_{2n}y_n)e_2 + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (t_{1n}y_1 + t_{n2}y_2 + \cdots + t_{nn}y_n)e_n. \end{aligned} \tag{***}$$

Do trong một cơ sở thì một véc tơ chỉ có duy nhất một cách biểu diễn, so sánh (*) và (***) ta có

$$\begin{cases} x_1 = t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \cdots + t_{1n}y_n \\ x_2 = t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \cdots + t_{2n}y_n \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = t_{n1}y_1 + t_{n2}y_2 + \cdots + t_{nn}y_n. \end{cases}$$

Điều này tương đương với

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

hay $[u]_{\mathcal{B}} = T[u]_{\mathcal{B}'}$. □

Nhận xét 3.4. Công thức thay đổi tọa độ trong hai cơ sở khác nhau viết dưới dạng ma trận cho bởi (3.10) và (3.12). Vì vậy khi biết công thức đổi tọa độ thì ta xác định được ma trận chuyển cơ sở và ngược lại. Ví dụ sau đây minh họa điều đó.

Ví dụ 3.13. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$, tìm ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'$ và ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}'$ sang cơ sở $\mathcal{B}$ với

$$\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\} \text{ và } \mathcal{B}' = \{e_1' = (4, 3), e_2' = (1, 1)\}.$$

Giải. Xem Ví dụ 3.11, với $\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, giả sử $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, [u]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$;

nghĩa là $u = xe_1 + ye_2 = x'e'_1 + y'e'_2$.

Ta có $u = x(1, 0) + y(0, 1) = x'(4, 3) + y'(1, 1)$, suy ra

$$\begin{cases} x = 4x' + y' \\ y = 3x' + y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -3x + 4y. \end{cases}$$

hay

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{ đồng thời } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Theo công thức (3.12) và (3.13), ta có:

Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ là $T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$,

Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$ là $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

Kết quả này đã nhận được bằng cách dùng trực tiếp định nghĩa ở Ví dụ 3.11.

3.2. Định thức

Định thức cấp 2 đã được giới thiệu trong chương trình Toán ở bậc THPT khi giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, trong đó định thức cấp hai được tính bằng tích hai phần tử của đường chéo thứ nhất (đường chéo chính) trừ tích hai phần tử của đường chéo thứ hai. Trong mục này ta xét định thức ma trận vuông cấp $n, n \geqslant 1$.

Để định nghĩa định thức cấp tổng quát như vậy ta cần đến khái niệm hoán vị và phép thế.

3.2.1. Hoán vị và phép thế

Định nghĩa 3.8.

1) Mỗi song ánh

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$i \mapsto \sigma(i)$$

được gọi là một *phép thế bậc* n trên tập $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tên gọi là phép thế vì ta thay thế k bởi $\sigma(k)$.

- Ta thường ký hiệu một phép thế bằng một ma trận có hàng thứ nhất là các số $1, 2, \ldots, n$ sắp theo thứ tự tăng dần và hàng thứ hai là ảnh tương ứng của nó

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

- Ký hiệu S_n là tập tất cả các phép thế bậc n trên tập $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- Với $\sigma, \mu \in S_n$ thì $\sigma \circ \mu \in S_n$. Trong Chương 1 ta biết tập S_n có đúng $n!$ phần tử, gọi S_n là nhóm đối xứng bậc n.

2) Ảnh của một phép thế là một sự thay đổi vị trí của các phần tử trong tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ nên gọi là một hoán vị của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$. Với phép thế σ, ta có ảnh của σ là *hoán vị* tương ứng

$$\begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{bmatrix}.$$

3) Dấu của phép thế:

Xét phép thế σ với ảnh là hoán vị $\begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{bmatrix}$.

Nếu có cặp $i < j$ mà $\sigma(i) > \sigma(j)$ thì ta nói có một nghịch thế của phép thế σ.

Cách tìm số các nghịch thế của phép thế σ:

Trong hoán vị $\begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{bmatrix}$ có i_1 là giá trị sao cho $\sigma(i_1) = 1$.

Gọi k_1 là số các số trong $\begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{bmatrix}$ đứng trước $\sigma(i_1) = 1$, có thể thấy k_1 là số các nghịch thế ứng với 1;

Xóa số $\sigma(i_1) = 1$, tồn tại i_2 sao cho $\sigma(i_2) = 2$, gọi k_2 là số các số còn lại trong $\begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{bmatrix}$ đứng trước $\sigma(i_2) = 2$, k_2 là số các nghịch thế ứng với 2;

Xóa số $\sigma(i_2)$ và tiếp tục đếm như thế ...

Cuối cùng số các nghịch thế của σ là $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}$.

Giả sử k là số các nghịch thế của σ, ta định nghĩa và ký hiệu dấu của phép thế σ là

$$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^k. \tag{3.15}$$

Nếu k chẵn thì $\operatorname{sgn}\sigma = 1$, ta gọi σ là phép thế chẵn.

Nếu k lẻ thì $\operatorname{sgn}\sigma = -1$, ta gọi σ là phép thế lẻ.

Trong mỗi tập S_n số các phép thế chẵn bằng số các phép thế lẻ và bằng $\dfrac{n!}{2}$.

4) Chuyển trí (còn gọi là chuyển vị) $\sigma = \begin{bmatrix} i_0 & j_0 \end{bmatrix}$ là phép thế chỉ tráo đổi hai phần tử i_0, j_0 cho nhau và giữ nguyên các phần tử còn lại

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i_0 & \dots & j_0 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j_0 & \dots & i_0 & \dots & n \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Nói cách khác $\sigma = \begin{bmatrix} i_0 & j_0 \end{bmatrix}$ là phép thế có tính chất

$$\begin{cases} \sigma(i_0) = j_0, i_0 \neq j_0 \\ \sigma(j_0) = i_0, \\ \sigma(k) = k, k \neq i_0, j_0. \end{cases}$$

Dễ dàng tính được

$$\begin{aligned} & k_1 = \dots = k_{i_0-1} = 0, k_{i_0} = j_0 - i_0 \\ & k_{i_0+1} = \dots = k_{j_0-1} = 1, k_{j_0} = \dots = k_n = 0. \end{aligned}$$

Do đó $k = 2(j_0 - i_0) - 1 \Rightarrow \operatorname{sgn}\sigma = (-1)^k = -1$. Vậy mọi chuyển trí là một phép thế lẻ.

5) Với mọi $\sigma, \mu \in S_n$

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \mu) = \operatorname{sgn}\sigma . \operatorname{sgn}\mu. \tag{3.17}$$

6) Với mọi chuyển vị $\begin{bmatrix} i_0 & j_0 \end{bmatrix}$ và phép thế σ ta có

$$\operatorname{sgn}\sigma \circ \begin{bmatrix} i_0 & j_0 \end{bmatrix} = -\operatorname{sgn}\sigma. \tag{3.18}$$

Ví dụ 3.14. Nhóm đối xứng S_2 có 2 phần tử là

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ và } \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\operatorname{sgn}\sigma_1 = 1, \operatorname{sgn}\sigma_2 = -1 \text{ (chuyển trí)}.$$

Ví dụ 3.15. Nhóm đối xứng S_3 có 6 phần tử là

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \sigma_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\operatorname{sgn}\sigma_1 = \operatorname{sgn}\sigma_4 = \operatorname{sgn}\sigma_5 = 1;$

$\operatorname{sgn}\sigma_2 = \operatorname{sgn}\sigma_3 = \operatorname{sgn}\sigma_6 = -1$ (chuyển trí).

Ví dụ 3.16. Hoán vị $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ứng với phép thế $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ là chuyển trí $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$. Do đó $\operatorname{sgn}\sigma = -1$.

3.2.2. Định nghĩa định thức

Khi giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

ta đã biết cách tính các định thức D, D_x, D_y:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba', D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc', D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'.$$

là các định thức cấp hai.

Như vậy định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ vuông cấp 2 là

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Sử dụng Ví dụ 3.14 với hai phép thế của S_2 ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}\sigma_1 a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}\sigma_2 a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)}$$
$$= \sum_{\sigma\in S_2} \operatorname{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}.$$

Bằng cách mở rộng công thức này ta có thể định nghĩa định thức của ma trận vuông cấp n bất kỳ như sau:

Định nghĩa 3.9. *Định thức của ma trận vuông cấp n* gọi là định thức cấp n.

Định thức của ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ được ký hiệu là $\det A$ hay $|A|$ xác định như sau:

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma.a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}\dots a_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)}. \tag{3.19}$$

Từ định nghĩa ta có công thức cụ thể của định thức với $n = 1, 2, 3$ như sau:

- Khi $n = 1$, $A = [a_{11}]$ có $\det A = a_{11}$, gọi là định thức cấp một.
- Khi $n = 2$, định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ là định thức cấp hai

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_2} \operatorname{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Khi $n = 3$, định thức của ma trận vuông cấp ba $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Nhận xét 3.5.

1) Định thức của ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ là tổng gồm $n!$ số hạng.

2) Mỗi số hạng ứng với một phép thế của tập S_n, gồm hai phần:

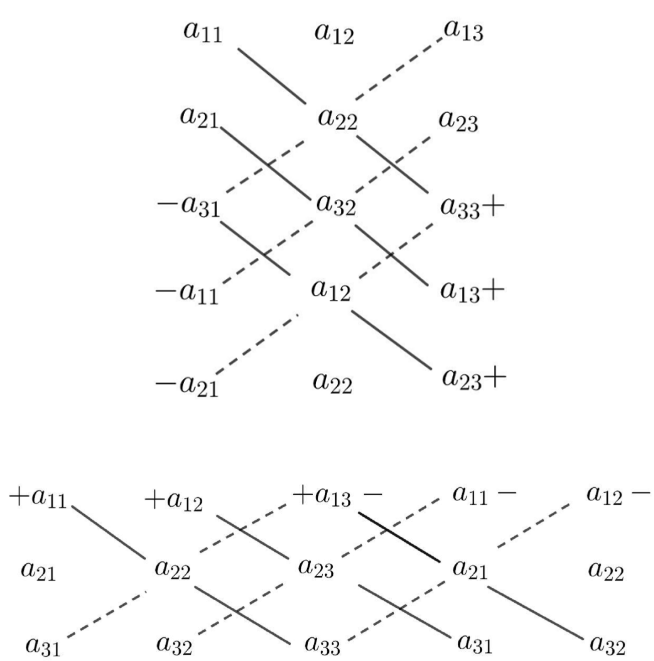
   - Phần dấu: $\operatorname{sgn}\sigma$;

   - Phần số: $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)}$ là tích gồm n nhân tử, đó là n phần tử trên n hàng và ở trên n cột khác nhau của ma trận A. Trong mỗi tích đó không có hai phần tử nào cùng hàng, cũng như không có hai phần tử nào cùng cột.

3) Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ là một bảng số n hàng n cột, trong khi đó định thức $\det A = |a_{ij}|_{n\times n}$ là một số.

Đối với định thức cấp ba người ta còn có các thuật toán để tính định thức: như thuật toán Sarus và qui tắc hình sao.

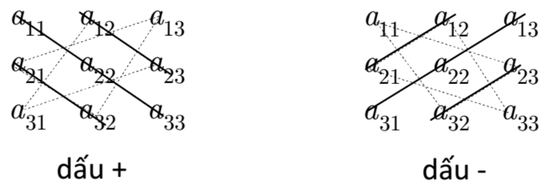
Thuật toán Sarus



Hình 3.2 Thuật toán Sarus

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Quy tắc hình sao



Hình 3.3 Quy tắc hình sao

Định nghĩa 3.10. A là ma trận không suy biến nếu $\det A \neq 0$.

Nếu $\det A = 0$ ta nói A là ma trận suy biến.

Ví dụ 3.17. Với $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

Ta có $\det A = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 8(-3) - 6(-4) = 0$. Vậy A là ma trận suy biến.

Với $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$ ta có $\det B = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = 7.9 - 8(-4) = 95 \neq 0$. Vậy B không suy biến.

Ví dụ 3.18. Tính định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2.6.2 + 4.1.(-1) + 3.2.1 - 6.1.(-1) - 1.2.2 - 3.4.2 = 4. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.19. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & x \\ 3 & y & 4 \\ z & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12y+3x+20z-xyz-8-90 = 3x+12y+20z-xyz-98.$

Định nghĩa 3.11. Ma trận của hệ n véc tơ trong cơ sở $\mathcal{B}$ nào đó của không gian véc tơ n chiều V là ma trận vuông cấp n. Định thức của ma trận vuông này được gọi là *định thức của hệ véc tơ* tương ứng trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Cụ thể nếu $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ là ma trận của hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ứng với cơ sở $\mathcal{B}$, khi đó ta ký hiệu định thức của hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ứng với cơ sở $\mathcal{B}$ là $D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_n\}$ và bằng định thức của ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$.

$$D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_n\} = \det A. \tag{3.20}$$

Ví dụ 3.20. Hệ gồm 3 véc tơ $v_1 = (2, 4, 1), v_2 = (3, 6, 1), v_3 = (-1, 2, 2)$ có ma trận trong cơ sở chính tắc $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Có $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$. Vậy $D_{\mathcal{B}}\{v_1, v_2, v_3\} = \det A = 4$.

3.2.3. Các tính chất cơ bản của định thức

a. Định thức dạng tam giác

Từ định nghĩa định thức, ta có thể tính được một số định thức dạng đặc biệt, chi tiết chứng minh xem trong [1].

1) Định thức của ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ có các phần tử ở dưới đường chéo thứ nhất bằng 0, nghĩa là $a_{ij} = 0; \forall i > j$ (gọi là định thức tam giác trên), bằng tích các phần tử trên đường chéo thứ nhất (đường chéo chính).

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

Ta có kết quả tương tự với ma trận tam giác dưới.

2) Định thức của ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ có phần tử bên trên đường chéo thứ hai bằng 0, nghĩa là $a_{ij} = 0$ nếu $i + j < n + 1$, bằng tích các phần tử trên đường chéo thứ hai nhân với $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}.$$

Ta có kết quả tương tự với ma trận A có các phần tử bên dưới đường chéo thứ hai bằng 0.

Ví dụ 3.21.

a) $\begin{vmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & -7 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2.(-7).(-1).3 = 42.$

b) Định thức của ma trận đơn vị cấp n bất kỳ bằng 1: $\det I_n = 1$.

Ví dụ 3.22. $\begin{vmatrix} a & b & x \\ c & y & 0 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3.2}{2}} xyz = -xyz.$

b. Các tính chất của định thức được chứng minh nhờ tính chất của phép thế

Dùng tính chất của phép thế bậc n ta có thể chứng minh được một số tính chất rất quan trọng của định thức. Chứng minh chi tiết xem trong [1].

Tính chất 1. $\det A^t = \det A$.

Hệ quả 1. Tính chất nào của định thức đúng với hàng thì cũng đúng với cột.

Chú ý. Từ tính chất 2 trở đi các kết quả luôn được phát biểu với hàng đồng thời với cột.

Ví dụ 3.23. Ở ví dụ 3.18 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\det A = 4$. Suy ra ta có

$$\det A^t = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Tính chất 2. Định thức đổi dấu nếu đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột) của ma trận.

Hệ quả 2. Nếu định thức có hai hàng (hoặc hai cột) giống nhau thì định thức bằng 0.

Ví dụ 3.24.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}$, hàng 1 đổi chỗ cho hàng 3 ($H_1 \longleftrightarrow H_3$).

b) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ($H_2 = H_4$).

c) Ta có thể thay đổi hàng hoặc cột để đưa định thức về dạng tam giác trên từ đó nhận được giá trị định thức cần tính.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1).5.1 = -5.$$

Ta đã thực hiện phép biến đổi $C_2 \longleftrightarrow C_3 \longleftrightarrow C_1$.

Để chứng minh các tính chất đơn giản tiếp theo của định thức ta chỉ cần chú ý số hạng

$$a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}\ldots a_{i\sigma(i)}\ldots a_{n\sigma(n)}$$

trong Công thức (3.19) của Định nghĩa 3.9.

Có thể xem chứng minh chi tiết trong [1].

Tính chất 3. Nếu định thức có một hàng (hoặc một cột) là các số 0 thì định thức bằng 0 .

Chẳng hạn hàng thứ k bằng 0 khi đó

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \ldots a_{k-1\sigma(k-1)}.0.a_{k+1\sigma(k+1)} \ldots a_{n\sigma(n)} = 0.$$

Tính chất 4. Định thức nhân lên α lần nếu nhân số α vào một hàng (hoặc một cột) nào đó của ma trận.

Chẳng hạn nhân thêm α vào hàng thứ k của ma trận A ta được ma trận A' khi đó

$$\begin{aligned}\det A' &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \ldots a_{k-1\sigma(k-1)}.(\alpha a_{k\sigma(k)}).a_{k+1\sigma(k+1)} \ldots a_{n\sigma(n)} \\ &= \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \ldots a_{k-1\sigma(k-1)}.a_{k\sigma(k)}.a_{k+1\sigma(k+1)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \alpha \det A.\end{aligned}$$

Hệ quả 3.

1) Có thể đưa thừa số chung ở một hàng (hoặc một cột) ra ngoài dấu định thức.

2) Định thức bằng 0 nếu có hai hàng (hoặc hai cột) tỷ lệ.

3) Nếu A là ma trận vuông cấp n thì $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Tính chất 5. Định thức có tính chất tuyến tính đối với mỗi hàng (hoặc cột). Nghĩa là nếu có hàng nào đó là tổ hợp tuyến tính của k hàng thì được tách thành tổ hợp tuyến tính của k định thức tương ứng (tương tự đối với cột).

Chẳng hạn hàng thứ i của ma trận A có dạng:

$$a_{i\sigma(i)} = \alpha_1 b^1_{i\sigma(i)} + \cdots + \alpha_k b^k_{i\sigma(i)}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\det A = &\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \ldots (\alpha_1 b^1_{i\sigma(i)} + \ldots + \alpha_k b^k_{i\sigma(i)}) \ldots a_{n\sigma(n)} \\ =&\alpha_1 \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \ldots b^1_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} \\ &+ \ldots + \alpha_k \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \ldots b^k_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)}.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.25. Khi mỗi phần tử trên hàng thứ 3 là tổ hợp tuyến tính của các phần tử tương ứng của hai hàng nào đó thì định thức bằng tổ hợp tuyến tính của hai định thức xác định như sau:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 & \alpha c_1 + \beta c_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Tương tự đối với cột.

Ví dụ 3.26.

1) $\begin{vmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & a & a' \\ \alpha b_1 + \beta b_2 & b & b' \\ \alpha c_1 + \beta c_2 & c & c' \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & a & a' \\ b_1 & b & b' \\ c_1 & c & c' \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_2 & a & a' \\ b_2 & b & b' \\ c_2 & c & c' \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} x+a & \alpha x + a \\ y+b & \alpha y + b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \alpha x + a \\ y & \alpha y + b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \alpha x + a \\ b & \alpha y + b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = (1-\alpha) \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix} = (1-\alpha)(bx - ay).$

Ví dụ 3.27. Tính định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 15 & -1 \end{bmatrix}$.

Nhận thấy cột 1 và cột 2 tỉ lệ với nhau. Do đó

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 15 & -1 \end{vmatrix} = 2.3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 6.0 = 0.$$

Dưới đây là một hệ quả của hai tính chất trên.

Tính chất 6. Nếu ta cộng vào một hàng (hoặc một cột) một tổ hợp tuyến tính các hàng (hoặc các cột) khác thì định thức không thay đổi (Hệ quả 3 và Tính chất 5).

Hệ quả 4: Định thức bằng 0 nếu có một hàng (hoặc một cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng (các cột) khác.

Ví dụ 3.28. Tính định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 10 & 15 & -1 \end{bmatrix}$.

$\det A = 0$ vì $H_3 = 3H_1 + H_2$.

Ta cũng có thể thực hiện các phép biến đổi sau

$$(-3)H_1 + (-1)H_2 + H_3 \to H_3; \det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 10 & 15 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tính chất 7. Định thức của mọi hệ n véc tơ phụ thuộc tuyến tính trong không gian véc tơ n chiều đều bằng 0.

Ví dụ 3.29.

a) Ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ có $\det A = 0$.

b) Ma trận $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ có $\det B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Do hệ véc tơ cột của hai ma trận trên là hệ phụ thuộc tuyến tính, cụ thể:
Ma trận A: $C_3 = C_1 - C_2$.
Ma trận B: $C_4 = C_1 + C_2 + C_3$.

Ví dụ 3.30. Tính định thức cấp n: $D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}$.

Ta có

$$D_n = \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a+n-1 & a & 1 & \dots & 1 \\ a+n-1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} \text{(cộng các cột vào cột 1)}$$

$$= (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a-1 \end{vmatrix}.$$

Do đó $D_n = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$.

3.2.4. Khai triển định thức theo một hàng hoặc theo một cột

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$.

Để khai triển theo một hàng, (hoặc một cột) bất kỳ, ta xét các ký hiệu dưới đây.

Định nghĩa 3.12.

1) Từ ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ xóa đi hàng i, cột j (hàng và cột chứa a_{ij}) ta có ma trận vuông cấp $n-1$. Định thức của ma trận cấp $n-1$ này ký hiệu là M_{ij} và gọi là *định thức con bù* của phần tử a_{ij}.

2) A_{ij} được gọi là *phần bù đại số của phần tử* a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{3.21}$$

Mỗi phần tử a_{ij} có một phần bù đại số A_{ij} tương ứng.

Ví dụ 3.31. Tính các phần bù đại số A_{ij} của các phần tử trong ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&3\\0&8\end{vmatrix}=40;A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&3\\1&8\end{vmatrix}=-13;A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&5\\1&0\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\0&8\end{vmatrix}=-16;A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\1&8\end{vmatrix}=5;A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\5&3\end{vmatrix}=-9;A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&3\end{vmatrix}=3;A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=1.$$

Định lý 3.2. Cho ma trận vuông $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ khi đó với mọi hàng i hoặc cột j bất kỳ ta có công thức khai triển như sau:

$$\det A = a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}; \tag{3.22}$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}. \tag{3.23}$$

(3.22) gọi là *công thức khai triển định thức theo hàng* thứ i.

(3.23) gọi là *công thức khai triển định thức theo cột* thứ j.

Chứng minh. Xem trong [1].

Ví dụ 3.32. Tính định thức cấp 4 sau: $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&6&0\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}$.

Giải.

Cách 1. Khai triển định thức theo hàng thứ hai, ta được

$$D=1.(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3&4\\-1&-1&0\\2&0&-5\end{vmatrix}+6(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2&4\\3&-1&0\\1&2&-5\end{vmatrix}=-381.$$

Ta cũng có thể khai triển định thức trên theo cột thứ 4 của ma trận.

Cách 2. Biến đổi hàng thứ hai của ma trận trước khi khai triển theo hàng thứ 2.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{-6c_1+c_3 \to c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -19 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 1.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & -19 & 0 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}.$$

Tiếp tục triệt tiêu thêm phần tử $a_{22} = -19$ bằng phép biến đổi $(-19)C_1 + C_2 \to C_2$, sau đó $(-1)H_1 + H_3 \to H_3$ ta có

$$D = -\begin{vmatrix} 2 & -41 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -44 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -41 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -41 & 4 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -41 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(-123-4) = -381.$$

Nhận xét 3.6.

1) Công thức khai triển định thức theo cột thứ j (Công thức 3.23) và công thức khai triển định thức theo hàng i (Công thức 3.22) cho phép đưa việc tính định thức cấp n về tính tổng của n định thức cấp $n-1$.

2) Việc chọn hàng thứ i hay cột thứ j là tùy ý. Tuy nhiên nếu $a_{ij} = 0$ thì có ngay $a_{ij}A_{ij} = 0$ mà không cần tính A_{ij}. Vì vậy để tính định thức ta thực hiện các công việc sau:

   - Chọn hàng i hoặc cột j có nhiều phần tử bằng 0 và dễ triệt tiêu các phần tử còn lại.
   - Thực hiện các phép biến đổi: nếu chọn hàng thì cộng vào một cột một tổ hợp tuyến tính các cột khác để triệt tiêu thêm các phần tử trên hàng đã chọn sao cho hàng này số phần tử khác 0 còn lại ít nhất, thậm

chí chỉ còn lại một phần tử khác 0 (thực hiện tương tự như thế khi chọn cột).

- Khai triển theo hàng (hoặc cột) sau khi đã triệt tiêu.

3) Dấu $(-1)^{i+j}$ trong công thức $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ta có thể đếm theo vị trí trên định thức. Cụ thể

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Ví dụ 3.33. Tính định thức cấp 4 sau: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

Ta chọn hàng 2 để triệt tiêu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{\substack{-c_1 + c_3 \to c_3 \\ -2c_1 + c_4 \to c_4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \overset{\substack{-c_1 + c_2 \to c_2 \\ -c_1 + c_3 \to c_3}}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-3) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} = 6(-9+5) = -24.$$

Định nghĩa 3.13. Ma trận $C_A = [A_{ij}]_{n \times n}$, trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} của ma trận $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, được gọi là *ma trận phụ hợp* của A.

Ví dụ 3.34.

a) Theo Ví dụ 3.31 ma trận phụ hợp của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ là

$$C_A = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Tìm ma trận phụ hợp của ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Ta có

$$a_{11} = a \Leftrightarrow A_{11} = d; a_{12} = b \Leftrightarrow A_{12} = -c$$
$$a_{21} = c \Leftrightarrow A_{21} = -b; a_{22} = d \Leftrightarrow A_{22} = a.$$

Vậy ma trận phụ hợp của $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ là $C_A = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

3.2.5. Khai triển theo k hàng hoặc k cột (Công thức Laplace)

Từ ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ta xét k hàng $i_1, \ldots, i_k$ và k cột $j_1, \ldots, j_k$ được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n;\ 1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n.$$

Chúng ta cần xác định một số tên gọi sau:

- Ma trận con cấp k từ ma trận A là ma trận gồm các phần tử nằm trên giao của k hàng k cột của A.
- Có C_n^k (số tổ hợp chập k của n) ma trận con cấp k trên k hàng (hoặc k cột) đã chọn.
- Định thức con cấp k là định thức của một ma trận con cấp k.
- Định thức con cấp k của ma trận con lấy trên k hàng $i_1, \ldots, i_k$ và k cột $j_1, \ldots, j_k$ ký hiệu là
$$M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}. \tag{3.24}$$

Mỗi ma trận con cấp k cho ta một định thức con cấp k tương ứng nên cũng có C_n^k định thức con cấp k trên k hàng (hoặc k cột) đã chọn.

- Định thức con bù của định thức $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ được ký hiệu và xác định như sau
$$\overline{M}_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}. \tag{3.25}$$
Từ ma trận A ta xóa đi k hàng $i_1,\dots,i_k$ và k cột $j_1,\dots,j_k$ chứa các phần tử trong định thức $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ ta nhận được ma trận con cấp $n-k$ của A. Định thức của ma trận con này là $\overline{M}_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$, vậy $\overline{M}_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ là định thức cấp $n-k$.

- $A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ được gọi là phần bù đại số của $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ xác định theo công thức
$$A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k} = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}\overline{M}_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}. \tag{3.26}$$
Trên k hàng $i_1,\dots,i_k$ đã chọn (hoặc k cột $j_1,\dots,j_k$ đã chọn), ta có C_n^k định thức con cấp k dạng $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$, và tương ứng là $C_n^{n-k} = C_n^k$ phần bù đại số $A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$.

Ví dụ 3.35. Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Nếu ta chọn hai hàng là hàng 1, hàng 3 thì ta có $C_5^2 = 10$ định thức con cấp 2:
$$M_{13}^{12}, M_{13}^{13}, M_{13}^{14}, M_{13}^{15}, M_{13}^{23}, M_{13}^{24}, M_{13}^{25}, M_{13}^{34}, M_{13}^{35}, M_{13}^{45}.$$
Với hàng 1 hàng 3, ta chọn cột 2 cột 5 khi đó định thức con cấp 2 ứng với hai hàng hai cột này sẽ là: $M_{13}^{25} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{31} & a_{35} \end{vmatrix}$;

Định thức bù và phần bù đại số của M_{13}^{25} là

$$\overline{M}_{13}^{25} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}; A_{13}^{25} = (-1)^{1+3+2+5}\overline{M}_{13}^{25} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

Định lý 3.3. (Định lý Laplace *khai triển theo k hàng hoặc k cột*)

1) Khai triển theo k hàng $i_1, \ldots, i_k$

$$\det A = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}. \tag{3.27}$$

Định thức của A bằng tổng tất cả các tích của định thức con cấp k nằm trên k hàng $i_1, \ldots, i_k$ và k cột tùy ý theo thứ tự tăng dần nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

2) Khai triển theo k cột $j_1, \ldots, j_k$

$$\det A = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}. \tag{3.28}$$

Định thức của A bằng tổng tất cả các tích của định thức con cấp k nằm trên k cột $j_1, \ldots, j_k$ và k hàng tùy ý theo thứ tự tăng dần nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

Đặc biệt khi $k = 1$: Công thức (3.27), là công thức khai triển theo một hàng Công thức (3.22) và Công thức (3.28) là công thức khai triển theo một cột Công thức (3.23).

Chứng minh.(tham khảo [1]).

Nhận xét 3.7. Nếu trong định thức có k hàng nào đó và trên $n-k$ cột của hàng này đều bằng 0, khi đó khai triển Laplace theo k hàng này sẽ nhận được kết quả gọn hơn. Hai ví dụ sau minh họa cho điều đó.

Ví dụ 3.36. Tính định thức $D_5 = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 2 & 3 & -1 \\ g & h & 4 & 6 & 2 \\ i & j & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Giải. Ta khai triển định thức theo hai hàng đầu, trên hai hàng này có $C_5^2 = 10$ định thức con cấp 2. Ngoài định thức cấp 2

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

các định thức cấp 2 còn lại đều bằng 0 vì có ít nhất một cột toàn số 0.

Phần bù đại số của định thức cấp hai M_{12}^{12} là

$$A_{12}^{12} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Vậy $D_5 = M_{12}^{12} A_{12}^{12} = 4(ad - bc)$.

Ví dụ 3.37. Tổng quát hơn ta sẽ chứng minh công thức sau

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,k+1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix} .$$

Giải. Khai triển Laplace theo k hàng đầu và chú ý rằng $M_{1,\dots,k}^{j_1,\dots,j_k} = 0$ nếu $j_k > k$, vì cột thứ j_k chỉ gồm các số 0. Do đó các số hạng trong công thức (3.27) chỉ còn số hạng $M_{1,\dots,k}^{1,\dots,k} A_{1,\dots,k}^{1,\dots,k}$ như trên.

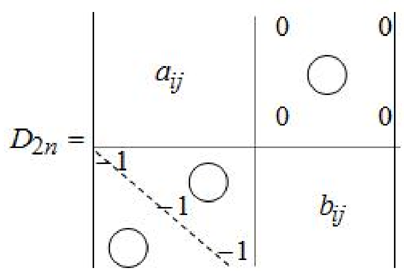
Ví dụ 3.38. Chứng minh rằng với mọi ma trận vuông cùng cấp A, B luôn có

$$\det(AB) = \det A . \det B.$$

Thật vậy, giả sử $A = [a_{ij}]_{n\times n}, B = [b_{ij}]_{n\times n}$

$$C = AB = [c_{ij}]_{n\times n},\ \text{trong đó}\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Xét định thức D_{2n} cấp $2n$ sau đây:



Khai triển Laplace theo n hàng đầu ta có $D_{2n} = \det A.\det B$ (áp dụng kết quả Ví dụ 3.37).

Ta sẽ chứng tỏ rằng $D_{2n} = \det(AB)$.

Bằng cách thực hiện phép biến đổi không làm thay đổi giá trị của định thức:

$$b_{11}C_1 + b_{21}C_2 + \cdots + b_{n1}C_n + C_{n+1} \to C_{n+1}$$

(nhân b_{11} với cột 1, b_{21} với cột 2,..., b_{n1} với cột n của D_{2n}, xong cộng tất cả vào cột $n+1$) thì định thức D_{2n} trở thành

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & 0 \\ -1 & \dots & 0 & 0 & b_{12} & b_{1n} \\ \vdots & -1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & b_{n2} & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tiếp tục biến đổi tương tự như trên sau n bước, cuối cùng ta được

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \\ -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Với $C = [c_{ij}]_{n\times n} = AB$. Khai triển Laplace theo n hàng cuối ta được

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (-1)^{(1+2+\cdots+n)+(n+1+\cdots+2n)} \begin{vmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & -1 & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{\frac{2n(2n+1)}{2}+n} . \det C = \det C = \det(AB). \end{aligned}$$

Hệ quả 5. Với mọi $A, B \in \mathcal{M}_n$, ta có

1) $\det(AB) = \det(BA)$; kể cả trường hợp $AB \neq BA$.

2) $\det(A^n) = (\det A)^n$.

3) $\det(kA) = k^n \det A$.

3.3. Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 3.14. Ma trận vuông A được gọi là *khả nghịch* nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp B sao cho $AB = BA = I$.

Phép nhân ma trận có tính kết hợp nên ma trận B ở định nghĩa trên nếu tồn tại thì duy nhất và được gọi là *ma trận nghịch đảo* của A, ký hiệu A^{-1}.

Một số thực (hữu tỉ, phức) $x \neq 0$ thì tồn tại số nghịch đảo là x^{-1}, nhưng ma trận khác ma trận không chưa chắc khả nghịch. Định lý sau đây chỉ ra điều kiện cần và đủ để ma trận khả nghịch và công thức ma trận nghịch đảo.

3.3.1. Điều kiện cần và đủ để tồn tại ma trận nghịch đảo

Định lý 3.4. (điều kiện cần) Nếu A khả nghịch thì $\det A \neq 0$.

Chứng minh. Nếu A khả nghịch thì $AA^{-1} = I$. Do đó

$$\det A \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I = 1.$$

Do đó A không suy biến (từ đó cũng có $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \neq 0$). □

Định lý 3.5. (điều kiện đủ) Nếu $\det A \neq 0$ thì A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C_A^t \tag{3.29}$$

với C_A là ma trận phụ hợp của A.

Chứng minh. Với giả thiết $\det A \neq 0$ ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại ma trận vuông cùng cấp B sao cho $AB = BA = I$.

Trước hết ta chứng minh kết quả sau:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k, \end{cases} \tag{3.30}$$

và

$$\sum_{j=1}^{n} A_{jk} a_{ji} = A_{1k}a_{1i} + \cdots + A_{nk}a_{ni} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k. \end{cases} \tag{3.31}$$

Khai triển định thức của ma trận A theo hàng thứ k ta được:

$$a_{k1}A_{k1} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = \det A.$$

Nếu $i \neq k$ xét ma trận A' có được từ A bằng cách thay hàng thứ k của A bởi hàng thứ i. Ma trận này có định thức bằng 0 (vì có hàng thứ i và hàng thứ k giống nhau). Nghĩa là

$$a_{i1}A_{k1} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \det A' = 0.$$

Do đó Công thức (3.30) được chứng minh.

Hoàn toàn tương tự, khai triển theo cột ta nhận được Công thức (3.31)

Từ (3.30), (3.31) suy ra

$$AC_A^t = C_A^t A = (\det A).I$$

vì $\det A \neq 0$ ta có

$$\frac{1}{\det A}.AC_A^t = \frac{1}{\det A}.C_A^t A = I$$

hay

$$A\left(\frac{1}{\det A}C_A^t\right) = \left(\frac{1}{\det A}C_A^t\right)A = I.$$

Vậy $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}C_A^t$. □

Hệ quả 6.

a) Nếu $BA = I$ hoặc $AB = I$ thì A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

b) Nếu A, B là ma trận khả nghịch thì A^{-1}, B^{-1}, AB, A^t cũng khả nghịch và

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A, \left(B^{-1}\right)^{-1} = B, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t.$$

c) Nếu ma trận A vuông cấp n khả nghịch, B là ma trận cỡ $n \times p$. Khi đó phương trình ma trận $AX = B$ có nghiệm duy nhất

$$X = A^{-1}B. \tag{3.32}$$

Tương tự, nếu ma trận A vuông cấp n khả nghịch, B là ma trận cỡ $p \times n$. Khi đó phương trình ma trận $XA = B$ có nghiệm duy nhất

$$X = BA^{-1}. \tag{3.33}$$

Chứng minh.

a) $BA = I \Rightarrow \det(BA) = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$. Do đó tồn tại A^{-1} và

$$B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}.$$

b) suy ra từ a).

c) Nhân A^{-1} vào hai vế của phương trình $AX = B$ ta được

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Công thức (3.33) được chứng minh tương tự. □

3.3.2. Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Ta có thể tìm ma trận nghịch đảo bằng cách dùng định nghĩa hoặc sử dụng ma trận phụ hợp (Công thức 3.29).

1. Phương pháp dùng ma trận phụ hợp

Sử dụng kết quả Ví dụ 3.34 và Công thức (3.29) ta có ma trận nghịch đảo của ma trận cấp 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ là } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 3.39.

a) Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

b) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Giải.

a) $A^{-1} = \dfrac{1}{34}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

b) Ta có $\det B = -1 \neq 0$ và $C_B = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Vậy

$$B^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}^t = -\begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Có thể tìm ma trận nghịch đảo theo thuật toán Gauss-Jordan như sau (phần tham khảo):

2. Thuật toán Gauss-Jordan:

- Viết ma trận đơn vị I bên phải ma trận A : $\quad A|I$.
- Thực hiện các phép biến đổi Gauss lên các hàng của $A|I$ một cách đồng thời để đưa ma trận A ở vế trái về ma trận đơn vị I (cách biến đổi giống như ta đưa ma trận về dạng tam giác trên, dưới. Chú ý trong cả quá trình, chỉ biến đổi theo hàng).

$$A|I \longrightarrow .... \longrightarrow I|A^{-1}. \tag{3.34}$$

- Khi bên trái là ma trận đơn vị thì bên phải là ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Ví dụ 3.40. Tìm A^{-1} với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ bằng thuật toán Gauss - Jordan.

Giải. Viết ma trận đơn vị I bên phải ma trận A:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Biến đổi đồng thời cả hai ma trận bằng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để đưa ma trận bên trái về ma trận đơn vị.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-5h_1+2h_2+h_3 \to h_3]{-2h_1+h_2 \to h_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-h_3 \to h_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3h_3+h_1\to h_1]{h_2+3h_3\to h_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_1-2h_2\to h_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

Vậy $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Nhận xét 3.8.

1) Tìm A^{-1} theo phương pháp Gauss-Jordan sẽ dễ dàng khi các phần tử của A^{-1} là các số nguyên có giá trị tuyệt đối không lớn (thường gặp khi $\det A = \pm 1$) hoặc trong một số trường hợp ma trận cấp cao, có tính chất đặc biệt.

2) Với ma trận cấp hai nên dùng công thức ma trận phụ hợp.

3.4. Hạng của ma trận

Hạng của một ma trận được định nghĩa qua hạng của hệ véc tơ cột của ma trận hoặc (một cách tương đương) là cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận này, từ đó dẫn đến các phương pháp khác nhau để tìm hạng của ma trận. Tuy nhiên, tùy theo dạng cụ thể của ma trận thì mỗi phương pháp lại có một lợi thế riêng. Trong chương tiếp theo ta cũng sử dụng cách biến đổi sơ cấp theo hàng để giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính.

Với mục đích chính là phục vụ cho sinh viên khối ngành kinh tế có công cụ học tập môn toán kinh tế, nên mục này chúng tôi sẽ giới thiệu cách tìm hạng ma trận chủ yếu nhờ vào biến đổi tuyến tính lên các cột của ma trận.

3.4.1. Định nghĩa và cách tìm hạng của ma trận bằng phép biến đổi tuyến tính

a. Định nghĩa

Định nghĩa 3.15. Xét ma trận A cỡ $n \times m$ là ma trận của một hệ (S) gồm m véc tơ nào đó của không gian véc tơ n chiều. Ta gọi *hạng của ma trận* A, ký hiệu $r(A)$, là hạng của hệ véc tơ cột (S) của ma trận A.

Vậy $r(A) = p \leq \min(m, n)$.

Ma trận không có hạng bằng 0: $r(\theta) = 0$.

b. Tính chất

Từ định nghĩa trên ta thấy rằng: tính chất hạng của ma trận được suy ra từ tính chất của hạng hệ hữu hạn véc tơ. Tức là hạng của ma trận không thay đổi khi áp dụng một số hữu hạn các biến đổi tuyến tính lên các cột của ma trận đó.

c. Phương pháp tìm hạng của ma trận bằng phép biến đổi tuyến tính

Với cách định nghĩa như trên, hạng của ma trận cũng có các tính chất và cách tính tương tự như hạng của hệ véc tơ cột của nó. Các phép biến đổi tuyến tính không làm thay đổi hạng ma trận là

1) Đổi chỗ hai cột cho nhau.

2) Nhân vào một cột của ma trận với một số khác không.

3) Cộng vào một cột một tổ hợp tuyến tính các cột khác của ma trận.

Vì vậy để tìm hạng của một ma trận, ta có thể coi mỗi cột của ma trận đó là toạ độ của một véc tơ. Thực hiện các biến đổi tuyến tính lên các cột để đưa ma trận về dạng bậc thang cột. Số các véc tơ cột khác 0 của ma trận chính là hạng của ma trận.

Nhận xét 3.9.

1. Cần hiểu rõ thế nào là ma trận bậc thang cột, để kết thúc các biến đổi tuyến tính đúng lúc. Chẳng hạn nên xếp bậc thang từ trái sang phải.

2. Cần có quy tắc thực hiện các biến đổi tuyến tính phù hợp để ta nhận được ma trận bậc thang nhanh nhất sao cho các bước biến đổi sau không làm hỏng các bước biến đổi trước. Chẳng hạn ta lần lượt triệt tiêu góc trên bên phải gần các véc tơ đã triệt tiêu ở bước trước.

3. Rõ ràng các véc tơ dạng bậc thang là độc lập tuyến tính và các véc tơ cột 0 thêm vào là phụ thuộc nên hệ các véc tơ dạng bậc thang khác 0 tạo thành

hệ độc lập tuyến tính tối đại. Do đó số véc tơ cột khác 0 này là hạng của ma trận.

4. Có thể chứng minh được $r(A) = r(A^t)$, do đó khi tìm hạng ma trận, ta có thể thực hiện biến đổi tuyến tính lên các hàng và các cột. Tuy nhiên để khỏi nhầm lẫn ta nên triệt tiêu hoặc chỉ theo hàng hoặc chỉ theo cột.

   Chẳng hạn khi tìm hạng của một hệ véc tơ thì ta nên triệt tiêu theo cột vì mỗi cột biểu diễn cho một véc tơ. Khi tìm hạng của ma trận bổ sung để giải hệ phương trình (Chương 4) thì ta nên triệt tiêu theo hàng vì mỗi hàng là hệ số một phương trình của hệ.

Ví dụ 3.41. Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Giải.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-4c_1 + c_3 \longrightarrow c_3 \\ -2c_1 + c_4 \longrightarrow c_4}]{3c_1 + c_2 \longrightarrow c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -7 & 0 \\ -1 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 + c_3 \longrightarrow c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận cuối là ma trận bậc thang cột. Vậy $r(A) = 2$.

Ví dụ 3.42. Biện luận theo a hạng của ma trận $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Giải.

$$B \xrightarrow[\substack{c_4 \to c_2 \\ c_5 \to c_3}]{\substack{c_1 \to c_4 \\ c_2 \to c_5 \\ c_3 \to c_1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_1 + c_4 \to c_4 \\ -2c_1 + c_5 \to c_5}]{\substack{c_1 + c_2 \to c_2 \\ -c_1 + c_3 \to c_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & a+1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3-2a)c_2 - 3c_3 + 2c_5 \to c_5]{\substack{c_3 \to c_2 \\ -(a+3)c_2 + (a+1)c_3 + 2c_4 \to c_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2-2a & 2-2a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-c_4 + c_5 \to c_5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2-2a & 0 \end{bmatrix}.$$

Đây là ma trận bậc thang theo cột. Vậy $r(B) = \begin{cases} 4 & \text{nếu } a \neq 1 \\ 3 & \text{nếu } a = 1. \end{cases}$

Ví dụ 3.43. Tìm hạng của ma trận sau theo tham số m

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & m & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Giải.

$$B \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & -5 & -8 & -16 & -9 \\ 0 & -5 & -8 & m-16 & -8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó $r(B) = 3$ với mọi m.

3.4.2. Tìm hạng của ma trận bằng ứng dụng định thức (tham khảo)

Định lý 3.6. Giả sử $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ là một ma trận cỡ $m \times n$. Nếu có định thức con cấp p khác 0, và mọi định thức con cấp $p+1$ bao quanh nó đều bằng 0 thì $r(A) = p$.

Chứng minh. (tham khảo [1]).

Hệ quả 7.

a) Nếu A là ma trận cỡ $m \times n$ thì hạng $r(A) = p \leq \min(m, n)$.

b) $r(A) = r(A^t)$.

c) Nếu A là ma trận vuông cấp n thì $\det A \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n, \det A = 0 \Leftrightarrow r(A) < n$.

Tính chất: Từ ý b) của hệ quả 7, ta cũng thấy ngay rằng:

1) Hạng của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị ma trận.

2) Hạng của ma trận không thay đổi qua phép biến đổi tuyến tính lên các hàng, cột của ma trận.

Phương pháp tìm hạng của ma trận bằng ứng dụng định thức

Theo Định lý 3.6 khi biết định thức con cấp p khác 0, ta chỉ cần tính các định thức con cấp $p+1$ bao quanh định thức cấp p khác 0 này. Nếu tất cả các định thức con cấp $p+1$ vừa tính đều bằng 0 thì hạng của ma trận là p. Trường hợp có định thức cấp $p+1$ khác 0 thì ta tiếp tục tính các định thức con cấp $p+2$ bao quanh định thức cấp $p+1$ khác 0 này và tiếp tục như vậy sẽ tìm được hạng của ma trận.

Thông thường để tìm hạng ma trận A ta bắt đầu xét định thức con cấp 2. Nếu có định thức cấp 2 khác 0, ta bao định thức này bởi các định thức con cấp 3. Nếu tất cả các định thức cấp 3 bao quanh đều bằng 0 thì $r(A) = 2$. Nếu có định thức con cấp 3 khác 0 thì ta tiếp tục bao định thức cấp 3 này bởi các định thức cấp 4 ...

Ví dụ 3.44. Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Giải. Dễ thấy $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 20$. Chỉ có hai định thức cấp 3 bao quanh định thức cấp 2 trên là

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Do đó $r(A) = 2$.

Ví dụ 3.45. Tìm hạng của ma trận $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

Giải. Mặc dù định thức $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$ nhưng ta có $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Bao định thức này bởi định thức cấp 3 là $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$

Định thức cấp 4 duy nhất bao định thức cấp 3 trên chính là định thức $|B| = 0$.

Vậy $r(B) = 3$.

Ví dụ 3.46. Tìm hạng của ma trận $C = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$.

Ta có $|C| = (a+3)(a-1)^3$.

Khi $a \neq -3, a \neq 1$ thì $r(C) = 4$;

Khi $a = 1$ thì $r(C) = 1$;

Khi $a = -3$, có $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$. Do đó $r(C) = 3$.

3.4.3. Xác định tính chất độc lập của hệ véc tơ bằng ứng dụng định thức

Từ Tính chất 7 của định thức, ta biết rằng định thức của một hệ n véc tơ phụ thuộc tuyến tính trong không gian véc tơ n chiều bằng 0. Do đó, nếu trong cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ nào đó của không gian véc tơ tương ứng, định thức của hệ véc tơ trong cơ sở này $D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_n\} \neq 0$ thì hệ độc lập tuyến tính. Ngược lại, giả sử hệ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính thì ta cũng có $D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_n\} \neq 0$. Thật vậy, giả sử

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i; \forall j = 1, \ldots, n$$

khi đó $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ là ma trận của $\{v_1, \ldots, v_n\}$ trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Ta có $\det A = D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_n\}$, vì hệ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính nên nó là một cơ sở của không gian n chiều V. Vậy ta có

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i; \forall j = 1, \ldots, n$$

khi đó $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ là ma trận của $\mathcal{B}$ trong cơ sở $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

A và B chính là các ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ sang cơ sở $\{v_1, \ldots, v_n\}$ và ngược lại. Do đó $AB = I$, bởi vậy

$$\det A \neq 0. \tag{3.35}$$

Định lý 3.7. Trong không gian véc tơ n chiều, hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_n\} \neq 0$ với B là cở sở nào đó.

Hệ quả 8. Trong không gian véc tơ n chiều, hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $r\{v_1, \ldots, v_n\} < n$.

Ví dụ 3.47. Hệ véc tơ $\{v_1 = (2, 4, 1), v_2 = (3, 6, 1), v_3 = (-1, 2, 2)\}$ có ma trận trong cơ sở chính tắc $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \det A = 4.$$

Vậy $r\{v_1, v_2, v_3\} = 3$. Đây là hệ véc tơ độc lập tuyến tính, do đó cũng là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 3.48. Hê véc tơ $\{v_1 = (2, 1, -4), v_2 = (1, -9, 3), v_3 = (3, -8, -1)\}$ có

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -9 & -8 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ do đó } r\{v_1, v_2, v_3\} < 3.$$

Đây là hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

Chú ý 3.1. Trong quá trình tính định thức hay tìm hạng của ma trận chúng ta thường dùng đến các phép biến đổi tuyến tính đối với các hàng, các cột của ma trận. Ta có thể tóm tắt nội dung trên bằng một bảng tổng kết dưới đây:

Phép BĐTT \ Mục đích	Tính định thức	Tìm hạng ma trận
Đổi chỗ hai hàng $h_i \leftrightarrow h_j$ (hoặc hai cột $c_i \leftrightarrow c_j$)	Định thức đổi dấu	Không đổi
Nhân một số $k \neq 0$ với một hàng $kh_i \to h_i$ (hoặc một cột $kc_i \to c_i$)	Định thức gấp lên k lần	Không đổi
Cộng một tổ hợp tuyến tính của các hàng (cột) khác vào một hàng (cột) $kh_i + h_j \to h_j (kc_i + c_j \to c_j)$	Định thức không đổi	Không đổi

Bài tập Chương 3

▷ **3.1.** Doanh số trung bình hàng tháng của một hộ gia đình (tính bằng trăm ngàn đồng) tiền điện thoại (B1) và internet (B2) khi dùng một trong ba nhà mạng (M1, M2, M3) cho dưới dạng như sau:

Tháng Giêng: $J = \begin{bmatrix} 35 & 27 & 13 \\ 42 & 39 & 24 \end{bmatrix}$,

Tháng Hai: $F = \begin{bmatrix} 31 & 17 & 3 \\ 25 & 29 & 16 \end{bmatrix}$.

a) Tìm ma trận biểu diễn doanh số bán hàng của tháng Giêng và tháng Hai;

b) Tính $J - F$ là ma trận biểu diễn về sự vượt trội của doanh số bán hàng tháng Giêng so với tháng Hai.

▷ **3.2.** Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tính $A^tB, B^tA, BA^t, (B^tA)^t$.

▷ **3.3.** Một công ty sản xuất ba loại sản phẩm P_1, P_2 và P_3 để bán cho hai khách hàng là C_1, C_2. Số lượng hàng của mỗi loại sản phẩm được bán cho hai khách hàng này được biểu diễn dưới dạng ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Công ty bán cho cả hai khách hàng cùng một mức giá với mỗi loại sản phẩm P_1, P_2 và P_3 như sau

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 500 & 200 \end{bmatrix}^t$$

Để sản xuất mỗi mặt hàng loại P_1, P_2 và P_3, công ty sử dụng bốn nguyên liệu thô là R_1, R_2, R_3, R_4. Số tấn cần thiết cho mỗi mặt hàng được xác định như sau

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Giá mỗi tấn nguyên liệu R_1, R_2, R_3, R_4 tương ứng là

$$D = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 & 15 \end{bmatrix}^t$$

Đặt $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Tính các ma trận sau và giải thích ý nghĩa của mỗi trường hợp sau.

a) AB;
b) AC;
c) CD;
d) ACD;
e) EAB;
f) $EACD$;
g) $EAB - EACD$.

▷ **3.4.** Cho các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tìm X thỏa mãn $2A + X^t = 2B$.

▷ **3.5.** Cho các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & b \\ a+b & 3c-b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3a \\ 2c & d+1 \end{bmatrix}.$$

Tìm a, b, c, d nếu $A = B$.

▷ **3.6.** Cho các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tính $3A + 4B - 2C$.

▷ **3.7.** Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tính

a) $A + B, A + C, 3A - 4B$;

b) AB, AC, AD, BC, BD, CD;

c) $A^t, A^tC, D^tA^t, B^tA, D^tD, DD^t$.

▷ **3.8.** Trong không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2. Ba ma trận sau có độc lập tuyến tính không? Có phải là một cơ sở của $\mathcal{M}_2$ không?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

▷ **3.9.** Trong không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2.

a) Chứng tỏ rằng các ma trận sau tạo thành một cơ sở của $\mathcal{M}_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Tìm tọa độ của $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ trong cơ sở trên.

▷ **3.10.** Trong không gian $\mathbb{R}^3$, hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở

$$\{v_1 = (1,0,2), v_2 = (-2,0,4), v_3 = (3,-1,2)\} \text{ sang cơ sở}$$

$$\{u_1 = (1,1,2), u_2 = (1,2,1), u_3 = (2,1,1)\} \text{ và ngược lại.}$$

▷ **3.11.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

a) Tính $f(A)$ trong đó đa thức $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$.

b) Tính $g(A)$ trong đó đa thức $g(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 4 & -3-x \end{vmatrix}$.

▷ **3.12.** Cho ma trận $A = [a_{ij}]$ vuông cấp n. Ta gọi $\operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (tổng các phần tử trên đường chéo chính) là vết của A. Chứng minh:

a) $\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B$;

b) $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$ (mặc dù $AB \neq BA$);

c) Nếu $B = P^{-1}AP$ thì $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B$;

d) Không tồn tại ma trận A, B sao cho $AB - BA = I$.

▷ **3.13.** Tính các định thức:

a) $D_1 = \begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix}$; b) $D_2 = \begin{vmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix}$.

▷ **3.14.** Tìm các giá trị của k sao cho $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$.

▷ **3.15.** Tính các định thức:

a) $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

c) $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; d) $D_4 = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & 3 \end{vmatrix}$.

▷ **3.16.** Tính định thức của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{bmatrix}$;

▷ **3.17.** Giải các phương trình sau:

a) $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$;

b) $D_2 = \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = 0$.

▷ **3.18.** Biết $299, 966, 161$ chia hết cho 23. Chứng minh $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 9 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ chia hết cho 23.

▷ **3.19.** Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -9 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -8 & -4 & -2 \\ 6 & 1 & 1 & -16 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} 3 & m & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$;

d) $D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

▷ **3.20.** Cho $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$.

Tính DA và BD.

▷ **3.21.** Các ma trận sau có khả nghịch không, nếu khả nghịch hãy tìm ma trận nghịch đảo:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$;

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

▷ **3.22.** Cho hai ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} m-1 & 3 & -3 \\ -3 & m+5 & -3 \\ -6 & 6 & m-4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} m+1 & 7 & 3 \\ -1 & m-1 & -2 \\ m-5 & 2m-5 & m-6 \end{bmatrix}.$$

Tìm các giá trị của m để A, B là các ma trận khả nghịch.

Với $m = 5$, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A, B (nếu có).

▷ **3.23.** Giải phương trình $AX = B$ với ẩn là ma trận X, trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

▷ **3.24.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$.

a) Tính $A + B; AB; A^2; A^n, n \in \mathbb{N}$;

b) Tính $f(A), f(B)$ trong đó đa thức $f(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 5 \\ 0 & 3-x \end{vmatrix}$.

▷ **3.25.** Với $n \in \mathbb{N}$, hãy tính

a) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}^n, k \in \mathbb{N}$;

b) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$;

c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n$.

Hướng dẫn giải bài tập Chương 3

▷ **3.1.** a) $J+F=\begin{bmatrix}35 & 27 & 13\\ 42 & 39 & 24\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}31 & 17 & 3\\ 25 & 29 & 16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}66 & 44 & 16\\ 67 & 68 & 40\end{bmatrix}$;

b) $J-F=\begin{bmatrix}35 & 27 & 13\\ 42 & 39 & 24\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}31 & 17 & 3\\ 25 & 29 & 16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 10 & 10\\ 17 & 10 & 8\end{bmatrix}$.

▷ **3.2.** $A^tB=\begin{bmatrix}1 & 7 & 2 & -8\\ -3 & 4 & 4 & -2\\ -5 & -5 & 6 & 10\\ 4 & -7 & 6 & 8\end{bmatrix}, B^tA=\begin{bmatrix}1 & -3 & -5 & 4\\ 7 & 4 & -5 & -7\\ 2 & 4 & 6 & 6\\ -8 & -2 & 10 & 8\end{bmatrix}$,

$$BA^t=\begin{bmatrix}-1 & -9 & 3\\ 4 & 10 & 0\\ -5 & 14 & 10\end{bmatrix}, (B^tA)^t=A^t((B^t)^t)=A^tB.$$

▷ **3.3.** a) $AB=\begin{bmatrix}5900\\ 1100\end{bmatrix}$ Tổng chi phí tính cho mỗi khách hàng;

b) $AC=\begin{bmatrix}13 & 7 & 23 & 22\\ 3 & 1 & 4 & 5\end{bmatrix}$ Lượng nguyên liệu thô dùng để sản xuất hàng hóa của mỗi khách hàng;

c) $CD=\begin{bmatrix}35\\ 75\\ 30\end{bmatrix}$ Tổng chi phí nguyên vật liệu để sản xuất mỗi mặt hàng;

d) $ACD=\begin{bmatrix}1005\\ 205\end{bmatrix}$ Tổng chi phí nguyên liệu thô để sản xuất cần thiết số lượng hàng hóa cho từng khách hàng;

e) $EAB=\begin{bmatrix}7000\end{bmatrix}$ Tổng doanh thu nhận được từ khách hàng;

f) $EACD = \begin{bmatrix} 1210 \end{bmatrix}$ Tổng chi phí nguyên vật liệu;

g) $EAB - EACD = \begin{bmatrix} 5790 \end{bmatrix}$ Thu nhập trước khi khấu trừ lao động, vốn và chi phí chung.

▷ **3.4.** $X = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 11 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$.

▷ **3.5.** $a = 2, b = 6, c = 4, d = 5$.

▷ **3.6.** $3A + 4B - 2C = \begin{bmatrix} 10 & -25 & -5 \\ 7 & -2 & 10 \end{bmatrix}$.

▷ **3.7.** a) $A + B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $A + C$ không xác định,

$3A - 4B = \begin{bmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{bmatrix}$.

b) AB, CD không xác định, $AC = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 & 5 \\ 11 & -3 & -12 & 18 \end{bmatrix}$, $AD = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$,

$BC = \begin{bmatrix} 11 & -12 & 0 & -5 \\ -15 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$, $BD = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$.

c) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, A^tC không xác định, $D^tA^t = \begin{bmatrix} 9 & 9 \end{bmatrix}$,

$B^tA = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \\ -3 & 12 & 6 \end{bmatrix}$, $D^tD = [14]$, $DD^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$.

▷ **3.8.** $\alpha A + \beta B + \gamma C = \theta \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, do đó ba ma trận A, B, C độc lập. $\dim \mathcal{M}_2 = 4$ do đó hệ 3 ma trận không thể là cơ sở của $\mathcal{M}_2$.

▷ **3.9.** a) $x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + x_3 + x_4 & x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow x_1 = -7, x_2 = 11, x_3 = -21, x_4 = 30.$$

▷ **3.10.**

- Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$ sang cơ sở $\{u_1, u_2, u_3\}$: $T = \dfrac{1}{8} \begin{bmatrix} 24 & 38 & 26 \\ -4 & 9 & 7 \\ -8 & -16 & -8 \end{bmatrix}$.
- Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở $\{u_1, u_2, u_3\}$ sang cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$: $P = T^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 14 & 4 \\ -3 & -2 & -8 \\ 1 & -10 & 8 \end{bmatrix}$.

▷ **3.11.** a) $f(A) = \begin{bmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{bmatrix}$.

b) $g(x) = x^2 + 2x - 11 \Rightarrow g(A) = A^2 + 2A - 11I = \theta$.

▷ **3.12.** a) $\operatorname{tr}(A + B) = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_{kk} + b_{kk}) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk} + \sum\limits_{k=1}^{n} b_{kk} = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$;

b) $\operatorname{tr}(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \right) = \operatorname{tr}(BA)$;

c) $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}((P^{-1}A)P) = \operatorname{tr}(P(P^{-1}A)) = \operatorname{tr}((PP^{-1})A) = \operatorname{tr} A$;

d) Không tồn tại A, B thỏa mãn $AB - BA = I$ vì $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$ nhưng $\operatorname{tr} I = n \neq 0$.

▷ **3.13.**

a) $D_1 = (t-5)(t+2)$; b) $D_2 = (t+2)(t-4)$.

▷ **3.14.** $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 2k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & k \end{vmatrix} = 2k(k-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{smallmatrix} k=2 \\ k=0 \end{smallmatrix}\right.$.

▷ **3.15.** a) $D_1 = -3$; c) $D_3 = -10$;

b) $D_2 = -9$; d) $D_4 = -476$.

▷ **3.16.** a) $\det A = (t+2)(t-3)(t-4)$; c) $\det C = (t+2)^2(t-4)$.

b) $\det B = (t+2)^2(t-4)$;

▷ **3.17.** a) $D_1 = 2(2-x)(3-x)(4-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$;

b) $D_2 = (x+2)(x-2)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

▷ **3.18.** Theo giả thiết $299 = 23k_1, 966 = 23k_2, 161 = 23k_3$; $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 9 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 299 \\ 9 & 6 & 966 \\ 1 & 6 & 161 \end{vmatrix} = 23\begin{vmatrix} 2 & 9 & k_1 \\ 9 & 6 & k_2 \\ 1 & 6 & k_3 \end{vmatrix} = 23k, k \in \mathbb{Z}.$$

▷ **3.19.** a) Cột 1, cột 2 và cột 4 của ma trận A tỉ lệ nên để tìm hạng của A ta chỉ cần xét cột 3, cột 4, cột 5.

Ta có $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ và các định thức cấp 3 bao quanh định thức này $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \\ -8 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$. Do đó $r(A) = 2$;

b) $r(B) = 4$;

c) $r(C) = \begin{cases} 3 & \text{nếu} \quad m \neq 0 \\ 2 & \text{nếu} \quad m = 0; \end{cases}$

d) $r(D) = \begin{cases} 4 & \text{nếu} \quad m \neq 1 \\ 3 & \text{nếu} \quad m = 1. \end{cases}$

▷ **3.20.** $D = 3I \Rightarrow DA = (3I)A = 3(IA) = 3A; BD = B(3I) = 3(BI) = 3B.$

▷ **3.21.** a) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow \exists A^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 11 \Rightarrow \exists B^{-1} = \dfrac{1}{11} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \exists C^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -5 \\ 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

d) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \exists D^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 7 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

▷ **3.22.** a) $\det A = \begin{vmatrix} m-1 & 3 & -3 \\ -3 & m+5 & -3 \\ -6 & 6 & m-4 \end{vmatrix} = (m+2)^2(m-4)$

$\Rightarrow \exists A^{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 4\ . \end{cases}$

$m = 5 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -3 & 10 & -3 \\ -6 & 6 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 6 & -6 & 7 \end{bmatrix}$.

b) $\det B = \begin{vmatrix} m+1 & 7 & 3 \\ -1 & m-1 & -2 \\ m-5 & 2m-5 & m-6 \end{vmatrix} = (m+2)(m-3)(m-4).$

$\Rightarrow \exists B^{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 3 \\ m \neq 4\ . \end{cases}$

$m = 5 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \dfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 22 & -26 \\ -1 & -6 & 9 \\ -5 & -30 & 31 \end{bmatrix}.$

▷ **3.23.** Vì $\det A = 1 \neq 0$ nên phương trình $AX = B$ có nghiệm $X = A^{-1}B$.

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

▷ **3.24.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}.$

a) $A+B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}; AB = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 33 \end{bmatrix}; A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}; A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}.$

b) $f(x) = (x-3)(x-1)$

$\Rightarrow f(A) = (A-3I)(A-I) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

$f(B) = (B-3I)(B-I) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix}.$

▷ **3.25.** Bằng cách quy nạp theo $n \in \mathbb{N}$, ta có

a) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k^n \end{bmatrix};$

b) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$.