Chương 4
Hệ phương trình tuyến tính

Ở bậc trung học cơ sở và trung học phổ thông, học sinh đã gặp các hệ phương trình tuyến tính đơn giản (là các hệ phương trình bậc nhất hai ẩn hoặc ba ẩn). Học sinh đã có thể giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn hoặc ba ẩn bằng phương pháp dùng các phép biến đổi tương đương hệ phương trình, phương pháp khử ẩn, phương pháp thay thế hoặc dùng máy tính bỏ túi để giải.

Hệ phương trình tuyến tính là hệ phương trình mà các ẩn số cần tìm ở bậc một, đây là bài toán thường gặp phải khi nghiên cứu các đối tượng có quan hệ tuyến tính. Đối với hệ phi tuyến người ta xấp xỉ bởi hệ tuyến tính. Vì vậy hệ phương trình tuyến tính có rất nhiều ứng dụng trong thực tế: chẳng hạn các bài toán kỹ thuật, phân tích thống kê trong tâm lý học, xã hội học và kinh tế học...

Qua Chương 4, người học sẽ biết cách giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp định thức đối với hệ Cramer, phương pháp khử Gauss có thể giải được mọi hệ với số phương trình và số ẩn không quá lớn.

Thoạt tiên ta có thể thấy rằng hình như vấn đề giải hệ phương trình tuyến tính đã cũ rồi và có thể giải quyết bằng những phương tiện tính toán sơ cấp quen biết. Tuy nhiên để giải các bài toán thực tế nêu ra ở trên ta thường phải khảo sát khoảng từ 150 đến 200 phương trình đồng thời. Tình trạng ấy trong thực hành đã gây ra nhiều khó khăn lớn đến nỗi hầu như không thể giải quyết được nếu chỉ dùng phương pháp sơ cấp. Với sự hỗ trợ của máy tính và các thuật toán mới đã khiến cho hệ phương trình tuyến tính được ứng dụng hiệu quả để giải quyết các bài toán thực tế. Mùa hè năm 1949, Giáo sư Wassily Leontief trường Đại học HarVard đã gửi đến Trung tâm tính toán của trường Đại học Mark II đề nghị giải hệ phương trình tuyến tính gồm 500 phương trình với 500 ẩn biểu diễn các chỉ tiêu kinh tế của Mỹ. Mark II là một trong những trung tâm máy tính điện tử lớn nhất thời bấy giờ cũng không giải quyết được. Leontief buộc phải rút gọn bài toán về hệ 45 phương trình với 45 ẩn. Với kết quả này Leontief nhận được giải Nobel kinh tế năm 1973, ông được xem là người mở cánh cửa vào kỷ nguyên mới về các mô hình toán học về kinh tế.

Để học tốt Chương 4, sinh viên cần phải sử dụng thành thạo công cụ là ma trận và định thức ở Chương 3. Ta lại thấy rằng giải các hệ phương trình tuyến tính là công cụ để giải quyết một số vấn đề ở Chương 2 và Chương 5 của giáo trình này.

4.1. Khái niệm hệ phương trình tuyến tính

Trong chương trình hình học giải tích ở bậc trung học phổ thông ta đã gặp các bài toán liên quan đến hệ phương trình khi tìm giao của các đường thẳng hoặc mặt phẳng.

Chẳng hạn, trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tập hợp các điểm có tọa độ (x, y, z) thỏa mãn phương trình $Ax + By + Cz = D$ là một mặt phẳng, do đó phương trình có vô số nghiệm tương ứng với vô số điểm trên mặt phẳng. Tương tự tập hợp nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases} \tag{4.1}$$

là giao của hai mặt phẳng. Vì vậy hệ phương trình có thể vô nghiệm hoặc vô số nghiệm tương ứng với hai mặt phẳng song song hoặc giao tuyến là đường thẳng hoặc hai mặt phẳng trùng nhau.

Tương tự tập hợp nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \end{cases} \tag{4.2}$$

là giao của ba mặt phẳng. Vì vậy hệ phương trình có thể vô nghiệm hoặc duy nhất nghiệm hoặc vô số nghiệm.

Khái niệm hệ phương trình tuyến tính tổng quát và phương pháp giải được xét trong các mục sau.

4.1.1. Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình tuyến tính với n ẩn số ($1 \leq m, n \in \mathbb{N}$) có *dạng tổng quát*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.3}$$

Hoặc viết tắt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m.$$

Trong đó:

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n ẩn số,
- a_{ij} là hệ số của ẩn thứ j trong phương trình thứ $i; a_{ij} \in \mathbb{R}$,
- b_i là hệ số vế phải của phương trình thứ $i; i = 1, \dots, m; b_i \in \mathbb{R}$;
- Khi các vế phải $b_i = 0$ $(i = 1, \dots, m)$ thì hệ phương trình được gọi là thuần nhất.

Mọi hệ phương trình khi cho vế sau (vế phải) bằng 0 ta có *hệ phương trình thuần nhất* tương ứng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Nghiệm của hệ phương trình là bộ gồm n số $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sao cho khi thay $x_i = \alpha_i; i = 1, 2, \dots, n$ vào các phương trình của hệ (4.3) hoặc hệ (4.4) ta có các đẳng thức số đúng.

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình là nghiệm khi hệ phương trình có vô số nghiệm, phụ thuộc vào một vài tham số nhận giá trị tuỳ ý.

Nghiệm riêng của hệ phương trình là nghiệm gồm n số xác định $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0)$, nhận được sau khi cho các tham số tuỳ ý của nghiệm tổng quát bởi giá trị cụ thể.

Hai hệ phương trình cùng ẩn được gọi là tương đương nếu tập hợp nghiệm của chúng bằng nhau. Vì vậy để giải một hệ phương trình ta có thể giải *hệ phương trình tương đương* của nó.

4.1.2. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Với hệ (4.3) ta xét các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A, X, B lần lượt được gọi là *ma trận hệ số, ma trận ẩn số và ma trận vế phải* (hoặc ma trận tự do).

Khi đó hệ phương trình (4.3) được viết lại dưới *dạng ma trận* như sau:

$$AX = B. \tag{4.5}$$

4.1.3. Dạng véc tơ của hệ phương trình tuyến tính

Nếu ta ký hiệu véc tơ $v_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ cột thứ i của ma trận A, và véc tơ $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ vế phải, thì hệ (4.3) được viết dưới *dạng véc tơ* như sau

$$x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = b \tag{4.6}$$

Với cách viết này ta thấy rằng hệ phương trình (4.6) có nghiệm khi và chỉ khi

$$b \in \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}.$$

Ví dụ 4.1. Xét hệ phương trình viết dưới dạng tổng quát:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Hoặc

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Ta có dạng véc tơ của hệ phương trình:

$$x_1(2,4,8) + x_2(2,3,5) + x_3(-1,-1,-3) + x_4(1,2,4) = (4,6,12).$$

Nếu ký hiệu

$$v_1 = (2,4,8), v_2 = (2,3,5), v_3 = (-1,-1,-3), v_4 = (1,2,4), b = (4,6,12)$$

thì

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = b.$$

4.2. Định lý tồn tại nghiệm

Định lý 4.1. (Kronecker - Capelli) Hệ phương trình (4.3) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\overline{A})$, trong đó $\overline{A}$ là ma trận có được bằng cách bổ sung thêm vào ma trận hệ số A một cột cuối là vế phải của hệ phương trình.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]. \tag{4.7}$$

Chứng minh. Hệ (4.3) có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ sao cho

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = b.$$

Nghĩa là $b \in \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Vậy $r(v_1, \dots, v_n) = r(v_1, \dots, v_n, b)$. Do đó, $r(A) = r(\overline{A})$. □

Ví dụ 4.2. Xét hệ phương trình trong Ví dụ 4.1.

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ có $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3.$

Ma trận bổ sung $\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \end{bmatrix}$ có $3 = r(A) \le r(\overline{A}) \le 3.$

$\Rightarrow r(A) = r(\overline{A}) = 3$, do đó hệ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 4.3. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 2 \\ 2x + y + z = 4 \\ -x - 4y + 3z = 5. \end{cases}$$

Ta có $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}; \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) < 3; \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 49 \Rightarrow r(\overline{A}) = 3.$

Theo định lý Kronecker – Capelli thì hệ phương trình trên vô nghiệm.

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng trong quá trình biến đổi đưa hệ phương trình về hệ phương trình tương đương bằng cách biến đổi theo hàng của ma trận bổ sung $\overline{A}$ ta sẽ tìm được điều kiện tồn tại nghiệm và đồng thời từ đó có thể giải ra nghiệm.

Ví dụ 4.4. Biến đổi ma trận bổ sung của hệ phương trình trong ví dụ 4.1

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[4h_1 - h_3 \to h_3]{2h_1 - h_2 \to h_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3h_2+h_3\to h_3}\begin{bmatrix}2&2&-1&1&4\\0&1&-1&0&2\\0&0&2&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}h_3\to h_3]{\frac{1}{2}h_3+h_2\to h_2}\begin{bmatrix}2&2&-1&1&4\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-1\end{bmatrix}.$$

$r(A)=r(\overline{A})=3$. Vậy hệ phương trình trong Ví dụ 4.1 có nghiệm.

Ví dụ 4.5. Biến đổi ma trận bổ sung của hệ phương trình trong Ví dụ 4.3

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\2&1&1&4\\-1&-4&3&5\end{bmatrix}\xrightarrow[-2h_1+h_2\to h_2]{h_1+h_3\to h_3}\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\0&7&-7&0\\0&-7&7&7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\0&7&-7&0\\0&0&0&7\end{bmatrix}.$$

Do đó $r(A)=2<r(\overline{A})=3$. Vậy hệ phương trình trong Ví dụ 4.3 vô nghiệm.

4.3. Một số phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

4.3.1. Phương pháp Cramer (còn gọi là phương pháp định thức)

Xét hệ n phương trình tuyến tính với n ẩn số dạng ma trận (4.5): $AX=B$.

Định nghĩa 4.1. Hệ n phương trình tuyến tính n ẩn, có ma trận hệ số A không suy biến ($\det A\neq 0$) được gọi là *hệ Cramer*.

Định lý 4.2. (**Định lý Cramer**) Mọi hệ Cramer đều tồn tại duy nhất nghiệm. Công thức nghiệm được xác định như sau:

$$x_i=\frac{\det A_i}{\det A}, i=1,2,\ldots,n. \tag{4.8}$$

Trong đó A_i là ma trận vuông cấp n, có được bằng cách thay cột thứ i của ma trận hệ số A bởi cột hệ số vế phải B.

Chứng minh.

Cách 1. Do $\det A\neq 0$ nên hệ $\{v_1,\ldots,v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Do đó b được biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_1,\ldots,v_n\}$. Nghĩa là tồn tại duy nhất $x_1,\ldots,x_n$ sao cho $x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n=b$.

Gọi $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Khi đó

$$D_i = D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \ldots, v_n\} = D_{\mathcal{B}}\left\{v_1, \ldots, v_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k v_k, v_{i+1}, \ldots, v_n\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_k, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$$

$$= x_i D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\} = x_i D.$$

Do đó $x_i = \dfrac{D_i}{D}, i = 1, \ldots, n$, trong đó, $D_i = \det A_i, D = \det A$. □

Cách 2. Viết hệ phương trình ở dạng ma trận $AX = B, \det A \neq 0$.

Phương trình ma trận này thỏa mãn các điều kiện của ý c) Hệ quả 6, theo Công thức (3.32) hệ có duy nhất nghiệm là $X = A^{-1}B$. Do đó

$$X = \frac{1}{\det A} C_A^t B$$

hay

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \ldots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Bởi vậy

$$x_i = \frac{1}{\det A}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n) = \frac{\det A_i}{\det A}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Trong đó A_{ki} là phần bù đại số của phần tử $a_{ki}, k = 1, 2, \ldots, n$ trên cột thứ i của A. □

Ví dụ 4.6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 3y - z &= 1 \\ 3x + 5y + 2z &= 8 \\ x - 2y - 3z &= -1. \end{cases}$$

Giải. Có $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$ nên hệ đã cho là hệ Cramer.

Ta có

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 66, |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -22, |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 44.$$

Do đó hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = 3, y = \frac{|A_2|}{|A|} = -1, z = \frac{|A_3|}{|A|} = 2$$

hay nghiệm của hệ là $(3, -1, 2)$.

Nhận xét 4.1. Phương pháp Cramer chỉ giải được hệ Cramer.

Đối với hệ có số phương trình, số ẩn lớn thì việc thực hiện rất khó khăn kể cả khi sử dụng các phần mềm để tính.

Phương pháp Cramer có một ưu điểm là với hệ phương trình Cramer thì việc giải hệ đưa về tính các định thức mà các phần mềm có thể hỗ trợ tính toán. Khi hệ Cramer với số ẩn không quá lớn thì phương pháp Cramer khá hiệu quả và có thể giải bằng máy cầm tay.

Ví dụ 4.7. Giải hệ phương trình tuyến tính trường hợp tổng quát, xét hệ 4.3.

Giả sử hệ phương trình có nghiệm và $r(A) = r(\overline{A}) = p; p \leq \min(m, n)$.

Giải. Không giảm tổng quát, giả sử p véc tơ hàng phía trên của ma trận A tạo thành hệ độc lập tuyến tính tối đại của hệ các véc tơ hàng của A.

Giả sử $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$. Vì vậy hệ (4.3) tương đương với p phương trình đầu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pp}x_p + \cdots + a_{pn}x_n = b_p. \end{cases}$$

(trường hợp khác cách giải hoàn toàn tương tự).

Hệ phương trình trên được viết lại

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 - (a_{1p+1}x_{p+1} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 - (a_{2p+1}x_{p+1} + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pp}x_p = b_p - (a_{pp+1}x_{p+1} + \cdots + a_{pn}x_n) \end{cases} \tag{4.3'}$$

Đây là hệ Cramer có vế phải phụ thuộc vào các ẩn $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Với mỗi bộ giá trị cụ thể các ẩn ở vế phải là $x^0_{p+1}, \ldots, x^0_n$ thì hệ (4.3') trở thành một hệ Cramer, có nghiệm duy nhất $(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_p, x^0_{p+1}, \ldots, x^0_n)$, trong đó $(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_p)$ được tính theo bộ số $(x^0_{p+1}, \ldots, x^0_n)$.

Các ẩn $x_{p+1}, \ldots, x_n$ có thể nhận vô số bộ giá trị tùy ý. Vậy hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào các ẩn $x_{p+1}, \ldots, x_n$.

Ví dụ 4.8. Giải và biện luận theo tham số λ hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$$

Giải.

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ (Xem Ví dụ 3.46 Chương 3).

Ta có $\det A = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^3$.

Khi $\lambda \neq -3, \lambda \neq 1$: Hệ đã cho là hệ Cramer nên có nghiệm duy nhất. Ngoài ra khi thay đổi vai trò của các ẩn trong hệ thì hệ không thay đổi, suy ra nghiệm thỏa mãn $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, do đó

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda + 3}.$$

Bởi vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3}\right)$.

Khi $\lambda = 1 : r(A) = r(\overline{A}) = 1$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2, x_3, x_4 \text{ nhận giá trị tùy ý thuộc } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của hệ có dạng

$$(1 - x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4); x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Khi $\lambda = -3 : \det A = 0$ nên $r(A) < 4$ (theo Ví dụ 3.46 $r(A) = 3$) nhưng ma trận bổ sung $\overline{A}$ có định thức con cấp 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0.$$

Do đó $r(\overline{A}) = 4$ và hệ vô nghiệm.

Kết luận:

Hệ có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{1}{\lambda+3}, \dfrac{1}{\lambda+3}, \dfrac{1}{\lambda+3}, \dfrac{1}{\lambda+3}\right)$ khi $\lambda \neq -3, \lambda \neq 1$;

Hệ có vô số nghiệm dạng $(1 - x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$ khi $\lambda = 1$;

Hệ vô nghiệm khi $\lambda = -3$.

4.3.2. Phương pháp ma trận nghịch đảo

Định lý 4.3. Hệ Cramer $AX = B$, với các ma trận tương ứng là

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

có nghiệm duy nhất

$$X = A^{-1}B. \tag{4.9}$$

Xem Công thức (3.32) Hệ quả 6. c).

Ví dụ 4.9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = c. \end{cases}$$

Giải. Dạng ma trận của hệ là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ có $\det A = -1 \neq 0$; $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ (xem Ví dụ 3.39). Do đó hệ đã cho là hệ Cramer có nghiệm theo Công thức (4.9):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40a + 16b + 9c \\ 13a - 5b - 3c \\ 5a - 2b - c \end{bmatrix}.$$

Vậy $\begin{cases} x_1 = -40a + 16b + 9c \\ x_2 = 13a - 5b - 3c \\ x_3 = 5a - 2b - c \end{cases}$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Ví dụ 4.10. Một trung tâm làm dịch vụ vận chuyển hàng hóa. Cước vận chuyển được tính theo ba loại bưu kiện phụ thuộc kích cỡ: nhỏ, trung bình và lớn.

Một lô hàng có: 6 bưu kiện nhỏ, 8 bưu kiện trung bình và 9 bưu kiện lớn có cước vận chuyển là \$173,20.

Một lô hàng khác có: 7 bưu kiện nhỏ, 13 bưu kiện trung bình và 17 bưu kiện lớn với tổng cước phí là \$291,05.

Một bưu kiện lớn có cước phí cao gấp đôi so với một bưu kiện nhỏ.

Tính cước phí vận chuyển 3 bưu kiện nhỏ, 9 bưu kiện vừa và 2 bưu kiện lớn.

Giải. Gọi x, y, z lần lượt là cước phí vận chuyển bưu kiện loại nhỏ, trung bình, lớn. Từ giả thiết trên suy ra x, y, z thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6x + 8y + 9z & = 173.20 \\ 7x + 13y + 17z & = 291.05 \\ 2x - z & = 0. \end{cases}$$

Ma trận hệ số của hệ phương trình

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 7 & 13 & 17 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -13 & 8 & 19 \\ 41 & -24 & -39 \\ -26 & 16 & 22 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 173.20 \\ 291.05 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8 \\ 7.25 \\ 9.6 \end{bmatrix}$$

Do đó cước phí vận chuyển 3 bưu kiện nhỏ, 9 bưu kiện vừa và 2 bưu kiện lớn là: $3x + 9y + 2z = \$98.85$.

Ta cũng có thể tính cước phí vận chuyển dưới dạng tích ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4.8 \\ 7.25 \\ 9.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98.85 \end{bmatrix}.$$

Nhận xét 4.2. Hai phương pháp trên chỉ dùng được đối với hệ Cramer.

4.3.3. Phương pháp khử Gauss

Xét hệ m phương trình n ẩn, dạng tổng quát (4.3).

Phương pháp khử Gauss dựa trên nguyên tắc sau.

a. Nguyên tắc

Khử bớt ẩn của các phương trình vì phương trình càng ít ẩn càng dễ tìm nghiệm.

Đưa hệ phương trình (4.3) về hệ tương đương $A'X' = B'$ dễ tìm nghiệm hơn.

Nên thực hiện khử các ẩn lần lượt theo thứ tự sau:

Nếu phương trình thứ nhất có ẩn x_1 ($a_{11} \neq 0$) ta sẽ khử x_1 ở các phương trình còn lại (từ phương trình thứ hai đến phương trình cuối);

Nếu ở phương trình thứ hai có ẩn x_2 ($a_{22} \neq 0$) ta sẽ khử x_2 ở các phương trình còn lại (từ phương trình thứ ba đến phương trình cuối);

Quá trình tiếp tục cuối cùng nhận được hệ phương trình tương đương dạng đơn giản hơn từ đó suy ra nghiệm.

Nhận xét 4.3. Ta có thể kiểm tra được rằng: khi thực hiện các phép biến đổi tương đương hệ phương trình thực chất là thực hiện các phép biến đổi tuyến tính lên các hàng của ma trận bổ sung $\overline{A}$ của hệ.

"Đổi chỗ hai phương trình" tương đương với "đổi chỗ hai hàng của $\overline{A}$".

"Nhân hoặc chia một số khác 0 vào cả hai vế của một phương trình" tương đương với "nhân hoặc chia một số khác 0 vào một hàng của $\overline{A}$".

"Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính các phương trình khác" tương đương với "cộng vào một hàng của $\overline{A}$ một tổ hợp tuyến tính các hàng khác".

Sử dụng nguyên tắc trên ta có các bước thực hành tương ứng sau:

b. Thực hành: Dùng biến đổi Gauss lên ma trận bổ sung $\overline{A}$.

Giả sử $a_{11} \neq 0$. Ta khử x_1 ở các phương trình còn lại (từ phương trình thứ hai đến phương trình cuối) mà thực chất là làm cho các hệ số $a_{i1} = 0, i = 2, 3, \dots, n$ bằng cách dùng các phép biến đổi trên ma trận $\overline{A}$:

$$\left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\right) H_1 + H_i \longrightarrow H_i. \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

Tương tự khử x_2 tức là làm cho các hệ số $a'_{i2} = 0, i = 3, \dots, n$; trong đó a'_{i2} là hệ số tương ứng với a_{i2} sau khi biến đổi.

Giả sử $a'_{22} \neq 0$. Ta thực hiện tương tự trên:

$$\left(\frac{-a'_{i2}}{a'_{22}}\right) H_2 + H_i \longrightarrow H_i. \quad (i = 3, \dots, n)$$

Quá trình tiếp tục sau một số bước.

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung $\overline{A}$ (có thể đổi chỗ cột của A, nhưng cần lưu ý là khi đổi cột là đổi thứ tự của ẩn tương ứng. Vì vậy nếu không chắc chắn về sự nhầm lẫn thứ tự của ẩn thì không nên biến đổi cột), đưa $\overline{A}$ về dạng bậc thang sau đây

$$\overline{A} \xrightarrow{\text{BĐTĐ}(H)} \begin{bmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1p} & \dots & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & a'_{pp} & \dots & b'_p \\ 0 & \dots & 0 & \dots & b'_{p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b'_m \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

trong đó $a'_{11}, \dots, a'_{pp} \neq 0$.

Nếu một trong các $b'_{p+1}, \dots, b'_m$ khác 0, nghĩa là $r(A) < r(\overline{A})$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $b'_{p+1} = \dots = b'_m = 0$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = p$, khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với hệ p phương trình n ẩn số (chú ý là $1 \leq p \leq \min(m, n)$).

Trường hợp $p = n$ thì hệ có dạng

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \dots + a'_{1n}x'_n = b'_1 \\ \qquad\quad + a'_{22}x'_2 + \dots + a'_{2n}x'_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\quad + a'_{nn}x'_n = b'_n, \end{cases} \quad a'_{ii} \neq 0. \tag{4.11}$$

Các ẩn $x'_1, \dots, x'_n$ là các ẩn $x_1, \dots, x_n$ nhưng có thể thay đổi thứ tự chỉ số. Ta giải hệ tìm nghiệm bằng cách giải từ phương trình cuối tìm x'_n, rồi tiếp tục thay lần lượt lên các phương trình trên tìm các ẩn còn lại $x'_{n-1}, x'_{n-1}, \dots, x'_1$. Hệ phương trình có duy nhất nghiệm.

Trường hợp $p < n$ thì hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \dots + a'_{1p}x'_p + \dots + a'_{1n}x'_n = b'_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x'_2 + \dots + a'_{2p}x'_p + \dots + a'_{2n}x'_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\quad a'_{pp}x'_p + \dots + a'_{pn}x'_n = b'_p. \end{cases} \tag{4.12}$$

Các ẩn $x'_1, \dots, x'_n$ là các ẩn $x_1, \dots, x_n$ nhưng có thể thay đổi thứ tự chỉ số. Ta có thể tìm các ẩn $x'_1, \dots, x'_p$ (gọi là các ẩn chính) theo các ẩn $x'_{p+1}, \dots, x'_n$. Các ẩn $x'_{p+1}, \dots, x'_n$ gọi là các ẩn không chính hay còn gọi là ẩn tùy ý (tham biến tùy ý). Chuyển các ẩn $x'_{p+1}, \dots, x'_n$ sang vế phải, ta nhận được

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \cdots + a'_{1p}x'_p = b'_1 - (a'_{1p+1}x'_{p+1} + \cdots + a'_{1n}x'_n) \\ \qquad a'_{22}x'_2 + \cdots + a'_{2p}x'_p = b'_2 - (a'_{2p+1}x'_{p+1} + \cdots + a'_{2n}x'_n) \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a'_{pp}x'_p = b'_p - (a'_{pp+1}x'_{p+1} + \cdots + a'_{pn}x'_n). \end{cases} \tag{4.13}$$

Khi gán cho $n-p$ ẩn $x'_{p+1}, \dots, x'_n$ ở vế phải một bộ tham số $\left(x^0_{p+1}, \dots, x^0_n\right)$ thì hệ phương trình có duy nhất một nghiệm $\left(x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_p, x^0_{p+1}, \dots, x^0_n\right)$. Trong đó $x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_p$ được tính theo $n-p$ tham số $x^0_{p+1}, \dots, x^0_n$. Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc $n-p$ ẩn số là $n-p$ tham số nhận giá trị tùy ý.

Chú ý 4.1. Ta chỉ nên dừng quá trình biến đổi khi nhận được ma trận dạng bậc thang.

Nên chọn $a_{11} = 1, a_{22} = 1, \dots$ để việc biến đổi ma trận bổ sung $\overline{A}$ được thuận lợi.

Các ẩn chính không nhất thiết là các ẩn $x'_1, \dots, x'_p$. Từ phương trình có ít ẩn số nhất ta giữ lại một ẩn tùy ý với hệ số khác không, chuyển các ẩn còn lại sang vế phải, khi đó các ẩn được chuyển sang vế phải gọi là các ẩn không chính.

Ta có định lý sau.

Định lý 4.4. Với hệ phương trình tuyến tính (4.3), giả sử $r(A) = r(\overline{A}) = p, 1 \le p \le \min(m, n)$. Khi đó ta có các trường hợp sau:

1) Nếu $p = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất;

2) Nếu $p < n$ thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào $n-p$ ẩn số tùy ý.

Ví dụ 4.11. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = c \end{cases}$$

Giải. Ma trận bổ sung $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix}$.

Thực hiện các phép biến đổi tuyến tính lên hàng của ma trận bổ sung $\overline{A}$, ta được

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 2 & -5 & a-c \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}.$$

Có $r(A) = r(\overline{A}) = 3$ hệ có nghiệm duy nhất với mọi a, b, c. Ta nhận được hệ phương trình tương đương với hệ đã cho là

$$\begin{cases} x_1 + \qquad + 8x_3 = c \\ \qquad x_2 - 3x_3 = b - 2a \\ \qquad\qquad x_3 = 5a - 2b - c. \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} x_1 = -40a + 16b + 9c \\ x_2 = 13a - 5b - 3c \\ x_3 = 5a - 2b - c \end{cases}$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Ở bài toán này, ta có thể tiếp tục biến đổi ma trận bổ sung để đưa ma trận A về ma trận đơn vị khi đó ta đọc được nghiệm:

$$\overline{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix} \xrightarrow[3h_3+h_2 \to h_2]{-8h_3+h_1 \to h_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40a+16b+9c \\ 0 & 1 & 0 & 13a-5b-3c \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}.$$

Vậy ta đã tìm được hệ phương trình tương đương và nhận được nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1 = -40a + 16b + 9c \\ x_2 = 13a - 5b - 3c \\ x_3 = 5a - 2b - c. \end{cases}$$

Ví dụ 4.12. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 + x_4 - x_5 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 - 4x_5 = -2 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - 16x_4 - 5x_5 = -3 \\ x_1 + x_2 + \qquad + x_4 + 2x_5 = -2. \end{cases}$$

Giải. Biến đổi sơ cấp theo hàng ma trận bổ sung của hệ

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -9 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -8 & -4 & -2 \\ 6 & 1 & 1 & -16 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & -22 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & -22 & -2 & 14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận cuối là ma trận bậc thang hàng. Ta có $r(A) = r(\overline{A}) = 4 < 5$, do đó hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc vào một ẩn tùy ý. Tuy nhiên nên tiếp tục biến đổi để từ đó dễ dàng suy ra nghiệm:

$$\overline{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra $r(A) = r(\overline{A}) = 4$. Hệ đã cho tương đương với hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một ẩn tùy ý

$$\begin{cases} x_1 & = -2 \\ x_2 - 3x_4 & = 2 \\ x_3 - 3x_4 & = 2 \\ 2x_4 + x_5 & = -1. \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{cases} x_1 & = -2 \\ x_2 & = 2 + 3x_4 \\ x_3 & = 2 + 3x_4 \\ x_5 & = -1 - 2x_4 \\ x_4 & \text{ tùy ý thuộc } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Trong thực tế từ ma trận cuối cùng ta có thể viết luôn ra nghiệm mà không cần viết hệ phương trình tương đương của nó.

Ví dụ 4.13. Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + mx_4 = 2. \end{cases}$$

Giải. Biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận bổ sung tương tự ví dụ trên

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & -5 & -8 & -16 & -9 \\ 0 & 5 & 8 & m+16 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Khi $m = 0 : 2 = r(A) < r(\overline{A}) = 3$, do đó hệ vô nghiệm.

Khi $m \neq 0 : r(A) = r(\overline{A}) = 3 < 4$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 1 ẩn. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -2 \\ \qquad 5x_2 + 8x_3 + 16x_4 = 9 \\ \qquad\qquad\qquad mx_4 = 1. \end{cases}$$

Chọn x_3 tùy ý, ta có nghiệm tổng quát của hệ

$$x_1 = -\frac{1}{5} + \frac{4}{5m} - \frac{3}{5}x_3, x_2 = \frac{9}{5} - \frac{16}{5m} - \frac{8}{5}x_3, x_4 = \frac{1}{m}; x_3 \text{ tùy ý.}$$

Ta cũng có thể biến đổi tương đương tiếp lên ma trận cuối để được ma trận dang đơn giản hơn để suy ra nghiệm:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & \frac{16}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Từ đây có thể đọc ra nghiệm như trên.

4.3.4. Ứng dụng hệ phương trình tuyến tính để tìm cơ sở của không gian sinh bởi một hệ véc tơ

Cho hệ véc tơ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ của không gian véc tơ V, ta có:

$$b \in \operatorname{Span}\{v_1, \cdots, v_n\} \Leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = b. \tag{4.14}$$

Giả sử $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ là một cơ sở của V. Gọi $\big(b_i\big)_{\mathcal{B}}; \big(a_{ij}\big)_{\mathcal{B}}; j = 1, \ldots, n$, lần lượt là tọa độ của $b; v_j; j = 1, \ldots, n$ trong cơ sở $\mathcal{B}$. Khi đó điều kiện $b \in \operatorname{Span}\{v_1, \cdots, v_n\}$ trong Công thức (4.14) tương đương với hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Ví dụ 4.14. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét các véc tơ:

$$v_1 = (1, 3, 0, 2); v_2 = (1, 5, -6, 6); v_3 = (2, 5, 3, 2).$$

Đặt $V = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$. Hãy tìm một cơ sở và suy ra số chiều của V.

Giải. Áp dụng Công thức (4.15) ta có $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in V$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 0 & -6 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

Áp dụng phương pháp khử Gauss ta có

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 3 & 5 & 5 & b_2 \\ 0 & -6 & 3 & b_3 \\ 2 & 6 & 2 & b_4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & -1 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & -6 & 3 & b_3 \\ 0 & 4 & -2 & b_4 - 2b_1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & -1 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 3b_2 - 9b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - 2b_2 + 4b_1 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình có nghiệm khi

$$\begin{cases} b_3 + 3b_2 - 9b_1 = 0 \\ b_4 - 2b_2 + 4b_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_3 = 9b_1 - 3b_2 \\ b_4 = -4b_1 + 2b_2 \end{cases}$$

Vậy $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in V \Leftrightarrow b = (b_1, b_2, 9b_1 - 3b_2, -4b_1 + 2b_2)$

$$b = (b_1, b_2, 9b_1 - 3b_2, -4b_1 + 2b_1) = (1, 0, 9, -4)b_1 + (0, 1, -3, 2)b_2; b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó $\{(1, 0, 9, -4), (0, 1, -3, 2)\}$ là một hệ sinh độc lập, đo đó là cơ sở của V.
Vậy $\dim V = 2$.

4.4. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

4.4.1. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Xét hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

Tập hợp nghiệm của hệ phương trình thuần nhất (4.16) luôn khác $\emptyset$ vì hệ luôn thỏa mãn điều kiện tồn tại nghiệm $r(A) = r(\overline{A})$ (xem Định lý 4.1). Dễ thấy $x_1 = \ldots = x_n = 0$ là một nghiệm của hệ (4.16). Nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường. Nghiệm có thành phần không đồng thời bằng 0 được gọi là nghiệm không tầm thường (hay còn gọi là nghiệm khác không).

Định lý sau đây chỉ ra điều kiện tồn tại nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Định lý 4.5. Hệ (4.16) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $r(A) < n$, và do đó

Hệ (4.16) chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $r(A) = n$.

Trường hợp số phương trình bằng số ẩn ($m = n$) thì ma trận hệ số A là ma trận vuông cấp n. Khi đó

Hệ (4.16) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $\det A = 0$.

Hệ (4.16) chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $\det A \neq 0$.

4.4.2. Cấu trúc tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý 4.6. Giả sử A là ma trận hệ số của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (4.16). Khi đó nếu $r(A) = p \leq n$ thì tập hợp nghiệm của hệ (4.16) là không gian véc tơ con $n - p$ chiều của không gian $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Thực hiện các biến đổi tương đương lên hàng của ma trận bổ sung $\overline{A}$ của hệ để đưa về hệ tương đương với ma trận bổ sung có dạng:

$$\overline{A} \xrightarrow{\text{BĐTT}(H)} \begin{bmatrix} 1 & * & * & \dots & * & 0 \\ 0 & \ddots & * & \dots & * & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Không mất tính tổng quát ta có thể xem nghiệm có dạng

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,1}x_{p+1} + \cdots + c_{1,n-p}x_n \\ x_2 = c_{2,1}x_{p+1} + \cdots + c_{2,n-p}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_p = c_{p,1}x_{p+1} + \cdots + c_{p,n-p}x_n. \end{cases} \tag{4.18}$$

Khi đó tập hợp nghiệm:

$$\begin{aligned} &\big\{(c_{1,1}x_{p+1} + \cdots + c_{1,n-p}x_n, \dots, c_{p,1}x_{p+1} + \cdots + c_{p,n-p}x_n, x_{p+1}, \dots, x_n)\big\} \\ &= \{(c_{1,1}, \cdots + c_{p,1}, 1, 0, \dots, 0)x_{p+1} + \cdots + (c_{1,n-p}, \cdots, c_{p,n-p}, 0, 0, \dots, 1)x_n\} \end{aligned}$$

với $x_{p+1}, \dots, x_n$ tùy ý thuộc $\mathbb{R}$.

Do đó tập hợp nghiệm là không gian véc tơ con $n-p$ chiều của $\mathbb{R}^n$.

Nhận xét 4.4. Vế phải của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn bằng 0, do đó vế phải không thay đổi khi ta giải hệ theo phương pháp khử Gauss. Nghĩa là cột cuối của ma trận bổ sung của hệ phương trình thuần nhất luôn bằng 0. Vì vậy để giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất ta chỉ cần biến đổi ma trận hệ số của hệ.

Ví dụ 4.15. Giải hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Giải. Giải hệ theo phương pháp khử Gauss, biến đổi ma trận hệ số

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2h_1+h_2\to h_2]{h_1+h_3\to h_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{7}(h_2+h_3)\to h_3]{\frac{1}{7}h_2\to h_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3h_2-2h_3+h_1\to h_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hệ có nghiệm: $x_1 = -x_3, x_2 = x_3, x_4 = 0; x_3$ tùy ý thuộc $\in \mathbb{R}$.

Đặt V là tập hợp nghiệm của hệ

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_3, x_3, x_3, 0) = x_3(-1, 1, 1, 0) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Vậy V là không gian con của $\mathbb{R}^4$; $\{(-1, 1, 1, 0)\}$ là một cơ sở của V và $\dim V = 1$.

4.4.3. Hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa 4.2. Một hệ các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tạo thành một cơ sở của không gian nghiệm được gọi là một *hệ nghiệm cơ bản.*

Chú ý 4.2. Theo Định lý 4.6 và Định nghĩa 4.2 ta có thể tìm tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (4.16) như sau:

- Tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ (4.16).
- Nghiệm tổng quát là tổ hợp tuyến tính của hệ nghiệm cơ bản này.

Cách tìm hệ nghiệm cơ bản

Giả sử $r(A) = p < n$, khi đó không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (4.16) có số chiều là $n - p$.

Ta có thể tìm hệ nghiệm cơ bản theo các bước sau:

Biến đổi tương đương lên các hàng của ma trận hệ số A để đưa về ma trận A' cỡ $p \times n$. Hệ phương trình với ma trận hệ số A và A' là tương đương.

Ta có thể chọn hệ nghiệm cơ bản theo hai bước lựa chọn sau:

Bước 1: Chọn ẩn làm ẩn tùy ý. Chọn $n - p$ trong n ẩn làm ẩn tùy ý. Khi đó p ẩn còn lại được biểu diễn tuyến tính theo $n - p$ ẩn tùy ý đã chọn.

Bước 2: Cho ẩn tùy ý đã chọn nhận các giá trị cụ thể. Khi đã chọn $n - p$ ẩn làm ẩn tùy ý ta có thể cho các ẩn này nhận các giá trị tùy ý không đồng thời bằng 0 thì ta được các hệ nghiệm cơ bản khác nhau.

Rõ ràng rằng có vô số cách chọn hệ nghiệm cơ bản.

Chẳng hạn nếu ta chọn $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ làm ẩn tùy ý. Khi cho các ẩn tùy ý $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ nhận một bộ $n - p$ giá trị không đồng thời bằng 0 thì ta được một nghiệm cơ bản.

Chẳng hạn ta cho các ẩn này nhận các bộ $n - p$ giá trị lần lượt sau:

$$\begin{cases} x_{p+1} = 1, x_{p+2} = 0, \ldots, x_n = 0 \\ x_{p+1} = 0, x_{p+2} = 1, \ldots, x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{p+1} = 0, x_{p+2} = 0, \ldots, x_n = 1. \end{cases}$$

thì ta được hệ $n - p$ nghiệm cơ bản gọi là *hệ nghiệm cơ bản chuẩn tắc* .

Ví dụ 4.16. Giải hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Giải. Biến đổi ma trận hệ số

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Nếu chọn x_3, x_4 là ẩn tùy ý thì ta biến đổi tiếp

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Đặt V là tập hợp nghiệm của hệ thì:

$$\begin{aligned} V = &\{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_3 - 2x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ = &\{(3,1,1,0)x_3 + (-2,-2,0,1)x_4 \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Hệ nghiệm cơ bản chuẩn tắc là $\{(3,1,1,0), (-2,-2,0,1)\}$ tương ứng với việc chọn $x_3 = 1, x_4 = 0$ và $x_3 = 0, x_4 = 1$.

Ta cũng có hệ nghiệm cơ bản khác $\{(1,-1,1,1); (-2,-2,0,1)\}$ tương ứng với việc chọn $x_3 = x_4 = 1$ và $x_3 = 0, x_4 = 1$.

Tương tự như thế bằng cách cho x_3, x_4 nhận các giá trị không đồng thời bằng 0 khác ta có hệ nghiệm cơ bản khác.

- Nếu chọn x_1, x_2 là ẩn tùy ý thì ta biến đổi tiếp

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \\ x_4 = \frac{1}{4}(x_1 - 3x_2) \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Chọn $x_1 = 4, x_2 = 0$ và $x_1 = 0, x_2 = 4$ ta được hệ nghiệm cơ bản là $\{(4,0,2,1), (0,4,-2,-3)\}$.

Tương tự như thế bằng cách cho x_1, x_2 nhận các giá trị không đồng thời bằng 0 khác ta có hệ nghiệm cơ bản khác.

- Ta cũng có thể chọn các cặp (x_1, x_3) hoặc (x_1, x_4) hoặc (x_2, x_3) hoặc (x_2, x_4) là ẩn tùy ý.

Ví dụ 4.17. Gọi V_1, V_2 lần lượt là tập hợp nghiệm của hệ phương trình (I) và hệ phương trình (II) sau

$$\text{(I)} \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 0; \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 &= 0. \end{cases}$$

Hãy tìm một cơ sở, số chiều của các không gian con $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$.

Giải. Giải hệ phương trình (I).

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 5 & 30 & -25 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4. \end{cases}$

$$\begin{aligned} v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_1 \Leftrightarrow v &= (8x_3 - 7x_4, -6x_3 + 5x_4, x_3, x_4) \\ &= x_3(8, -6, 1, 0) + x_4(-7, 5, 0, 1). \end{aligned}$$

Do đó $V_1 = \{x_3(8, -6, 1, 0) + x_4(-7, 5, 0, 1) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$. Một cơ sở của V_1 là $\{(8, -6, 1, 0), (-7, 5, 0, 1)\}$; $\dim V_1 = 2$.

Tương tự, giải hệ phương trình (II) ta có

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy $\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

$$V_2 = \{x_3(3,1,1,0) + x_4(-2,-2,0,1) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Một cơ sở của V_2 là $\{(3,1,1,0), (-2,-2,0,1)\}; \dim V_2 = 2$.

Khi đó, $V_1 \cap V_2$ là không gian nghiệm của hệ 6 phương trình sau:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 &= 0. \end{cases}$$

Sử dụng kết quả biến đổi đã đạt được khi giải hệ phương trình (I) và (II) ở trên ta có:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm $(x_4, -x_4, x_4, x_4), x_4$ tùy ý. Do đó $V_1 \cap V_2 = \{x_4(1,-1,1,1) \mid x_4 \in \mathbb{R}\}$.

Một cơ sở của $V_1 \cap V_2$ là $\{(1,-1,1,1)\}, \dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

4.4.4. Mối liên hệ giữa nghiệm của hệ không thuần nhất và hệ phương trình thuần nhất tương ứng

Xét hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất (4.3) và hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng (4.4).

Định lý 4.7. Giả sử $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ là một nghiệm riêng của hệ phương trình (4.3), khi đó:

$\overline{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ là nghiệm tổng quát của hệ (4.4) khi và chỉ khi $X = X^* + \overline{X}$ là nghiệm tổng quát của hệ (4.3).

Ví dụ 4.18. Giải hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 8 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

Giải. Nhận thấy $(1, 1, 1, 1)$ là một nghiệm riêng của hệ trên. Theo kết quả của Ví dụ 4.15 nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng của hệ trên là

$$(-t, t, t, 0), t \in \mathbb{R}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là $(1 - t, 1 + t, 1 + t, 1), t \in \mathbb{R}$.

4.5. Một số mô hình tuyến tính trong phân tích kinh tế

Để thấy được ứng dụng của hệ phương trình vào các bài toán kinh tế, sinh viên có thể tham khảo thêm một số dạng mô hình tuyến tính cơ bản sau.

4.5.1. Mô hình cân bằng thị trường

a) Thị trường một loại hàng hóa

Khi phân tích thị trường hàng hóa, các nhà kinh tế học sử dụng hàm cung và hàm cầu để biểu diễn sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu vào giá hàng hóa (với giả thiết các yếu tố khác không thay đổi).

Dạng tuyến tính tương ứng của hàm cung và hàm cầu có dạng

$$Q_s = -a_0 + a_1 p; Q_d = b_0 - b_1 p,$$

trong đó Q_s là lượng cung, tức là lượng hàng hóa mà người bán bằng lòng bán; Q_d là lượng cầu, tức là lượng hàng hóa mà người mua bằng lòng mua; p là giá hàng hóa; a_0, a_1, b_0, b_1 là các hằng số dương.

Trong các mô hình đa mục tiêu sẽ khó có phương án tối ưu cho đồng thời tất cả các mục tiêu, vì vậy người ta thường chọn phương án tối ưu là cân bằng cho đồng thời các mục tiêu này.

Khi đó, mô hình cân bằng thị trường có dạng

$$\begin{cases} Q_s = -a_0 + a_1 p \\ Q_d = b_0 - b_1 p \\ Q_s = Q_d \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được giá và sản lượng tại vị trí cân bằng, từ đó nhận được hàm cung hàm cầu cân bằng.

$$\overline{p} = \frac{a_0 + b_0}{a_1 + b_1}; \overline{Q} = -a_0 + a_1 \frac{a_0 + b_0}{a_1 + b_1}$$

b) Thị trường nhiều loại hàng hóa

Trong thị trường nhiều hàng hóa liên quan giá của hàng hóa này có thể ảnh hưởng đến lượng cung và lượng cầu của các hàng hóa khác. Để xét mô hình cân bằng thị trường n hàng hóa liên quan ta kí hiệu biến số như sau

Lượng cung hàng hóa thứ i là $Q_{s_i}, i = 1, 2, ..., n$;

Lượng cầu hàng hóa thứ i là $Q_{d_i}, i = 1, 2, ..., n$;

Giá hàng hóa thứ i là $p_i, i = 1, 2, ..., n$.

Với giả thiết các yếu tố khác không thay đổi, hàm cung và hàm cầu có dạng tuyến tính tương ứng

$$Q_{s_i} = a_{i0} + a_{i1} p_1 + a_{i2} p_2 + ... + a_{in} p_n; i = 1, 2, ..., n;$$

$$Q_{d_i} = b_{i0} + b_{i1} p_1 + b_{i2} p_2 + ... + b_{in} p_n; i = 1, 2, ..., n;$$

Khi đó, mô hình cân bằng thị trường hàng hóa có dạng như sau

$$\begin{cases} Q_{s_i} = a_{i0} + a_{i1} p_1 + a_{i2} p_2 + ... + a_{in} p_n \\ Q_{d_i} = b_{i0} + b_{i1} p_1 + b_{i2} p_2 + ... + b_{in} p_n \\ Q_{s_i} = Q_{d_i} \\ i = 1, 2, ..., n. \end{cases} \tag{4.19}$$

Giải hệ phương trình này ta sẽ xác định được giá cân bằng và lượng cân bằng của n hàng hóa đó.

Ví dụ 4.19. Xét thị trường gồm 2 mặt hàng với các hàm cung và hàm cầu tương ứng có dạng

$$Q_{s_1} = -1 + 6p_1; Q_{d_1} = 8 - p_1 + 2p_2;$$

$$Q_{s_2} = -4 + p_2; Q_{d_2} = 10 + 2p_1 - 2p_2.$$

Hệ phương trình cân bằng hàng hóa sẽ là

$$\begin{cases} -1 + 6p_1 = 8 - p_1 + 2p_2 \\ -4 + p_2 = 10 + 2p_1 - 2p_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7p_1 - 2p_2 = 9 \\ 2p_1 - 3p_2 = -14. \end{cases} \tag{4.20}$$

Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -17, D_1 = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -14 & -3 \end{vmatrix} = -55, D_2 = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 2 & -14 \end{vmatrix} = -116.$$

Do đó hệ có nghiệm duy nhất là giá cân bằng của mỗi loại hàng hóa

$$\overline{p_1} = \frac{55}{17}, \overline{p_2} = \frac{116}{17}$$

Thay giá cân bằng vào các biểu thức hàm cung ta xác định được lượng cân bằng:

$$\overline{Q_1} = -1 + 6\frac{55}{17} = \frac{313}{17}; \overline{Q_2} = -4 + \frac{116}{17} = \frac{48}{17}.$$

4.5.2. Mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô

Ở dạng đơn giản, ta xét mô hình cân bằng đối với một nền kinh tế đóng (không có quan hệ kinh tế với nước ngoài).

Gọi Y là tổng thu nhập quốc dân và E là tổng chi tiêu kế hoạch của nền kinh tế, trạng thái cân bằng được biểu diễn dưới dạng phương trình

$$Y = E.$$

Trong một nền kinh tế đóng, tổng chi tiêu kế hoạch của toàn bộ nền kinh tế gồm các thành phần sau:

C: Tiêu dùng của các hộ gia đình;

G: Chi tiêu của chính phủ;

I: Chi tiêu cho đầu tư của các nhà sản xuất.

Phương trình cân bằng trong trường hợp nền kinh tế đóng là:

$$Y = C + G + I.$$

Giả sử đầu tư theo kế hoạch là cố định $I = I^*$ và chính sách tài khóa của chính phủ cố định $G = G^*$, còn tiêu dùng của các hộ gia đình phụ thuộc vào thu nhập dưới dạng hàm bậc nhất (gọi là hàm tiêu dùng):

$$C = aY + b; (0 < a < 1; b > 0).$$

Hệ số a biểu diễn lượng tiêu dùng gia tăng khi người ta có thêm \$1 thu nhập, gọi là xu hướng tiêu dùng cận biên (marginal propensity to consume), còn b là mức tiêu dùng tối thiểu, tức là mức tiêu dùng khi không có thu nhập.

Mô hình kinh tế vĩ mô trong trường hợp này quy về hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} Y = C + G^* + I^* \\ C = aY + b. \end{cases} \tag{4.21}$$

Giải hệ này ta sẽ tìm được mức thu nhập cân bằng và mức tiêu dùng cân bằng của nền kinh tế.

$$\overline{Y} = \frac{1}{1-a}\big(b + G^* + I^*\big); \overline{C} = a\overline{Y} + b. \tag{4.22}$$

Trên đây là mô hình kinh tế vĩ mô dạng đơn giản. Độ phức tạp của mô hình sẽ tăng lên nếu ta tính đến các yếu tố khác, chẳng hạn như thuế, xuất nhập khẩu,... Nếu tính thuế thu nhập thì hàm tiêu dùng sẽ thay đổi như sau:

$$C = aY_d + b;$$

trong đó Y_d là thu nhập sau thuế, hay còn gọi là thu nhập khả dụng:

$$Y_d = Y - T \text{ (T là thuế thu nhập)}$$

Gọi tỷ lệ thuế thu nhập là t (biểu diễn ở dạng thập phân), ta có:

$$Y_d = Y - tY = (1-t)Y; C = a(1-t)Y + b.$$

Từ đó ta xác định được mức thu nhập quốc dân và tiêu dùng cân bằng.

Ví dụ 4.20. Giả sử $C = 250 + 0,84Y; I^* = 250; G^* = 300$ (tính bằng triệu USD), theo công thức (4.22) ta tính được mức thu nhập cân bằng và mức tiêu dùng cân bằng tương ứng là:

$$\overline{Y} = \frac{800}{0.16} = 5000; \overline{C} = 0.84\overline{Y} + 250 = 4450 \text{(triệu USD)}.$$

Nếu nhà nước thu thuế thu nhập ở mức 20% thì ta có mức thu nhập cân bằng và mức tiêu dùng cân bằng là: $\overline{Y_d} = 4200; \overline{C} = 3778$ (triệu USD).

Bài tập Chương 4

▷ **4.1.** Hàm cầu và hàm cung đối với hai hàng hóa phụ thuộc lẫn nhau được cho bởi:

$$\begin{aligned}
Q_{d_1} &= 50 - 2p_1 + p_2\\
Q_{d_2} &= 10 + p_1 - 4p_2\\
Q_{s_1} &= -20 + p_1\\
Q_{s_2} &= -10 + 5p_2
\end{aligned}$$

a) Chứng tỏ rằng giá cân bằng thỏa mãn phương trình ma trận

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 20 \end{bmatrix};$$

b) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp 2 trong phần a) từ đó suy ra giá cân bằng.

▷ **4.2.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

▷ **4.3.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận nghịch đảo:

a) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

▷ **4.4.** Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

▷ **4.5.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss:

a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

▷ **4.6.** Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 5x_1 + mx_2 + 4x_3 + 5x_4 = 13 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (1+m)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+m)x_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + (1+m)x_3 = m^2. \end{cases}$

▷ **4.7.** Xác định các giá trị của tham số m sao cho các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + mz &= 3 \\ x + my + 3z &= 2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + mz &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= m \\ 2x + 3y - z &= 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + my - z &= -2 \\ x - 3z &= -3 \\ x + 2y + mz &= 1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + mz &= 1 \\ 2x + my + 8z &= 3; \end{cases}$

i) Vô nghiệm;

ii) Có nhiều hơn 1 nghiệm;

iii) Có duy nhất nghiệm.

▷ **4.8.** Tìm điều kiện của a, b, c để hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 6y - 11z &= b \\ x - 2y + 7z &= c; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z &= a \\ 3x - y + 2z &= b \\ x - 5y + 8z &= c. \end{cases}$

▷ **4.9.** Trong không gian $\mathbb{R}^4$, hãy biểu thị véc tơ v_4 qua các véc tơ còn lại

$$v_1 = (1,3,1,2), v_2 = (2,6,2,4), v_3 = (3,1,-1,2), v_4 = (-12,4,8,-4).$$

▷ **4.10.** Véc tơ $v = (3, 9, -4, -2)$ có thuộc không gian sinh bởi hệ véc tơ S sau hay không

$$S = \{u_1 = (1, -2, -3, 3), u_2 = (2, 3, 1, -1), u_3 = (2, -1, 2, 1)\}.$$

▷ **4.11.** Hãy tìm một cơ sở, số chiều của các không gian con $U, V, U \cap V$ của $\mathbb{R}^4$, với

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0\};$$
$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0, x_3 = 2x_4\}.$$

▷ **4.12.** Xét mô hình kinh tế vĩ mô có dạng:

$$\begin{aligned} Y &= C + I^* + G^* \\ C &= a(Y - T) + b \\ T &= tY + T_0 \end{aligned}$$

a) Biểu diễn hệ phương trình dưới dạng ma trận $AX = B$, trong đó $X = \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix}$ là ma trận ẩn, A cỡ 3×3 là ma trận hệ số và B cỡ 3×1 là ma trận vế sau của hệ phương trình;

b) Sử dụng phương pháp Cramer tìm nghiệm Y.

▷ **4.13.** Tìm hệ nghiệm cơ bản và số chiều của không gian nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x - y + 7z + 4t &= 0 \\ x + 2y - 3z + 6t &= 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y + z + 2t + 3w &= 0 \\ x + 2y + z + 2t + 4w &= 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 20x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 15x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 7x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 9x_5 &= 0. \end{cases}$

▷ **4.14.** Hai hệ véc tơ S_1, S_2 trong $\mathbb{R}^4$ được cho dưới đây là độc lập hay phụ thuộc tuyến tính:

a) $S_1 : \{u_1 = (3, 2, 4, 7), u_2 = (4, -3, 11, 2), u_3 = (-5, 3, -13, 1), u_4 = (2, -3, 7, 9)\}$;

b) $S_2 : \{v_1 = (1, 3, 0, 7), v_2 = (4, -3, 4, 2), v_3 = (6, 3, 4, 16), v_4 = (1, -1, 3, 2)\}$.

▷ **4.15.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 & = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 & = 0. \end{cases}$$

Hệ nào trong số các hệ véc tơ sau là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình trên?

a) $\{\alpha_1 = (1, -2, 1, 0, 0), \alpha_2 = (1, -2, 0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1, -1, 0), \alpha_4 = (1, -2, 3, -2, 0)\}$;

b) $\{\beta_1 = (1, -2, 1, 0, 0), \beta_2 = (4, 0, 0, -6, 2), \beta_3 = (0, 0, -1, 1, 0)\}$;

c) $\{\gamma_1 = (1, -2, 1, 0, 0), \gamma_2 = (4, 0, 0, -6, 2), \gamma_3 = (2, 4, -1, -6, 2)\}$;

d) $\{\eta_1 = (1, -2, 0, 0, 0), \eta_2 = (4, 3, 0, -6, 2), \eta_3 = (2, 4, -1, -6, 2)\}$;

e) $\{\mu_1 = (1, -2, 1, 0, 0), \mu_2 = (4, 0, 0, -6, 2)\}$.

▷ **4.16.** Cho hai véc tơ $v_1 = (3, 1, -4), v_2 = (2, 5, -1)$ của $\mathbb{R}^3$.

a) Viết $u = (-1, 17, 8)$ thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ v_1, v_2;

b) Tìm các giá trị của k để $u = (4, -3, k)$ viết được thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ v_1, v_2;

c) Tìm điều kiện của x, y, z để $u = (x, y, z)$ viết được thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ v_1, v_2.

▷ **4.17.** Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét các véc tơ:

$$v_1 = (1, -2, 0, 3); v_2 = (1, -1, -1, 4); v_3 = (1, 0, -2, 5).$$

Đặt $V_1 = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}, V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3y + 5z + 2t = 0; z = 2t\}$. Với mỗi không gian véc tơ con $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$, hãy tìm một cơ sở tương ứng và suy ra số chiều của chúng.

▷ **4.18.** Xác định giá và sản lượng tại ví trị cân bằng của thị trường hàng hóa gồm hai mặt hàng với các hàm cung cầu có dạng:

Hàng hóa 1: $Q_{s_1} = -2 + 3p_1$, $Q_{d_1} = 10 - 2p_1 + p_2$.

Hàng hóa 2: $Q_{s_2} = -1 + 2p_2$, $Q_{d_2} = 15 + p_1 - p_2$.

▷ **4.19.** Xét mô hình kinh tế vĩ mô có dạng:

$$Y = C + I^* + G^*, C = 0,75Y + 200,$$

trong đó $I^* = 300, G^* = 400, Y$ là tổng thu nhập quốc dân, C là tiêu dùng của các hộ gia đình. Hãy xác định mức thu nhập cân bằng và mức tiêu dùng cân bằng.

▷ **4.20.** Xét mô hình kinh tế vĩ mô được xác định bởi

Thu nhập quốc dân:	$Y = C + I + G^*(G^* > 0)$
Tiêu thụ:	$C = aY + b(0 < a < 1, b > 0)$
Đầu tư:	$I = cr + d(c < 0, d > 0)$
Cung tiền:	$M_S^* = k_1Y + k_2r(k_1 > 0, k_2 < 0, M_S^* > 0)$

a) Hãy biểu diễn hệ phương trình này dưới dạng ma trận với ma trận ẩn là

$$X = \begin{bmatrix} Y \\ C \\ I \\ r \end{bmatrix};$$

b) Sử dụng phương pháp Cramer tìm nghiệm r.

Hướng dẫn giải bài tập Chương 4

▷ **4.1.** a) Hệ phương trình cân bằng giá

$$\begin{cases} Q_{v_1} = Q_{s_1} \\ Q_{v_2} = Q_{s_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50 - 2p_1 + p_2 = -20 + p_1 \\ 10 + p_1 - 4p_2 = -10 + 5p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3p_1 - p_2 = 70 \\ -p_1 + 9p_2 = 20 \end{cases}$$

Dạng ma trận của hệ phương trình là

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 20 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{26}\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,

suy ra nghiệm $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{26}\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 70 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}$.

▷ **4.2.** a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 30; D_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 60, D_{x_2} =$ $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 30, D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 60 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2.$

b) $D = -36; D_{x_1} = -36, D_{x_2} = -72, D_{x_3} = -36 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1.$

▷ **4.3.** Gọi A, B lần lượt là ma trận hệ số của hai hệ phương trình đã cho:

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, A^{-1} = \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 5 & 10 & -10 \\ 8 & 7 & -13 \end{bmatrix}$.

Nghiệm của hệ phương trình $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 5 & 10 & -10 \\ 8 & 7 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \dfrac{1}{36}\begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 \\ -7 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 14 \end{bmatrix}$.

Nghiệm của hệ phương trình $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{36}\begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 \\ -7 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

▷ **4.4.** Gọi A, B lần lượt là ma trận hệ số của hai hệ phương trình đã cho:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \det A = 2 \Rightarrow \exists A^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$

Nghiệm của hệ phương trình $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix};$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \det B = 82 \Rightarrow \exists B^{-1} = \dfrac{1}{82} \begin{bmatrix} -4 & -16 & 62 & -18 \\ 18 & -51 & 8 & -1 \\ -2 & 33 & -10 & -9 \\ -2 & -8 & -10 & 32 \end{bmatrix}.$

Nghiệm của hệ phương trình $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

▷ **4.5.** a) $x_3 = 6 - 15x_1 + 10x_2, x_4 = -7 + 18x_1 - 12x_2;\ x_1, x_2$ tùy ý.

b) $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4, x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4;\ x_3, x_4$ tùy ý.

▷ **4.6.** a) Ma trận bổ sung $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & m & 4 & 5 & 13 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & m & 4 & 5 & 13 \end{bmatrix}$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & m-15 & -21 & 15 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m-18 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{26}{7} & 0 & \frac{11}{7} & \frac{16}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & -1 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m-18 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{1) Khi } m = 18 \text{ hệ vô nghiệm.} \\ \text{2) Khi } m \neq 18 \text{ hệ có nghiệm:} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{7}\Big(16 - \frac{26}{m-18} - 11x_4\Big), x_2 = \frac{1}{m-18}, x_3 = -\frac{1}{7}\Big(1 + \frac{1}{m-18} + 5x_4\Big), x_4 \text{ tùy ý .}$$

b) Định thức của ma trận hệ số: $\begin{vmatrix} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{vmatrix} = m^2(m+3).$

Khi $m(m+3) \neq 0$ hệ có nghiệm duy nhất:

$$x_1 = \frac{2-m^2}{m(m+3)}, x_2 = \frac{2m-1}{m(m+3)}, x_3 = \frac{m^3+2m^2-m-1}{m(m+3)}.$$

Khi $m = 0$ và $m = -3$, $r(A) < 3 = r(\widetilde{A})$ hệ vô nghiệm.

▷ **4.7.** a) i) $m = -3$, ii) $m = 2$, iii) $m \neq 2$, $m \neq -3$.

b) i) $m \neq 2$, $m \neq -5$, ii) $m = -5$, iii) $m = 2$.

c) i) luôn luôn có nghiệm, ii) $m = 3$, iii) $m \neq 3$.

d) i) $m = 4$, ii) $m \neq 4$, iii) không thể có duy nhất nghiệm.

▷ **4.8.** a) $c + 2b - 5a = 0$;

b) $2a - b + c = 0$.

▷ **4.9.** $v_4 = xv_1 + yv_2 + zv_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z & = -12 \\ 3x + 6y + z & = 4 \\ x + 2y - z & = 8 \\ 2x + 4y + 2z & = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y & = 3 \\ z & = -5 \end{cases}.$

Vậy $v_4 = (3-2y)xv_1 + yv_2 - 5v_3, y$ tùy ý.

▷ **4.10.** $v = (3, 9, -4, -2) \in \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x + 2y + 2z &= 3 \\ -2x + 3y - z &= 9 \\ -3x + y + 2z &= -4 \\ 3x - y + z &= -2 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình suy ra: $v = u_1 + 3u_2 - 2u_3$.

▷ **4.11.**
- $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \Leftrightarrow u = (x_1, -x_3 - x_4, x_3, x_4)$. Một cơ sở của U: $\Big\{(1, 0, 0, 0),\ (0, -1, 1, 0),\ (0, -1, 0, 1)\Big\}$.
- $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow u = (x_1, -x_1, 2x_4, x_4)$.
  Một cơ sở của V: $\Big\{(1, -1, 0, 0),\ (0, 0, 2, 1)\Big\}$.
- $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in (U \cap V) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$
  $\Leftrightarrow u = (3x_4, -3x_4, 2x_4, x_4) = (3, -3, 2, 1)x_4$.
  Một cơ sở của $U \cap W$: $\{(3, -3, 2, 1)\}$.

▷ **4.12.** a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -a & 1 & a \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^* + G^* \\ b \\ T_0 \end{bmatrix}$;

b) $Y = \dfrac{I^* + G^* + b - aT_0}{1 - a + at}$.

▷ **4.13.** a) Một hệ nghiêm cơ bản $\Big\{(5, 0, -11, -14),\ (0, 5, 13, -8)\Big\}$, số chiều của không gian nghiệm là 2.

b) Một hệ nghiêm cơ bản $\Big\{(-2, 1, 0, 0, 0),\ (0, 0, -2, 1, 0),\ (1, 0, -5, 0, 1)\Big\}$, số chiều của không gian nghiệm là 3.

c) Một hệ nghiêm cơ bản $\Big\{(64, 72, 25, 15)\Big\}$, số chiều của không gian nghiệm là 1.

d) Một hệ nghiêm cơ bản $\Big\{(0, 1, 2, 0, 0),\ (0, 0, 3, 0, 1)\Big\}$, số chiều của không gian nghiệm là 2.

▷ **4.14.** a) Để chứng minh hệ S_1 phụ thuộc tuyến tính ta chỉ ra rằng tồn tại x, y, z, t không đồng thời bằng 0 sao cho: $xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4 = \theta$, điều này tương đương với hệ phương trình thuần nhất sau có nghiệm không tầm thường:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5z + 2t = 0 \\ 2x - 3y + 3z - 3t = 0 \\ 4x + 11y - 13z + 7t = 0 \\ 7x + 2y + z + 9t = 0. \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp khử Gauss ta có:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & -3 \\ 4 & 11 & 13 & 7 \\ 7 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & 7 & -8 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & 7 & -8 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

Vậy hệ có nghiệm không tầm thường, do đó hệ S_1 phụ thuộc.

b) Tương tự trên, để chứng minh hệ S_2 phụ thuộc tuyến tính ta chỉ ra rằng hệ phương trình thuần nhất sau có nghiệm không tầm thường:

$$\begin{cases} x \quad +4y + 6z + t = 0 \\ 3x \quad -3y + 3z - t = 0 \\ \qquad 4y + 4z + 3t = 0 \\ 7x \quad +2y + 16z + 2t = 0. \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp khử Gauss ta có:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 16 & 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy hệ có nghiệm không tầm thường, do đó hệ S_2 phụ thuộc.

▷ **4.15.** Ma trận hệ số của hệ phương trình $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ có hạng $r(A) =$

2. Do đó không gian nghiệm có chiều bằng 3, vì vậy hệ nghiệm cơ bản có 3 véc tơ.

a) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ có 4 véc tơ không phải hệ nghiệm cơ bản;

b) $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ là một hệ nghiệm cơ bản;

c) $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ không phải là hệ nghiệm cơ bản vì véc tơ γ_3 không phải là nghiệm của hệ;

d) $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ không phải là hệ nghiệm cơ bản vì véc tơ η_1 không phải là nghiệm của hệ;

e) $\{\mu_1, \mu_2\}$ không phải là hệ nghiệm cơ bản vì hệ chỉ có 2 véc tơ.

▷ **4.16.** a) $v = -3u_1 + 4u_2$;

b) $k = -7$;

c) $19x - 5y + 13z = 0$.

▷ **4.17.** • V_1 là tập các véc tơ (x, y, z, t) sao cho hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$. Sử dụng phương pháp khử Gauss ta được.

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ -2 & -1 & 0 & y \\ 0 & -1 & -2 & z \\ 3 & 4 & 5 & t \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y+2x \\ 0 & -1 & -2 & z \\ 0 & 1 & 2 & t-3x \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y+2x \\ 0 & 0 & 0 & z+y+2x \\ 0 & 0 & 0 & t-5x-y \end{bmatrix}$$

Do đó V_1 là không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $\begin{cases} 2x + y + z &= 0 \\ 5x + y - t &= 0. \end{cases}$

Có một cơ sở là $\big\{(1, 0, -2, 5), (0, 1, -1, 1)\big\}; \dim V_1 = 2$.

- V_2 là không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất với ẩn (x, y, z, t) như sau:

$$\begin{cases} 3y + 5z + 2t & = 0 \\ z - 2t & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4t \\ z = 2t \\ x \text{ tùy ý.} \end{cases}$$

Có một cơ sở là $\big\{(1, 0, 0, 0), (0, -4, 2, 1)\big\}$; $\dim V_2 = 2$.

- $V_1 \cap V_2$ là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y + z & = 0 \\ 5x + y - t & = 0. \\ 3y + 5z + 2t & = 0 \\ z - 2t & = 0 \end{cases}$$

▷ **4.18.** Hệ phương trình cân bằng hàng hóa sẽ là

$$\begin{cases} -2 + 3p_1 = 10 - 2p_1 + p_2 \\ -1 + 2p_2 = 15 + p_1 - p_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5p_1 - p_2 = 12 \\ p_1 - 3p_2 = -16. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer

$$D = -14, D_1 = -52, D_2 = -92.$$

Do đó hệ có nghiệm duy nhất là giá cân bằng của mỗi loại hàng hóa

$$\overline{p_1} = \frac{26}{7}, \overline{p_2} = \frac{46}{7}.$$

Thay giá cân bằng vào các biểu thức hàm cung ta xác định được lượng cân bằng:

$$\overline{Q_1} = \frac{64}{7}; \overline{Q_2} = \frac{85}{7}.$$

▷ **4.19.** Áp dụng công thức (4.22)

$$\overline{Y} = \frac{1}{0.25}\big(200 + 300 + 400\big) = 3600; \overline{C} = 0.75\overline{Y} + 200 = 2900.$$

▷ **4.20.** a) Dạng ma trận của hệ phương trình: $AX = B$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -C \\ k_1 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} Y \\ C \\ I \\ r \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} G^* \\ b \\ d \\ M_S^* \end{bmatrix};$$

b) $r = \dfrac{M_S^*(1-a) - k_1(b+d+G^*)}{k_2(1-a) + ck_1}$;

Rõ ràng rằng mẫu số của r là âm vì $k_2(1-a) < 0$ do $k_2 < 0$ và $a < 1$, đồng thời ck_1 <0 do $c < 0$ và $k_1 > 0$.

Do đó hệ số r dương khi tử số âm. Điều này giải thích lãi suất, r, tăng khi chi tiêu của chính phủ, G^*, tăng lên.

Chương 5
Phép biến đổi tuyến tính và dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$

Phép biến đổi tuyến tính từ không gian véc tơ vào không gian véc tơ là một ánh xạ bảo toàn phép cộng véc tơ và phép nhân một số với véc tơ. Một dạng toàn phương là ánh xạ từ không gian véc tơ vào tập số thực có biểu thức xác định là đa thức đẳng cấp bậc 2 theo tọa độ. Phép biến đổi tuyến tính và dạng toàn phương là những nội dung chính của đại số tuyến tính. Chương này chỉ xét phép biến đổi tuyến tính và dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$.

Khái niệm dạng toàn phương có rất nhiều ứng dụng. Chẳng hạn, ta đã biết hàm số chỉ đạt cực trị tại những điểm tới hạn (đạo hàm cấp 1 bằng 0 hoặc không tồn tại đạo hàm). Khi hàm một biến số có đạo hàm cấp 1 triệt tiêu tại một điểm nào đó thì số gia của hàm phụ thuộc vào dấu của đạo hàm cấp 2 tại điểm này. Trường hợp hàm nhiều biến có các đạo hàm riêng cấp 1 bằng 0 tại một điểm nào đó thì số gia của hàm tại điểm này phụ thuộc vào vi phân cấp 2, đó là một dạng toàn phương. Tùy theo tính chất xác định dương, xác định âm hoặc chỉ số quán tính dương và chỉ số quán tính âm khác 0 của dạng toàn phương này ta có thể kết luận hàm số đạt cực tiểu, cực đại hay không đạt cực trị tại điểm đã xét. Khi vi phân cấp 2 bằng 0 thì bài toán sẽ phức tạp hơn nhiều, nhưng rất may là trường hợp này ít gặp trong thực tế. Dạng toàn phương còn được sử dụng trong bài toán bình phương cực tiểu, trong quy hoạch động, ...

Có thể nghiên cứu phép biến đổi tuyến tính và dạng toàn phương thông qua ma trận biểu diễn nó hoặc biểu thức tọa độ. Vì vậy để học tốt chương này sinh viên cần nắm vững các kiến thức đã học trong các chương trước.

5.1. Phép biến đổi tuyến tính

5.1.1. Khái niệm, tính chất, phép toán

Trước hết ta xét ánh xạ tuyến tính tổng quát từ không gian véc tơ V vào không gian véc tơ W.

Định nghĩa 5.1. Ánh xạ f từ không gian véc tơ V vào khôngtơ W thỏa mãn:

Với mọi $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(u+v) & = f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) & = \alpha f(u) \end{cases} \tag{5.1}$$

được gọi là một *ánh xạ tuyến tính* từ V vào W.

Ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào chính nó được gọi là một *phép biến đổi tuyến tính* của không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$.

Điều kiện (5.1) còn có thể thay thế bởi điều kiện tương đương sau:

Với mọi $u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v). \tag{5.2}$$

Ký hiệu $\mathrm{Hom}(V, W)$ là tập các ánh xạ tuyến tính từ V vào W.

Nói riêng khi $V \equiv W$ thì f được gọi là tự đồng cấu của V, hay còn gọi là phép biến đổi tuyến tính của không gian véc tơ V.

Ký hiệu $\mathrm{End}(V)$ là tập các phép biến đổi tuyến tính của không gian V.

Một ánh xạ hoàn toàn được xác định khi ta biết quy luật cho tương ứng mỗi phần tử của tập nguồn X với ảnh của nó trong tập đích Y. Quy luật này thường được cho dưới dạng công thức xác định ảnh $y = f(x) \in Y, \forall x \in X$. Tuy nhiên định lý sau chỉ ra rằng: do điều kiện (5.1) nên chỉ cần xác định ảnh của một cơ sở nào đó của không gian véc tơ V là có thể xác định ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ V.

Định lý 5.1. Mỗi ánh xạ tuyến tính từ V vào W hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của V. Nghĩa là với mỗi cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ cho trước của V và với mỗi hệ véc tơ $u_1, \ldots, u_n$ của W, tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính xác định như sau

$$f : V \longrightarrow W \text{ sao cho } f(e_i) = u_i, i = 1, \ldots, n.$$

Chứng minh. Tham khảo [1].

Ví dụ 5.1. Tìm công thức xác định ảnh của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ biết ảnh các véc tơ của cơ sở chính tắc:

$$f(1, 0) = (2, -1, 5); f(0, 1) = (-3, 4, 7).$$

Giải. Với mọi $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : v = x(1, 0) + y(0, 1)$. Theo Công thức (5.1) ta có:

$$\begin{aligned} f(v) &= f\big(x(1,0) + y(0,1)\big) = xf(1,0) + yf(0,1) \\ &= x(2,-1,5) + y(-3,4,7) = (2x - 3y, -x + 4y, 5x + 7y) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Định lý 5.2. Ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ V vào không gian W có các tính chất sau:

(i) $f(\theta) = \theta$;

(ii) Với mọi $v \in V : f(-v) = -f(v)$;

(iii) $f\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f(v_i), \forall\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}, \forall\ v_1, \ldots, v_m \in V.$

Chứng minh.

(i) $f(\theta) = f(0.\theta) = 0.f(\theta) = \theta.$

(ii) $f(v) + f(-v) = f(v + (-v)) = f(\theta) = \theta$. Do đó $f(-v) = -f(v)$.

(iii) Dễ dàng chứng minh bằng cách quy nạp theo m.

Với các hàm số ta có thể thực hiện phép cộng các hàm số, phép nhân một số với hàm số và phép hợp hàm số. Các phép toán cộng hai ánh xạ tuyến tính, phép nhân một số thực với một ánh xạ tuyến tính và phép hợp hai ánh xạ tuyến tính được xác định tương tự như sau.

Định lý 5.3. a) Nếu $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$, tương ứng $f+g$ xác định như sau

$$\begin{aligned} f+g : V &\longrightarrow W \\ u &\mapsto f(u)+g(u) \end{aligned} \tag{5.3}$$

thì $f+g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ và được gọi là tổng của f và g.

b) Với mọi $k \in \mathbb{R}$, với mọi $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, tương ứng kf xác định như sau

$$\begin{aligned} kf : V &\longrightarrow W \\ u &\mapsto (kf)(u) = kf(u) \end{aligned} \tag{5.4}$$

thì $kf \in \mathrm{Hom}(V, W)$ và được gọi là tích của k và f.

c) Nếu $f, g \in \mathrm{End}(V)$ thì hợp $f \circ g$ cũng là phép biến đổi tuyến tính của không gian véc tơ V. Nói cách khác $f, g \in \mathrm{End}(V)$ thì $f \circ g \in V$.

Phép hợp nhiều lần một phép biến đổi tuyến tính được định nghĩa theo quy nạp. Ta cũng ký hiệu $f \circ f$ là f^2 và tổng quát hơn $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}$ là f^n.

Chú ý 5.1.

- Có thể chứng minh với hai phép toán: cộng hai ánh xạ tuyến tính, nhân một số với ánh xạ tuyến tính thì $\mathrm{Hom}(V, W)$ có cấu trúc không gian véc tơ.

- Do giới hạn của nội dung chương trình theo Đề cương môn học nên trong giáo trình này chúng ta chỉ xét các ánh xạ tuyến tính trên các không gian thực $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$. Bởi vậy ví dụ và bài tập chỉ nhắc đến các ánh xạ tuyến tính có dạng sau

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m). \end{aligned}$$

  Tất nhiên nó mang đầy đủ tính chất của một ánh xạ tuyến tính (5.1).

- Trong lý thuyết chúng tôi vẫn dùng ký hiệu tổng quát là các không gian V, W.

Ví dụ 5.2. Các ánh xạ sau đều là các phép biến đổi tuyến tính:

1) Ánh xạ đồng nhất
$$\begin{aligned} Id_V : V &\longrightarrow V \\ u &\mapsto Id_V(u) = u. \end{aligned}$$

2) Ánh xạ không
$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ u &\mapsto \theta(u) = \theta. \end{aligned}$$

3) Ánh xạ
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = (3x - 4y, 2x + y). \end{aligned}$$
Với mọi $u = (x, y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, với mọi $k \in \mathbb{R}$ ta có
$$\begin{aligned} f(u+v) = f(x+x', y+y') &= (3(x+x') - 4(y+y'), 2(x+x') + (y+y')) \\ &= (3x + 3x' - 4y - 4y', 2x + 2x' + y + y') \\ &= (3x - 4y, 2x + y) + (3x' - 4y', 2x' + y') = f(u) + f(v). \end{aligned}$$
$f(ku) = f(kx, ky) = (k(3x - 4y), k(2x + y)) = k(3x - 4y, 2x + y) = kf(u).$
Chứng tỏ f thỏa mãn (5.1), vậy f là một phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$.

4) Ánh xạ
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) = (3x - 4y + 2z, 2x + y - 5z) \end{aligned}$$
là một ánh xạ tuyến tính.

5) Một cách tổng quát, cho ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times m}$, xét tương ứng
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m) \end{aligned}$$
xác định bởi
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$
Ta có thể chứng minh được đây là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$. Ngược lại ta cũng chứng minh được mọi ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ đều có dạng (5.5).

Thực hiện phép nhân ma trận ta nhận được công thức:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{5.6}$$

(5.6) được gọi là biểu thức tọa độ của phép biến đổi tuyến tính f.

2), 3), 4) là ba trường hợp cụ thể của 5).

Ví dụ 5.3. Cho hai phép biến đổi tuyến tính $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh như sau:

$$f(x, y) = (3x - 5y, 4x + y);$$
$$g(x, y) = (2x + 6y, x - 5y).$$

Các ánh xạ $2f, f + g, f \circ g, g \circ f$ cũng là các phép biến đổi tuyến tính của $\mathbb{R}^2$, có công thức xác định ảnh như sau:

- $2f(x, y) = (6x - 10y, 8x + 2y);$
- $(f + g)(x, y) = (5x + y, 5x - 4y);$
- $f \circ g(x, y) = f(2x + 6y, x - 5y) = (x + 43y, 9x + 19y);$
- $g \circ f(x, y) = g(3x - 5y, 4x + y) = (30x - 4y, -17x - 10y).$

Ví dụ 5.4. Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh như sau:

$$f(x, y) = (3x - 5y, 4x + y).$$

Khi đó:

$$f^2(x, y) = f(f(x, y)) = f(3x - 5y, 4x + y) = (-11x - 20y, 16x - 19y).$$

Việc tìm công thức xác định ảnh của phép biến đổi tuyến tính trong Ví dụ 5.3, Ví dụ 5.4 sẽ dễ dàng hơn khi sử dụng ma trận của phép biến đổi tuyến tính được xét như sau.

5.1.2. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong một cơ sở

Xét ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$.

Giả sử $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của V, $\mathcal{B}' = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ là một cơ sở của W; $\dim V = n, \dim W = m$. Khi đó $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ là một hệ véc tơ trong W.

Theo Định lý 5.1 ánh xạ tuyến tính f hoàn toàn được xác định bởi hệ véc tơ $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$. Mặt khác theo Định nghĩa 3.6 hệ véc tơ $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ được xác định bởi ma trận A của nó trong cơ sở $\mathcal{B}'$ của W. Vậy ma trận A hoàn toàn xác định ánh xạ tuyến tính f, điều này đưa đến khái niệm ma trận của ánh xạ tuyến tính như sau.

Định nghĩa 5.2. Ma trận của hệ véc tơ $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ trong cơ sở $\mathcal{B}'$ được gọi là *ma trận của ánh xạ tuyến tính* f trong cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$.

Nghĩa là nếu $f(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\omega_i; j = 1, \dots, n$ thì ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$.

$$\text{Ký hiệu } A = [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Trường hợp f là phép biến đổi tuyến tính của không gian véc tơ V thì ma trận của f trong cơ sở $\mathcal{B}$ nào đó của V là một ma trận vuông. Cụ thể nếu $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ thì ma trận của f trong cơ sở này có các cột lần lượt là tọa độ của hệ véc tơ $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ viết trong cơ sở $\mathcal{B}$.

$$\text{Ký hiệu } A = [f]_{\mathcal{B}}. \tag{5.8}$$

Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong cơ sở chính tắc

Trường hợp ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, khi đó ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ gọi là *ma trận chính tắc*.

Định lý 5.4. Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ với công thức xác định ảnh

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) \tag{5.9}$$

có ma trận trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R}^m$ là

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ngược lại mỗi ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ xác định duy nhất một ánh xạ tuyến tính f có công thức xác định ảnh trong cơ sở chính tắc theo Công thức (5.9).

Ta có thể minh họa điều này trong trường hợp $n = 3, m = 4$ như sau. Giả sử:

$$f(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z, a_4x + b_4y + c_4z)$$

Khi đó

$$f(x, y, z) = x(a_1, a_2, a_3, a_4) + y(b_1, b_2, b_3, b_4) + z(c_1, c_2, c_3, c_4)$$
$$f(x, y, z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$$

$$\begin{cases} x = 1, y = 0, z = 0 \Rightarrow f(e_1) = (a_1, a_2, a_3, a_4) \\ x = 0, y = 1, z = 0 \Rightarrow f(e_2) = (b_1, b_2, b_3, b_4) \\ x = 0, y = 0, z = 1 \Rightarrow f(e_3) = (c_1, c_2, c_3, c_4) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Ta cũng thấy hàng thứ $i (i = 1, 2, 3, 4)$ của ma trận A là hệ số của thành phần thứ i trong công thức xác định ảnh.

Dạng ma trận của công thức xác định ảnh

Công thức xác định ảnh của ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$ ứng với cơ sở $\mathcal{B}$ của V và $\mathcal{B}'$ của W viết dưới dạng ma trận:

$$\forall\ u \in V :\ [f(u)]_{\mathcal{B}'} = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}}. \tag{5.10}$$

Nói riêng f là phép biến đổi tuyến tính trong không gian véc tơ V với cơ sở $\mathcal{B}$, ta có:

$$\forall\ u \in V : [f(u)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}}. \tag{5.11}$$

(5.11) được gọi là công thức xác định ảnh dạng ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở $\mathcal{B}$ của không gian véc tơ V.

Nhận xét 5.1.

- Có tương ứng $1-1$ giữa $\mathrm{Hom}(V, W)$ và $\mathcal{M}_{m\times n}$. Cụ thể nếu cố định cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ của V và $\mathcal{B}' = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ của W, khi đó với mỗi $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ tồn tại duy nhất ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ xác định bởi (5.10) và ngược lại.

- Trường hợp ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, sử dụng Định lý 5.4 ta nhận được ma trận chính tắc của f. Ngược lại nếu có ma trận chính tắc của f thì có công thức xác định ảnh dạng (5.9).

Định lý 5.5.

a) Giả sử A, B lần lượt là ma trận của $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ trong một cặp cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ nào đó của V và W. Khi đó $A + B, kA$ lần lượt là ma trận của $f + g, kf$ trong cặp cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, với $k \in \mathbb{R}$.

b) Giả sử A, B lần lượt là ma trận của $f, g \in \mathrm{End}(V)$ trong một cơ sở $\mathcal{B}$ nào đó của V. Khi đó AB là ma trận của $f \circ g$ trong cơ sở $\mathcal{B}$.

c) Giả sử A là ma trận của $f \in \mathrm{End}(V)$ trong một cơ sở $\mathcal{B}$ nào đó của V. Khi đó f khả nghịch khi và chỉ khi ma trận A khả nghịch, đồng thời $[f^{-1}]_{\mathcal{B}} = A^{-1}$.

Chứng minh. Tham khảo [1].

Ví dụ 5.5. Cho hai ánh xạ tuyến tính $f, g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z, t) = (4x + 2y - 4z + 6t, 3x + 5z + 3t, 5x - 4y + z + 2t).$$

$$g(x, y, z, t) = (5x + 2y - 4z + 7t, 3x + 5z - 2t, 4x - 3y + 6z + t).$$

a) Viết ma trận chính tắc A của f và B của g;

b) Viết ma trận chính tắc của $3f - 2g$ và viết công thức xác định ảnh.

Giải.

a) Theo Định lý 5.4 ta có: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 & 6 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$;

b) Ma trận chính tắc của $3f - 2g$ là $3A - 2B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 13 \\ 7 & -6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$.

Theo Định lý 5.4, từ ma trận có thể nhận được công thức xác định ảnh:

$(3f - 2g)(x, y, z, t) = (2x + 2y - 4z + 4t, 3x + 5z + 13t, 7x - 6y - 9z + 4t.)$

Từ đây ta chỉ xét các phép biến đổi tuyến tính của không gian $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 5.6. Cho hai phép biến đổi tuyến tính $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh như sau:

$$f(x, y) = (3x - 5y, 4x + y);$$
$$g(x, y) = (2x + 3y, -x + 4y).$$

a) Tìm ma trận chính tắc của các phép biến đổi f, g (là ma trận trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$).

b) Tìm ma trận chính tắc của các phép biến đổi

$$2f + 3g, f \circ g, g \circ f, f^2 - 5f + 24Id_{\mathbb{R}^2}.$$

c) Viết công thức xác định ảnh của các phép biến đổi

$$2f + 3g, f \circ g, g \circ f, f^2 - 5f + 24Id_{\mathbb{R}^2}.$$

d) Viết công thức xác định ảnh của f^{-1} nếu tồn tại.

Giải.

a) Theo Định lý 5.4 và tương tự Ví dụ 5.4 ta nhận được ma trận chính tắc A, B tương ứng của hai phép biến đổi tuyến tính f và g

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Áp dụng Định lý 5.5 ta nhận được ma trận chính tắc của các phép biến đổi $2f + 3g, f \circ g, g \circ f, f^2 - 5f + 24Id_{\mathbb{R}^2}$ lần lượt tương ứng là

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} 12 & -1 \\ 5 & 14 \end{bmatrix},\ AB = \begin{bmatrix} 11 & -11 \\ 7 & 16 \end{bmatrix},\ BA = \begin{bmatrix} 18 & -7 \\ 13 & 9 \end{bmatrix},$$

$$A^2 - 5A + 24I = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Theo Định lý 5.4 và Nhận xét 5.1 ta có thể suy ra công thức xác định ảnh của các phép biến đổi $2f+3g, f\circ g, g\circ f, f^2-5f+24Id_{\mathbb{R}^2}$ lần lượt tương ứng là

$$(2f+3g)(x,y) = (12x - y, 5x + 14y),$$

$$(f\circ g)(x,y) = (11x - 11y, 7x + 16y),$$

$$(g\circ f)(x,y) = (18x - 7y, 13x + 9y),$$

$$(f^2 - 5f + 24Id_{\mathbb{R}^2})(x,y) = (-2x + 5y, -4x).$$

d) A khả nghịch và $A^{-1} = \dfrac{1}{23}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, do đó f khả nghịch và

$$f^{-1}(x,y) = \frac{1}{23}(x + 5y, -4x + 3y).$$

Ma trận của $f \in$ End$(\mathbb{R}^n)$ trong các cơ sở khác nhau.

Ma trận của cùng một phép biến đổi tuyến tính $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ trong hai cơ sở khác nhau của $\mathbb{R}^n$ là khác nhau. Định lý sau xác định công thức liên hệ giữa hai ma trận của cùng một phép biến đổi tuyến tính này trong hai cơ sở khác nhau.

Định lý 5.6. Giả sử $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Gọi A, A' lần lượt là ma trận của f trong hai cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ của $\mathbb{R}^n$ và T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$. Khi đó:

$$A' = T^{-1}AT. \tag{5.12}$$

Chứng minh. Với $\forall u \in \mathbb{R}^n, f(u) \in \mathbb{R}^n$ và các giả thiết đã cho ta có

$[u]_{\mathcal{B}} = T[u]_{\mathcal{B}'}$ (1)(công thức đổi tọa độ)
$[f(u)]_{\mathcal{B}} = T[f(u)]_{\mathcal{B}'}$ (2)(công thức đổi tọa độ)
$[f(u)]_{\mathcal{B}} = A[u]_{\mathcal{B}}$ (3)(biểu thức dạng ma trận của phép biến đổi f)
$[f(u)]_{\mathcal{B}'} = A'[u]_{\mathcal{B}'}$ (4)(biểu thức dạng ma trận của phép biến đổi f).

Từ (4) ta có

$$\begin{aligned} A'[u]_{\mathcal{B}'} &= [f(u)]_{\mathcal{B}'} \\ &= T^{-1}T[f(u)]_{\mathcal{B}'} = T^{-1}(T[f(u)]_{\mathcal{B}'}) \\ &= T^{-1}([f(u)]_{\mathcal{B}}) \text{ theo (2)} \\ &= T^{-1}(A[u]_{B}) \text{ theo (3)} \\ &= T^{-1}AT[u]_{\mathcal{B}'} \text{ theo (1)} \\ &= (T^{-1}AT)[u]_{\mathcal{B}'}. \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra điều cần chứng minh. □

Định nghĩa 5.3. Hai ma trận A, B được gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $B = T^{-1}AT$.

Chú ý 5.2.

- Định lý 5.6 chỉ ra rằng hai ma trận của một phép biến đổi tuyến tính theo hai cơ sở khác nhau là đồng dạng (Công thức 5.12).
- Định thức của hai ma trận đồng dạng là bằng nhau.

Thật vậy nếu $B = T^{-1}AT$ thì $\det B = \det(T^{-1}AT) = \det T^{-1} \det A \det T = \det A$.

Ví dụ 5.7. Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, xác định như sau:

$$f(x, y, z) = (2x - y, 9x + 4y + 6z, -8x - 3z).$$

a) Tìm ma trận chính tắc của f trong $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận của f trong cơ sở $\mathcal{S}$ của $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{S} = \{v_1 = (1, 3, -4), v_2 = (1, 1, -2), v_3 = (3, -3, -4)\}.$$

Giải.

a) Tương tự hai ví dụ trên ta có thể nhận được ma trân chính tắc của f là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

b) Tìm ma trận của f trong cơ sở $\mathcal{S}$ theo hai cách sau.

Cách 1): Theo Định nghĩa 5.2, Công thức (5.8).

$$\begin{aligned}
f(1,3,-4) &= (-1,-3,4) = -1(1,3,-4) + 0(1,1,-2) - 0(3,-3,-4);\\
f(1,1,-2) &= (1,1,-2) = 0(1,3,-4) + 1(1,1,-2) - 0(3,-3,-4);\\
f(3,-3,-4) &= (9,-9,-12) = 0(1,3,-4) + 0(1,1,-2) + 3(3,-3,-4).
\end{aligned}$$

Do đó f có ma trận đối với cơ sở $\mathcal{S}$ là $A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Cách 2) Áp dụng Công thức (5.12): $A' = T^{-1}AT$

Trong đó T là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở ($\mathcal{S}$).

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5 & -1 & -3 \\ 12 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 5.8. Cho phép biến đổi tuyến tính $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ có ma trận A ứng với cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ xác định như sau $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Hãy tìm ma trận A' của f trong cơ sở $\mathcal{B}' = \{e_1, e_3, e_2, e_4\}$.

Giải.

Cách 1) Áp dụng Định nghĩa 5.2 và Công thức (5.8).

Đặt $e_1' = e_1, e_2' = e_3, e_3' = e_2, e_4' = e_4$. Theo giả thiết ta có:

$$f(e_1') = f(e_1) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4 = e_1' + 2e_2' + 3e_3' + e_4';$$
$$f(e_2') = f(e_3) = -e_2 + 3e_3 + e_4 = 3e_2' - e_3' + e_4';$$
$$f(e_3') = f(e_2) = 2e_1 + 5e_3 + 2e_4 = 2e_1' + 5e_2' + 2e_4';$$
$$f(e_4') = f(e_4) = e_1 + 2e_2 + e_3 + 3e_4 = e_1' + e_2' + 2e_3' + 3e_4'.$$

Vậy ma trận A' của f trong cơ sở $\mathcal{B}' = \{e_1, e_3, e_2, e_4\}$ là:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Cách 2) Áp dụng Công thức (5.12): $A' = T^{-1}AT$, ta có

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5.1.3. Véc tơ riêng, giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính và ma trận vuông

a. Khái niệm véc tơ riêng, giá trị riêng

Định nghĩa 5.4. Xét phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ của không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$. Véc tơ $v \in \mathbb{R}^n, v \neq \theta$ được gọi là *véc tơ riêng* của f nếu tồn tại số $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$$f(v) = \lambda v. \tag{5.13}$$

Khi đó số λ được gọi là *giá trị riêng* của f ứng với véc tơ riêng v.

Cho ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, một cách tương tự ta định nghĩa véc tơ riêng và giá trị riêng của ma trận A như sau.

Nếu tồn tại $x_1, \dots, x_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ hay } (A - \lambda I) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Khi đó $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, v \neq \theta$ là *véc tơ riêng ứng với giá trị riêng* λ *của ma trận* A.

Định nghĩa 5.5. Với A là một ma trận vuông cấp n. Đa thức bậc n của λ xác định như sau

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{5.15}$$

được gọi là *đa thức đặc trưng của ma trận* A.

Nhận xét 5.2.

- Đa thức đặc trưng của ma trận A là định thức của ma trận nhận được từ ma trận A và các phần tử trên đường chéo trừ đi λ.
- Giả sử A và A' là hai ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trong hai cơ sở tương ứng $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$, theo Định lý 5.6 ta có $A' = T^{-1}AT$. Vậy A và A' đồng dạng. Khi đó

  $$\mathcal{P}_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda I) = \det(T^{-1}AT - \lambda I) = \det(T^{-1}(A - \lambda I)T) = \mathcal{P}_A(\lambda).$$

  Vậy đa thức đặc trưng của các ma trận ứng với các cơ sở khác nhau của cùng một phép biến đổi tuyến tính là bằng nhau.

  Do đó ta có thể định nghĩa *đa thức đặc trưng của phép biến đổi tuyến tính* qua đa thức đặc trưng của ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong một cơ sở nào đó.

Định nghĩa 5.6. *Đa thức đặc trưng của phép biến đổi tuyến tính* f trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$, ký hiệu $\mathcal{P}_f$, được xác định như sau :

$$\mathcal{P}_f(\lambda) = \mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I). \tag{5.16}$$

Trong đó A là một ma trận của f trong cơ sở nào đó của $\mathbb{R}^n$.

Định lý 5.7. λ_0 là giá trị riêng của ma trận A khi và chỉ khi λ_0 là nghiệm của đa thức đặc trưng của A.

Trường hợp A là ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở nào đó thì λ_0 cũng là giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính f.

Chứng minh. λ_0 là giá trị riêng của ma trận A khi và chỉ khi hệ phương trình thuần nhất (5.14) có nghiệm không tầm thường, điều này tương đương với ma trận hệ số của hệ phương trình có định thức bằng 0; nói cách khác λ_0 là nghiệm của đa thức đặc trưng. □

Ví dụ 5.9. Cho phép biến đổi tuyến tính

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ xác định bởi } f(x, y) = (3x - y, -2x + 4y).$$

Dễ dàng thấy $f(x, x) = 2(x, x)$. Vậy $\lambda = 2$ là một giá trị riêng và mọi véc tơ $v = (x, x), x \neq 0$ là véc tơ riêng tương ứng. Như vậy có vô số véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$.

Ma trận chính tắc của f là $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Ta có thể tìm giá trị riêng theo nghiệm của đa thức đặc trưng như sau

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda).$$

Đa thức đặc trưng $\mathcal{P}_A(\lambda)$ có hai nghiệm là $\lambda = 2$ và $\lambda = 5$. Vậy f có hai giá trị riêng $\lambda = 2$ và $\lambda = 5$.

Ví dụ 5.10. Cho phép biến đổi tuyến tính

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ xác định bởi } f(x, y) = (-y, x).$$

Ma trận chính tắc của f là $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Đa thức đặc trưng

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Vậy phép biến đổi tuyến tính f không có giá trị riêng thực nào.

Ví dụ 5.11. Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ có ma trận chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ta có thể kiểm tra các kết quả sau

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda).$$

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1; \lambda = 1; \lambda = 3.$$

Vậy phép biến đổi tuyến tính f có ba giá trị riêng là $-1, 1, 3$.

Định nghĩa 5.7. Cho phép biến đổi tuyến tính f của $\mathbb{R}^n$. Với mỗi $\lambda \in \mathbb{R}$, ký hiệu

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = \lambda v\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (f - \lambda Id_{\mathbb{R}^n})(v) = \theta\}. \tag{5.17}$$

V_λ là không gian con của $\mathbb{R}^n$.

Nếu λ là giá trị riêng thì V_λ được gọi là không gian riêng ứng với giá trị riêng λ.

Định lý 5.8. λ là giá trị riêng của f khi và chỉ khi $V_\lambda \neq \{\theta\}$.

Chứng minh. (Việc chứng minh định lý này khá đơn giản và xem như một bài tập).

Định lý 5.9. Nếu $v_1, \ldots, v_k$ là các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ của phép biến đổi tuyến tính f (hoặc ma trận A) thì hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_k\}$ độc lập tuyến tính.

Chứng minh. Ta chứng minh quy nạp theo k.

- Khi $k = 1$, mệnh đề đúng vì hệ một véc tơ $v_1 \neq \theta$ là độc lập tuyến tính.

- Giả sử $k > 1$ và mệnh đề đúng với $k-1$. Hệ $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ độc lập tuyến tính.

- Ta chứng minh hệ $\{v_1, \ldots, v_k\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Giả sử có

$$x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k = \theta. \quad (*)$$

  Ta cần chứng minh $x_1 = \ldots = x_k = 0$.

  Lấy ảnh qua f đẳng thức $(*)$ ta được

$$f(x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k) = f(\theta) = \theta.$$

  Vì v_i là những véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng λ_i, do đó

$$\lambda_1 v_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k v_k = \theta. \quad (**)$$

  Nhân λ_k vào hai vế của (*) rồi trừ cho (**) ta được

$$x_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + x_2(\lambda_k - \lambda_2)v_2 + \cdots + x_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1} = \theta.$$

  Theo giả thiết quy nạp, hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ độc lập tuyến tính. Do đó,

$$x_1(\lambda_1 - \lambda_k) = x_2(\lambda_2 - \lambda_k) = \ldots = x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0.$$

  Và do các $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ khác nhau từng đôi một, suy ra $x_1 = \ldots = x_{k-1} = 0$.

  Thay các giá trị này vào (*) ta có $x_k v_k = \theta$. Nhưng $v_k \neq \theta$ nên $x_k = 0$. Vậy hệ $\{v_1, \ldots, v_k\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

b. Thuật toán tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính

Từ Định nghĩa 5.4 và Định lý 5.7, để tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính f có ma trận trong cơ sở nào đó là A ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Lập và giải phương trình đặc trưng $\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.

  Các nghiệm của đa thức đặc trưng $\mathcal{P}_A(\lambda)$ là các giá trị riêng của ma trận A và cũng là giá trị riêng của f.

- Bước 2: Với mỗi giá trị riêng λ_j tìm được, giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất
$$(A - \lambda_j I)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.18}$$
Tập nghiệm của hệ phương trình (5.18) là không gian riêng V_{λ_j} ứng với giá trị riêng λ_j của f (tương ứng ma trận A).

  Hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình (5.18) là cơ sở của không gian riêng V_{λ_j} ứng với giá trị riêng λ_j của f (tương ứng ma trận A).

Ví dụ 5.12.

a) Tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$ có ma trận chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ (xem Ví dụ 5.9).

b) Tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (xem Ví dụ 5.11), xác định bởi
$$f(x, y, z) = (2x - y, 9x + 4y + 6z, -8x - 3z).$$

Giải.

a) Đa thức đặc trưng có các nghiệm $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$, do đó cũng là hai giá trị riêng của A.

Véc tơ riêng $v = (x, y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ là nghiệm khác θ của hệ
$$(A - \lambda_1 I)v = \theta \text{ hay } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (a*)$$

Hệ phương trình $(a*)$ tương đương với phương trình $x - y = 0$ hay $y = x$. Vậy
$$V_{\lambda_1} = \{v = (x, x) = x(1, 1), x \in \mathbb{R}\}$$
là không gian riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$.

Do đó các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ có dạng $v = (x, x) = x(1, 1); x \neq 0$.

Tương tự, véc tơ $v = (x, y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 5$ là nghiệm khác θ của hệ

$$(A - \lambda_2 I)v = \theta \text{ hay } \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (a**)$$

Hệ phương trình $(a**)$ tương đương với phương trình $2x + y = 0$ hay $y = -2x$. Vậy

$$V_{\lambda_2} = \{v = (x, -2x) = x(1, -2), x \in \mathbb{R}\}.$$

Các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 5$ có dạng $v = (x, -2x) = x(1, -2), x \neq 0$.

b) Đa thức đặc trưng của f cũng là đa thức đặc trưng của ma trận chính tắc

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(3-\lambda).$$

Do đó f có các giá trị riêng $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$.

Giá trị riêng $\lambda_1 = -1$ có các véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình $(f + Id_{\mathbb{R}^3})(v) = \theta (b*)$

Dạng ma trận $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$A + I = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình $(b*)$ tương đương với hệ

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ z = -4x \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Không gian riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -1$ là

$$V_{\lambda_1} = \{v = (x, 3x, -4x) = x(1, 3, -4); x \in \mathbb{R}\}.$$

Vậy các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -1$ là nghiệm khác không của hệ, có dạng $v = (x, 3x, -4x) = x(1, 3, -4); x \neq 0$.

Giá trị riêng $\lambda_2 = 1$ có các véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình $(f - Id_{\mathbb{R}^3})(v) = \theta(b**)$

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình $(b**)$ tương đương với hệ

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$V_{\lambda_2} = \{v = (y, y, -2y) = y(1, 1, -2); y \in \mathbb{R}\}$.

Vậy các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 1$ có dạng $v = (y, y, -2y) = y(1, 1, -2); y \neq 0$.

Giá trị riêng $\lambda_3 = 3$ có các véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình $(f - 3Id_{\mathbb{R}^3})(v) = \theta.(b***)$

Ta có

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình $(b***)$ tương đương với hệ

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 4x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -\dfrac{4}{3}x; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$V_{\lambda_3} = \left\{v = \left(x, -x, -\frac{4}{3}x\right) = \frac{x}{3}(3, -3, -4); x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Vậy các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = 3$ có dạng

$$v = \frac{x}{3}(3, -3, -4); x \neq 0.$$

5.1.4. Chéo hóa ma trận

Trong mục này ta sẽ chỉ ra cách tìm ma trận chéo đồng dạng với một ma trận cho trước. Tương ứng như thế cần tìm một cơ sở của không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ sao cho trong cở sở này ma trận của phép biến đổi tuyến tính f có dạng chéo.

a. Các khái niệm và điều kiện chéo hóa

Định nghĩa 5.8. Nếu ma trận vuông A đồng dạng với một ma trận chéo thì ta nói A *chéo hoá được*. Nói cách khác: ma trận vuông A chéo hoá được nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

Định nghĩa 5.9. *Phép biến đổi tuyến tính* $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ *chéo hoá được* nếu tồn tại một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.

Nhận xét 5.3. Ta đã biết một số tính chất của hai ma trận đồng dạng như:

1) Nếu A, B đồng dạng thì $\det A = \det B$.

2) Nếu A, B đồng dạng thì $\mathrm{Tr}\ A = \mathrm{Tr}\ B$ (xem bài tập 3.12).

3) Nếu A, B đồng dạng thì A^n và B^n đồng dạng.

4) Công thức (5.12) cho thấy hai ma trận của một tự phép biến đổi tuyến tính bất kỳ trong hai cơ sở khác nhau là đồng dạng.

Vì vậy khi ma trận A đồng dạng với ma trận chéo ta có thể áp dụng các tính chất trên cho A như một ma trận chéo. Điều này giúp ta giải quyết một số bài toán dễ dàng hơn.

Ta xét hai bài toán sau.

Bài toán 1. Cho phép biến đổi tuyến tính $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Hãy tìm cơ sở của $\mathbb{R}^n$ để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.

Bài toán 2. Cho ma trận A vuông cấp n. Tìm ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

Dễ dàng thấy khi đã chọn một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ thì Bài toán 1 đưa về Bài toán 2 và ngược lại.

Các định lý dưới đây cho ta lời giải của bài toán trên.

Định lý 5.10. Phép biến đổi tuyến tính $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ chéo hoá được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gồm các véc tơ riêng của f.

Chứng minh. Ma trận của f trong cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ của $\mathbb{R}^n$ có dạng chéo khi và chỉ khi

$$f(e_i) = \alpha_i e_i; \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Trong đó $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ là các phần tử trên đường chéo của ma trận chéo.

e_i là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng α_i, với $i = 1, 2, \dots, n$.

Định lý cho ta các điều kiện cần và đủ để phép biến đổi tuyến tính chéo hóa được.

Hệ quả 1. (điều kiện đủ 1) Nếu đa thức đặc trưng $\mathcal{P}_f(\lambda)$ của phép biến đổi tuyến tính $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ có đúng n nghiệm thực phân biệt thì f chéo hoá được.

Chứng minh. Vì đa thức đặc trưng có n nghiệm phân biệt nên n véc tơ riêng tương ứng với n giá trị riêng này là một hệ độc lập, do đó là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gồm các véc tơ riêng của f. Vậy f chéo hoá được. □

Hệ quả 2.(điều kiện đủ 2) Phép biến đổi $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, chéo hoá được nếu

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_k - \lambda)^{m_k};$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ là nghiệm thực, khác nhau từng đôi, với $m_1 + \dots + m_k = n$. Đồng thời $\dim V_{\lambda_i} = m_i$ hay $r(A - \lambda_i I) = n - m_i; \forall i = 1, \dots, k$.

Chứng minh. Trong mỗi V_{λ_i} ta chọn một cơ sở gồm m_i véc tơ. Hệ n véc tơ hợp lại từ các cơ sở vừa chọn là một hệ độc lập tuyến tính, do đó hệ này là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gồm các véc tơ riêng của f. Vậy f chéo hoá được. □

b. Thuật toán chéo hóa

Tổng kết các điều trên ta có thuật toán chéo hoá gồm các bước sau.

- **Bước 1.** Tìm các giá trị riêng là nghiệm của phương trình đặc trưng: $\det(A - \lambda I) = 0$.
  - Vì ta chỉ xét các ma trận thực nên nếu đa thức đặc trưng có nghiệm phức thì ma trận không chéo hóa thực được; **Dừng**.
  - Trường hợp đa thức đặc trưng chỉ có nghiệm thực:

  $$\det(A-\lambda I) = (\lambda_1-\lambda)^{m_1} \dots (\lambda_k-\lambda)^{m_k} = 0; m_1+\ldots+m_k = n; \textbf{Tiếp tục.}$$

- **Bước 2.** Kiểm tra điều kiện đủ. Giả sử $\dim V_{\lambda_i} = d_i = n - r(A - \lambda_i I)$.

  Nếu $d_i < m_i$ với i nào đó, $1 \le i \le k$ thì f không chéo hóa được; **Dừng**.

  Nếu $d_i = m_i$ với mọi $i = 1, \dots, k$ thì f chéo hóa được. **Tiếp tục.**

- **Bước 3.** Với mỗi giá trị riêng λ_i tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình (5.18), đó là một cơ sở gồm m_i véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ_i.

- **Bước 4.** Gộp các cơ sở tìm được ở Bước 4 ta được một hệ gồm $m_1 + \cdots + m_k = n$ các véc tơ riêng độc lập là cơ sở $\mathcal{B}'$ cần tìm. Khi đó T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ và $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

Ví dụ 5.13. Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ (Xem Ví dụ 5.12 b)).

Giải. Đa thức đặc trưng của A

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(3-\lambda).$$

Ma trận A có ba giá trị riêng phân biệt $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$ nên chéo hóa được.

Với giá trị riêng $\lambda_1 = -1$, không gian riêng

$$V_{\lambda_1} = \{v = (x, 3x, -4x) = x(1, 3, -4), x \in \mathbb{R}\}.$$

Chọn một cơ sở của V_{λ_1} là $\{e'_1 = (1, 3, -4)\}$.

Với giá trị riêng $\lambda_2 = 1$, không gian riêng

$$V_{\lambda_2} = \{v = (y, y, -2y) = y(1, 1, -2), y \in \mathbb{R}\}.$$

Chọn một cơ sở của V_{λ_2} là $\{e'_2 = (1, 1, -2)\}$.

Tương tự $\lambda_3 = 3, V_{\lambda_3} = \left\{\dfrac{x}{3}(3, -3, -4) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$.

Chọn một cơ sở của V_{λ_3} là $\{e'_3 = (3, -3, -4)\}$.

Cơ sở mới gồm các véc tơ riêng $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$. Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ là T.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \text{ thì } T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 5.14. Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi: $f(x, y, z) = (3x - 2y, -2x + 3y, z)$. Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.

Giải. Ma trận chính tắc của f là $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Đa thức đặc trưng

$$\mathcal{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Do đó f có các giá trị riêng $\lambda_1 = 5$ và $\lambda_2 = 1$ (kép).

Giá trị riêng $\lambda_1 = 5$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình $(A - 5I)v = \theta$ (1)

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A - \lambda_1 I) = 2. \quad (*)$$

Hệ phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0. \end{cases}$$

Không gian riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 5$ là $V_{\lambda_1} = \{v = x(1, -1, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Chọn một véc tơ riêng $e'_1 = (1, -1, 0)$ làm cơ sở của không gian riêng V_{λ_1}.

Tương tự, giá trị riêng $\lambda_2 = 1$ xét hệ phương trình $(A - I)v = \theta$ (2)

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A - \lambda_2 I) = 1. \quad (**)$$

Hệ phương trình (2) tương đương với $x - y = 0$ và z tùy ý.

Không gian riêng ứng với $\lambda_2 = 1$ là

$$V_{\lambda_2} = \{v = (x, x, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1) \mid x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Cơ sở của không gian riêng V_{λ_2} là $\{e'_2 = (1, 1, 0), e'_3 = (0, 0, 1)\}$.

Từ đó chọn cơ sở mới gồm các véc tơ riêng $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

Ta có $f(e'_1) = 5e'_1, f(e'_2) = e'_2, f(e'_3) = e'_3$.

Ma trận của f trong cơ sở $\mathcal{B}'$ có dạng chéo

$$A' = [f]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chú ý là từ (*) và (**), chứng tỏ ma trận A chéo hóa được do thỏa mãn điều kiện đủ thứ 2 (Hệ quả 2).

Ví dụ 5.15. Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$.

Giải. Đa thức đặc trưng

$$\mathcal{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2+2\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -8 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 1+\lambda & 0 \\ 1+\lambda & 7 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda+1)^2.$$

Đa thức đặc trưng có nghiệm $\lambda_1 = -1 (m_1 = 2)$ và $\lambda_2 = 3 (m_2 = 1)$.

Giá trị riêng $\lambda_1 = -1$, xét ma trận

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A - \lambda_1 I) = 2.$$

Do đó $\dim V_{\lambda_1} = 3 - r(A - \lambda_1 I) = 1 < 2$.

Không gian riêng V_{λ_1} có $\dim V_{\lambda_1} = 1 < 2 = m_1$ nên ma trận A không chéo hóa được.

5.1.5. Một vài ứng dụng của đa thức đặc trưng và bài toán chéo hóa

a. Ứng dụng của đa thức đặc trưng

Công thức (5.15) định nghĩa đa thức đặc trưng của ma trận A qua định thức:

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Vì vậy khi biết đa thức đặc trưng ta có thể áp dụng để tính định thức các ma trận tương ứng.

Ví dụ 5.16. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$ (xem Ví dụ 5.15).

Tính định thức của các ma trận sau:

a) $A^2 + 4A - 5I$;

b) $A^2 + 4A + 4I$;

c) $A^3 + 2A^2$;

d) $A^2 + 4I$.

Giải. Đa thức đặc trưng của ma trận A (xem Ví dụ 5.15):

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(\lambda + 1)^2.$$

a) $A^2+4A-5I = (A-I)(A+5I) \Rightarrow \det(A^2+4A-5I) = \det\big((A-I)(A+5I)\big) = \mathcal{P}_A(1)\mathcal{P}_A(-5) = 1024$;

b) $A^2 + 4A + 4I = (A + 2I)^2 \Rightarrow \det(A^2 + 4A + 4I) = \big(\mathcal{P}_A(-2)\big)^2 = 25$;

c) $A^3 + 2A^2 = A^2(A + 2I) \Rightarrow \det(A^3 + 2A^2) = \big(\mathcal{P}_A(0)\big)^2\mathcal{P}_A(-2) = 45$;

d) Đa thức đặc trưng có thể mở rộng cho tham số λ là số phức, ma trận A có thể thực hoặc phức. Các tính chất của đa thức đặc trưng tham số phức cũng giống tham số thực.

$$A^2 + 4I = (A - 2iI)(A + 2iI) \Rightarrow \det(A^2 + 4I) = \mathcal{P}_A(2i)\mathcal{P}_A(-2i)$$

$$\mathcal{P}_A(2i)\mathcal{P}_A(-2i) = (3 + 2i)(3 - 2i)\big((2i + 1)(-2i + 1)\big)^2 = 13.5^2 = 325.$$

b. Ứng dụng của chéo hóa

Theo Nhận xét 5.3 trường hợp ma trận A chéo hóa được thì ta có thể chuyển bài toán của A về bài toán của ma trận chéo, do đó dễ dàng giải quyết.

Ví dụ 5.17. Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ (Xem ví dụ 5.13).

a) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$: Tính $\det A^n$, $\mathrm{Tr}A^n$;

b) Cho đa thức $p(t) = t^5 - 4t$, tính $\det p(A)$;

c) Cho đa thức $q(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3 = -\mathcal{P}_A(t)$, tính $q(A)$;

d) Tính $(A^2 - I)(A - 3I)^n; n \in \mathbb{N}^*$.

Giải. Theo Ví dụ 5.13 đa thức đặc trưng của ma trận A:

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

Có 3 giá trị riêng phân biệt nên chéo hóa được, nghĩa là tồn tại ma trận không suy biến T sao cho:

$$T^{-1}AT = B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$: $B^n = \left(T^{-1}AT\right)^n = \left(T^{-1}AT\right)\dots\left(T^{-1}AT\right) = T^{-1}A^nT$

$$\Rightarrow A^n = TB^nT^{-1} = T\begin{bmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix}T^{-1}.$$

a) Theo Nhận xét 5.3 ta có $\det A^n = \det B^n = (-3)^n$, $\mathrm{Tr}A^n = \mathrm{Tr}B^n = 1 + (-1)^n + 3^n$;

b) $p(A) = A^5 - 4A = TB^5T^{-1} - 4TBT^{-1} = T\big(B^5 - 4B\big)T^{-1} = Tp(B)T^{-1}$

$$\Rightarrow \det p(A) = \det p(B) = p(3)p(-1)p(1) = -2079.$$

Ta có thể kiểm tra lại rằng nếu $p(t)$ là một đa thức tùy ý thì $p(A) = Tp(B)T^{-1}$. Do đó $\det p(A) = \det p(B) = p(3)p(-1)p(1)$;

c) Tương tự ý b) ta có $q(A) = Tq(B)T^{-1}$. Mặt khác

$$q(B) = B^3 - 3B^2 - B + 3I = -\mathcal{P}_A(B)$$

$$= \begin{bmatrix} 3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q(3) & 0 & 0 \\ 0 & q(1) & 0 \\ 0 & 0 & q(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_A(3) & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{P}_A(1) & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{P}_A(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Vì $3, 1, -1$ là các giá trị riêng của A, do đó $\mathcal{P}_A(3) = \mathcal{P}_A(1) = \mathcal{P}_A(-1) = 0$).

d) Từ ý c) ta có $q(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3 = (t^2 - 1)(t - 3)$ và $q(A) = \theta$. Do đó

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : (A^2 - I)(A - 3I)^n = \big((A^2 - I)(A - 3I)\big)(A - 3I)^{n-1} = \theta.$$

Nhận xét 5.4.

- Kết quả trong phần c) của Ví dụ 5.17 là nội dung của Định lý Hamilton-Caley phát biểu như sau:
  Cho ma trận vuông A. Đặt $p(t) = \mathcal{P}_A(t)$, khi đó $p(A) = \theta$.

- Có thể chứng minh Định lý Hamilton-Caley không cần sử dụng điều kiện chéo hóa và định lý đúng với mọi ma trận vuông A tùy ý.

Ví dụ 5.18. Cho ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Tính đa thức đặc trưng $\mathcal{P}_A(\lambda)$;

b) Tính $\det(A + I)$;

c) Tính A^5;

d) Tính A^4.

Giải.

a)

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = (-\lambda)^5 + 1;$$

b) $\det(A + I) = \mathcal{P}_A(-1) = 2$;

c) Theo Nhận xét 5.4 ta có $A^5 = I$;

d) Từ c) ta có $A^4 = A^{-1}$. Sử dụng phương pháp Gauss-Jordan tìm ma trận nghịch đảo ta được

$$A^4 = A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.2. Dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$

5.2.1. Định nghĩa và biểu thức tọa độ của dạng toàn phương

Một cách chính xác và đầy đủ thì dạng toàn phương trên không gian véc tơ V được định nghĩa thông qua một dạng song tuyến tính $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$. Tuy nhiên do giới hạn của học phần này, ta chỉ nghiên cứu dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$ từ biểu thức tọa độ của nó trong một cơ sở cho trước của $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 5.10. Ánh xạ $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto Q(u) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \text{ trong đó } a_{ij} = a_{ji} \tag{5.19}$$

được gọi là *một dạng toàn phương* trên $\mathbb{R}^n$.

Như vậy dạng toàn phương có biểu thức tọa độ là một đa thức đẳng cấp bậc 2.

Công thức (5.19) có thể viết dạng gọn hơn

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j. \tag{5.20}$$

Để đơn giản ta ký hiệu $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ thay cho $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$.

$$\begin{aligned} Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j =& a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \\ &+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \cdots + a_{nn}x_nx_n. \end{aligned}$$

Biểu thức tọa độ của dạng toàn phương viết dưới dạng ma trận

Từ Công thức (5.20) xét ma trận A: đối xứng, có phần tử trên đường chéo chính là a_{ii}, phần tử ở hàng i cột $j, j > i$ là a_{ij}. Ta gọi A là ma trận chính tắc của Q.

Công thức xác định ảnh trong Định nghĩa 5.10 gọi là *biểu thức tọa độ của dạng toàn phương* Q. Sử dụng ma trận $A = [a_{ij}]$ ta có thể biểu diễn $Q(u)$ dưới dạng ma trận.

$$\big[Q(u)\big] = \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ở đây $\big[Q(u)\big]$ ký hiệu ma trận chỉ có 1 hàng 1 cột với phần tử là $Q(u)$.

Chú ý 5.3. Thông thường biểu thức tọa độ xác định ảnh của dạng toàn phương được cho dưới dạng

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j. \tag{5.21}$$

Khi đó để viết ma trận chính tắc của biểu thức tọa độ của dạng toàn phương theo Công thức (5.21) ta cần để ý chia đôi hệ số a_{ij}, vì trong Công thức (5.20) có nhân đôi hệ số a_{ij}.

Ví dụ 5.19. Cho dạng toàn phương $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 7x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$$

có ma trận chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -7 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dạng ma trận của công thức xác định ảnh

$$\big[Q(u)\big] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -7 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Ta có thể kiểm tra lại như sau:

$$\begin{aligned} \big[Q(u)\big] &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -7 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 5x_3 \\ x_1 - 7x_2 - 2x_3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{bmatrix} \\ &= \Big[x_1(x_1 + x_2 + 5x_3) + x_2(x_1 - 7x_2 - 2x_3) + x_3(5x_1 - 2x_2 + 4x_3)\Big] \\ &= \Big[x_1^2 - 7x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3\Big]. \end{aligned}$$

Định nghĩa 5.11. Dạng toàn phương Q được gọi là

- *Xác định* nếu $Q(u) = 0 \Leftrightarrow u = \theta$.

- *Không âm* nếu $Q(u) \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^n$.
- *Không dương* nếu $Q(u) \leq 0, \forall u \in \mathbb{R}^n$.
- *Xác định dương* nếu vừa xác định vừa không âm. Khi đó $Q(u) > 0, \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq \theta$.
- *Xác định âm* nếu vừa xác định vừa không dương. Khi đó $Q(u) < 0, \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq \theta$.

5.2.2. Ma trận của dạng toàn phương trong một cơ sở

Trước hết ta nhắc lại một số kết quả về tọa độ véc tơ trong một cơ sở (Định nghĩa 2.11), ma trận của hệ véc tơ (Định nghĩa 3.6), ma trận chuyển cơ sở (Định nghĩa 3.7), công thức đổi tọa độ (Định lý 3.1) đã được học trong Chương 2, Chương 3.

Chú ý 5.4.

a) Giả sử $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V. Khi đó với mọi $u \in V$ tồn tại cách viết duy nhất $u = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ ta nói $(x_1, \ldots, x_n)$ là tọa độ của u trong cơ sở $\mathcal{B}$.

b) Ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ có các cột là tọa độ của hệ véc tơ $\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ trong không gian véc tơ V ứng với cơ sở $\mathcal{B}$ được gọi là ma trận của $\mathcal{S}$ trong cơ sở $\mathcal{B}$.

c) Ma trận của hệ véc tơ cơ sở $\mathcal{B}'$ viết trong cơ sở $\mathcal{B}$ được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang cở sở $\mathcal{B}'$. Cụ thể nếu $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ và $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$;

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i \text{ thì } T = [t_{ij}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \tag{5.22}$$

là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Ngược lại nếu có ma trận chuyển (5.22) thì ta có thể nhận được hệ véc tơ cơ sở $\mathcal{B}'$ từ các cột tương ứng của ma trận chuyển T.

d) $\forall u \in V : u = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = x'_1e'_1 + \ldots + x'_ne'_n$ với ma trận chuyển $T = [t_{ij}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ công thức đổi tọa độ dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [t_{ij}] \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

Hoặc dạng hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 = t_{11}x'_1 + \ldots + t_{1n}x'_n \\ x_2 = t_{21}x'_1 + \ldots + t_{2n}x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = t_{21}x'_1 + \ldots + t_{nn}x'_n \end{cases} . \tag{5.24}$$

Từ (5.22) ta nhận được (5.23), ngược lại từ (5.24) ta nhận được (5.23) và (5.22).

Có (5.22) ta xác định được cơ sở $\mathcal{B}'$.

Định nghĩa 5.12. Cho dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j; a_{ij} = a_{ji}. \tag{5.25}$$

Khi đó ma trận của Q trong cơ sở chính tắc là $A = [a_{ij}]$.

Xét cơ sở $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ và $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ với $u = \sum_{i=1}^{n} y_iv_i$.

Gọi $T = [t_{ij}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc $\mathcal{B}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'$, ta có công thức chuyển cơ sở:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{ij} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{5.26}$$

Thay Công thức (5.26) vào (5.25) ta nhận được biểu thức tọa độ của Q theo cở sở $\mathcal{B}'$

$$u = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} y_iv_i; Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}y_iy_j; a'_{ij} = a'_{ji}.$$

Ta ký hiệu và gọi ma trận đối xứng $[Q]_{\mathcal{B}'} = A' = [a'_{ij}]_{n\times n}$ là *ma trận của dạng toàn phương* Q trong cơ sở B'.

Biểu thức tọa độ viết dưới dạng ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở chính tắc, với $u = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$\big[Q(u)\big] = \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}^t [a_{ij}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

Biểu thức tọa độ viết dưới dạng ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở $\mathcal{B}'$, với $u = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} y_iv_i$:

$$\big[Q(u)\big] = \left[\sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}y_iy_j\right] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}^t [a'_{ij}] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{5.28}$$

Thay (5.27) vào (5.28) ta được

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}^t T^t[a_{ij}]T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}^t [a'_{ij}] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}. \text{ Vậy } A' = T^tAT.$$

Chú ý 5.5.

- Ma trận của dạng toàn phương là ma trận đối xứng.
- Trường hợp không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ với $n = 2, 3, 4$ ta ký hiệu tọa độ véc tơ tương ứng là $(x, y), (x, y, z), (x, y, z, t)$ thay cho $(x_1, x_2, \ldots)$.

Ví dụ 5.20. Cho dạng toàn phương $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto Q(x, y) = 3x^2 - 7y^2 + 4xy$$

Hãy viết ma trận của Q trong cơ sở $\mathcal{B}' = \{e'_1 = (1, 1), e'_2 = (1, 2)\}$.

Giải. Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\mathcal{B}'$: $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Công thức đổi tọa độ từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\mathcal{B}'$. $\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : u = x'e'_1 + y'e'_2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{ hoặc tương đương } \begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' + 2y'. \end{cases}$$

Cách 1: Thay trực tiếp vào công thức xác định ảnh:

$$\begin{aligned} Q(u) &= 3x^2 - 7y^2 + 4xy = 3(x' + y')^2 - 7(x' + 2y')^2 + 4(x' + y')(x' + 2y') \\ &= 3(x'^2 + y'^2 + 2x'y') - 7(x'^2 + 4y'^2 + 4x'y') + 4(x'^2 + 2y'^2 + 3x'y') \quad . \\ &= -17y'^2 - 10x'y'. \end{aligned}$$

Theo Định nghĩa 5.12 ta có ma trận của Q trong cơ sở $\mathcal{B}'$ là

$$[Q]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & -17 \end{bmatrix}.$$

Cách 2: Áp dụng công thức: $[Q]_{\mathcal{B}'} = A' = T^t A T$, trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^t \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & -17 \end{bmatrix}.$$

Định lý 5.11. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ xét hai cơ sở $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ và $\mathcal{B}" = \{e"_1, \ldots, e"_n\}$ Gọi $A' = [a'_{ij}] = [Q]_{\mathcal{B}'}, A" = [a"_{ij}] = [Q]_{\mathcal{B}"}$ lần lượt là hai ma trận của Q trong hai cơ sở $\mathcal{B}'$ và $\mathcal{B}"$. Gọi $T = [t_{ij}]_{\mathcal{B}"}^{\mathcal{B}'}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}"$ Khi đó

$$A" = T^t A' T. \tag{5.29}$$

Chứng minh. Chứng minh Công thức (5.29) tương tự chứng minh công thức trong Định nghĩa 5.12.

Giả sử tọa độ của véc tơ $u \in \mathbb{R}^n$ trong hai cơ sở $\mathcal{B}'$ và $\mathcal{B}"$ lần lượt là $(u)_{\mathcal{B}'} = (x'_1 \dots x'_n)$, $(u)_{\mathcal{B}"} = (x"_1 \dots x"_n)$. Công thức đổi tọa độ:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x"_1 \\ \dots \\ x"_n \end{bmatrix}. \tag{5.30}$$

Biểu thức tọa độ dạng ma trận của $Q(u)$ trong cơ sở $\mathcal{B}'$:

$$\big[Q(u)\big] = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}^t [a'_{ij}] \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}. \tag{5.31}$$

Biểu thức tọa độ dạng ma trận của $Q(u)$ trong cơ sở $\mathcal{B}"$:

$$\big[Q(u)\big] = \begin{bmatrix} x"_1 \\ \dots \\ x"_n \end{bmatrix}^t [a"_{ij}] \begin{bmatrix} x"_1 \\ \dots \\ x"_n \end{bmatrix}. \tag{5.32}$$

Thay (5.30) vào (5.31) ta được

$$\begin{bmatrix} x"_1 \\ \dots \\ x"_n \end{bmatrix}^t T^t[a'_{ij}]T \begin{bmatrix} x"_1 \\ \dots \\ x"_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x"_1 \\ \dots \\ x"_n \end{bmatrix}^t [a"_{ij}] \begin{bmatrix} x"_1 \\ \dots \\ x"_n \end{bmatrix}. \tag{5.33}$$

Từ (5.33) ta nhận được (5.29).

Ví dụ 5.21. Cho dạng toàn phương $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$Q(v) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3.$$

Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Xét cơ sở $\mathcal{B}' = \{e_1' = (1,0,0), e_2' = (-3,1,1), e_3' = (-1,1,-1)\}$ và tọa độ véc tơ bất kỳ trong cơ sở $\mathcal{B}'$

$$\forall u \in \mathbb{R}^3 : u = (x_1, x_2, x_3) = y_1 e_1' + y_2 e_2' + y_3 e_3'$$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\mathcal{B}'$: $T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Ma trận của Q trong cơ sở $\mathcal{B}'$ là

$$A' = T^t A T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vậy biểu thức tọa độ của Q trong cở sở $\mathcal{B}'$ có dạng $Q(u) = y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2$.

5.2.3. Đưa biểu thức tọa độ của một dạng toàn phương về dạng chính tắc

a. Khái niệm

Định nghĩa 5.13. Trong không gian véc tơ thực V cho cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $u \in V : u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Một dạng toàn phương Q có biểu thức

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j.$$

Nếu trong cơ sở $\mathcal{B}' = \{e_1', \ldots, e_n'\}$ nào đó của V biểu thức tọa độ của dạng toàn phương chỉ có các số hạng bình phương dạng

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \ ; \ u = y_1 e_1' + \cdots + y_n e_n' \tag{5.34}$$

thì ta nói biểu thức dạng (5.34) là *biểu thức tọa độ chính tắc* của dạng toàn phương Q.

Bài toán tìm cơ sở $\mathcal{B}' = \{e_1', \ldots, e_n'\}$ thỏa mãn điều kiện trên được gọi là bài toán đưa về dạng chính tắc của biểu thức tọa độ.

Như vậy ma trận của dạng toàn phương ứng với biểu thức tọa độ dạng chính tắc là ma trận chéo

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

b. Đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Lagrange

b.1. Mô tả phương pháp Lagrange

Từ biểu thức tọa độ của dạng toàn phương tổng quát

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j.$$

Cần đưa về biểu thức tọa độ chính tắc

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

Ta sử dụng hai hằng đẳng thức sau để đưa biểu thức tọa độ của dạng toàn phương về dạng chính tắc

$$a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2; \tag{5.35}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2. \tag{5.36}$$

- Sử dụng hằng đẳng thức (5.35) ta nhóm các thành phần chứa

  $$a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{j>i\ge 1} a_{ij}x_ix_j$$

  về dạng hiệu của hai số hạng bình phương:

  $$a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{j>i\ge 1} a_{ij}x_ix_j = a_{ii}\left(x_i + \sum_{j>i\ge 1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j\right)^2 - a_{ii}\left(\sum_{j>i\ge 1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j\right)^2.$$

- Nếu không tồn tại hệ số $a_{ii} \neq 0$ ta sử dụng hằng đẳng thức (5.36) để tạo ra hệ số dạng $a'_{ii} \neq 0$.

b.2. Thực hiện phương pháp Lagrange

Giả sử trong cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ của không gian véc tơ V biểu thức tọa độ của dạng toàn phương Q có dạng

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{n\geq j>i\geq 1} a_{ij}x_ix_j \ ; \ u = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i.$$

Trường hợp 1. Giả sử có $a_{ii} \neq 0$, chẳng hạn $a_{11} \neq 0$, ta có thể sắp xếp lại và sử dụng đẳng thức (5.35).

$$\begin{aligned}
Q(u) &= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right) + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j \\
&= a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j - a_{11}\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2 \\
&= a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}x_ix_j.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{a_{1i}}{a_{11}}x_i \\ y_j = x_j; j = 2, \ldots, n \end{cases} \tag{5.38}$$

thì $Q(u) = a_{11}y_1^2 + \sum\limits_{i,j=2}^{n} a'_{ij}y_iy_j$.

Tiếp tục quá trình này với biểu thức tọa độ của một dạng toàn phương mới từ thành phần thứ hai của tọa độ trở đi $\sum\limits_{i,j=2}^{n} a'_{ij}y_iy_j$.

Trường hợp 2. Nếu mọi $a_{ii} = 0$ khi đó sẽ tồn tại $a_{ij} \neq 0$, chẳng hạn $a_{12} \neq 0$, ta sử dụng đẳng thức (5.36).

Đặt

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_j = y_j \ ; \ j = 3, \ldots, n. \end{cases} \tag{5.39}$$

Khi đó

$$Q(u) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a'_{ij}y_iy_j \text{ có } a'_{11} = 2a_{12} \neq 0.$$

Vì vậy ta có thể đưa về trường hợp 1.

Tiếp tục quá trình trên, giả sử cuối cùng ta nhận được công thức ứng với phép biến đổi tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 = t_{11}z_1 + t_{12}z_2 + \cdots + t_{1n}z_n \\ x_2 = t_{21}z_1 + t_{22}z_2 + \cdots + t_{2n}z_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = t_{n1}z_1 + t_{n2}z_2 + \cdots + t_{nn}z_n \end{cases} \tag{5.40}$$

và biểu thức tọa độ theo $(z_1, \dots, z_n)$ có dạng chính tắc

$$Q(u) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2.$$

Ta có thể viết lại dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix};\ Q(u) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2. \tag{5.41}$$

Khi sử dụng các phép đổi biến này, tọa độ theo cơ sở cũ sẽ biểu diễn tuyến tính theo cơ sở mới. Do đó kết quả của phép biến đổi là tương ứng với phép đổi cơ sở của không gian véc tơ. Theo Chú ý 5.4 d) thì $T = [t_{ij}]_{n\times n}$ chính là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở ban đầu $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ sang cơ sở mới $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ để biểu thức tọa độ trong cơ sở mới này có dạng chính tắc (5.41).

Theo Chú ý 5.4 c) các véc tơ có tọa độ là các cột của ma trận $T = [t_{ij}]_{n\times n}$ trong Công thức (5.41) là cơ sở cần tìm:

$$e'_1 = (t_{11}, \dots, t_{n1}), \dots, e'_n = (t_{1n}, \dots, t_{nn}).$$

Khi đó với mọi véc tơ $u \in V : u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = z_1e'_1 + \cdots + z_ne'_n$ và

$$Q(u) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2.$$

Nói cách khác trong cơ sở mới $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ thì biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc.

Ví dụ 5.22. Xét dạng toàn phương ở Ví dụ 5.21

$$Q(u) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3.$$

Đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.

Giải.

$$\begin{aligned}Q(u) &= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3\\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3\\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3.\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

Viết dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Hệ số của y_2^2, y_3^2 bằng 0, rơi vào trường hợp 2. Tiếp tục đặt $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_2 - z_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \text{ và } Q(z) = z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3^2.$$

Ta có

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

Suy ra ma trận $T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở mới.

Do đó cơ sở mới là $\mathcal{B}' = \{e_1' = (1, 0, 0), e_2' = (-3, 1, 1), e_3' = (-1, 1, -1)\}$.

Trong cơ sở $\mathcal{B}'$ ta có

$$\forall u \in \mathbb{R}^3 : u = (x_1, x_2, x_3) = z_1 e'_1 + z_2 e'_2 + z_3 e'_3$$

thì

$$Q(v) = z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3^2.$$

Do đó trong cơ sở $\mathcal{B}'$ ma trận của Q có dạng chéo

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nhận xét 5.5.

- Nếu dùng cách biến đổi khác ta sẽ nhận được biểu thức toạ độ dạng chính tắc khác và tất nhiên là trong một cơ sở khác.

- Các ví dụ cho thấy rằng cùng một dạng toàn phương ta có thể đưa về các dạng chính tắc với các hệ số khác nhau.

- Ngoài phương pháp Lagrange đưa biểu thức tọa độ của một dạng toàn phương về dạng chính tắc còn một số phương pháp khác. Chẳng hạn Phương pháp Jacobi, Phương pháp chéo hóa trực giao ... . Tuy nhiên những phương pháp này vượt khỏi phạm vi chương trình Toán cao cấp 2. Có thể tham khảo thêm hai phương pháp này trong tài liệu [1].

- Có thể chứng minh được rằng số các hệ số dương và hệ số âm trong biểu thức dạng chính tắc của một dạng toàn phương là bất biến (xem [1]). Dựa vào điều này ta có luật quán tính sau.

5.2.4. Luật quán tính

Định lý 5.12. (Sylvester - Jacobi): Số các hệ số dương và số các hệ số âm trong biểu thức tọa độ dạng chính tắc của một dạng toàn phương Q là những bất biến của dạng đó (tức là không phụ thuộc vào việc lựa chọn cơ sở).

Định nghĩa 5.14. Số các hệ số dương được gọi là *chỉ số quán tính dương* và số các hệ số âm được gọi là *chỉ số quán tính âm* của dạng toàn phương.

Giả sử (p,q) là cặp chỉ số quán tính dương và âm của dạng toàn phương Q trong không gian n chiều V, khi đó $p+q=r$ (hạng của Q). Từ Định nghĩa 5.11 ta được kết quả sau:

- $p=n$ khi và chỉ khi Q xác định dương;
- $q=n$ khi và chỉ khi Q xác định âm.

Việc nhận biết chỉ số quán tính của dạng toàn phương đóng vai trò quan trọng trong việc ứng dụng để giải quyết các vấn đề thực tế.

Chẳng hạn vi phân toàn phần cấp 2 của một hàm nhiều biến là một dạng toàn phương. Nếu vi phân toàn phần cấp 2 tại điểm dừng là dạng toàn phương xác định dương, xác định âm hoặc cặp chỉ số quán tính $(p,q); p \neq 0, q \neq 0$ thì một cách tương ứng hàm số đạt cực tiểu, đạt cực đại hoặc không đạt cực trị.

Định lý 5.13. (Sylvester) Giả sử dạng toàn phương Q có ma trận là A trong một cơ sở nào đó của V. Khi đó:

i) Q xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính góc trái của A luôn dương.

ii) Q xác định âm khi và chỉ khi các định thức con góc trái cấp chẵn là dương và cấp lẻ là âm.

Ví dụ 5.23. Xét dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^3$ có ma trận trong cơ sở chính tắc:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Các định thức con chính là

$$\Delta_1 = a_{11} = 1; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \Delta_3 = \det A = 1.$$

Vậy Q là một dạng toàn phương xác định dương.

Ví dụ 5.24. Xét dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^3$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Có $\Delta_1 = a_{11} = -1$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 4$; $\Delta_3 = \det A = -20$.

Theo Định lý 5.13 thì Q là một dạng toàn phương xác định âm.

Bằng phương pháp Lagrange ta cũng nhận được kết quả tương tự. Thật vậy, biểu thức toạ độ của dạng toàn phương là

$$\begin{aligned} Q(v) &= -x_1^2 - 5x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= -(x_1^2 + 2x_1(-x_2 - x_3)) - 5x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - 5x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2 - x_3)^2 - 4x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2 - x_3)^2 - 4\left(x_2 - \frac{x_3}{2}\right)^2 - 5x_3^2. \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \dfrac{x_3}{2} \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ thì $Q(v) = -y_1^2 - 4y_2^2 - 5y_3^2 < 0, \forall v \neq \theta$.

Áp dụng Định lý 5.13 ta kiểm tra được đây là một dạng toàn phương xác định âm.

Ví dụ 5.25. Dạng toàn phương ở Ví dụ 5.21 có chỉ số quán tính $(2, 1)$, không phải là dạng toàn phương xác định dương, cũng không phải là dạng toàn phương xác định âm.

Bài tập Chương 5

▷ **5.1.** Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính?

a) $f(x, y) = (2x, x + y)$;

b) $f(x, y) = (x^2, y)$;

c) $f(x, y) = (y, x)$;

d) $f(x, y) = (x, y + 1)$;

e) $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$; f) $f(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$.

▷ **5.2.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định như sau

$$f(1, 0, 0) = (1, 1); f(0, 1, 0) = (3, 0), f(0, 0, 1) = (4, -7).$$

a) Tìm ma trận chính tắc của f;

b) Tính $f(1, 3, 8), f(x, y, z)$.

▷ **5.3.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$ ta định nghĩa:

- Nhân của f là tập ký hiệu và xác định như sau

$$\ker f = f^{-1}(\theta) = \{v \in V \mid f(v) = \theta\}.$$

- Ảnh của f là tập ký hiệu $\mathrm{Im}(f)$ và xác định như sau

$$\mathrm{Im}\, f = f(V) = \{f(u) \mid u \in V\} \subset W.$$

Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ có ma trận chính tắc $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Véc tơ nào sau đây thuộc $\ker f$: $(5, 10); (3, 2); (1, 1)$?

b) Véc tơ nào sau đây thuộc $\mathrm{Im}\, f$: $(1, -4); (5, 0); (-3, 12)$?

▷ **5.4.** Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh

$$f(x, y, z) = (-x + y - z, x + 2y - z, x + 5y - 3z).$$

a) Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$;

b) f có là một đơn ánh không? Vì sao?

c) f có là một toàn ánh không? Vì sao?

▷ **5.5.** Viết ma trận chính tắc, tìm $\mathrm{Im}\, f$, $\ker f$ của các phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ sau đây, ánh xạ nào có ánh xạ ngược? Vì sao?

a) $f(x, y, z) = (x - y + 3z, 5x + 6y - 4z, 7x + 4y + 2z)$;

b) $f(x, y, z) = (2x - z, -x + 2z, x + 2y)$;

c) $f(x, y, z) = (2x + 2y - 8z, x + 6y + z, 3x + 6y - 9z)$.

▷ **5.6.** Viết ma trận chính tắc, tìm $\operatorname{Im} f$, $\ker f$ của các phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^4$ sau đây, ánh xạ nào có ánh xạ ngược? Vì sao?

a) $f(x, y, z, t) = (x+4y+5z+9t, 3x-2y+z-t, 3y+5z+8t, 4x+2y+6z+8t)$;

b) $f(x, y, z, t) = (x + y - 3z + t, 3x - 2y + z - t, y + z + t, 4x + 2y + 6z - t)$;

c) $f(x, y, z, t) = (x + 2y - z + t, x - 2y + z - t, 3y + z + 2t, x + 2y + t)$.

▷ **5.7.** Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ có ma trận chính tắc là
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hãy tìm ma trận của f trong cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$, với $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)$.

▷ **5.8.** a) Chứng tỏ $\{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 5, 3), v_3 = (1, 0, 10)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm công thức xác định ảnh $f(x, y, z)$ của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ biết rằng
$$f(v_1) = (1, 0, 0), f(v_2) = (0, 1, 0), f(v_3) = (0, 0, 1).$$

▷ **5.9.** Trên $\mathbb{R}^3$, cho các phép biến đổi tuyến tính f sau đây được viết dưới dạng biểu thức tọa độ, hãy viết chúng dưới dạng ma trận

a) $f(x, y, z) = (x - y, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z)$;

b) $f(x, y, z) = (3x + y + z, 2x + 4y + 2z, x + y + 3z)$;

c) $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$.

▷ **5.10.** Trên $\mathbb{R}^3$, cho các phép biến đổi tuyến tính f, g được viết dưới dạng biểu thức tọa độ
$$f(x, y, z) = (3x + y + z, 2x + 4y + 2z, x + y + 3z);$$
$$g(x, y, z) = (x + y + 2z, x + 2y - z, -x + y + 4z).$$

Hãy xác định các ánh xạ $f + g, f \circ g, g \circ f, f^2, f^3, g^3$.

▷ **5.11.** Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ có ma trận chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

a) Tìm các véc tơ riêng và giá trị riêng của f;

b) Tìm ma trận của f trong cơ sở gồm các véc tơ riêng của f.

▷ **5.12.** Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + 2y - z, -x + y + 4z).$$

a) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo;

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở tìm được sang cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$;

c) Có tồn tại ánh xạ ngược của f không? Vì sao? Nếu có hãy xác định công thức f^{-1}.

▷ **5.13.** Tìm các giá trị riêng, cơ sở của không gian riêng của các ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$;

▷ **5.14.** Ma trận nào sau đây không chéo hóa được? Vì sao?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$.

▷ **5.15.** Tìm ma trận P làm chéo hóa A và xác định $P^{-1}AP$

a) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

▷ **5.16.** Trong mỗi trường hợp sau tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để phép biến đổi tuyến tính f có ma trận dạng chéo:

a) $f(x, y, z) = (x - y, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z)$;

b) $f(x, y, z) = (3x + y + z, 2x + 4y + 2z, x + y + 3z)$;

c) $f(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + 2y - z, -x + y + 4z)$;

d) $f(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$.

▷ **5.17.** Trong $\mathbb{R}^3$, cho các dạng toàn phương sau đây được viết dưới dạng ma trận, hãy viết chúng dưới dạng biểu thức tọa độ

a) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$

▷ **5.18.** Tìm biểu thức tọa độ của dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^3$ dưới đây sau khi thực hiện phép biến đổi tương ứng:

a) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3;$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - \dfrac{1}{2}y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = -y_2 + y_3 \ . \end{cases}$$

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3;$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_2 - x_3 \ ; \end{cases}$$

▷ **5.19.** Viết ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Đưa dạng toàn phương về chính tắc bằng phương pháp Lagrange. Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc.

a) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3;$

c) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$

▷ **5.20.** Viết ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Đưa dạng toàn phương về chính tắc bằng phương pháp Lagrange. Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc.

a) $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4;$

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3;$

c) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3;$

▷ **5.21.** Tìm λ để các dạng toàn phương sau xác định dương:

a) $Q(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

b) $Q(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

▷ **5.22.** Tìm λ để các dạng toàn phương sau xác định dương:

a) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

b) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Hướng dẫn giải bài tập Chương 5

▷ **5.1.**
- Các trường hợp a) c) e) là ánh xạ tuyến tính.
- Các trường hợp b) d) f) không là ánh xạ tuyến tính, vì $f(\alpha x, \alpha y) \neq \alpha f(x,y)$.

▷ **5.2.** a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$;

b) $f(1,3,8) = (42,-55)$; $f(x,y,z) = (x+3y+4z, x-7z)$.

▷ **5.3.** Công thức xác định ảnh của f: $f(x,y) = (2x-y, -8x+4y)$.

a) $(x,y) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow y = 2x$. Vậy chỉ có $(5,10) \in \operatorname{Ker} f$;

b) $(a,b) \in \operatorname{Im} f$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y &= a \\ -8x + 4y &= b \end{cases}$ có nghiệm.
Xảy ra khi $b = -4a$. Vậy $(1,-4)$, $(-3,12) \in \operatorname{Im} f$.

▷ **5.4.** a) Ma trận của f trong cơ sở chính tắc: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$;

b) f không đơn ánh vì $(-1,2,3) \neq \theta$ nhưng $f(-1,2,3) = 0$;

c) $(a,b,c) \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists (x,y,z)$ sao cho $f(x,y,z) = (a,b,c)$; Vậy $(a,b,c) \in \operatorname{Im} f$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} -x + y - z = a \\ x + 2y - z = b \\ x + 5y - 3z = c \ ; \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp khử Gauss ta được:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & -1 & b \\ 1 & 5 & -3 & c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 3 & -2 & b+a \\ 0 & 6 & -4 & c+a \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 3 & -2 & b+a \\ 0 & 0 & 0 & a+2b-c \end{bmatrix}.$$

Do đó $(a, b, c) \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow a + 2b - c$. Vậy f không toàn ánh.

▷ **5.5.** a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$; $\operatorname{Im} f = \{a(1, 0, 2) + b(0, 1, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;

$\operatorname{Ker} f = \{t(-14, 19, 11) \mid t \in \mathbb{R}\}$; $\det(A) = 0$; không tồn tại ánh xạ ngược.

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $\det(B) = -6$; $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$; $\operatorname{Ker} f = \{\theta\}$; ;

f là một song ánh, tồn tại ánh xạ ngược.

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$; $\operatorname{Im} f = \{b(-18, 1, 0) + c(30, 0, 1) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$;

$\operatorname{Ker} f = \{z(5, -1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\}$; $\det(C) = 0$; không tồn tại ánh xạ ngược.

▷ **5.6.** a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$;

$\operatorname{Im} f = \{a(1, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 0) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$;
$\operatorname{Ker} f = \{t(0, -1, -1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$;
$\det(A) = 0$; không tồn tại ánh xạ ngược.

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$; $\det(B) = 65$; $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$; $\operatorname{Ker} f = \{\theta\}$;

f là một song ánh, tồn tại ánh xạ ngược.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\det(C) = 2$; $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$; $\operatorname{Ker} f = \{\theta\}$;

f là một song ánh, tồn tại ánh xạ ngược.

▷ **5.7.** Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$ và A' là ma trận của f trong cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \ A' = T^{-1}AT \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

▷ **5.8.** a) Ta có $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 1,$

do đó hệ 3 véc tơ $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập nên là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) $(x, y, z) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma & = x \\ 2\alpha + 5\beta & = y \\ 3\alpha + 3\beta + 10\gamma & = z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & -17 & -5 \\ -20 & 7 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 50x - 17y - 5z \\ \beta = -20x + 7y + 2z \\ \gamma = -9x + 3y + z. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) =& f(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) + \gamma f(v_3) \\ =& (50x - 17y - 5z, -20x + 7y + 2z, -9x + 3y + z). \end{aligned}$$

▷ **5.9.** Đặt $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (X, Y, Z)$, ta viết công thức xác định ảnh của các biến đổi tuyến tính sau dưới dạng ma trận.

a) $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix};$

b) $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

▷ **5.10.** Gọi A, B lần lượt là ma trận chính tắc của f, g. Ta có

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

- $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}; \; AB = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \\ -1 & 6 & 13 \end{bmatrix}; \; BA = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 2 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix};$

  $A^2 = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 16 & 20 & 16 \\ 8 & 8 & 12 \end{bmatrix}; \; A^3 = 4 \begin{bmatrix} 15 & 13 & 13 \\ 26 & 28 & 26 \\ 13 & 13 & 15 \end{bmatrix}; \; B^3 = \begin{bmatrix} -4 & 19 & 31 \\ 12 & 8 & -12 \\ -12 & 19 & 39 \end{bmatrix}.$

- $(f + g)(x, y, z) = (4x + 2y + 3z, 3x + 6y + z, 2y + 7z);$
  $(f \circ g)(x, y, z) = (3x + 6y + 9z, 4x + 12y + 8z, -1x + 6y + 13z);$
  $(g \circ f)(x, y, z) = (7x + 7y + 9z, 6x + 8y + 2z, 3x + 7y + 13z);$
  $(f^2)(x, y, z) = (12x + 8y + 8z, 16x + 20y + 16z, 8x + 8y + 12z);$
  $(f^3)(x, y, z) = 4(15x + 13y + 13z, 26x + 28y + 26z, 13x + 13y + 15z);$
  $(g^3)(x, y, z) = (-4x + 19y + 31z, 12x + 8y - 12z, -12x + 19y + 39z).$

▷ **5.11.** a) $\mathcal{P}_f(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda)$;
$\lambda = 1 : \; v_1 = (2, 1, 3), \; \lambda = 2 : \; v_2 = (-1, 1, 1), \; \lambda = 3 : \; v_3 = (1, 1, 2).$

b) Ma trận của f trong cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

▷ **5.12.** Ma trận của f trong cơ sở chính tắc : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Đa thức đặc trưng $\mathcal{P}_f(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)^2$;
Các giá trị riêng và véc tơ riêng tương ứng:

$$\lambda = 1 : \ v_1 = (2, -1, 1), \ \lambda = 3 : \ v_2 = (1, 1, 0), \ \ v_3 = (1, 0, 1);$$

Ma trận của f trong cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

b) Ma trận chuyển từ cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$ sang cơ sở chính tắc $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

c) $\det A = 9 \Rightarrow \exists A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
Do đó tồn tại $f^{-1}(x, y, z) = \dfrac{1}{3}(3x - 2y - 2z, -x + 2y + z, x - y)$.

▷ **5.13.** a) $\mathcal{P}(\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2; \lambda = 0 : \ v_1 = (1, -1, 1)\, ; \ \lambda = 2 : \ v_2 = (1, 0, 1)$.

b) cột 1 $-$ cột 3 $\rightarrow$ cột 1 $\Rightarrow \mathcal{P}(\lambda) = (8-\lambda)(1+\lambda)^2$;
$\lambda = -1 : v_1 = (1, -2, 0), v_2(0, -2, 1)\, ; \lambda = 8 : v_3 = (2, 1, 2)$.

c) $-$ cột 2 + cột 3 $\rightarrow$ cột 3 $\Rightarrow \mathcal{P}(\lambda) = -(3-\lambda)(2+\lambda)(1-\lambda)$;
$\lambda = -2 : \ v_1 = (0, 1, -1)\, ; \ \lambda = 3 :, \ v_2 = (5, 1, 4)\, ; \ \lambda = 1\, , \ v_3 = (3, -1, 2)$.

d) cột 1 $-$ cột 3 $\rightarrow$ cột 1 $\Rightarrow \mathcal{P}(\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2$;
$\lambda = -1 : \ v_1 = (3, 5, 6)\ ; \ \lambda = 1 : \ v_2 = (2, 1, 0)\, , \ v_3 = (0, 1, 2)$.

e) $\mathcal{P}(\lambda) = (2-\lambda)^4; \lambda = 2 \ : \ v_1 = (1, 1, -1, 0)\, , \ v_2 = (0, 0, 1, 1)$.

▷ **5.14.** a) $\mathcal{P}(\lambda) = (2-\lambda)^3; V_2 = \{x(1,2,0) \mid x \in \mathbb{R}\}; \dim V_2 = 1 < 3$, không chéo hóa được.

b) 3 cột 1 + cột 2 + cột 3 → cột 3 ⇒ $\mathcal{P}(\lambda) = -(1+\lambda)^3$;
$V_{-1} = \{y(-2,1,0) + z(5,0,1) \mid y, z \in \mathbb{R}\}; \dim V_{-1} = 2 < 3$, không chéo hóa được.

c) cột 1 + 2 cột 2 → cột 1; −3 cột 3 + cột 2 → cột 2 ⇒ $\mathcal{P}(\lambda) = -\lambda^3$;
$V_0 = \{x(1,0,6) + y(0,1,-3) \mid x, y \in \mathbb{R}\}; \dim V_0 = 2 < 3$, không chéo hóa được.

d) Cột 1 + cột 2 + cột 3 → cột 1 ⇒ $\mathcal{P}(\lambda) = (1-\lambda)\lambda^2$;
$V_0 = \{y(1,2,3) \mid y \in \mathbb{R}\}; \dim V_0 = 1 < 2$, không chéo hóa được.

e) $\mathcal{P}(\lambda) = -(2+\lambda)^2(4-\lambda); T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

f) $\mathcal{P}(\lambda) = -(4-\lambda)(2+\lambda)^2; V_{-2} = \{x(1,2,0) \mid x \in \mathbb{R}\}; \dim V_{-2} = 1 < 2$, không chéo hóa được.

▷ **5.15.** a) h1 + h2 − h3 → h3 ⇒ $\mathcal{P}(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$;

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) c1 + c2 + c3 → c3 ⇒ $\mathcal{P}(\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2$;

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) h1 − h2 + h3 → h1 ⇒ $\mathcal{P}(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$;

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

d) h1 − h2 + h3 → h1 ⇒ $\mathcal{P}(\lambda) = -(4-\lambda)(2+\lambda)^2$;

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

e) c1 + c2 + c3 → c1 ⇒ $\mathcal{P}(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$;

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

f) $\mathcal{P}(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2)$;

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

▷ **5.16.** a) $\mathcal{P}(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$; Giá trị riêng và véc tơ riêng tương ứng
$\lambda = 1 : v_1 = (1, 0, -1); \lambda = 2 : v_2 = (-2, 2, 1); \lambda = 3 : v_3 = (1, -2, -1)$;
$f(v_1) = v_1\,,\ f(v_2) = 2v_2\,,\ f(v_3) = 3v_3.$

b) $\mathcal{P}(\lambda) = (6-\lambda)(2-\lambda)^2$; Giá trị riêng và véc tơ riêng tương ứng
$\lambda = 6 : v_1 = (1, 2, 1); \lambda = 2 : v_2 = (1, 0, -1); v_3 = (0, 1, -, 1)$;
$f(v_1) = 6v_1\,,\ f(v_2) = 2v_2\,,\ f(v_3) = 2v_3.$

c) $\mathcal{P}(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)^2$; Giá trị riêng và véc tơ riêng tương ứng
$\lambda = 1 : v_1 = (2, -1, 1); \lambda = 3 : v_2 = (1, 1, 0); v_3 = (1, 0, 1)$;
$f(v_1) = v_1\,,\ f(v_2) = 3v_2\,,\ f(v_3) = 3v_3.$

d) $\mathcal{P}(\lambda) = (1-\lambda)^2(4-\lambda)$; Giá trị riêng và véc tơ riêng tương ứng
$\lambda = 1 : v_1 = (1, 0, 0); v_2 = (0, 1, -1); \lambda = 4 : v_3 = (1, 1, 2)$;
$f(v_1) = v_1\,,\ f(v_2) = v_2\,,\ f(v_3) = 4v_3.$

▷ **5.17.** a) $Q(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - 4z^2 - 2xy + 2xz$;

b) $Q(x, y, z) = 5x^2 + 3y^2 - 4z^2 - 2xy - 4yz$;

c) $Q(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - 4z^2$.

▷ **5.18.** Gọi A là ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở chính tắc T là ma trận chuyển cơ sở theo công thức biến đổi tọa độ.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}; T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^tAT = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Vậy $Q(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - 7y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}; T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^tAT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Vậy $Q(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + 4y_2^2 - 5y_3^2$.

▷ **5.19.** a) Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Sử dụng phương pháp Lagrange ta tìm được cơ sở

$$\{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (5/2, -1/2, 1)\}$$

thỏa mãn $(x_1, x_2, x_3) = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3$; $Q = y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2$.

b) Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

Sử dụng phương pháp Lagrange ta tìm được cơ sở

$$\{v_1 = (1/2, 0, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 1, -1)\}$$

thỏa mãn $(x_1, x_2, x_3) = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3$; $Q = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.

c) Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc $C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Sử dụng phương pháp Lagrange ta tìm được cơ sở

$$\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,-1,0), v_3 = (-1,-1,1)\}$$

thỏa mãn $(x_1, x_2, x_3) = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3$; $Q = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

▷ **5.20.** a) Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Sử dụng phương pháp Lagrange ta tìm được cơ sở

$$\{v_1 = (1,0,0,0), v_2 = (-1/3,1,0,0), v_3 = (-2/5,6/5,1,0), v_4 = (1/17,-3/17,6/17,1)\}$$

thỏa mãn $(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + y_4v_4$;
$Q = 3y_1^2 + \frac{5}{3}y_2^2 - \frac{17}{5}y_3^2 - \frac{37}{17}y_4^2$.

b) Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$.

Sử dụng phương pháp Lagrange ta tìm được cơ sở

$$\{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1/4,1,1/4), v_3 = (-1,0,1)\}$$

thỏa mãn $(x_1, x_2, x_3) = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3$; $Q = 2y_1^2 + \frac{19}{8}y_2^2 + 2y_3^2$.

c) Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc $C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -4 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Sử dụng phương pháp Lagrange ta tìm được cơ sở

$$\{v_1 = (1,0,0), v_2 = (-13/15,1,-2/5), v_3 = (1/2,0,1)\}$$

thỏa mãn $(x_1, x_2, x_3) = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3$; $Q = 3y_1^2 - \frac{53}{15}y_2^2 + \frac{5}{4}y_3^2$.

▷ **5.21.** Dạng song tuyến tính xác định dương khi các định thức con chính dương.

a) $\lambda > 2$.

b) $\begin{cases} 2 - \lambda^2 > 0 \\ 5 - 3\lambda^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow |\lambda| < \sqrt{5/3}$.

▷ **5.22.** Dạng song tuyến tính xác định dương khi các định thức con chính dương.

a) $\begin{cases} 1 - \lambda^2 > 0 \\ -\lambda(4 + 5\lambda) > 0 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{4}{5} < \lambda < 0$.

b) $\begin{cases} 4 - \lambda^2 > 0 \\ 105 - 30\lambda - \lambda^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow |\lambda| < 2$.

Tài liệu tham khảo

[1] Lê Bá Long (2010), *Đại số*; Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông.

[2] Lê Đình Thúy (2005), *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế*, (Phần 1: Đại số tuyến tính), NXB Thống kê.

[3] Nguyễn Duy Thuận (Chủ biên)(2004), *Đại số tuyến tính*; NXB Đại học Sư phạm.

[4] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên) (2008), *Toán cao cấp tập 1*; NXB Giáo dục.

[5] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)(2008), *Bài tập toán cao cấp tập 1*; NXB Giáo dục.

[6] Ian Jacques. (2018), *Mathematics for Economics anh Business*; Ninth edition published 2018 (print and electronic); ISBN: 978-1-292-19166-9 (print) , 978-1-292-19170-6 (PDF), 978-1-292-19171-3 (ePub); Edition, Prentice Hall.

[7] Lipshutz S. (1987), *Linear Algebra*; Mc Graw - Hill.

[8] Lipshutz S.(1968), *Theory and problems of Linear Algebra*; Schaum' s Outline Series Mc Graw-Hill.

[9] Proskuryakov I. U. (1978), *Problems in Linear Algebra*; Mir Pub. Moscow.