HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

ĐẠI SỐ

Dành cho hệ đại học ngành Điện tử, Viễn thông và Công nghệ thông tin

Biên soạn: **PGS.TS. Lê Bá Long**

LỜI NÓI ĐẦU

Toán cao cấp A_1, A_2, A_3 là chương trình toán đại cương dành cho sinh viên các nhóm ngành toán và nhóm ngành thuộc khối kỹ thuật. Nội dung của toán cao cấp A_1, A_3 chủ yếu là phép tính vi tích phân của hàm một hoặc nhiều biến, còn toán cao cấp A_2 giới thiệu các cấu trúc đại số và đại số tuyến tính. Có khá nhiều sách giáo khoa và tài liệu tham khảo viết về các chủ đề này. Tuy nhiên xuất phát từ đặc thù ứng dụng toán học đối với ngành điện tử viễn thông và công nghệ thông tin và nhu cầu có tài liệu phù hợp với chương trình đào tạo của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông nên chúng tôi đã biên soạn giáo trình này.

Giáo trình được biên soạn theo chương trình qui định năm 2007 của Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông. Nội dung của cuốn sách được tổng kết từ bài giảng của tác giả trong nhiều năm và có tham khảo các giáo trình của các trường đại học kỹ thuật khác. Chính vì thế, giáo trình này cũng có thể dùng làm tài liệu học tập, tài liệu tham khảo cho sinh viên của các trường, các ngành đại học và cao đẳng kỹ thuật.

Giáo trình gồm 7 chương:

Chương I: Lô gích toán học, lý thuyết tập hợp, ánh xạ và các cấu trúc đại số.

Chương II: Không gian véc tơ.

Chương III: Ma trận.

Chương IV: Định thức.

Chương V: Hệ phương trình tuyến tính

Chương VI: Ánh xạ tuyến tính.

Chương VII: Không gian véc tơ Euclide và dạng toàn phương.

Ngoài vai trò là công cụ cho các ngành khoa học khác, toán học còn được xem là một ngành khoa học có phương pháp tư duy lập luận chính xác chặt chẽ. Vì vậy việc học toán cũng giúp ta rèn luyện phương pháp tư duy. Các phương pháp này đã được giảng dạy và cung cấp từng bước trong quá trình học tập ở phổ thông, nhưng trong chương I các vấn đề này được hệ thống hoá lại. Nội dung của chương I được xem là cơ sở, ngôn ngữ của toán học hiện đại. Một vài nội dung trong chương này đã được học ở phổ thông nhưng chỉ với mức độ đơn giản. Các cấu trúc đại số thì hoàn toàn mới và khá trừu tượng vì vậy đòi hỏi học viên phải đọc lại nhiều lần mới tiếp thu được.

Các chương còn lại của giáo trình là đại số tuyến tính. Kiến thức của các chương liên hệ chặt chẽ với nhau, kết quả của chương này là công cụ của chương khác. Vì vậy học viên cần thấy được mối liên hệ giữa các chương. Đặc điểm của môn học này là tính khái quát hoá và trừu tượng cao. Các khái niệm thường được khái quát hoá từ những kết quả của hình học giải tích ở phổ thông. Khi học ta nên liên hệ đến các kết quả đó.

Giáo trình được trình bày theo cách thích hợp đối với người tự học. Trước khi nghiên cứu các nội dung chi tiết, người đọc nên xem phần giới thiệu của mỗi chương cũng như mục đích của chương để thấy được mục đích ý nghĩa, yêu cầu chính của chương đó. Trong mỗi chương, mỗi nội dung, người đọc có thể tự đọc và hiểu được cặn kẽ thông qua cách diễn đạt và chứng minh rõ ràng. Đặc biệt bạn đọc nên chú ý đến các nhận xét, bình luận để hiểu sâu hơn hoặc mở rộng tổng quát hơn các kết quả. Hầu hết các bài toán được xây dựng theo lược đồ: Đặt bài toán, chứng minh sự tồn tại lời giải bằng lý thuyết và cuối cùng nêu thuật toán giải quyết bài toán này. Các ví dụ là để minh họa trực tiếp khái niệm, định lý hoặc các thuật toán, vì vậy sẽ giúp người đọc dễ dàng hơn khi tiếp thu bài học. Cuối mỗi chương đều có các bài tập sắp xếp từ dễ đến khó. Các bài tập dễ chỉ kiểm tra trực triếp nội dung vừa học còn các bài tập khó đòi hỏi phải sử dụng các kiến thức tổng hợp.

Một số nội dung của cuốn sách đã được dạy hoặc dạy một phần ở phổ thông. Chẳng hạn giải tích tổ hợp, các đường cô níc có ở chương trình phổ thông. Tuy nhiên ở đây tác giả muốn trình bày lại giải tích tổ hợp theo ngôn ngữ ánh xạ. Minh họa ứng dụng chỉ số quán tính của dạng toàn phương để phân loại các đường bậc 2 trong mặt phẳng và các mặt bậc 2 trong không gian.

Tuy rằng tác giả đã rất cố gắng, song các thiếu sót còn tồn tại trong giáo trình là điều khó tránh khỏi. Tác giả rất mong sự đóng góp ý kiến của bạn bè đồng nghiệp, học viên xa gần và xin cám ơn vì điều đó. Tác giả xin chân thành cám ơn GS Đoàn Quỳnh, PGS. TS. Nguyễn Xuân Viên, PGS. TS. Nguyễn Năng Anh, Ths.GVC. Nguyễn Tiến Duyên, Ths.GVC. Đỗ Phi Nga đã có

Cuối cùng chúng tôi bày tỏ sự cám ơn đối với Ban Giám đốc Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông, Khoa Cơ bản 1 và bạn bè đồng nghiệp đã khuyến khích động viên, tạo nhiều điều kiện thuận lợi để chúng tôi hoàn thành tập tài liệi này.

Hà Nội, 2008.

PGS. TS. Lê Bá Long

Khoa cơ bản 1

Học Viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

CHƯƠNG I

MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ CÁC CẤU TRÚC ĐẠI SỐ

Toán học là một ngành khoa học lý thuyết được phát triển trên cơ sở tuân thủ nghiêm ngặt các qui luật lập luận của tư duy lô gich hình thức. Các qui luật cơ bản của lô gich hình thức đã được phát triển từ thời Aristote (Arít-xtốt) (thế kỷ thứ 3 trước công nguyên) cùng với sự phát triển rực rỡ của văn minh cổ Hy Lạp. Tuy nhiên mãi đến thế kỷ 17 với những công trình của De Morgan (Đờ Mocgan), Boole ... thì lô gích hình thức mới có một cấu trúc đại số đẹp đẽ và cùng với lý thuyết tập hợp giúp làm chính xác hoá các khái niệm toán học và thúc đẩy toán học phát triển mạnh mẽ. Việc nắm vững lô gich hình thức không những giúp sinh viên học tốt môn toán mà còn có thể vận dụng trong thực tế và biết lập luận một cách chính xác. Học tốt môn lô gich là cơ sở để học tốt đại số Boole, vận dụng để giải các bài toán về sơ đồ công tắc rơle, kỹ thuật số và công nghệ thông tin. Yêu cầu của phần này là phải nắm vững khái niệm mệnh đề toán học, các phép liên kết mệnh đề và các tính chất của chúng.

Khái niệm tập hợp, ánh xạ và các cấu trúc đại số là các khái niệm cơ bản: vừa là công cụ vừa ngôn ngữ của toán học hiện đại. Vì vai trò nền tảng của nó nên khái niệm tập hợp được đưa rất sớm vào chương trình toán phổ thông (toán lớp 6). Khái niệm tập hợp được Cantor (Căng-to) đưa ra vào cuối thế kỷ 19. Sau đó được chính xác hoá bằng hệ tiên đề về tập hợp. Có thể tiếp thu lý thuyết tập hợp theo nhiều mức độ khác nhau. Chúng ta chỉ tiếp cận lý thuyết tập hợp ở mức độ trực quan kết hợp với các phép toán lô gich hình thức như "và", "hoặc", phép kéo theo, phép tương đương, lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại. Với các phép toán lô gích này ta có tương ứng các phép toán giao, hợp, hiệu các tập hợp con của các tập hợp.

Trên cơ sở tích Descartes (Đề-các) của hai tập hợp ta có khái niệm quan hệ hai ngôi mà hai trường hợp đặc biệt là quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự. Quan hệ tương đương được dùng để phân một tập nào đó thành các lớp không giao nhau, gọi là phân hoạch của tập đó. Quan hệ đồng dư môđulô p (modulo) là một quan hệ tương đương trong tập các số nguyên. Tập thương của nó là tập $\mathbb{Z}_p$ các số nguyên môđulô p. Tập $\mathbb{Z}_p$ có nhiều ứng dụng trong lý thuyết mật mã, về an toàn mạng. Quan hệ thứ tự được dùng để sắp xếp các đối tượng cần xét theo một thứ tự dựa trên tiêu chuẩn nào đó. Quan hệ $\le$ trong các tập hợp số là các quan hệ thứ tự.

Khái niệm ánh xạ là sự mở rộng khái niệm hàm số đã được biết. Khái niệm này giúp ta mô tả các phép tương ứng từ một tập này đến tập kia thoả mãn điều kiện rằng mỗi phần tử của tập nguồn chỉ cho ứng với một phần tử duy nhất của tập đích và mọi phần tử của tập nguồn đều được cho ứng với phần tử của tập đích. Ở đâu có tương ứng thì ta có thể mô tả được dưới ngôn ngữ ánh xạ.

Sử dụng khái niệm ánh xạ và tập hợp ta khảo sát các vấn đề của giải tích tổ hợp, đó là các phương pháp đếm số phần tử của tập hợp. Giải tích tổ hợp được áp dụng để giải quyết các bài toán xác suất thống kê và toán học rời rạc.

Chúng ta có thể thực hiện các phép toán: cộng các số, hàm số, đa thức, véc tơ hoặc nhân các số, hàm số, đa thức... Như vậy ta có thể thực hiện các phép toán này trên các đối tượng khác nhau. Cái chung cho mỗi phép toán cộng hay nhân ở trên là các tính chất giao hoán, kết hợp, phân bố... Một tập hợp có phép toán thoả mãn điều kiện nào đó được gọi là có cấu trúc đại số tương ứng. Các cấu trúc đại số quan trọng thường gặp là nhóm, vành, trường, không gian véc tơ. Đại số học là một ngành của toán học nghiên cứu các cấu trúc đại số. Lý thuyết Nhóm được Evarist Galois (Galoa) đưa ra vào đầu thế kỉ 19 trong công trình "Trong những điều kiện nào thì một phương trình đại số có thể giải được?", trong đó Galoa vận dụng lý thuyết nhóm để giải quyết. Trên cơ sở lý thuyết nhóm người ta phát triển các cấu trúc đại số khác.

Việc nghiên cứu các cấu trúc đại số giúp ta tách ra khỏi các đối tượng cụ thể mà thấy được cái chung của từng cấu trúc để khảo sát các tính chất, các đặc trưng của chúng. Chẳng hạn, tập các ma trận vuông cùng cấp, các tự đồng cấu tuyến tính, các đa thức ... có cấu trúc vành không nguyên nên có những tính chất chung nào đó.

Các cấu trúc đại số có tính khái quát hoá và trừu tượng cao vì vậy người ta nghĩ rằng khó áp dụng vào thực tiễn. Tuy nhiên thực tế cho thấy đại số Boole được ứng dụng rất hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán về sơ đồ mạch điện, trong công nghệ thông tin và kỹ thuật số. Lý thuyết nhóm được ứng dụng vào cơ học lượng tử. Lý thuyết vị nhóm và vành được ứng dụng trong lý thuyết mật mã, lý thuyết Ôtômát.

Chương 1 trình bày một cách sơ lược các cấu trúc: Nhóm, vành, trường và đại số Boole. Các chương còn lại của cuốn sách này liên quan đến đại số tuyến tính.

1.1 SƠ LƯỢC VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ

1.1.1 Mệnh đề

Lô gích mệnh đề là một hệ thống lôgích đơn giản nhất, với đơn vị cơ bản là các *mệnh đề* mang nội dung của các phán đoán, mỗi phán đoán được giả thiết là có một giá trị chân lý nhất định là đúng hoặc sai.

Để chỉ các mệnh đề chưa xác định ta dùng các chữ cái $p,q,r...$ và gọi chúng là các biến mệnh đề. Nếu mệnh đề p đúng ta cho p nhận giá trị 1 và p sai ta cho nhận giá trị 0. Giá trị 1 hoặc 0 được gọi là thể hiện của p.

Mệnh đề phức hợp được xây dựng từ các mệnh đề đơn giản hơn bằng các phép liên kết lôgích mệnh đề.

1.1.2 Các phép liên kết lôgích mệnh đề

1. Phép phủ định (negation): *Phủ định của mệnh đề p là mệnh đề được ký hiệu $\overline{p}$ đọc là không p*. Mệnh đề $\overline{p}$ đúng khi p sai và $\overline{p}$ sai khi p đúng.

2. Phép hội (conjunction): *Hội của hai mệnh đề p,q là mệnh đề được ký hiệu $p \wedge q$ (đọc là p và q)*. Mệnh đề $p \wedge q$ chỉ đúng khi p và q cùng đúng.

3. Phép tuyển (disjunction): *Tuyển của hai mệnh đề p,q là mệnh đề được ký hiệu $p \vee q$ (đọc là p hoặc q).* $p \vee q$ chỉ sai khi p và q cùng sai.

4. Phép kéo theo (implication): *Mệnh đề p kéo theo q*, ký hiệu $p \Rightarrow q$, là mệnh đề chỉ sai khi p đúng q sai.

5. Phép tương đương (equivalence): Mệnh đề $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ được gọi là *mệnh đề p tương đương q*, ký hiệu $p \Leftrightarrow q$.

Một công thức gồm các biến mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề được gọi là một *công thức mệnh đề*. Bảng liệt kê các thể hiện của công thức mệnh đề được gọi là *bảng chân trị*.

Từ định nghĩa của các phép liên kết mệnh đề ta có các bảng chận trị tương ứng sau

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Như vậy $p \Leftrightarrow q$ là một mệnh đề đúng khi cả hai mệnh đề p và q cùng đúng hoặc cùng sai và mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ sai trong trường hợp ngược lại.

Một công thức mệnh đề được gọi là hằng đúng nếu nó luôn nhận giá trị 1 với mọi thể hiện của các biến mệnh đề có trong công thức. Ta ký hiệu mệnh đề tương đương hằng đúng là "$\equiv$" thay cho "$\Leftrightarrow$".

1.1.3 Các tính chất

Dùng bảng chân trị ta dễ dàng kiểm chứng các mệnh đề hằng đúng sau:

1) $\overline{\overline{p}} \equiv p$ *luật phủ định kép.*

2) $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$.

3) $p \wedge q \equiv q \wedge p,\ p \vee q \equiv q \vee p$ *luật giao hoán.*

4) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r;\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ *luật kết hợp.*

5) $\left[p \wedge (q \vee r)\right] \equiv \left[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\right]$;

$\left[p \vee (q \wedge r)\right] \equiv \left[(p \vee q) \wedge (p \vee r)\right]$ *luật phân phối.*

6) Mệnh đề $p \vee \overline{p}$ luôn đúng *luật bài trung.*

$p \wedge \overline{p}$ luôn sai *luật mâu thuẫn.*

7) $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$; $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$ *luật De Morgan.*

8) $p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ *luật phản chứng.*

9) $p \vee p \equiv p;\ p \wedge p \equiv p$ *luật lũy đẳng.*

10) $p \vee (p \wedge q) \equiv p;\ p \wedge (p \vee q) \equiv p$ *luật hấp thu.*

1.2 TẬP HỢP

1.2.1 Khái niệm tập hợp

Khái niệm tập hợp và phần tử là khái niệm cơ bản của toán học, không thể định nghĩa qua các khái niệm đã biết. Các khái niệm "tập hợp", "phần tử" xét trong mối quan hệ phần tử của tập hợp trong lý thuyết tập hợp là giống với khái niệm "đường thẳng", "điểm" và quan hệ điểm thuộc đường thẳng được xét trong hình học. Một cách trực quan, ta có thể xem tập hợp như một sự tụ tập các vật, các đối tượng nào đó mà mỗi vật hay đối tượng là một phần tử của tập hợp. Tập hợp được đặc trưng tính chất rằng một phần tử bất kỳ chỉ có thể hoặc thuộc hoặc không thuộc tập hợp. Có thể lấy ví dụ về các tập hợp có nội dung toán học hoặc không toán học. Chẳng hạn: tập hợp các số tự nhiên là tập hợp mà các phần tử của nó là các số 0, 1, 2, 3, ... còn tập hợp các cuốn sách trong thư viện của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông là tập hợp mà các phần tử của nó là các cuốn sách.

Ta thường ký hiệu các tập hợp bởi các chữ in hoa $A, B, \ldots X, Y, \ldots$ còn các phần tử bởi các chữ thường $x, y, \ldots$ Nếu phần tử x thuộc A ta ký hiệu $x \in A$, nếu x không thuộc A ta ký hiệu $x \notin A$. Ta cũng nói tắt "tập" thay cho thuật ngữ "tập hợp".

1.2.2 Cách mô tả tập hợp

Ta thường mô tả tập hợp theo các cách sau:

a) Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp trong dấu ngoặc nhọn

Ví dụ 1.1: Tập các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 10 là $\{1,3,5,7,9\}$.

Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ là $\{-1,1\}$.

b) Nêu đặc trưng tính chất của các phần tử tạo thành tập hợp

Có những tập hợp không thể liệt kê các phần tử của chúng, khi đó ta mô tả tập hợp này bằng cách đặc trưng các tính chất của phần tử tạo nên tập hợp.

Ví dụ 1.2: Tập hợp các số tự nhiên chẵn $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2m,\ m \in \mathbb{N}\}$.

Tập hợp có thể được mô tả bằng cách nêu tính chất đặc trưng của các phần tử thông qua khái niệm ***hàm mệnh đề***.

Hàm mệnh đề xác định trong tập hợp D là một mệnh đề $S(x)$ phụ thuộc vào biến $x \in D$. Khi cho biến x một giá trị cụ thể thì ta được mệnh đề lôgích (mệnh đề chỉ nhận một trong hai giá trị hoặc đúng hoặc sai).

Giả sử $S(x)$ là một mệnh đề xác định trong tập hợp D, ta gọi tập hợp các phần tử $x \in D$ sao cho $S(x)$ đúng là miền đúng của hàm mệnh đề $S(x)$ và ký hiệu $\{x \in D \mid S(x)\}$.

Ví dụ 1.3: **i**) Xét hàm mệnh đề $S(x)$ xác định trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$: "$x^2 + 1$ là một số nguyên tố" thì $S(1), S(2)$ đúng và $S(3), S(4)$ sai ...

ii) Mỗi một phương trình có thể xem là một hàm mệnh đề có miền đúng là tập nghiệm.

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}.$$

c) **Giản đồ Venn**: Để có hình ảnh trực quan về tập hợp, người ta thường biểu diễn tập hợp như là miền phẳng giới hạn bởi đường cong khép kín không tự cắt được gọi là *giản đồ Venn.*

1.2.3 Các tập hợp số thường gặp

- Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, ...\}$.
- Tập các số nguyên $\mathbb{Z}=\{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.
- Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}=\left\{p/q \mid q\neq 0,\ p,q\in\mathbb{Z}\right\}$.
- Tập các số thực $\mathbb{R}$ (gồm các số hữu tỉ và vô tỉ).
- Tập các số phức $\mathbb{C}=\left\{ z=x+iy \mid x,y\in\mathbb{R};\ i^2=-1\right\}$.

1.2.4 Tập con

Định nghĩa 1.1: *Tập A được gọi là tập con của B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, khi đó ta ký hiệu*

$$A\subset B \text{ hoặc } B\supset A.$$

Khi A là tập con của B thì ta còn nói A chứa trong B hay B chứa A hay B bao hàm A.

Ta có: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.2: *Hai tập A, B bằng nhau, ký hiệu $A=B$:*

$$A=B \text{ khi và chỉ khi } A\subset B \text{ và } B\subset A.$$

Như vậy để chứng minh $A\subset B$ ta chỉ cần chứng minh $x\in A\Rightarrow x\in B$.

Do đó để chứng minh $A=B$ ta chỉ cần chứng minh $x\in A\Leftrightarrow x\in B$.

Định nghĩa 1.3: *Tập rỗng là tập không chứa phần tử nào, ký hiệu $\varnothing$.*

Một cách hình thức ta có thể xem tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

Ví dụ 1.4: Xét $X=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2=4, x \text{ lẻ}\right\}$ thì $X=\varnothing$.

Tập hợp tất cả các tập con của X được ký hiệu $\mathcal{P}(X)$. Vậy $A\in\mathcal{P}(X)$ khi và chỉ khi $A\subset X$. Tập X là tập con của chính nó, vì vậy X là phần tử lớn nhất và $\varnothing$ là phần tử bé nhất của $\mathcal{P}(X)$.

$$A\in\mathcal{P}(X)\Leftrightarrow A\subset X \qquad \textbf{(1.1)}$$

Ví dụ 1.5: $X=\{a,b,c\}$ có $\mathcal{P}(X)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},X\}$.

Ta thấy X có 3 phần tử thì $\mathcal{P}(X)$ có $2^3=8$ phần tử. Ta có thể chứng minh tổng quát rằng nếu X có n phần tử thì $\mathcal{P}(X)$ có 2^n phần tử (bài tập 19).

1.2.5 Các phép toán trên các tập hợp

1. Phép hợp: *Hợp của hai tập* A *và* B, *ký hiệu* $A\cup B$, *là tập gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập* A, B.

$$\left(x\in A\cup B\right)\Leftrightarrow\left(\left(x\in A\right)\vee\left(x\in B\right)\right). \tag{1.2}$$

2. Phép giao: *Giao của hai tập* A *và* B, *ký hiệu* $A\cap B$, *là tập gồm các phần tử thuộc đồng thời cả hai tập* A, B.

$$\left(x\in A\cap B\right)\Leftrightarrow\left(\left(x\in A\right)\wedge\left(x\in B\right)\right). \tag{1.3}$$

3. Hiệu của hai tập: *Hiệu của hai tập* A *và* B, *ký hiệu* $A\setminus B$ *hay* $A-B$, *là tập gồm các phần tử thuộc* A *nhưng không thuộc* B.

$$\left(x\in A\setminus B\right)\Leftrightarrow\left(\left(x\in A\right)\wedge\left(x\notin B\right)\right). \tag{1.4}$$

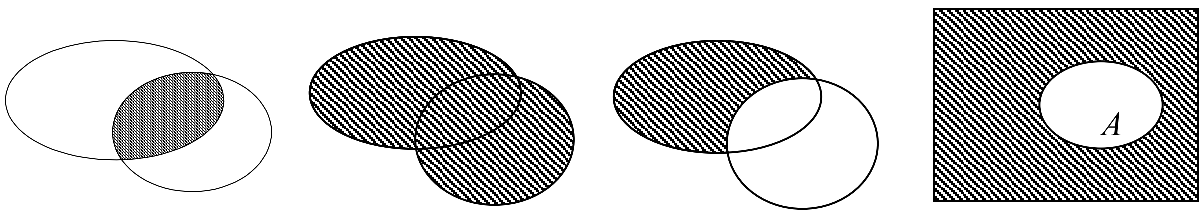
Thông thường giả thiết tất cả các tập được xét là các tập con của một tập cố định gọi là *tập phổ dụng* U. Tập $U\setminus B$ được gọi là phần bù của B trong U và được ký hiệu là C_U^B hoặc $\overline{B}$.

Ví dụ 1.5: Xét các tập $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$.

Ta có : $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$, $A\cap B=\{b,d\}$, $A\setminus B=\{a,c\}$,

$$C_U^A=\{e,f,g,h\},\ C_U^B=\{a,c,g,h\}.$$

Ta có thể minh họa các phép toán trên với các tập tương ứng là phần gạch chéo của giản đồ Venn:



$A\cap B$ $\qquad$ $A\cup B$ $\qquad$ $A\setminus B$ $\qquad$ C_U^B

Áp dụng lôgích mệnh đề (tính chất 1.3) ta dễ dàng kiểm chứng lại các tính chất sau:

1. $A\cup A=A$, $A\cap A=A$ *tính lũy đẳng*
2. $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$ *tính giao hoán.*
3. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

   $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ *tính kết hợp.*

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *tính phân bố.*

Giả sử A, B là hai tập con của U thì:

5. $\overline{\overline{A}} = A$; $A \cup \varnothing = A$; $A \cap U = A$

6. $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$

7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *luật De Morgan*

8. $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \setminus (A \cap B) = C_A^{A \cap B}$.

1.2.6 Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại

Giả sử $S(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trong tập D có miền đúng $D_{S(x)} = \left\{x \in D \middle| S(x)\right\}$. Khi đó:

a) Mệnh đề $\forall x \in D,\, S(x)$ (đọc là với mọi $x \in D,\, S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} = D$ và sai trong trường hợp ngược lại.

Ký hiệu $\forall$ (đọc là với mọi) được gọi là *lượng từ phổ biến.*

Nếu không sợ nhầm lẫn ta thường bỏ qua $x \in D$ và viết tắt $\forall x,\, S(x)$ thay cho $\forall x \in D,\, S(x)$.

b) Mệnh đề $\exists x \in D,\, S(x)$ (đọc là tồn tại $x \in D,\, S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} \neq \varnothing$ và sai trong trường hợp ngược lại.

Ký hiệu $\exists$ (đọc là tồn tại) được gọi là *lượng từ tồn tại.*

Để chứng minh một mệnh đề với lượng từ phổ biến là đúng thì ta phải chứng minh đúng trong mọi trường hợp, còn với mệnh đề tồn tại ta chỉ cần chỉ ra một trường hợp đúng.

c) Người ta mở rộng khái niệm lượng từ tồn tại với ký hiệu $\exists! x \in D,\, S(x)$ (đọc là tồn tại duy nhất $x \in D,\, S(x)$) nếu $D_{S(x)}$ có đúng một phần tử.

d) Phép phủ định lượng từ

$$\overline{\forall x \in D,\, S(x)} \Leftrightarrow \left(\exists x \in D,\, \overline{S(x)}\right)$$

$$\overline{\exists x \in D,\, S(x)} \Leftrightarrow \left(\forall x \in D,\, \overline{S(x)}\right) \quad \textbf{(1.5)}$$

<u>Ví dụ 1.6</u>: Theo định nghĩa của giới hạn

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x: \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Sử dụng tính chất hằng đúng $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$ (xem tính chất 1.3) ta có

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ tương đương với

$$\overline{\left(0 < |x-a| < \delta\right)} \vee \left(|f(x) - L| < \varepsilon\right).$$

Vậy phủ định của $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ là

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0; \exists x: \left(0 < |x-a| < \delta\right) \wedge \left(|f(x) - L| \geq \varepsilon\right).$$

1.2.7 Phép hợp và giao suy rộng

Giả sử $(A_i)_{i\in I}$ là một họ các tập hợp. Mở rộng công thức (1.2), (1.3) ta định nghĩa:

$\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ là tập gồm các phần tử thuộc ít nhất một tập A_i nào đó.

$\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ là tập gồm các phần tử thuộc mọi tập A_i.

$$\left(x \in \bigcup\nolimits_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow \left(\exists i_0 \in I;\ x \in A_{i_0}\right) \tag{1.6}$$

$$\left(x \in \bigcap\nolimits_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in I;\ x \in A_i\right). \tag{1.7}$$

Ví dụ 1.7: $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \leq x \leq n/(n+1)\right\}$; $B_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1/(n+1) \leq x < 1 + 1/(n+1)\right\}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0;1)\ ,\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = [0;1]\ .$$

1.3 TÍCH DESCARTES VÀ QUAN HỆ

1.3.1 Tích Descartes của các tập hợp

Định nghĩa 1.4: *Tích Descartes của hai tập X, Y là tập, ký hiệu $X \times Y$, gồm các phần tử có dạng (x, y) trong đó $x \in X$ và $y \in Y$.* Vậy

$$X \times Y = \left\{(x, y) \,\middle|\, x \in X \text{ và } y \in Y\right\}. \tag{1.8}$$

Ví dụ 1.8: $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2\}$; $X \times Y = \{(a,1), (b,1), (c,1), (a,2), (b,2), (c,2)\}$

Ta dễ dàng chứng minh được rằng nếu X có n phần tử, Y có m phần tử thì $X \times Y$ có $n \cdot m$ phần tử.

Tích Descartes của n tập hợp $X_1, X_2, ..., X_n$ được định nghĩa và ký hiệu như sau:

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \,\middle|\, x_i \in X_i,\, i = 1, 2, ..., n\right\}. \qquad \textbf{(1.9)}$$

Nhận xét 1.1:

1. Khi $X_1 = ... = X_n = X$ thì ta ký hiệu X^n thay cho $\underbrace{X \times ... \times X}_{n \text{ lần}}$.

2. Tích Descartes $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ còn được ký hiệu $\prod_{i \in I} X_i$.

3. Giả sử $(x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$; $(x'_1, ..., x'_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ thì

$$(x_1, ..., x_n) = (x'_1, ..., x'_n) \Leftrightarrow x_i = x'_i, \forall i = 1, ..., n \qquad \textbf{(1.10)}$$

4. Tích Descartes của các tập hợp không có tính giao hoán.

1.3.2 Quan hệ hai ngôi

Trong thực tế cuộc sống cũng như trong toán học ta thường xét đến các quan hệ. Chẳng hạn hai bạn sinh viên có thể có quan hệ đồng hương, quan hệ cùng một họ …, hai số nguyên có quan hệ chia hết, quan hệ nguyên tố cùng nhau, quan hệ nhỏ hơn … Mỗi quan hệ này có thể xác định bởi tập các cặp phần tử có quan hệ với nhau. Khái quát hóa điều này ta có định nghĩa quan hệ như sau.

Định nghĩa 1.5: *Cho tập $X \neq \varnothing$, mỗi tập con $\mathscr{R} \subset X \times X$ được gọi là một quan hệ hai ngôi trên X.*

Với $x, y \in X$ và $(x, y) \in \mathscr{R}$ ta nói x có quan hệ với y theo quan hệ $\mathscr{R}$ và ta viết $x\mathscr{R}y$.

Ví dụ 1.9: Ta xét các quan hệ sau trên tập các số:

$\mathscr{R}_1 : x\mathscr{R}_1 y \Leftrightarrow x \vdots y$ (x chia hết cho y), $\forall x, y \in \mathbb{N}$

$\mathscr{R}_2 : x\mathscr{R}_2 y \Leftrightarrow (x, y) = 1$ (x và y nguyên tố cùng nhau) $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

$\mathscr{R}_3 : x\mathscr{R}_3 y \Leftrightarrow x \leq y$ (x nhỏ hơn hay bằng y) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$\mathscr{R}_4 : x\mathscr{R}_4 y \Leftrightarrow x - y \vdots m$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. Ta ký hiệu $x \equiv y (\mathrm{mod}\, m)$ và đọc là x đồng dư với y môđulô m.

Định nghĩa 1.6: *Quan hệ hai ngôi $\mathscr{R}$ trên X được gọi là có tính:*

a) Phản xạ, nếu $x\mathscr{R}x, \forall x \in X$;

b) Đối xứng, nếu $\forall x, y \in X$ mà $x\mathscr{R}y$ thì cũng có $y\mathscr{R}x$;

c) Bắc cầu, nếu $\forall x, y, z \in X$ *mà* $x\mathscr{R}y$ *và* $y\mathscr{R}z$ *thì cũng có* $x\mathscr{R}z$ *;*

d) Phản đối xứng, nếu $\forall x, y \in X$ *mà* $x\mathscr{R}y$ *và* $y\mathscr{R}x$ *thì* $x = y$.

Ví dụ 1.10: $\mathscr{R}_1$ phản đối xứng, bắc cầu nhưng không đối xứng, không phản xạ (vì 0 không chia hết cho 0).

$\mathscr{R}_2$ đối xứng, không phản xạ, không phản xứng, không bắc cầu.

$\mathscr{R}_3$ phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu.

$\mathscr{R}_4$ phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

1.3.3 Quan hệ tương đương

Định nghĩa 1.8: *Quan hệ hai ngôi* $\mathscr{R}$ *trên* $X \neq \varnothing$ *được gọi là quan hệ tương đương nếu có ba tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu.*

Theo thói quen, với quan hệ tương đương $\mathscr{R}$ ta thường viết $x \sim y(\mathscr{R})$ hoặc $x \sim y$ thay cho $x\mathscr{R}y$.

Ta định nghĩa và ký hiệu *lớp tương đương* của phần tử $x \in X$ là tập hợp

$$\overline{x} = \left\{ y \in X \middle| y \sim x \right\} \quad \textbf{(1.11)}$$

Mỗi phần tử bất kỳ của lớp tương đương $\overline{x}$ được gọi là phần tử đại diện của $\overline{x}$. Người ta còn ký hiệu lớp tương đương của x là $cl(x)$.

Hai lớp tương đương bất kỳ thì hoặc bằng nhau hoặc không giao nhau, nghĩa là $\overline{x} \cap \overline{x'}$ hoặc bằng $\overline{x} = \overline{x'}$ hoặc bằng $\varnothing$, nói cách khác các lớp tương đương tạo thành một phân hoạch các tập con của X.

$$\overline{x} \cap \overline{x'} = \left[\begin{array}{l} \overline{x} = \overline{x'} \\ \varnothing \end{array} \right. \quad \textbf{(1.12)}$$

Tập tất cả các lớp tương đương được gọi là *tập hợp thương*, ký hiệu $X/\sim$. Vậy

$$X/\sim = \left\{ \overline{x} \middle| x \in X \right\} \quad \textbf{(1.13)}$$

Ví dụ 1.11: Quan hệ $\mathscr{R}_4$ trong ví dụ 1.9 là một quan hệ tương đương gọi là quan hệ đồng dư môđulô m trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$. Nếu $x \sim y$, ta viết $x \equiv y (\bmod m)$.

Ta ký hiệu tập thương (1.13) gồm m số đồng dư *môđulô m*:

$$\mathbb{Z}_m = \left\{ \overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1} \right\}. \quad \textbf{(1.14)}$$

Ví dụ 1.12: Quan hệ "véc tơ $\vec{u}$ bằng véc tơ $\vec{v}$" là một quan hệ tương đương của tập hợp các véc tơ tự do trong không gian. Nếu ta chọn gốc O cố định thì mỗi lớp tương đương bất kỳ đều có thể chọn véc tơ đại diện dạng $\overrightarrow{OA}$.

Ví dụ 1.14: Quan hệ tam giác đồng dạng trong không gian Euclide là quan hệ tương đương.

1.3.4 Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 1.8: *Quan hệ hai ngôi $\mathscr{R}$ trên $X \neq \varnothing$ được gọi là quan hệ thứ tự nếu có ba tính chất phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu.*

Ví dụ 1.13:

1) Trong $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ quan hệ "$x \leq y$" là một quan hệ thứ tự.

2) Trong $\mathbb{N}^*$ quan hệ "$x \vdots y$" là một quan hệ thứ tự.

3) Trong $\mathscr{P}(X)$ (tập hợp tất cả các tập con của X) quan hệ "tập con" ($A \subset B$) là một quan hệ thứ tự.

Khái niệm quan hệ thứ tự được khái quát hoá từ khái niệm lớn hơn (hay đứng sau) trong các tập số, vì vậy theo thói quen người ta cũng dùng ký hiệu "$\leq$" cho quan hệ thứ tự bất kỳ.

Quan hệ thứ tự "$\leq$" trên tập X được gọi là *quan hệ thứ tự toàn phần* nếu hai phần tử bất kỳ của X đều so sánh được với nhau.

$$\forall x, y \in X: \ x \leq y \text{ hoặc } y \leq x \tag{1.15}$$

Quan hệ thứ tự không toàn phần được gọi là *quan hệ thứ tự bộ phận.*

Tập X với quan hệ thứ tự "$\leq$" được gọi là tập *được sắp*. Nếu "$\leq$" là quan hệ thứ tự toàn phần thì X được gọi là tập *được sắp toàn phần hay sắp tuyến tính.*

Ví dụ 1.14: Các tập $(\mathbb{N},\leq)$, $(\mathbb{Z},\leq)$, $(\mathbb{Q},\leq)$, $(\mathbb{R},\leq)$ được sắp toàn phần, còn $(\mathbb{N}^*,\vdots)$ và $\left(\mathscr{P}(X),\subset\right)$ được sắp bộ phận (nếu X có nhiều hơn 1 phần tử).

Định nghĩa 1.9: *Cho tập được sắp $(X,\leq)$ và tập con $A \subset X$. Tập A được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại $q \in X$ sao cho $a \leq q$, với mọi $a \in A$. Khi đó q được gọi là một chặn trên của A.*

Hiển nhiên rằng nếu q là một chặn trên của A thì mọi $q' \in X$ mà $q \leq q'$ đều là chặn trên của A. Phần tử chặn trên nhỏ nhất q của A (theo nghĩa $q \leq q'$, với mọi chặn trên q' của A) được gọi là *cận trên* của A và được ký hiệu $q = \sup A$. Rõ ràng phần tử cận trên nếu tồn tại là duy nhất.

$$q = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : a \le q \\ (\forall a \in A : a \le q') \Rightarrow q \le q' \end{cases} \quad \textbf{(1.16)}$$

Tương tự tập A được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại $p \in X$ sao cho $p \le a$, với mọi $a \in A$. Phần tử chặn dưới lớn nhất được gọi là *cận dưới* của A và được ký hiệu $\inf A$. Cận dưới nếu tồn tại cũng duy nhất.

$$p = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : p \le a \\ (\forall a \in A : p' \le a) \Rightarrow p' \le p \end{cases} \quad \textbf{(1.17)}$$

Nói chung $\sup A$, $\inf A$ chưa chắc là phần tử của A. Nếu $q = \sup A \in A$ thì q được gọi là *phần tử lớn nhất* của A ký hiệu $q = \max A$

$$q = \max A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : a \le q \\ q \in A \end{cases} \quad \textbf{(1.18)}$$

Tương tự nếu $p = \inf A \in A$ thì p được gọi là *phần tử bé nhất* của A ký hiệu $p = \min A$

$$p = \min A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : p \le a \\ p \in A \end{cases} \quad \textbf{(1.19)}$$

Từ tính chất liên tục của tập số thực $\mathbb{R}$ có thể chứng minh được rằng với mọi tập con $A \subset \mathbb{R}$:

- Nếu A bị chặn trên thì tồn tại cận trên $\sup A$

$$q = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : a \le q \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : q - \varepsilon \le a \end{cases} \quad \textbf{(1.20)}$$

- Nếu A bị chặn dưới thì tồn tại cận dưới $\inf A$

$$p = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : p \le a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a \le p + \varepsilon \end{cases} \quad \textbf{(1.21)}$$

Ví dụ 1.15: Tập $A = [0;1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$ có $1 = \sup A \notin A$, $\inf A = 0 \in A$, do đó không tồn tại $\max A$ nhưng tồn tại $\min A = \inf A = 0$.

Ví dụ 1.16: Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trong miền D. Áp dụng công thức (1.18), (1.19) ta có công thức xác định giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m.

$$M = \max_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D : f(x) \le M \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}; \quad m = \min_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D : m \le f(x) \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}.$$

1.4 ÁNH XẠ

1.4.1 Định nghĩa và ví dụ

Khái niệm ánh xạ được khái quát hoá từ khái niệm hàm số trong đó hàm số thường được cho dưới dạng công thức tính giá trị của hàm số phụ thuộc vào biến số. Chẳng hạn, hàm số $y = 2x$ với $x \in \mathbb{N}$ là quy luật cho ứng

$$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 6, ...$$

Ta có thể định nghĩa ánh xạ một cách trực quan như sau:

Định nghĩa 1.10: *Một ánh xạ từ tập X vào tập Y là một quy luật cho tương ứng mỗi một phần tử $x \in X$ với một phần tử $y = f(x)$ của Y thỏa mãn hai điều kiện sau:*

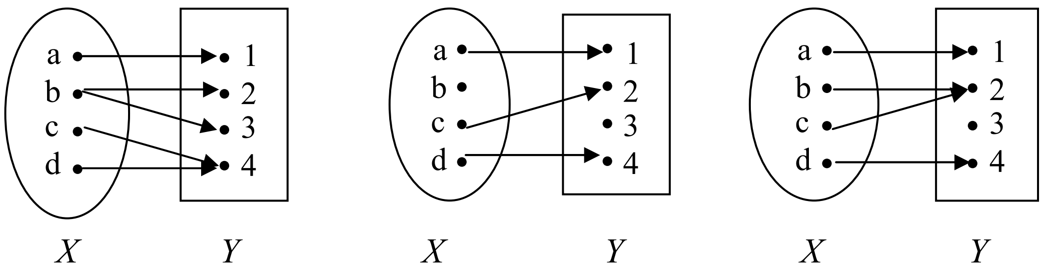
(i) *Mọi $x \in X$ đều có ảnh tương ứng $y = f(x) \in Y$,*

(ii) *Với mỗi $x \in X$ ảnh $f(x)$ là duy nhất.*

Ta ký hiệu $\begin{array}{l} f : X \longrightarrow Y \\ \quad x \mapsto y = f(x) \end{array}$ hay $\begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Y \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$

X được gọi là tập nguồn, Y được gọi là tập đích.

Ví dụ 1.17:



Tương ứng a) Tương ứng b) Tương ứng c)

Tương ứng a) không thỏa mãn điều kiện (ii). Tương ứng b) không thỏa mãn điều kiện (i) của định nghĩa. Chỉ có tương ứng c) xác định một ánh xạ từ X vào Y.

Hai ánh xạ $f : X \to Y$, $g : X' \to Y'$ được gọi là bằng nhau, ký hiệu $f = g$, nếu thỏa mãn

$$\begin{cases} X = X', Y = Y' \\ f(x) = g(x); \forall x \in X \end{cases} \quad \textbf{(1.22)}$$

Ví dụ 1.18: Mỗi hàm số $y = f(x)$ bất kỳ có thể được xem là ánh xạ từ tập xác định D vào $\mathbb{R}$. Chẳng hạn:

Hàm lôgarit $y=\ln x$ *là ánh xạ* $\ln:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y=\ln x$$

Hàm căn bậc hai $y=\sqrt{x}$ *là ánh xạ* $\sqrt{\ }:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y=\sqrt{x}.$$

Định nghĩa 1.11: *Xét ánh xạ* $f:X\to Y$ *:*

- *Cho* $A\subset X$ *, ta ký hiệu và gọi tập sau là ảnh của* A *qua ánh xạ* f

$$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\} \qquad \textbf{(1.23)}$$

Nói riêng $f(X)=\operatorname{Im} f$ *được gọi là tập ảnh hay tập giá trị của* f *.*

Khi f *là hàm số thì* $f(X)$ *được gọi là miền giá trị .*

- *Cho* $B\subset Y$ *, ta ký hiệu và gọi tập sau là nghịch ảnh của* B *qua ánh xạ* f

$$f^{-1}(B)=\{x\in X\,|\,f(x)\in B\} \qquad \textbf{(1.24)}$$

Trường hợp B là tập hợp chỉ có một phần tử $\{y\}$ thì ta viết $f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(\{y\})$. Vậy

$$f^{-1}(y)=\{x\in X\,|\,y=f(x)\}. \qquad \textbf{(1.25)}$$

Ví dụ 1.19: *Xét ví dụ ánh xạ* $f:X\to Y$ *là tương ứng c) của ví dụ 1.17.*

Cho $A=\{a,b,c\}\subset X$ *,* $B=\{2,3,4\}\subset Y$ *thì*

$$f(A)=\{1,2\},\ \operatorname{Im} f=\{1,2,4\},\ f^{-1}(B)=\{b,c,d\},\ f^{-1}(2)=\{b,c\}.$$

1.4.2 Phân loại các ánh xạ

Định nghĩa 1.12:

1) *Ánh xạ* $f:X\to Y$ *được gọi là đơn ánh nếu ảnh của hai phần tử phân biệt là hai phần tử phân biệt.* Nghĩa là:

$$\forall x_1,x_2\in X;\ x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

hay một cách tương đương:

$$\forall x_1,x_2\in X:\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2 \qquad \textbf{(1.26)}$$

2) *Ánh xạ* $f: X \to Y$ *được gọi là toàn ánh nếu mọi phần tử của* Y *là ảnh của phần tử nào đó của* X .

Vậy f là một toàn ánh khi thỏa mãn một trong hai điều kiện tương đương sau:

$$f(X) = Y \text{ hoặc } \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ sao cho } y = f(x) \quad \textbf{(1.27)}$$

Mọi ánh xạ $f: X \to Y$ *bất kỳ là toàn ánh lên tập giá trị* $f(X)$.

3) Ánh xạ $f: X \to Y$ *vừa đơn ánh vừa toàn ánh được gọi là song ánh.*

Vậy f là một song ánh khi thỏa mãn điều kiện sau:

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X \text{ sao cho } y = f(x) \quad \textbf{(1.28)}$$

Nhận xét 1.2: Khi ánh xạ $f: X \to Y$ được cho dưới dạng công thức xác định ảnh $y = f(x)$ thì ta có thể xác định tính chất đơn ánh, toàn ánh của ánh xạ f bằng cách giải phương trình:

$$y = f(x),\ y \in Y \quad \textbf{(1.29)}$$

trong đó ta xem x là biến ẩn và y là tham biến.

♦ Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (1.29) luôn có nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là toàn ánh.

♦ Nếu với mỗi $y \in Y$ phương trình (1.29) có không quá 1 nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là đơn ánh.

♦ Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (1.2) luôn có duy nhất nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là song ánh.

Ví dụ 1.20: Cho ánh xạ

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto y = f(x) = x(x+1) \end{aligned}$$

Xét phương trình $y = f(x) = x(x+1) = x^2 + x$ hay $x^2 + x - y = 0$.

Biệt số $\Delta = 1 + 4y > 0$ (vì $y \in \mathbb{N}$). Phương trình luôn có 2 nghiệm thực

$$x_1 = \left(-1 + \sqrt{1+4y}\right)\Big/2, x_2 = \left(-1 - \sqrt{1+4y}\right)\Big/2 .$$

Vì $x_2 < 0$ nên phương trình có không quá 1 nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy f là đơn ánh.

Mặt khác tồn tại $y \in \mathbb{N}$ mà nghiệm $x_1 \notin \mathbb{N}$ (chẳng hạn $y = 1$), nghĩa là phương trình trên vô nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy f không toàn ánh.

Ví dụ 1.21: Các hàm số đơn điệu chặt:

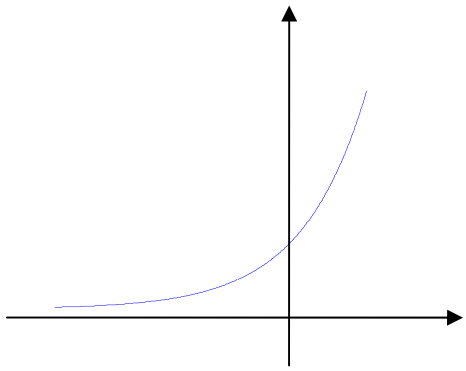
- Đồng biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Nghịch biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

là các song ánh từ tập xác định lên miền giá trị của nó.

Ví dụ 1.22: Xét 3 ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ và $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định và có các đồ thị tương ứng như sau :

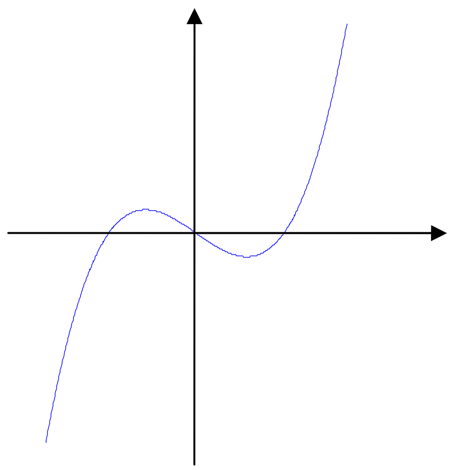
Hàm số $f(x) = 2^x$ có đạo hàm $f'(x) = 2^x \ln 2 > 0$ do đó hàm số luôn đồng biến, hàm số chỉ nhận giá trị dương. Vậy f là đơn ánh nhưng không toàn ánh.

Có thể nhận thấy rằng đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị không quá 1 điểm do đó phương trình (1.29) có không quá 1 nghiệm.



Hàm số $g(x) = x^3 - 3x$ không luôn đồng biến và nhận mọi giá trị.

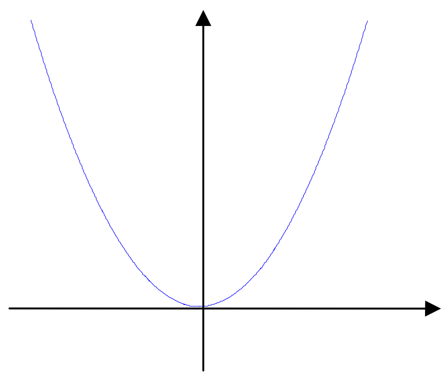
Đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị tại 1 hoặc 3 điểm do đó phương trình (1.29) luôn có 1 hoặc 3 nghiệm. Vậy f là toàn ánh nhưng không đơn ánh.



Hàm số $h(x) = x^2$ không luôn đồng biến và chỉ nhận giá trị ≥ 0.

Đường thẳng song song với trục hoành luôn cắt đồ thị tại 2 điểm khi ở trên trục hoành và không cắt đồ thị khi ở dưới trục hoành do đó phương trình (1.29) có 2 nghiệm khi $y > 0$ và vô nghiệm khi $y < 0$.

Vậy h là không toàn ánh và không đơn ánh.



<u>Ví dụ 1.23</u>: Giả sử A là tập con của X thì ánh xạ

$$\begin{array}{l} i_A : A \to X \\ \quad x \mapsto i_A(x) = x \end{array}$$

là một đơn ánh gọi là *phép nhúng chính tắc.*

Đặc biệt khi $A = X$ ánh xạ i_A là một song ánh, ký hiệu Id_X và gọi là ánh xạ đồng nhất của X.

1.4.3 Ánh xạ ngược của một song ánh

<u>Định nghĩa 1.13</u>: Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh, theo (1.28) với mỗi $y \in Y$ tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy ta có thể xác định một ánh xạ từ Y vào X bằng cách cho ứng mỗi phần tử $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. *Ánh xạ này được gọi là ánh xạ ngược của* f *và được ký hiệu* f^{-1}. Vậy

$$f^{-1} : Y \to X \text{ và } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x). \qquad \textbf{(1.30)}$$

Có thể chứng minh được f^{-1} cũng là một song ánh.

<u>Ví dụ 1.24</u>: *Hàm mũ cơ số a :* $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

là một song ánh (vì hàm mũ đơn điệu chặt) có hàm ngược là hàm lôgarit cùng cơ số

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

<u>Ví dụ 1.25</u>: *Các hàm lượng giác ngược*

Xét hàm $$\begin{array}{l} \sin : [-\pi/2 ; \pi/2] \to [-1;1] \\ \qquad\qquad x \quad \mapsto \quad \sin x \end{array}$$

đơn điệu tăng chặt và toàn ánh nên nó là một song ánh. Hàm ngược được ký hiệu

$$\begin{array}{l} \arcsin : [-1;1] \to [-\pi/2 ; \pi/2] \\ \qquad\qquad y \;\mapsto\; \arcsin y \end{array}$$

$$x = \arcsin y \Leftrightarrow y = \sin x, \forall x \in [-1;1], y \in [-\pi/2 ; \pi/2].$$

Tương tự hàm $\cos : [0;\pi] \to [-1;1]$ đơn điệu giảm chặt có hàm ngược

$$\arccos : [-1;1] \to [0;\pi];$$

$$x = \arccos y \Leftrightarrow y = \cos x.$$

Hàm ngược arctg, $\mathrm{arccotg}$ được xác định như sau

$x = \operatorname{arctg} y \Leftrightarrow y = \operatorname{tg} x,\ \forall x \in (-\infty;\infty), y \in (-\pi/2;\pi/2)$.

$x = \operatorname{arccotg} y \Leftrightarrow y = \operatorname{cotg} x,\ \forall x \in (-\infty;\infty), y \in (0;\pi)$.

1.4.4 Hợp của hai ánh xạ

<u>Định nghĩa 1.14</u>: *Cho hai ánh xạ $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Tương ứng $x \mapsto g(f(x))$ xác định một ánh xạ từ X vào Z, gọi là hợp của hai ánh xạ f và g, ký hiệu $g \circ f$.* Vậy $g \circ f: X \to Z$ có công thức xác định ảnh

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \tag{1.31}$$

<u>Ví dụ 1.26</u>: *Cho $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với công thức xác định ảnh $f(x) = \sin x$ $g(x) = 2x^2 + 4$. Ta có thể thiết lập hai hàm hợp $g \circ f$ và $f \circ g$ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.*

$$f \circ g(x) = \sin(2x^2 + 4),\ g \circ f(x) = 2\sin^2 x + 4.$$

Qua ví dụ trên ta thấy nói chung $f \circ g \neq g \circ f$, nghĩa là phép hợp ánh xạ không có tính giao hoán.

Nếu $f: X \to Y$ là một song ánh có ánh xạ ngược $f^{-1}: Y \to X$, khi đó ta dễ dàng kiểm chứng rằng $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X$ và $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$. Hơn nữa ta có thể chứng minh được rằng ánh xạ $f: X \to Y$ là một song ánh khi và chỉ khi tồn tại ánh xạ $g: Y \to X$ sao cho $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ và $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, lúc đó $g = f^{-1}$.

1.4.5 Lực lượng của một tập hợp

Khái niệm lực lượng của tập hợp có thể xem như là sự mở rộng khái niệm số phần tử của tập hợp. Tập X có n phần tử nếu có thể liệt kê dạng $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Vậy X có n phần tử khi tồn tại song ánh từ tập $\{1, 2, ..., n\}$ lên X.

<u>Định nghĩa 1.15</u>: *Hai tập hợp X, Y được gọi là cùng lực lượng nếu tồn tại song ánh từ X lên Y.*

Tập cùng lực lượng với tập $\{1, 2, ..., n\}$ được gọi là có lực lượng n. Vậy X có lực lượng n khi và chỉ khi X có n phần tử. n còn được gọi là bản số của X, ký hiệu $\operatorname{Card} X$ hay $|X|$. Quy ước lực lượng của $\varnothing$ là 0.

<u>Định nghĩa 1.16</u>: *Tập có lực lượng n hoặc 0 được gọi là các tập hữu hạn. Tập không hữu hạn được gọi là tập vô hạn. Tập có cùng lực lượng với tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ hay hữu hạn được gọi là tập đếm được.*

Nhận xét 1.3:

1) Tập vô hạn đếm được là tập cùng lực lượng với $\mathbb{N}$.

2) Bản thân tập $\mathbb{N}$ là tập vô hạn đếm được.

3) Kết quả nổi tiếng nhất của Cantor về tập vô hạn là đã chỉ ra rằng tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là tập vô hạn đếm được, còn tập các số thực $\mathbb{R}$ không đếm được.

4) Tập vô hạn được đặc trưng bởi tính chất: Tập A vô hạn khi và chỉ khi tồn tại tập con $B \subset A$, $B \neq A$ cùng lực lượng với A.

5) Giả sử X, Y là hai tập hữu hạn cùng lực lượng. Khi đó ánh xạ $f : X \to Y$ là đơn ánh khi và chỉ khi là toàn ánh, do đó là một song ánh.

1.5 SƠ LƯỢC VỀ PHÉP ĐẾM, GIẢI TÍCH TỔ HỢP- NHỊ THỨC NEWTON

1.5.1 Sơ lược về phép đếm

Các kết quả sau được suy trực tiếp từ tính chất của tập hữu hạn và ánh xạ:

a) $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$, *(công thức cộng)* **(1.32)**

b) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, *(công thức nhân)* **(1.33)**

c) $|\{f : A \to B\}| = |B|^{|A|}$, *(chỉnh hợp có lặp)* **(1.34)**

d) $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$, **(1.35)**

e) Nếu $f : A \to B$ song ánh thì $|A| = |B|$. **(1.36)**

Công thức cộng (1.32) thường được sử dụng trong trường hợp đặc biệt khi A, B rời nhau (thỏa mãn $A \cap B = \varnothing$), lúc đó $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Công thức cộng (1.32) mở rộng cho trường hợp k tập đôi một rời nhau:

$$|A_1 \cup ... \cup A_k| = |A_1| + ... + |A_k| \quad \textbf{(1.37)}$$

Một nhóm các đối tượng được phân thành k nhóm rời nhau và có số các phần tử tương ứng là $n_1, ..., n_k$ thì tổng số các đối tượng cần tính là $n_1 + \cdots + n_k$

Công thức nhân (1.33) có thể mở rộng cho k tập bất kỳ

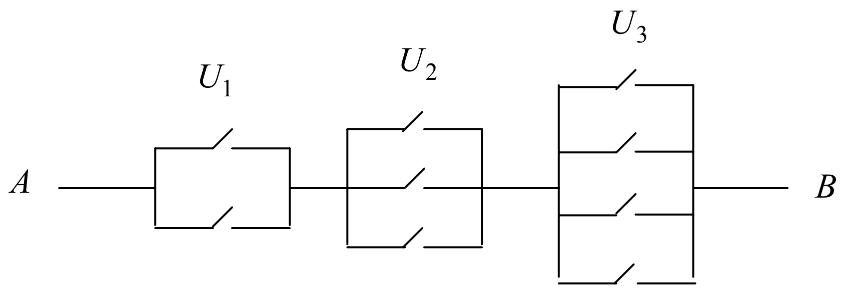
$$|A_1 \times ... \times A_k| = |A_1| \cdot ... \cdot |A_k| \quad \textbf{(1.38)}$$

Hoặc nếu một hành động H gồm k giai đoạn $A_1, ..., A_k$. Mỗi giai đoạn A_i có thể thực hiện theo n_i phương án thì cả thảy có $n_1 \times ... \times n_k$ phương án thực hiện H.

Ví dụ 1.27: Cho mạch điện theo sơ đồ dưới đây. Hỏi:

a) Có bao nhiêu trạng thái của mạch.

b) Có bao nhiêu trạng thái có thể của mạch để có dòng điện chạy từ A đến B



Giải: Áp dụng công thức nhân ta có:

a) Số các trạng thái của mạch $2^2.2^3.2^4 = 2^9 = 512$.

b) Ở U_1 có 2^2 trạng thái nhưng có 1 trạng thái dòng điện không qua được, do đó ở U_1 có 3 trạng thái dòng điện qua được. Tương tự ở U_2 có $2^3 - 1$ và ở U_3 có $2^4 - 1$ trạng thái dòng điện qua được. Vậy số các trạng thái của mạch có dòng điện chạy từ A đến B là $3 \times 7 \times 15 = 315$.

1.5.2 Hoán vị, phép thế

Định nghĩa 1.17: *Cho tập hữu hạn $E = \{x_1, x_2, ... x_n\}$. Mỗi song ánh từ E lên E được gọi là một phép thế, còn ảnh của song ánh này được gọi là một hoán vị n phần tử của E.*

Nếu ta xếp các phần tử của E theo một thứ tự nào đó thì mỗi hoán vị là một sự đổi chỗ các phần tử này.

Đặc biệt nếu $E = \{1, 2, ... n\}$ thì mỗi phép thế được ký hiệu bởi ma trận

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.39)}$$

trong đó hàng trên là các số từ 1 đến n sắp theo thứ tự tăng dần, hàng dưới là ảnh tương ứng của nó qua song ánh σ. Còn $[\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)]$ là hoán vị của phép thế σ.

Ví dụ 1.28: $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ là hoán vị từ phép thế $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ có:

$$\sigma(1) = 4,\ \sigma(2) = 2,\ \sigma(3) = 1,\ \sigma(4) = 3.$$

Tập hợp $\{1, 2\}$ có hai hoán vị là:

$$[1\ 2]\ và\ [2\ 1].$$

Tập hợp $\{1,2,3\}$ có sáu hoán vị là:

$$[1\ 2\ 3],\ [2\ 1\ 3],\ [3\ 1\ 2],\ [1\ 3\ 2],\ [2\ 3\ 1]\ và\ [3\ 2\ 1].$$

Với tập $E=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ thì có n cách chọn giá trị $\sigma(x_1)$, $n-1$ cách chọn giá trị $\sigma(x_2)$ .... cho một phép thế σ bất kỳ.

Vậy có $n(n-1)(n-2)...1=n!$ hoán vị (phép thế) của tập n phần tử.

1.5.3 Chỉnh hợp

Cho tập hợp hữu hạn có n phần tử $E=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ và tập hợp hữu hạn $B=\{1,2,...,p\}$.

Định nghĩa 1.18: *Một chỉnh hợp lặp chập p các phần tử của E là ảnh của một ánh xạ từ B vào E.*

Ta cũng có thể xem một chỉnh hợp lặp chập p như một bộ gồm p thành phần là các phần tử có thể trùng nhau của E. Nói cách khác, một chỉnh hợp lặp chập p là một phần tử của tích Descartes E^p.

Vậy số các chỉnh hợp lặp chập p của n vật là n^p (công thức 1.34).

Ví dụ 1.29: Cho n vật $E=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ và tiến hành bốc có hoàn lại p lần theo cách sau:

Bốc lần thứ nhất từ tập E được x_{i_1}, ta trả x_{i_1} lại cho E và bốc tiếp lần thứ hai...

Mỗi kết quả sau p lần bốc $(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_p})$ là một chỉnh hợp có lặp n chập p.

Định nghĩa 1.19: *Một chỉnh hợp (không lặp) chập p gồm n phần tử của $E\,(p\le n)$ là ảnh của một đơn ánh từ B vào E.*

Hai chỉnh hợp n chập p là khác nhau nếu:

- hoặc chúng có ít nhất một phần tử khác nhau,
- hoặc gồm p phần tử như nhau nhưng có thứ tự khác nhau.

Như vậy ta có thể xem mỗi chỉnh hợp là một bộ có p thành phần gồm các phần tử khác nhau của E hay có thể xem như một cách sắp xếp n phần tử của E vào p vị trí.

Có n cách chọn vào vị trí thứ nhất, $n-1$ cách chọn vào vị trí thứ hai, ... và $n-p+1$ cách chọn vào vị trí thứ p.

Vậy số các chỉnh hợp chập p của n phần tử là

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad \textbf{(1.40)}$$

1.5.4 Tổ hợp

Định nghĩa 1.20: *Một tổ hợp chập p của tập E có n phần tử là một cách lấy ra đồng thời p phần tử từ E. Như vậy ta có thể xem một tổ hợp chập p của n phần tử là một tập con p phần tử của tập có n phần tử E.*

Nếu ta hoán vị p phần tử của một tổ hợp thì ta có các chỉnh hợp khác nhau của cùng p phần tử này. Vậy ứng với một tổ hợp p phần tử có đúng $p!$ chỉnh hợp của p vật này. Ký hiệu C_n^p là số các tổ hợp n chập p thì

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \qquad \textbf{(1.41)}$$

Ví dụ 1.30: a) Có bao nhiêu cách bầu trực tiếp một lớp trưởng, một lớp phó và một bí thư chi đoàn mà không kiêm nhiệm của một lớp có 50 học sinh.

b) Có bao nhiêu cách bầu một ban chấp hành gồm một lớp trưởng, một lớp phó và một bí thư chi đoàn không kiêm nhiệm của một lớp có 50 học sinh.

Giải: a) Mỗi kết quả bầu trực tiếp là một chỉnh hợp chập 3 của 50 phần tử.

Vậy có $A_{50}^3 = 50 \times 49 \times 48 = 117.600$ cách bầu trực tiếp.

b) Mỗi kết quả bầu một ban chấp hành là một tổ hợp chập 3 của 50 phần tử.

Vậy có $C_{50}^3 = \dfrac{50!}{3!47!} = \dfrac{50 \times 49 \times 48}{6} = 19.600$ cách bầu ban chấp hành lớp.

Ví dụ 1.31: Có bao nhiêu số tự nhiên viết dưới dạng thập phân có n chữ số $(n \geq 3)$ trong đó có đúng hai chữ số 8.

Giải: Giả sử N là số tự nhiên có n chữ số mà chữ số thứ nhất bên trái khác chữ số 0 và có đúng hai chữ số 8.

♦ Trường hợp 1: Nếu chữ số thứ nhất bên trái là chữ số 8 thì có $n-1$ vị trí để đặt chữ số 8 thứ hai, có 9 cách chọn cho mỗi chữ số ở $n-2$ vị trí còn lại. Vậy có đúng $(n-1)9^{n-2}$ số N thuộc loại này.

♦ Trường hợp 2: Nếu chữ số thứ nhất bên trái không phải là chữ số 8 thì có C_{n-1}^2 vị trí để đặt 2 chữ số 8, có 8 cách chọn chữ số cho vị trí thứ nhất, có 9 cách chọn cho mỗi chữ số ở $n-3$ vị trí khác vị trí thứ nhất và hai vị trí đã chọn cho chữ số 8. Vậy có đúng $C_{n-1}^2 \cdot 8 \cdot 9^{n-3} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 8 \cdot 9^{n-3}$ số N thuộc loại này.

Sử dụng công thức cộng ta suy ra số các số tự nhiên cần tìm là:

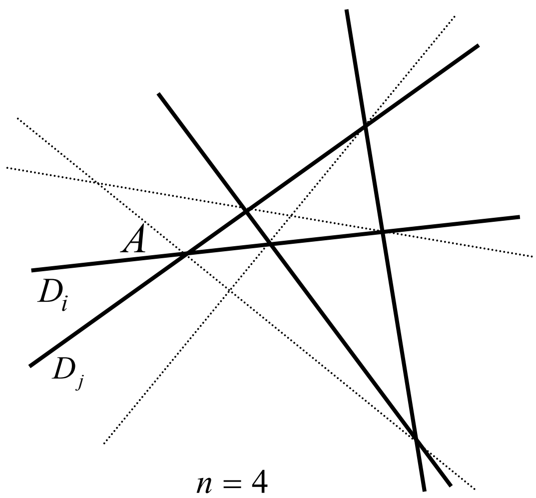
$$(n-1)9^{n-2} + 4(n-1)(n-2)9^{n-3} = (4n+1)(n-1)9^{n-3}.$$

<u>Ví dụ 1.32</u>: Trong mặt phẳng cho n đường thẳng đôi một cắt nhau và các giao điểm này khác nhau $(n \geq 4)$.

a) Tìm số các giao điểm của chúng.

b) Tìm số các đường thẳng mới được tạo bởi các giao điểm trên.

Giải:



a) Số các giao điểm của n đường thẳng bằng số các cặp của n đường thẳng này. Vậy có C_n^2 giao điểm.

b) Xét tại điểm A bất kỳ trong C_n^2 giao điểm của câu a). Tồn tại đúng hai đường trong n đường trên đi qua A là $D_i, D_j; i < j$.

Trên mỗi đường có đúng $n-1$ điểm trong số C_n^2 giao điểm của câu a).

Vậy trên D_i, D_j có $2(n-1)-1$ điểm, do đó có

$C_n^2 - (2(n-1)-1) = \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$ đường thẳng mới nối đến A.

Vì mỗi đường thẳng mới đều nối hai điểm ở câu a) nên số đường thẳng mới là:

$$\frac{1}{2}C_n^2\frac{(n-2)(n-3)}{2}=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

1.5.5 Nhị thức Newton

Xét đa thức bậc n: $(x+1)^n=\underbrace{(x+1)(x+1)...(x+1)}_{n \text{ thừa số}}$

Khai triển đa thức này ta được:

$$(x+1)^n=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+1$$

Hệ số của x^p bằng số cách chọn p thừa số trong n thừa số trên. Mỗi cách chọn là một tổ hợp chập p của n phần tử, do đó $a_p=C_n^p$.

Vậy $$(x+1)^n=C_n^nx^n+C_n^{n-1}x^{n-1}+...+C_n^px^p+...+C_n^0$$

Thay $x=a/b$ (nếu $b\neq 0$) ta có:

$$(a+b)^n=C_n^na^n+C_n^{n-1}a^{n-1}b+...+C_n^0b^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^pa^pb^{n-p} \qquad \textbf{(1.42)}$$

Công thức này được gọi là *nhị thức Newton*, đúng với mọi $a,b\in\mathbb{C}$ (kể cả trường hợp $b=0$).

<u>**Ví dụ 1.33**</u>: Cho tập con A có p phần tử của tập E có n phần tử $(p<n)$. Hãy đếm số các cặp (X,Y) các tập con của E thỏa mãn điều kiện :

$$X\cup Y=E,\ X\cap Y\supset A \qquad \textbf{(1.43)}$$

Giải: Ký hiệu $B=E\setminus A$.

Đặt $$\mathscr{A}=\{(X,Y)\mid X\cup Y=E,\ X\cap Y\supset A\}$$

$$\mathscr{B}=\{(X',Y')\mid X'\subset B, Y'\subset B;\ X'\cup Y'=B\}$$

Tương ứng $f:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$; $(X,Y)\mapsto(X\cap B, Y\cap B)$ là một song ánh.

Mặt khác $X'\subset B, Y'\subset B$: $X'\cup Y'=B\Leftrightarrow B\setminus X'\subset Y'$.

Vậy số các cặp (X,Y) thoả mãn điều kiện (1.43) cần tìm bằng bản số của tập

$$\{(X'',Y')\mid X''\subset B, Y'\subset B, X''\subset Y'\}.$$

Với mỗi tập $Y'\subset B$ có bản số y' thì bản số của tập $\{X''| X''\subset Y'\}$ là $2^{y'}$; Số các tập con $Y'\subset B$ có y' phần tử là $C_{n-p}^{y'}$. Áp dụng công thức cộng và nhị thức Newton suy ra bản số cần tìm là $\sum_{y'=0}^{n-p} 2^{y'} C_{n-p}^{y'} = 3^{n-p}$.

1.6 CÁC CẤU TRÚC ĐẠI SỐ

1.6.1 Luật hợp thành trong

Định nghĩa 1.21: *Một luật hợp thành trong của tập $X\neq\varnothing$ là ánh xạ từ $X\times X$ vào X.*

Ta thường ký hiệu
$$*: X\times X\to X$$
$$(x,y)\mapsto x*y$$

Luật hợp thành trong kết hợp hai phần tử x,y của X thành một phần tử $x*y$ của X vì vậy luật hợp thành trong còn được gọi là *phép toán hai ngôi.*

Ví dụ 1.34: Phép cộng và phép nhân là các luật hợp thành trong của các tập số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Ví dụ 1.35: Phép cộng véc tơ theo quy tắc hình bình hành là phép toán trong của tập R_3 các véc tơ tự do trong không gian, nhưng tích vô hướng không phải là phép toán trong vì $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})\notin R_3$.

Định nghĩa 1.22: *Luật hợp thành trong * của tập X được gọi là:*

1) Có tính kết hợp nếu $\forall x,y,z\in X: x*(y*z)=(x*y)*z$

2) Có tính giao hoán nếu $\forall x,y\in X: x*y=y*x$

3) Có phần tử trung hoà (hay có phần tử đơn vị) là $e\in X$ nếu
$$\forall x\in X: x*e=e*x=x$$

*4) Giả sử * có phần tử trung hoà $e\in X$. Phần tử $x'\in X$ được gọi là phần tử đối của $x\in X$ nếu $x*x'=x'*x=e$.*

Ta dễ dàng thấy rằng phần tử trung hoà có phần tử đối là chính nó.

Các phép hợp thành trong hai ví dụ trên đều có tính kết hợp và giao hoán. Số 0 là phần tử trung hoà đối với phép cộng và 1 là phần tử trung hoà đối với phép nhân trong. Véc tơ $\vec{0}$ là phần tử trung hoà của phép toán cộng véc tơ trong R_3.

Mọi phần tử x trong $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ đều có phần tử đối của phép + là $-x$. Phần tử đối của $x\neq 0$ ứng với phép nhân trong $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ là $1/x$.

Mọi phần tử khác 0 trong $\mathbb{N}$ không có phần tử đối đối với phép cộng, mọi phần tử khác 1 trong $\mathbb{Z}$ không có phần tử đối đối với phép nhân.

<u>Định lý 1.4</u>: *Giả sử $*$ là một luật hợp thành trong của tập $X \neq \varnothing$. Ta có các kết quả sau:*

1) Phần tử trung hoà nếu tồn tại là duy nhất.

*2) Nếu * có tính kết hợp, thì phần tử đối của mỗi phần tử là duy nhất.*

*3) Nếu * có tính kết hợp và phần tử a có phần tử đối thì có luật giản ước: $a * x = a * y \Rightarrow x = y$ và phương trình $a * x = b$ có duy nhất nghiệm $x = a' * b$ với a' là phần tử đối của a.*

Chứng minh:

1) Giả sử e và e' là hai phần tử trung hoà thì $e' = e' * e = e$ (dấu "=" thứ nhất có được do e là phần tử trung hoà, còn dấu "=" thứ hai là do e' là phần tử trung hoà).

2) Giả sử a có hai phần tử đối là a' và a'', khi đó:

$$a' = e * a' = (a'' * a) * a' = a'' * (a * a') = a'' * e = a''.$$

3) $a * x = a * y \Rightarrow a' * (a * x) = a' * (a * y) \Rightarrow (a' * a) * x = (a' * a) * y \Rightarrow x = y$. ■

Theo thói quen người ta thường ký hiệu các luật hợp thành trong có tính giao hoán bởi dấu "+", khi đó phần tử trung hoà được ký hiệu là **0** và phần tử đối của x là $-x$. Nếu ký hiệu luật hợp thành bởi dấu nhân "." thì phần tử trung hoà được ký hiệu **1** và gọi là phần tử đơn vị, phần tử đối của x ký hiệu x^{-1} và gọi là phần tử nghịch đảo của x.

1.6.2 Nhóm

<u>Định nghĩa 1.23</u>: *Giả sử G là tập khác trống với luật hợp thành *, cặp $(G,*)$ được gọi là một vị nhóm nếu thoả mãn hai điều kiện sau:*

G_1*: * có tính kết hợp.*

G_2*: * có phần tử trung hoà e.*

Vị nhóm $(G,*)$ là một nhóm nếu thoả mãn thêm điều kiện:

G_3*: Mọi phần tử của G đều có phần tử đối.*

Nhóm $(G,*)$ được gọi là nhóm giao hoán hay nhóm Abel nếu :

G_4*: * có tính giao hoán.*

<u>Ví dụ 1.36</u>: $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Z}^*,\bullet)$ là hai vị nhóm giao hoán. $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{Q}^*,\bullet)$, $(\mathbb{R}^*,\bullet)$, $(\mathbb{Q}_+^*,\bullet)$, $(\mathbb{R}_+^*,\bullet)$, $(\mathbb{C}^*,\bullet)$ *là các nhóm Abel.*

Nhận xét 1.4: 1) Một nhóm là tập khác rỗng G với luật hợp thành * thoả mãn G1, G2, G3, nhưng nếu * đã xác định và không sợ nhầm lẫn thì ta nói tắt nhóm G thay cho nhóm $(G,*)$.

2) Cho nhóm giao hoán $(G,+)$ và A,B là hai tập con của G, ta ký hiệu:

$$A+B=\left\{a+b \middle| a\in A, b\in B\right\};\;\; a+B=\left\{a+b \middle| b\in B\right\} \qquad \textbf{(1.44)}$$

Định nghĩa 1.24: *Đồng cấu nhóm từ nhóm $(G,*)$ vào nhóm $(G',\Box)$ là ánh xạ $f:G\to G'$ sao cho*

$$\forall x,y\in G: f(x*y)=f(x)\Box f(y). \qquad \textbf{(1.45)}$$

Nếu f đơn ánh (toàn ánh, song ánh) thì f được gọi là đơn cấu nhóm (toàn cấu, đẳng cấu, một cách tương ứng).

Ví dụ 1.37: $\log_a:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R};\ 0<a\neq 1$ là một đẳng cấu nhóm từ nhóm $(\mathbb{R}_+^*,\bullet)$ lên nhóm $(\mathbb{R},+)$.

Định nghĩa 1.25: *Tập con G' được gọi là nhóm con của nhóm $(G,*)$ nếu thỏa mãn 3 điều kiện sau:*

i) $\forall x,y\in G' \Rightarrow x*y\in G'$

ii) $e\in G'$

iii) $\forall x\in G' \Rightarrow x'\in G'$.

Định lý 1.6: *$(G,*)$ là một nhóm, $\varnothing\neq G'\subset G$. G' là một nhóm con của G khi và chỉ khi $\forall x,y\in G'\Rightarrow x*y'\in G'$.*

Ví dụ 1.38: $(\mathbb{Z},+)$ là nhóm con của $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$. $(\mathbb{C},+)$.

1.6.3 Vành

Định nghĩa 1.26: *Giả sử trên tập $A\neq\varnothing$ có hai luật hợp thành trong ký hiệu bởi dấu cộng và dấu nhân, khi đó $(A,+,\cdot)$ được gọi là một vành nếu:*

A_1*: $(A,+)$ là một nhóm Abel,*

A_2*: Luật nhân có tính kết hợp,*

A_3*: Luật nhân có tính phân phối hai phía đối với luật cộng, nghĩa là:*

$\forall x,y,z\in A:\ x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ *phân phối bên trái*

$\forall x,y,z\in A:\ (x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ *phân phối bên phải*

Nếu thoả mãn thêm điều kiện:

A_4*: Luật nhân có tính giao hoán thì* $(A,+,\cdot)$ *là vành giao hoán.*

A_5*: Luật nhân có phần tử đơn vị là* 1 *thì* $(A,+,\cdot)$ *là vành có đơn vị.*

Nhận xét 1.5:

1) Tồn tại vành giao hoán nhưng không có đơn vị và ngược lại.

2) Ta nói tắt vành A thay cho vành $(A,+,\cdot)$.

Định nghĩa 1.27:

1) Phần tử $x \neq \mathbf{0}$ *của* A *được gọi là ước trái của* $\mathbf{0}$ *nếu tồn tại* $y \in A, y \neq \mathbf{0}$ *sao cho* $x \cdot y = \mathbf{0}$ *(*$\mathbf{0}$ *là phần tử trung hoà của luật cộng của vành* $(A,+,\cdot)$*). Tương tự* $x \neq \mathbf{0}$ *của* A *được gọi là ước phải của* $\mathbf{0}$ *nếu tồn tại* $y \in A, y \neq \mathbf{0}$ *sao cho* $y \cdot x = \mathbf{0}$.

x *được gọi là ước của* $\mathbf{0}$ *nếu* x *là ước trái hoặc ước phải của* $\mathbf{0}$.

2) Vành giao hoán không có ước của $\mathbf{0}$ *được gọi là vành nguyên.*

Vậy vành $(A,+,\cdot)$ là vành nguyên khi và chỉ khi mọi $x, y \in A$ sao cho $x \cdot y = \mathbf{0}$ thì $x = \mathbf{0}$ hoặc $y = \mathbf{0}$.

Ví dụ 1.39:

1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ là một vành nguyên.

2) Ký hiệu $C_{[a;b]}$ là tập hợp các hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Ta định nghĩa phép cộng và phép nhân trong $C_{[a;b]}$ xác định như sau:

$$\forall f, g \in C_{[a;b]} : (f+g)(x) = f(x) + g(x);$$

$$fg(x) = f(x)g(x).$$

Ta có thể kiểm chứng được rằng với hai phép toán này thì $C_{[a;b]}$ là một vành giao hoán có đơn vị và có ước của $\mathbf{0}$.

3) $\left(K[x],+,\cdot\right)$ là một vành nguyên, trong đó $K[x]$ là tập các đa thức của biến x có hệ số thuộc vào vành số $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Ví dụ 1.40: *Tập* $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\operatorname{mod} n$ *các số đồng dư môđulô* n.

Ta có thể chứng minh được rằng: $\begin{cases} x \equiv x' (\operatorname{mod} n) \\ y \equiv y' (\operatorname{mod} n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \equiv x' + y' (\operatorname{mod} n) \\ xy \equiv x'y' (\operatorname{mod} n) \end{cases}$

Vì vậy ta có thể định nghĩa phép cộng và phép nhân trong $\mathbb{Z}_n$ bởi:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y} \quad \text{và} \quad \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y} \qquad \textbf{(1.46)}$$

Chẳng hạn $5(\bmod 7)+4(\bmod 7)=2(\bmod 7)$

$5(\bmod 7)\cdot 4(\bmod 7)=-1(\bmod 7)=6(\bmod 7)$.

Với hai phép toán này $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ là một vành giao hoán có đơn vị.

Định nghĩa 1.28: *Đồng cấu vành từ vành $(A,+,\cdot)$ vào vành $(A',+,\cdot)$ là ánh xạ $f: A\to A'$ thỏa mãn 3 điều kiện sau:*

i) $\forall x,y\in A: f(x+y)=f(x)+f(y)$

ii) $\forall x,y\in A: f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$ **(1.47)**

Trường hợp A, A' là hai vành có đơn vị $\mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{A'}$ thì thêm điều kiện

iii) $f(1_A)=1_{A'}$.

Khi f đơn ánh (toàn ánh, song ánh) thì f được gọi là đơn cấu vành (toàn cấu, đẳng cấu, một cách tương ứng).

1.6.4 Trường

Định nghĩa 1.29: *Vành giao hoán có đơn vị $(K,+,\cdot)$ được gọi là một trường nếu mọi phần tử $x\neq \mathbf{0}$ của K đều khả nghịch (có phần tử đối của luật nhân). Nghĩa là:*

K_1: $(K,+,\cdot)$ *là nhóm Abel,*

K_2: $(K^*,\cdot)$ *là nhóm Abel,* $K^*=K\setminus\{\mathbf{0}\}$,

K_3: *Luật nhân phân phối đối với luật cộng.*

Rõ ràng rằng mọi trường là vành nguyên, nhưng điều ngược lại không đúng.

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ là một ví dụ về vành nguyên có đơn vị nhưng không phải là trường.

Ví dụ 1.41: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ *là trường.*

Vì vậy ta có các trường số hữu tỉ, trường số thực, trường số phức và vành số nguyên.

Ví dụ 1.42: $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ *là trường khi và chỉ khi n là số nguyên tố.*

Giải: Giả sử n là số nguyên tố và $\overline{m}\in\mathbb{Z}_n$, $\overline{m}\neq\overline{0}(\bmod n)$ thì $(m,n)=1$ do đó tồn tại hai số nguyên u,v sao cho $um+vn=1$ (Định lý Bezout) $\Rightarrow \overline{u}\cdot\overline{m}=\overline{1}(\bmod n)$. Vậy $\overline{u}$ là phần tử nghịch đảo của $\overline{m}$.

Ngược lại, nếu $\mathbb{Z}_n$ là trường thì với mọi $m\in\mathbb{Z}$ ($0<m<n$) tồn tại $m'\in\mathbb{Z}$ sao cho $\overline{m}\cdot\overline{m'}=\overline{1}$ $\Rightarrow$ $mm'=1+kn$ $\Rightarrow (m,n)=1$.

Vậy n là số nguyên tố.

1.7 ĐẠI SỐ BOOLE

Lý thuyết đại số Boole được George Boole (1815 - 1864) giới thiệu vào năm 1854 trong bài báo " Các quy luật của tư duy", trong đó kỹ thuật đại số được dùng để phân tích các quy luật của lôgích và các phương pháp suy diễn. Sau đó đại số Boole được áp dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học như đại số, giải tích, tô pô, lý thuyết xác suất... Vào khoảng năm 1938, Claude Shannon (Clau Sê-nôn) (một kỹ sư viễn thông người Mỹ) là người đầu tiên đã áp dụng đại số Boole vào lĩnh vực máy tính điện tử và lý thuyết mạng.

1.7.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản của đại số Boole

<u>Định nghĩa 1.30</u>: *Một đại số Boole* $(B,\vee,\wedge,')$ *là một tập khác trống* B *với hai phép toán hai ngôi* $\vee,\wedge: B\times B\to B$ *và phép toán một ngôi* $': B\to B$ *thoả mãn các tiên đề sau:*

- B$_1$: $\vee,\wedge$ *có tính kết hợp, nghĩa là với mọi* $a,b,c\in B$

$$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c,\ a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c \qquad \textbf{(1.48)}$$

- B$_2$: $\vee,\wedge$ *có tính giao hoán, nghĩa là với mọi* $a,b\in B$

$$a\vee b=b\vee a,\ a\wedge b=b\wedge a \qquad \textbf{(1.49)}$$

- B$_3$: *Tồn tại các phần tử không và phần tử đơn vị* $\mathbf{0},\mathbf{1}\in B$; $\mathbf{0}\neq\mathbf{1}$ *sao cho với mọi* $a\in B$

$$a\vee\mathbf{0}=a,\ a\wedge\mathbf{1}=a \qquad \textbf{(1.50)}$$

- B$_4$: *Với mọi* $a\in B$ *tồn tại* $a'\in B$ *là phần tử đối của* a *theo nghĩa:*

$$a\vee a'=\mathbf{1},\ a\wedge a'=\mathbf{0} \qquad \textbf{(1.51)}$$

- B$_5$: *Luật* $\vee$ *phân phối đối với luật* $\wedge$ *và luật* $\wedge$ *phân phối đối với luật* $\vee$, *nghĩa là với mọi* $a,b,c\in B$

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c),\ a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c). \qquad \textbf{(1.52)}$$

<u>Ví dụ 1.43</u>: Giả sử $X\neq\varnothing$, xét $\mathscr{P}(X)$ là tập các tập con của X. Các luật hợp thành $\vee,\wedge$ là phép hợp, phép giao các tập con của X và phép toán một ngôi ' là phép lấy phần bù của tập con trong X. Khi đó $(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,')$ là đại số Boole với phần tử không là $\varnothing$ và phần tử đơn vị là chính tập X.

<u>Ví dụ 1.44</u>: Xét $B_2=\{\mathbf{0};\mathbf{1}\}$ tập gồm hai phần tử $\mathbf{0}$ và $\mathbf{1}$. Ta định nghĩa:

$$a \vee b = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{nếu ít nhất một trong hai phần tử } a,b \text{ là } \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

$$a \wedge b = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{nếu cả hai phần tử } a,b \text{ là } \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{nếu ngược lại} \end{cases}, \quad a' = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{nếu } a = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{nếu } a = \mathbf{1} \end{cases}$$

thì $(B_2, \vee, \wedge, ')$ là một đại số Boole.

__Ví dụ 1.45__: Xét $B_4 = \{\mathbf{0}; \mathbf{1}; a; b\}$, ta định nghĩa các phép toán

$\vee$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	a	b
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	a	b
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
a	a	$\mathbf{1}$	a	$\mathbf{1}$
b	b	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	b

$\wedge$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	a	b
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	a	b
a	$\mathbf{0}$	a	a	$\mathbf{0}$
b	$\mathbf{0}$	b	$\mathbf{0}$	b

	$'$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
a	b
b	a

thì $(B_4, \vee, \wedge, ')$ là đại số Boole.

__Ví dụ 1.46__: Cho m là số tự nhiên lớn hơn 1, ký hiệu $D(m)$ là tập các số tự nhiên là ước số của m. Chẳng hạn $D(12) = \{1,2,3,4,6,12\}$, $D(42) = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}$.

Ta định nghĩa các phép toán $\vee, \wedge, '$ trong $D(m)$ như sau:

$$a \vee b = \text{bội chung nhỏ nhất của } a,b$$

$$a \wedge b = \text{ước chung lớn nhất của } a,b \ ; \quad a' = \frac{m}{a}.$$

Có thể kiểm chứng được rằng các phép toán vừa định nghĩa thỏa mãn các điều kiện B_1, B_2, B_5 và B_3 với số 1 đóng vai trò là phần tử $\mathbf{0}$ và số m đóng vai trò là phần tử $\mathbf{1}$. Tuy nhiên điều kiện B_4 nói chung không đúng. Chẳng hạn với $m = 12$ thì $6' = 2$ và $2 \vee 6 = 6 \neq 12$.

Người ta chứng minh được rằng $(D(m), \vee, \wedge, ')$ là một đại số Boole khi m bằng tích các số nguyên tố phân biệt, ví dụ $m = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $m = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ …. Tuy nhiên $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ không thỏa mãn.

1.7.2 Công thức Boole, hàm Boole và nguyên lý đối ngẫu

__Định nghĩa 1.31__: Một biểu thức chứa các biến được liên kết bởi một số hữu hạn lần các phép toán $\vee, \wedge, '$ và hai phần tử $\mathbf{0}; \mathbf{1}$ của đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ được gọi là một *công thức Boole.*

__Ví dụ 1.47__: $(x \vee y') \wedge \mathbf{1}$ và $(x' \wedge y) \vee z$ là hai công thức Boole.

Mỗi công thức Boole của đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ xác định một hàm nhận giá trị thuộc B vì khi thay các biến có mặt trong công thức bởi các phần tử của B thì nhận được giá trị là phần tử của B. Mỗi hàm xác định bởi công thức Boole được gọi là *Hàm Boole*.

Hai công thức Boole xác định cùng một hàm Boole được gọi là hai công thức tương đương. Chẳng hạn $x \wedge (y \vee z)$ và $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ là hai công thức tương đương, ta kí hiệu $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Định nghĩa 1.32: Hai công thức Boole trong đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ được gọi là *đối ngẫu* nếu trong một công thức ta thay $\vee$, $\wedge$, $\mathbf{0};\mathbf{1}$ lần lượt bằng $\wedge$, $\vee$, $\mathbf{1},\mathbf{0}$ thì ta được công thức hai.

Ví dụ 1.48: Hai công thức $x \wedge (y \vee \mathbf{1})$ và $x \vee (y \wedge \mathbf{0})$ là đối ngẫu.

Trong mỗi tiên đề của hệ tiên đề B_1-B_5 của đại số Boole đều chứa từng cặp công thức đối ngẫu nhau, vì vậy ta có nguyên lý đối ngẫu sau:

Nguyên lý đối ngẫu: *Nếu hai công thức của đại số Boole được chứng minh là tương đương dựa trên cơ sở hệ tiên đề* B_1-B_5 *thì hai công thức đối ngẫu của chúng cũng tương đương.*

Chẳng hạn, ta sẽ chứng minh $a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$, do đó theo nguyên lý đối ngẫu ta cũng có $a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Tính chất 1.7: Giả sử $(B, \vee, \wedge, ')$ là đại số Boole với phần tử không và đơn vị là $\mathbf{0};\mathbf{1}$. Khi đó với mọi $a, b \in B$ ta có:

1) $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$;

2) $\mathbf{0}' = \mathbf{1}$, $\mathbf{1}' = \mathbf{0}$;

3) $a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$;

4) $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$; *(tính hấp thu)*

5) Nếu tồn tại $c \in B$ sao cho $a \vee c = b \vee c$ và $a \wedge c = b \wedge c$ thì $a = b$;

6) Nếu $a \vee b = \mathbf{1}$ và $a \wedge b = 0$ thì $b = a'$; *(tính duy nhất của phần bù)*

7) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ và $(a \wedge b)' = a' \vee b'$. *(công thức De Morgan)*

Chứng minh:

Theo nguyên lý đối ngẫu ta chỉ cần chứng minh các đẳng thức thứ nhất từ 1)-7).

1) $a = a \vee \mathbf{0}$ theo B_3

$= a \vee (a \wedge a')$ theo B_4

$= (a \vee a) \wedge (a \vee a')$ theo B_5

$= (a \vee a) \wedge \mathbf{1}$ theo B_4

$= a \vee a$ theo B_3

2) $\mathbf{0}' = \mathbf{0}' \vee \mathbf{0}$ theo B_3

$= \mathbf{1}$ theo B_2, B_4

3) $a \vee 1 = a \vee (a \vee a')$ theo B_4

$= (a \vee a) \vee a'$ theo B_1

$= a \vee a'$ theo 1)

$= \mathbf{1}$ theo B_4

4) $a \vee (a \wedge b) = (a \wedge \mathbf{1}) \vee (a \wedge b)$ theo B_3

$= a \wedge (\mathbf{1} \vee b)$ theo B_5

$= a \wedge \mathbf{1}$ theo 1)

$= a$ theo B_3

5) $a = a \vee (a \wedge c)$ theo 4)

$= a \vee (b \wedge c)$ vì $a \wedge c = b \wedge c$

$= (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ theo B_5

$= (a \vee b) \wedge (b \vee c)$ vì $a \vee c = b \vee c$

$= b \vee (a \wedge c)$ theo B_5

$= b \vee (b \wedge c)$ vì $a \wedge c = b \wedge c$

$= b$ theo 4)

6) Vì $a \vee b = \mathbf{1} = a \vee a'$ và $a \wedge b = \mathbf{0} = a \wedge a'$, theo 5) suy ra $b = a'$.

7) Ta dễ dàng kiểm chứng $(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = \mathbf{1}$ và $(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = \mathbf{0}$, áp dụng 6) suy ra điều phải chứng minh.

Áp dụng các tính chất này cùng với hệ tiên đề B_1-B_5 ta có thể đơn giản hoá các công thức Boole bất kỳ.

Ví dụ 1.49: Rút gọn công thức Boole $(x \wedge y) \vee (x \wedge y') \vee (x' \vee y)$.

Giải: Ta có $(x \wedge y) \vee (x \wedge y') = x \wedge (y \vee y') = x \wedge \mathbf{1} = x$.

$\Rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge y') \vee (x' \vee y) = x \vee (x' \vee y) = (x \vee x') \vee y = \mathbf{1} \vee y = \mathbf{1}$.

Ví dụ 1.50: Rút gọn công thức Boole $(x \wedge y') \vee \left[x \wedge (y \wedge z)'\right] \vee z$.

Giải: Ta có $(x \wedge y') \vee \left[x \wedge (y \wedge z)'\right] \vee z = (x \wedge y') \vee \left[(x \wedge y') \vee (x \wedge z')\right] \vee z$

$= (x \wedge y') \vee (x \wedge z') \vee z = (x \wedge y') \vee \left[(x \vee z) \wedge (z' \vee z)\right]$

$$=(x\wedge y')\vee\left[(x\vee z)\wedge \mathbf{1}\right]=(x\wedge y')\vee(x\vee z)=\left[(x\wedge y')\vee x\right]\vee z=x\vee z.$$

Ví dụ 1.51: Rút gọn công thức $(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z)$.

Giải: Ta có $(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z)$

$$=\left[(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\right]\vee\left[(x\wedge y\wedge z)\vee(x'\wedge y\wedge z)\right]$$

$$=\left[(x\wedge y)\wedge(z\vee z')\right]\vee\left[(y\wedge z)\wedge(x\vee x')\right]$$

$$=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)=y\wedge(x\vee z).$$

1.7.3 Phương pháp xây dựng hàm Boole thỏa mãn giá trị cho trước

Một vài trường hợp khi ứng dụng đại số Boole để giải quyết vấn đề thực tế sẽ dẫn đến bài toán cần tìm các hàm Boole theo các biến nào đó thỏa mãn các điều kiện cho trước (mục 7.4.2). Trong tiết này chúng ta chỉ ra hai phương pháp xây dựng các hàm như thế. Phương pháp thứ nhất biểu diễn hàm cần tìm dạng “tổng ($\vee$) các tích ($\wedge$)”. Sử dụng nguyên lý đối ngẫu ta có phương pháp thứ hai dạng “tích các tổng”.

Để xây dựng hàm cần tìm dạng “tổng các tích” ta thực hiện các bước sau:

1. Lập bảng các giá trị các biến $x_i\in B_2$ có mặt trong công thức và giá trị tương ứng của hàm F của các biến này (tương tự bảng chân trị trong mục 1.2).
2. Chỉ xét các hàng của bảng trên mà hàm F nhận giá trị 1. Trong mỗi hàng này ta lập biểu thức là $\wedge$ của các biến:
   - x_i nếu x_i nhận giá trị 1
   - x'_i nếu x_i nhận giá trị 0.
3. Hàm F cần tìm có được bằng cách lấy $\vee$ của các biểu thức theo hàng.

Ví dụ 1.52: Tìm hàm của hai biến $F(x,y)$ nhận giá trị 1 khi x,y đồng thời nhận giá trị 1 hoặc 0.

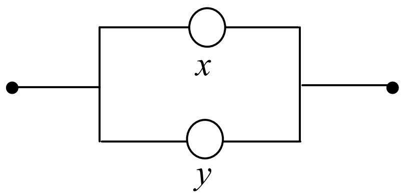
Lập bảng các giá trị của hàm và biến:

x	y	$F(x,y)$	Biểu thức theo hàng
1	1	1	$x\wedge y$
1	0	0	
0	1	0	
0	0	1	$x'\wedge y'$

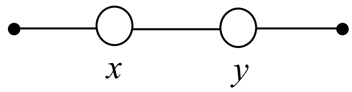
Vậy hàm cần tìm là $F(x,y)=(x\wedge y)\vee(x'\wedge y')$.

1.7.4 Ứng dụng đại số Boole vào mạng chuyển mạch *(switching networks)*

Ta chỉ xét các mạng gồm các chuyển mạch có hai trạng thái đóng (dòng điện đi qua được) và mở (dòng điện không qua được). Hai mạng đơn giản nhất là mạng song song cơ bản (basic parallel network) và mạng nối tiếp cơ bản (basic series network) được mô tả trong hình vẽ sau:



mạng song song cơ bản (hình 1)

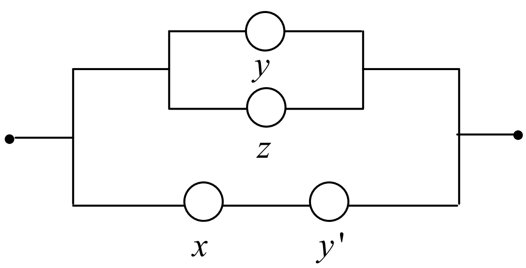


mạng nối tiếp cơ bản (hình 2)

Một mạng bất kỳ có thể nhận được bằng cách ghép nối tiếp hay song song các mạng cơ bản này.

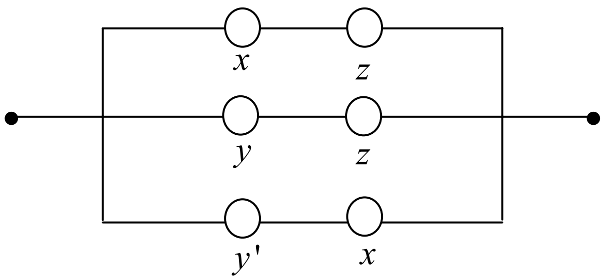
Ta ký hiệu các chuyển mạch bởi các chữ $x,y,z,...$. Nếu x ở trạng thái mở ta x cho nhận giá trị 0 và ở trạng thái đóng ta cho x nhận giá trị 1. Trong một mạng nếu hai chuyển mạch luôn cùng trạng thái thì ta ký hiệu cùng một chữ. Hai chuyển mạch có trạng thái luôn ngược nhau, nếu một chuyển mạch được ký hiệu là x thì chuyển mạch kia được ký hiệu là x'.

Mạng song song (hình 1) nhận giá trị 1 khi có ít nhất một trong hai chuyển mạch x,y nhận giá trị 1, ta ký hiệu $x\vee y$. Còn mạng nối tiếp (hình 2) nhận giá trị 1 khi cả hai chuyển mạch x,y nhận giá trị 1, ta ký hiệu $x\wedge y$. Như vậy $x',x\vee y,x\wedge y$ có thể được xem như các biến nhận giá trị trong đại số Boole B2 (ví dụ 1.37). Bằng phương pháp này ta có thể mô tả một mạng bất kỳ bởi một công thức Boole và ngược lại. Chẳng hạn mạng sau đây:



tương ứng với công thức $(y\vee z)\vee(x\wedge y')$.

Còn công thức Boole $(x\wedge z)\vee(y\wedge z)\vee(y'\wedge x)$ mô tả mạng:



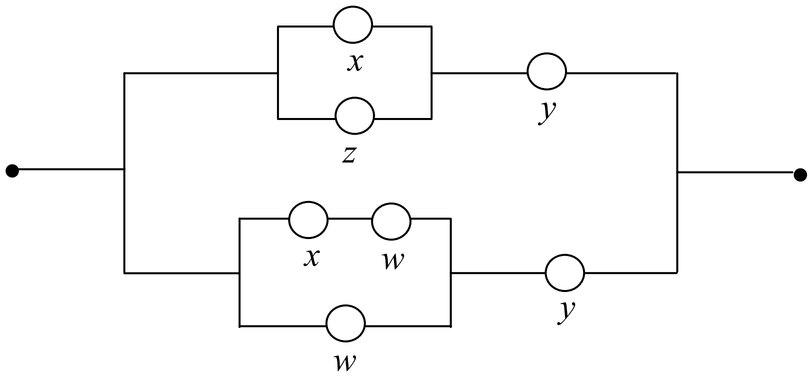
Chú ý rằng trong các công thức cần xét ta thay $(x \vee y)'$ bởi $x' \wedge y'$ và $(x \wedge y)'$ bởi $x' \vee y'$.

Hai mạng N1 và N2 được gọi là tương đương nếu nó thực hiện cùng một chức năng, nghĩa là với bất kỳ cách chọn các trạng thái đóng mở ở mọi vị trí chuyển mạch trong mạng thì trạng thái đầu vào và đầu ra của N1 và N2 đều như nhau. Như vậy hai mạng tương đương khi hai công thức Boole tương ứng của chúng là tương đương.

Ta có thể áp dụng đại số Boole để giải quyết hai vấn đề sau:

1.7.4.1 Với một mạng cho trước tìm mạng tương đương đơn giản hơn

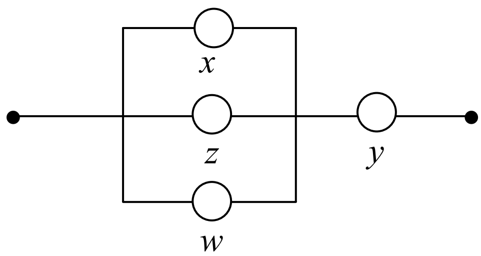
Ví dụ 1.53: Tìm mạng tương đương đơn giản hơn của mạng sau



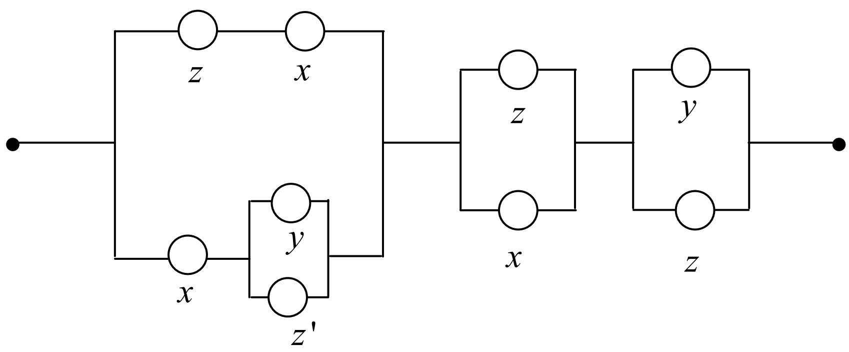
Công thức Boole tương ứng: $\left[(x \vee z) \wedge y\right] \vee \left[\left((x \wedge w) \vee w\right) \wedge y\right]$.

Ta có $(x \wedge w) \vee w = w$ (luật hấp thu), do đó công thức trên có thể biến đổi thành $\left[(x \vee z) \wedge y\right] \vee \left[w \wedge y\right] = (x \vee z \vee w) \wedge y$.

Vậy ta có mạng tương đương đơn giản hơn



Ví dụ 1.54: Tìm mạng tương đương đơn giản hơn của mạng sau:



Công thức Boole tương ứng: $\left[(z \wedge x) \vee \left(x \wedge (y \vee z')\right)\right] \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee y)$.

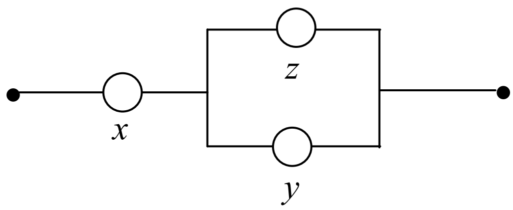
Ta có $\left[(z \wedge x) \vee \left(x \wedge (y \vee z')\right)\right] \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee y)$

$= \left[(z \wedge x) \vee \left((x \wedge y) \vee (x \wedge z')\right)\right] \wedge \left[z \vee (x \wedge y)\right]$

$= \left[\left(x \wedge (z \wedge z')\right) \vee (x \wedge y)\right] \wedge \left[z \vee (x \wedge y)\right]$

$= x \wedge \left[z \vee (x \wedge y)\right] = (x \wedge z) \vee \left[x \wedge (x \wedge y)\right] = (x \wedge z) \vee (x \wedge y) = x \wedge (z \vee y)$

Vậy ta có mạng tương đương đơn giản hơn

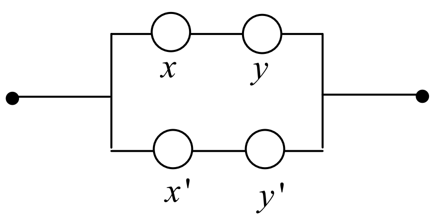


1.7.4.2 Thiết kế một mạng thoả mãn các điều kiện cho trước

Ví dụ 1.55: Thiết kế một mạng điện cho một bóng đèn ở cầu thang mà có thể bật tắt ở cả hai đầu cầu thang.

Giải: Gọi x và y là hai công tắc ở hai đầu cầu thang. Theo yêu cầu đặt ra ta cần thiết kế một mạng điện sao cho khi thay đổi trạng thái của một trong hai vị trí x, y thì trạng thái của đầu ra (bóng đèn) phải thay đổi. Bảng giá trị của hàm cho trong ví dụ 1.52 thỏa mãn đòi hỏi này.

Vậy mạng cần tìm là



BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1) Hai tập hợp A và B trong các trường hợp sau đây có bằng nhau hay là tập hợp con của nhau?

a) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2+2x>1\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x>\sqrt{2}-1\right\}$.

b) A là tập mọi số thực ≥ 0, B là tập mọi số thực $\geq$ trị tuyệt đối của chính nó.

c) A là tập mọi số nguyên không âm có luỹ thừa bậc 3 là một số lẻ không chia hết cho 3, B là tập các số nguyên không âm có bình phương trừ 1 chia hết cho 24.

1.2) A,B,C,D là tập con của E. Chứng minh rằng:

a) $A\setminus B=\varnothing$ khi và chỉ khi $A\subset B$.

b) Nếu $A\subset B, C\subset D$ thì $A\cup C\subset B\cup D$, $A\cap C\subset B\cap D$.

c) Nếu $A\cup C\subset A\cup B$, $A\cap C\subset A\cap B$ thì $C\subset B$.

1.3) Cho A,B là hai tập con của E, Chứng minh rằng:

a) $A\subset B\Leftrightarrow \overline{B}\subset\overline{A}$.

b) $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow \overline{A}\cup B=E$.

c) $A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow \overline{B}\cap A=\varnothing$.

d) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$.

e) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

f) $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$.

1.4) A,B,C,D là tập con của E. Chứng minh rằng:

a) $A\cap B\neq\varnothing\Leftrightarrow(A\times B)\cap(B\times A)\neq\varnothing$.

b) $(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$.

1.5) Trong $\mathbb{R}$, xét quan hệ $\mathscr{R}$ xác định bởi:

$$a\mathscr{R}b\Leftrightarrow a^3-b^3=a-b$$

Chứng minh $\mathscr{R}$ là một quan hệ tương đương. Tìm lớp tương đương $\overline{a}$ của a.

1.6) Trong tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$, các quan hệ sau có phải là quan hệ tương đương không?

a) $a\mathscr{R}b\Leftrightarrow a$ chia hết cho b.

b) $a\mathscr{R}b\Leftrightarrow a$ không nguyên tố với b.

1.7) Trong $\mathbb{R}$, xét quan hệ $\mathscr{R}$ xác định bởi:

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow (a^3+2)(b^2+1) = (b^3+2)(a^2+1)$$

Chứng minh $\mathscr{R}$ là một quan hệ tương đương. Xác định số phần tử của lớp tương đương $\overline{a}$ của a.

1.8) Trong tập các đường thẳng trong không gian, quan hệ vuông góc có phải là quan hệ tương đương không?

1.9) Trong $\mathbb{R}^2$ xét quan hệ $(x,y) \le (x',y') \Leftrightarrow x \le x',\ y \le y'$. Chứng minh $\le$ là một quan hệ thứ tự. Quan hệ này có phải là quan hệ thứ tự toàn phần không?

1.10) Ta sắp xếp thứ hạng học sinh bằng cách dựa vào kiểm tra hai môn học mà kết quả được đánh giá bằng điểm, điểm môn thứ nhất ký hiệu là x, điểm môn thứ hai ký hiệu là y. Học sinh có điểm (x_1,y_1) kém hơn học sinh có điểm (x_2,y_2), ký hiệu $(x_1,y_1) \le (x_2,y_2)$ xác định như sau:

$$(x_1,y_1) \le (x_2,y_2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 \le y_2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Giả sử điểm của môn thứ hai của các học sinh là khác nhau, chứng minh quan hệ $\le$ là quan hệ thứ tự toàn phần (được gọi là sắp thứ tự từ điển).

1.11) a) Cho tập được sắp $(E,\le)$ và hai tập con $A \subset B \subset E$. Chứng minh rằng nếu tồn tại $\sup A$, $\sup B$ thì $\sup A \le \sup B$.

b) Tìm ba ví dụ về tập được sắp $(E,\le)$ thoả mãn:

1) Tồn tại $\sup A$ nhưng không tồn tại $\sup B$.

2) Tồn tại $\sup B$ nhưng không tồn tại $\sup A$.

3) Tồn tại $\sup A \notin A$ nhưng tồn tại $\max B$.

1.12) Các ánh xạ $f: X \to Y$ sau đây là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Xác định ánh xạ ngược nếu tồn tại.

a) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+5$.

b) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$.

c) $X = [1;3]$, $Y = [-1;3]$, $f(x) = x^2 - 2x$.

d) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2|x|$.

e) $X = Y = \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + bx + c;\ b, c \in \mathbb{R}$.

1.13) Cho $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$f(x) = 1/x, g(x) = 3x/(x^2+1)$

a) Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh. Tìm $\operatorname{Im} f, \operatorname{Im} g$.

b) Xác định ánh xạ tích $g \circ f$. Có đẳng thức $g \circ f = g$ không ?

1.14) Cho hai ánh xạ $f, g :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi:

$$f(n) = 2n,\ \ g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ (n-1)/2 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

a) Xác định tính chất đơn ánh, toàn ánh của f, g.

b) Xác định $f \circ g,\ g \circ f$.

1.15) Cho ánh xạ $f : X \to Y$ cho $A, B \subset X$ và $C, D \subset Y$. Chứng minh rằng:

a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

Tìm ví dụ chứng tỏ $f(A) \subset f(B)$ nhưng $A \not\subset B$.

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Tìm ví dụ chứng tỏ $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

e) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

f) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Nếu f đơn ánh thì

g) $f(A) \subset f(B) \Rightarrow A \subset B$.

h) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

1.16) Ký hiệu $h = g \circ f$ là hợp của hai ánh xạ $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$.

Chứng minh:

a) f, g đơn ánh thì h đơn ánh.

b) f, g toàn ánh thì h toàn ánh.

c) h toàn ánh thì g toàn ánh.

d) h đơn ánh thì f đơn ánh.

e) h đơn ánh và f toàn ánh thì g đơn ánh.

f) h toàn ánh và g đơn ánh thì f toàn ánh.

1.17) Với mỗi bốn số nguyên $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ sao cho $ad - bc = 1$.

Ta xét ánh xạ $f:\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ xác định bởi $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$.

Gọi $\mathscr{F}$ là tập hợp các ánh xạ như trên. Chứng minh:

a) Với mọi $f \in \mathscr{F}$ thì f là song ánh và $f^{-1} \in \mathscr{F}$

b) Nếu $f, g \in \mathscr{F}$ thì $f \circ g \in \mathscr{F}$. Nói cách khác tập $\mathscr{F}$ với luật hợp thành là hợp hai ánh xạ là một nhóm không giao hoán.

1.18*) Cho ba tập hợp khác trống E, F, G.

a) Cho hai ánh xạ $f: E \to F$ và $g: E \to G$.

Chứng minh rằng tồn tại ánh xạ $h: F \to G$ sao cho $h \circ f = g$ khi và chỉ khi với mọi $x, x' \in E: f(x) = f(x') \Rightarrow g(x) = g(x')$.

b) Cho hai ánh xạ $g: E \to G$ và $h: F \to G$.

Chứng minh rằng tồn tại ánh xạ $f: E \to F$ sao cho $h \circ f = g$ khi và chỉ khi với mọi $x \in E, \exists y \in F: g(x) = h(y)$.

1.19) Cho X có n phần tử . Chứng minh $\mathscr{P}(X)$ có 2^n phần tử.

1.20) Cho hai phép thế của tập $\{1,2,3,4\}$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tìm $\sigma \circ \mu, \mu \circ \sigma, \sigma^{-1}, \mu^{-1}$.

1.21) Cho n điểm khác nhau trong mặt phẳng:

a) Tính số các đoạn thẳng nối từng cặp điểm khác nhau.

b) Tính số các vectơ $\neq \vec{0}$ có các điểm đầu, điểm cuối từ n điểm này.

1.22) Tìm số hạng lớn nhất trong khai triển của nhị thức $(37+19)^{31}$.

1.23*) Với hai số tự nhiên $n, p \in \mathbb{N}$, ký hiệu $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

a) Chứng minh $S_{p+1}(n+1)=\sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^{k} S_k(n)$.

b) Suy ra $(n+1)^{p+1}=\sum_{k=0}^{p} C_{p+1}^{k} S_k(n)$

c) Suy ra các tổng $\sum_{k=1}^{n} k,\ \sum_{k=1}^{n} k^2,\ \sum_{k=1}^{n} k^3$.

1.24) Chứng minh rằng $\mathscr{G}=\left\{ f_{ab}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \,\middle|\, f(x)=ax+b;\ a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0\right\}$ với phép hợp ánh xạ $\circ$ là một nhóm. Nhóm này có giao hoán không?

1.25) Lũy thừa của phần tử a của nhóm G với phép nhân được định nghĩa như sau:

$$a^0=1,\ a^n=aa^{n-1},\ a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^n;\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng với mọi $m,n,k\in\mathbb{Z}$: $a^m a^n=a^{m+n}$, $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$, $\left(a^{m+n}\right)^k=a^{km+kn}$.

1.26) Cho nhóm G với phép nhân thỏa mãn điều kiện $(ab)^2=a^2b^2$ với mọi $a,b\in G$. Chứng minh G là nhóm Abel.

1.27) Cho $(G,*)$ là một nhóm, giả sử G là một tập hữu hạn có số phần tử chẵn. Đặt $S=\left\{ x\in G \,\middle|\, x^2=e, x\neq e\right\}$. Chứng minh rằng quan hệ $\mathscr{R}$ xác định trong G bởi:

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow y=x \text{ hoặc } y=x^{-1}$$

là một quan hệ tương đương. Suy ra S có số phần tử lẻ.

1.28) Cho G, G' là hai nhóm lần lượt có phần tử trung hoà là e và e'. $f:G\to G'$ là một đồng cấu nhóm. Chứng minh: $f(e)=e'$, $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$.

1.29) Cho G, G' là hai nhóm lần lượt có phần tử trung hoà là e và e'. $f:G\to G'$ là một đồng cấu nhóm. Ta định nghĩa và kí hiệu hạt nhân của đồng cấu nhóm f là $\operatorname{Ker} f=f^{-1}(e')$. Chứng minh rằng f là đơn cấu khi và chỉ khi $\operatorname{Ker} f=\{e\}$.

1.30) Cho $(A,+,\cdot)$ là một vành. Tập con $C=\left\{x\in A \,\middle|\, \forall a\in A: ax=xa\right\}$ được gọi là tâm của A. Giả sử $\forall x\in A, x^2-x\in C$.

a) Chứng minh rằng $(C,+)$ là một nhóm con của nhóm $(A,+)$.

b) Chứng minh rằng $xy+yx\in C$ với mọi $x,y\in A$.

c) Suy ra vành A giao hoán.

1.31) Cho A là một vành có đơn vị.

a) Chứng minh rằng, nếu x, y thoả mãn $xy = yx$ thì ta có nhị thức Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

trong đó $x^0 = 1$, x^k là tích k lần của phần tử x.

b) Phần tử $x \in A$ được gọi là luỹ linh nếu tồn tại một số tự nhiên $n \neq 0$ sao cho $x^n = 0$. Chứng minh rằng, nếu x, y luỹ linh và $xy = yx$ thì $x + y$ cũng lũy linh.

c) Chứng minh rằng, nếu x luỹ linh và $xy = yx$ thì xy cũng lũy linh.

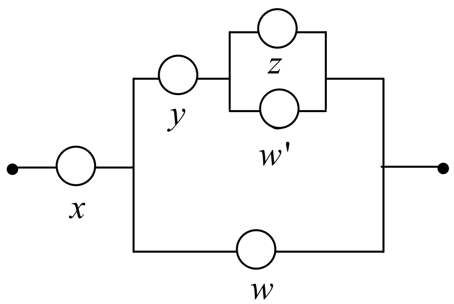
d) Nếu $x \in A$ luỹ linh thì tồn tại $(1-x)^{-1}$.

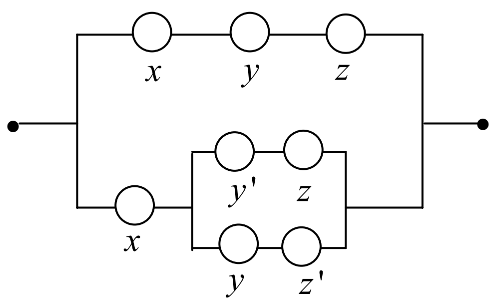
1.32) Biểu diễn sơ đồ mạng ứng với các công thức Boole sau:

a) $\left[x \vee (y' \wedge z) \vee (x \wedge z')\right] \vee (y \wedge z)$.

b) $x \vee \left[y' \vee (y \wedge z)' \vee z'\right]$.

1.33) Viết các công thức Boole ứng với các mạng sau và tìm mạng tương đương đơn giản hơn





CHƯƠNG II
KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Khái niệm không gian véc tơ có nguồn gốc từ vật lý. Ban đầu các véc tơ là những đoạn thẳng có định hướng, với khái niệm này người ta đã sử dụng để biểu diễn các đại lượng vật lý như: véc tơ vận tốc, lực tác động, lực điện từ .... Các nhà vật lý còn sử dụng phương pháp véc tơ Fresnel để tổng hợp các dao động điều hoà.

Cuối thế kỷ 17 Descartes đã đề xuất phương pháp tọa độ để giải quyết các bài toán hình học. Với phương pháp này mỗi véc tơ trong mặt phẳng được đồng nhất với một cặp số là hoành độ và tung độ còn véc tơ trong không gian được đồng nhất với bộ ba số. Các phép toán của véc tơ (cộng véc tơ, nhân 1 số với véc tơ) có thể chuyển tương ứng bằng phép toán trên các bộ số và thoả mãn một số tính chất nào đó. Trong nhiều lĩnh vực khác chúng ta cũng thấy những đối tượng khác như các đa thức, hàm số, v.v... có các phép toán thoả mãn các tính chất tương tự các véc tơ. Điều này dẫn đến việc khái quát hoá khái niệm véc tơ.

Trong các công trình về số quaternion từ năm 1843 của nhà toán học Anh Hamilton, người ta có thể tìm thấy một dạng thô sơ của khái niệm không gian véc tơ 3 và 4 chiều. Hamilton dùng các số quaternion để nghiên cứu các vấn đề toán lý. Sau đó các nhà vật lý như Maxwell và Gibbs đã phát triển dần lý thuyết không gian véc tơ 3 chiều. Khái niệm không gian véc tơ 4 chiều được Einstein (Anh-xtanh) sử dụng trong thuyết tương đối. Ngày nay lý thuyết không gian véc tơ nhiều chiều được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học và các ngành khoa học khác.

Chúng ta thấy khái niệm không gian véc tơ được hình thành qua một quá trình lâu dài trên cơ sở các thành tựu về lý thuyết cũng như ứng dụng thực tế và có tính khái quát hoá cao. Vì vậy để học tốt chương này đòi hỏi người học phải nắm vững khái niệm không gian véc tơ với mức độ trừu tượng cao, còn các mô hình cụ thể là các không gian 2 chiều, 3 chiều ta đã biết ở chương trình phổ thông.

Giáo trình này chỉ xét các không gian véc tơ hữu hạn chiều, đó là các không gian có hệ sinh hữu hạn. Trong không gian như thế mọi véc tơ đều có thể biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của hệ sinh. Muốn cho biểu diễn này là duy nhất thì hệ sinh phải độc lập tuyến tính, lúc đó ta có một cơ sở của không gian véc tơ. Các hệ số trong biểu diễn ở trên được gọi là tọa độ của véc tơ.

Sinh viên cần luyện tập tìm tọa độ của một véc tơ trong các cơ sở khác nhau. Tìm hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ véc tơ cho trước. Tìm hạng của một hệ véc tơ, tìm chiều của không gian con. Công thức chiều của tổng hai không gian véc tơ con, chiều của giao của hai không gian véc tơ con. Thấy được mối liên hệ giữa hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ sinh và cơ sở, liên hệ giữa hạng của hệ sinh và chiều của không gian sinh bởi hệ sinh này (định lý 2.17). Liên hệ với những phép toán và tính chất véc tơ đã biết ở phổ thông.

2.1 KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VÉC TƠ

2.1.1 Định nghĩa và các ví dụ

Định nghĩa 2.1: *Giả sử V là tập khác $\varnothing$, K là một trường. V được gọi là không gian véc tơ trên trường K nếu có hai phép toán:*

- *Phép toán trong* $(+)\colon V\times V\to V$
$$(u,v)\mapsto u+v$$

- *Phép toán ngoài* $(\cdot)\colon K\times V\to V$
$$(\alpha,u)\mapsto \alpha u$$

thoả mãn các tiên đề sau với mọi $u,v,w\in V$ và $\alpha,\beta\in K$

V1) $(u+v)+w=u+(v+w)$

V2) *Tồn tại* $\mathbf{0}\in V$ *sao cho* $u+\mathbf{0}=\mathbf{0}+u=u$

V3) *Với mỗi* $u\in V$ *có* $-u\in V$ *sao cho* $u+(-u)=(-u)+u=\mathbf{0}$

V4) $u+v=v+u$

V5) $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

V6) $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

V7) $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$

V8) $1u=u$, *trong đó* 1 *là phần tử đơn vị của* K.

Khi $K=\mathbb{R}$ thì V được gọi là không gian véc tơ thực.

Khi $K=\mathbb{C}$ thì V được gọi là không gian véc tơ phức.

Các phần tử của V được gọi là các véc tơ, các phần tử của K được gọi là các phần tử vô hướng.

Bốn tiên đề đầu chứng tỏ $(V,+)$ là nhóm Abel. Tiên đề V5),V6) nói rằng phép nhân số vô hướng với véc tơ phân phối đối với phép cộng của số vô hướng và phép cộng véc tơ. Tiên đề V7) là tính kết hợp của tích các số vô hướng với phép nhân với véc tơ.

Ví dụ 2.1: Giả sử K là một trường, xét $K^n=\left\{x=(x_1,...,x_n)\,\middle|\, x_i\in K, i=\overline{1,n}\right\}$

Ta định nghĩa: $(x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n)=(x_1+y_1,...,x_n+y_n)$

$$\alpha(x_1,...,x_n)=(\alpha x_1,...,\alpha x_n),\ \forall\alpha\in K$$

Dễ dàng kiểm chứng lại hai phép toán này thoả mãn 8 tiên đề của không gian véc tơ có véc tơ không là $\mathbf{0}=\underbrace{(0,...,0)}_{n\text{ phần tử}}$, phần tử đối của $x=(x_1,...,x_n)$ là $-x=(-x_1,...,-x_n)$.

Khi $K=\mathbb{R}$ ta có không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^n$.

$K=\mathbb{C}$ ta có không gian véc tơ phức $\mathbb{C}^n$.

Ví dụ 2.2: Ký hiệu $\mathbb{R}^X$ là tập các hàm số xác định trên tập con $X\subset\mathbb{R}$, $X\neq\varnothing$. Ta định nghĩa phép toán cộng và nhân với số thực như sau:

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),\quad (\alpha f)(t)=\alpha f(t),\quad \forall t\in X$$

Rõ ràng với mọi hàm số f,g xác định trên tập con $X\subset\mathbb{R}$, với mọi $\alpha\in\mathbb{R}$ thì $f+g$, αf cũng là các hàm số xác định trên tập con $X\subset\mathbb{R}$.

Với hai phép toán này $\mathbb{R}^X$ có cấu trúc không gian véc tơ thực với véc tơ không là $\mathbf{0}(t)=0,\forall t\in X$, phần tử đối của f là $-f$ xác định bởi $(-f)(t)=-f(t),\forall t\in X$.

Ví dụ 2.3: Gọi $\mathbf{P}_n$ là tập các đa thức bậc $\leq n$, n là số nguyên dương cho trước:

$$\mathbf{P}_n=\left\{p\,\middle|\,p=a_0+a_1t+...+a_nt^n;a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{R}\right\}.$$

Ta định nghĩa phép cộng hai đa thức và phép nhân một số với một đa thức như phép cộng hàm số và phép nhân một số với hàm số trong Ví dụ 2.2 thì $\mathbf{P}_n$ là không gian véc tơ với véc tơ không là đa thức $\mathbf{0}$.

Ví dụ 2.4: Gọi $\mathbf{P}$ là tập các đa thức

$$\mathbf{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}_n=\left\{p\,\middle|\,p=a_0+a_1t+...+a_nt^n;a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}\right\}$$

Ta định nghĩa phép cộng là phép cộng hai đa thức và phép nhân với một số với đa thức theo nghĩa thông thường ở Ví dụ 2.3 thì $\mathbf{P}$ là không gian véc tơ và $\mathbf{P}_n\subset\mathbf{P}$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

2.1.2 Tính chất

1) Vì $(V,+)$ là một nhóm Abel nên véc tơ $\mathbf{0}$ và véc tơ đối $-u$ của u là duy nhất với mọi $u\in V$.

2) Có luật giản ước: $u+v=u+w\Rightarrow v=w$.

3) Với mọi $u \in V$, $0u = \mathbf{0}$, $(-1)u = -u$.

4) Với mọi $\alpha \in K$, $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

5) Nếu $\alpha u = \mathbf{0}$ thì $\alpha = 0$ hoặc $u = \mathbf{0}$.

Chứng minh:

1) 2) Xem Định lý 1.4.

3) Với mọi $u \in V$, $(0+0)u = 0u + 0u$. Mặt khác $(0+0)u = 0u = 0u + \mathbf{0}$.

Theo luật giản ước ta có $0u = \mathbf{0}$.

Tương tự với mọi $u \in V$, $u + (-u) = \mathbf{0} = 0u = (1-1)u = 1u + (-1)u$.

Suy ra $(-1)u = -u$.

4) $\mathbf{0} + \alpha 0 = \alpha 0 = \alpha(0+0) = \alpha 0 + \alpha 0 \Rightarrow \alpha 0 = \mathbf{0}, \forall \alpha \in K$.

5) Nếu $\alpha u = \mathbf{0}$ và giả sử $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in K$

$$\mathbf{0} = \alpha^{-1} 0 = \alpha^{-1}(\alpha u) = (\alpha^{-1}\alpha)u = 1u = u.$$

Từ định nghĩa của không gian véc tơ ta có thể mở rộng các khái niệm sau:

1) *Ta định nghĩa* $u - v := u + (-v)$, *khi đó*

$$u + v = w \Leftrightarrow u = w - v.$$

2) *Do tính kết hợp của phép cộng nên ta có thể định nghĩa theo qui nạp:*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n = (u_1 + \ldots + u_{n-1}) + u_n .$$

Tương tự $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1}) + \alpha_n u_n$

biểu thức này được gọi là *một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ* $u_1, \ldots, u_n$.

Từ đây trở đi ta chỉ hạn chế ***xét các không gian véc tơ thực***.

2.2 KHÔNG GIAN VÉC TƠ CON

2.2.1 Định nghĩa và ví dụ

Giả sử tập con $W \neq \varnothing$ của V thỏa mãn tính chất:

$$\forall u, v \in W: \quad u + v \in W; \tag{2.1}$$

$$\forall u \in W, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}: \ \alpha u \in W. \tag{2.2}$$

Khi đó có thể xác định 2 phép toán từ không gian V thu hẹp vào W:

$$(+):\ W\times W\to W$$
$$(u,v)\mapsto u+v$$

$$(\cdot):K\times W\to W$$
$$\alpha,u)\mapsto \alpha u$$

Hai phép toán này hiển nhiên thỏa mãn các điều kiện V1) , V4), V5), V6), V7), V8) của Định nghĩa 2.1.

Ngoài ra vì $W\neq\varnothing$ do đó tồn tại ít nhất véc tơ $u\in W$ suy ra $\mathbf{0}=0u\in W$.

$\forall u\in W:\ -u=(-1)u\in W$.

Vậy W thỏa mãn các tiên đề V1) – V8) của không gian véc tơ. Nói cách khác với hai phép toán thu hẹp từ không gian véc tơ V vào W thì W là một không gian véc tơ .

<u>Định nghĩa 2.2</u>: *Giả sử $(V,+,.)$ là không gian véc tơ. Tập con $W\neq\varnothing$ của V thỏa mãn điều kiện (2.1)-(2.2) được gọi là không gian véc tơ con của V (hay nói tắt: không gian con của V).*

Định lý sau đây chỉ ra một tiêu chuẩn để kiểm tra tập con $W\subset V$ là không gian véc tơ con của V.

<u>Định lý 2.2</u>: *Giả sử W là tập con khác rỗng của V. Khi đó W không gian véc tơ con của V khi và chỉ khi: Với mọi $u,v\in W$, với mọi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ thì $\alpha u+\beta v\in W$.*

Chứng minh: ($\Rightarrow$): Với mọi $u,v\in W$, với mọi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ thì $\alpha u\in W$, $\beta v\in W$ $\Rightarrow$ $\alpha u+\beta v\in W$.

($\Leftarrow$): $\forall u,v\in W$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$: $u+v=1u+1v\in W$, $\alpha u=\alpha u+0u\in W$.

<u>Ví dụ 2.5</u>: Từ định lý trên ta thấy rằng mọi không gian véc tơ con của V đều phải chứa véc tơ $\mathbf{0}$ của V.

Tập $\{\mathbf{0}\}$ chỉ gồm véc tơ không là không gian véc tơ con nhỏ nhất của V.

V là không gian véc tơ con lớn nhất của V.

<u>Ví dụ 2.6</u>: Tập $W_1=\{u=(x,y,0)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

<u>Ví dụ 2.7</u>: Tập $W_2=\{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,2x-3y+4z=0\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

<u>Ví dụ 2.8</u>: Tập $W_3=\{u=(x,y,1)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$ không là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

<u>Ví dụ 2.9</u>: $\mathbf{P}_n$ là không gian con của $\mathbf{P}_m$ nếu $n\le m$, trong đó $\mathbf{P}_n$ là không gian các đa thức bậc $\le n$.

Ví dụ 2.10: Gọi $C^k_{(a,b)}$ là tập các hàm khả vi liên tục đến cấp k, $(k = 0, 1, 2,...)$, trong khoảng $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Vì tổng của hai hàm khả vi liên tục và tích của một hằng số với một hàm khả vi liên tục cũng là một hàm khả vi liên tục, vì vậy $C^k_{(a,b)}$ là một không gian véc tơ con của không gian véc tơ $\mathbb{R}^{(a,b)}$ (Ví dụ 2.2).

2.2.2 Không gian con sinh bởi một họ véc tơ

Định lý 2.3: *Nếu $(W_i)_{i\in I}$ là họ các không gian con của V thì $\bigcap_{i\in I} W_i$ cũng là không gian con của V.*

Chứng minh: Áp dụng Định lý 2.2. ta dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

Từ Định lý 2.3 suy ra rằng với mọi tập con S bất kỳ của V luôn tồn tại không gian con W bé nhất của V chứa S. W là giao của tất cả các không gian con của V chứa S.

Định nghĩa 2.4: *Không gian W bé nhất chứa S được gọi là không gian sinh bởi hệ S, ký hiệu $W = \operatorname{span} S$, và S được gọi là hệ sinh của W.*

Khi S hữu hạn thì W được gọi là không gian véc tơ hữu hạn sinh.

Định lý 2.4: *$W = \operatorname{span} S$ bằng tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của S.*

Chứng minh: Gọi W' là tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của S. Ta chứng minh W' là không gian con bé nhất chứa S, nghĩa là $W' = W$.

1) Trường hợp S hữu hạn: $S = \{v_1,...,v_n\}$ thì $W' = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \mid \alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}\}$.

(i) Với mọi $v_i \in S$ thì $v_i = 1v_i \in W'$ vậy $S \subset W'$.

(ii) Với mọi $u \in W', v \in W'$: $u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, $v = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n \in W'$; Với mọi $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$:

$$\gamma u + \delta v = \gamma(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) + \delta(\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n)$$
$$= (\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1)v_1 + ... + (\gamma\alpha_n + \delta\beta_n)v_n \in W'.$$

Vậy W' là không gian con của V chứa S.

Giả sử W'' là không gian véc tơ con của V chứa S. Với mọi $u \in W'$, $u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Vì W'' chứa S nên $v_1,...,v_n \in W'' \Rightarrow u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \in W''$. Do đó $W' \subset W''$.

Nói cách khác W' là không gian con nhỏ nhất của V chứa S.

Vậy $W' = W = \operatorname{span} S$.

2) Trường hợp S vô hạn tập W' có dạng

$$W' = \left\{ \alpha_1 v_{i_1} + ... + \alpha_n v_{i_n} \,\middle|\, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}; v_{i_1}, ..., v_{i_n} \in S; n = 1, 2, ... \right\}$$

Tương tự như trên ta có thể chứng minh W' là không gian véc tơ con nhỏ nhất chứa S.

Giáo trình này chỉ xét các không gian véc tơ hữu hạn sinh.

Giả sử $S = \{ v_1, ..., v_n \}$ là hệ sinh của V khi đó:

$$u \in V = \operatorname{span}\{v_1, ..., v_n\} \Leftrightarrow u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n ;\ \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(2.3)}$$

<u>Ví dụ 2.11</u>: a) Trong không gian véc tơ con $W_1 = \{ u = (x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R} \}$ ở Ví dụ 2.6. xét hai véc tơ $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$. Khi đó:

$$u \in W_1 \Leftrightarrow u = (x, y, 0) = x(1,0,0) + y(0,1,0) = xe_1 + ye_2$$

Vậy $W_1 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$.

b) Không gian véc tơ con $W_2 = \{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3y + 4z = 0 \}$ ở Ví dụ 2.7 có tính chất $u = (x, y, z) \in W_2 \Leftrightarrow 2x - 3y + 4z = 0 \Leftrightarrow x = 3/2y - 2z$. Vậy

$$u = (x, y, z) \in W_2 \Leftrightarrow u = \left(\frac{3}{2}y - 2z, y, z \right) = \left(\frac{3}{2}y, y, 0 \right) + (-2z, 0, z) = \frac{y}{2}(3,2,0) + z(-2,0,1)$$

Xét $v_1 = (3,2,0)$, $v_2 = (-2,0,1) \in W_2$, ta được $W_2 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$.

2.2.3 Tổng của một họ không gian véc tơ con

Giả sử $W_1, ..., W_n$ là n không gian con của V. Sử dụng định lý 2.2 ta chứng minh được tập $\{ u_1 + ... + u_n \in V \,|\, u_i \in W_i, i = 1, ..., n \}$ cũng là một không gian véc tơ con của V. Ta gọi không gian véc tơ con này là *tổng của các không gian con* $W_1, ..., W_n$ và ký hiệu $W_1 + ... + W_n$. Vậy:

$$u \in W_1 + ... + W_n \Leftrightarrow u = u_1 + ... + u_n ;\ u_i \in W_i ; i = 1, ..., n . \qquad \textbf{(2.4)}$$

Tuy nhiên, nói chung cách viết trên không duy nhất.

Ta có thể chứng minh được

$$W_1 + ... + W_n = \operatorname{span}\left(W_1 \cup ... \cup W_n \right) \qquad \textbf{(2.5)}$$

Một cách tổng quát ta định nghĩa tổng của một họ các không gian véc tơ con như sau.

Định nghĩa 2.5: Nếu $(W_i)_{i\in I}$ là họ các không gian con của V. Không gian con sinh bởi $\bigcup_{i\in I} W_i$ được gọi là tổng của các không gian W_i, ký hiệu $\sum_{i\in I} W_i$.

Vậy $\sum_{i\in I} W_i = \text{span}(\bigcup_{i\in I} W_i)$. Theo định lý 2.4 ta có

$$\sum_{i\in I} W_i = \left\{ u_{i_1} + \ldots + u_{i_k} \,\middle|\, u_{i_j} \in W_{i_j}, i_j \in I, j = 1,\ldots,k; k = 1,2,\ldots \right\}. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Định nghĩa 2.6: *Nếu mọi $u \in W_1 + \ldots + W_n$ được viết một cách duy nhất dưới dạng $u = u_1 + \ldots + u_n$; $u_i \in W_i$; $i = 1,\ldots,n$ thì tổng các không gian con này được gọi là tổng trực tiếp*. Lúc đó ta ký hiệu $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$.

Định lý 2.5: Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của V, khi đó tổng hai không gian con này là tổng trực tiếp $W_1 \oplus W_2$ khi và chỉ khi $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Chứng minh:

($\Rightarrow$): Giả sử $W_1 \oplus W_2, v \in W_1 \cap W_2$ thì $v = \mathbf{0} + v = v + \mathbf{0} \in W_1 \oplus W_2$. Do cách viết duy nhất suy ra $v = \mathbf{0}$. Vậy $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

($\Leftarrow$): Giả sử $u = u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$ thì

$u_1 - v_1 = v_2 - u_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2$.

Vậy tổng của hai không gian con là tổng trực tiếp $W_1 \oplus W_2$.

Ví dụ 2.12: Xét hai không gian véc tơ con W_1, W_2 ở Ví dụ 2.6, 2.7 có:

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3 \;;\; W_1 \cap W_2 = \left\{ \frac{y}{2}(3,2,0) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} \neq \{(0,0,0)\}.$$

Vậy tổng của hai không gian véc tơ con này không phải là tổng trực tiếp.

Ta cũng có thể nhận thấy rằng cách viết (2.4) không duy nhất. Thật vậy:

$$\begin{aligned} u = (x,y,z) &= (x, y-4z/3, 0) + (0, 4z/3, z) \in W_1 + W_2 \\ &= (0, y-(2x+4z)/3, 0) + (x, (2x+4z)/3, z) \in W_1 + W_2. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.13: Xét W_1 ở Ví dụ 2.6 và $W_4 = \{ u = (0,y,y) \mid y \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$

$$W_1 + W_4 = \mathbb{R}^3 \;;\; W_1 \cap W_4 = \{(0,0,0)\}.$$

Vậy tổng của hai không gian véc tơ con này là tổng trực tiếp: $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_4$.

2.3 ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

Khái niệm phụ thuộc tuyến tính khái quát hóa từ khái niệm 2 véc tơ cùng phương và 3 véc tơ đồng phẳng.

Hệ véc tơ không phụ thuộc tuyến tính gọi là hệ độc lập tuyến tính. Hệ các véc tơ độc lập tuyến tính có tính chất: nếu một véc tơ bất kỳ biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của hệ này thì cách viết đó là duy nhất.

Định nghĩa 2.7: *Cho hệ n véc tơ $S=\{u_1,...,u_n\}$ của V (các véc tơ này có thể trùng nhau). Hệ S được gọi là độc lập tuyến tính nếu:*

$$\forall\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{R}:\ \alpha_1u_1+...+\alpha_nu_n=\mathbf{0}\Rightarrow\ \alpha_1=...=\alpha_n=0 \qquad \textbf{(2.7)}$$

Hệ không độc lập tuyến tính được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Vậy hệ $S=\{u_1,...,u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi ta có thể tìm được $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha_1u_1+...+\alpha_nu_n=\mathbf{0}$.

Ví dụ 2.14: Hệ $\{e_1,e_2,e_3\}$ trong đó $e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\in\mathbb{R}^3$ là độc lập, vì nếu $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$ thì $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Ví dụ 2.15: • Hệ chứa véc tơ $\mathbf{0}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính.

• Hệ hai véc tơ $\{u_1,u_2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng tỷ lệ, nghĩa là $u_1=\alpha u_2$ hoặc $u_2=\alpha u_1$.

• Xét các véc tơ $u_1=(4,-2,8)$, $u_2=(-6,3,-12)$, $u_3=(3,-2,5)$. Hệ hai véc tơ $\{u_1,u_2\}$ phụ thuộc tuyến tính ($u_2=-3/2u_1$), nhưng $\{u_1,u_3\}$ độc lập tuyến tính.

Định lý 2.6: *1) Nếu $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính và $u=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n$ thì cách viết này là duy nhất.*

2) Hệ véc tơ chứa hệ con phụ thuộc tuyến tính là hệ phụ thuộc tuyến tính. Vì vậy, mọi hệ con của hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.

3) Một hệ véc tơ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại.

4) Giả sử hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $\{v_1,...,v_n,u\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi u là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $v_1,...,v_n$. Ngoài ra cách viết $u=\beta_1v_1+...+\beta_nv_n$ là duy nhất.

Chứng minh: 1) Giả sử $u=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n$ và $u=\beta_1v_1+...+\beta_nv_n$ thì

$$\mathbf{0}=u-u=(\alpha_1-\beta_1)v_1+...+(\alpha_n-\beta_n)v_n\Rightarrow\alpha_1-\beta_1=...=\alpha_n-\beta_n=0\ .$$

Do đó $\alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_n = \beta_n$. Vậy cách viết trên là duy nhất.

2) Giả sử hệ $S = \{u_1, ..., u_m\}$ chứa hệ con $\{u_1, ..., u_n\}$ phụ thuộc, khi đó tồn tại $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = \mathbf{0}$.

Chọn $\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$, trong đó $\alpha_{n+1} = ... = \alpha_m = 0$ và $\alpha_1, ..., \alpha_n$ không đồng thời bằng 0 thỏa mãn $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1} + ... + \alpha_m u_m = \mathbf{0}$.

3) Giả sử hệ $S = \{u_1, ..., u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính, khi đó tồn tại $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = \mathbf{0}$.

Giả sử $\alpha_1 \neq 0$ thì $u_1 = -(\alpha_2 / \alpha_1) u_2 - ... - (\alpha_n / \alpha_1) u_n$.

4): ($\Leftarrow$): suy từ 3).

($\Rightarrow$): Giả sử $\{v_1, ..., v_n, u\}$ phụ thuộc khi đó tồn tại các số $\beta_1', ..., \beta_n', \alpha \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\beta_1' v_1 + ... + \beta_n' v_n + \alpha u = \mathbf{0}$, vì hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ độc lập nên $\alpha \neq 0$, do đó $u = -\dfrac{\beta_1}{\alpha} v_1 - ... - \dfrac{\beta_n}{\alpha} v_n$. Cách viết duy nhất suy từ tính chất 1).

2.4 HẠNG CỦA MỘT HỆ HỮU HẠN CÁC VÉC TƠ

2.4.1 Hệ con độc lập tuyến tính tối đại

Định nghĩa 2.8: *Cho hệ S các véc tơ của không gian véc tơ V. Hệ con S' của hệ S được gọi là độc lập tuyến tính tối đại của S nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:*

i) *S' là hệ độc lập tuyến tính.*

ii) *Nếu thêm bất kỳ véc tơ nào của S vào S' thì ta có hệ phụ thuộc tuyến tính.*

Nói riêng $\{v_1, ..., v_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính tối đại của V nếu hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ độc lập và nếu thêm bất kỳ véc tơ khác của V ta có hệ mới là phụ thuộc.

Định lý 2.7: 1) *Nếu S' là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S thì mọi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của S' và cách biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính là duy nhất (điều này suy từ tính chất 2.6).*

2) *Giả sử $\{v_1, ..., v_n\}$ là hệ con độc lập tuyến tính của một hệ hữu hạn S. Khi đó ta có thể bổ sung thêm để được một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S chứa $\{v_1, ..., v_n\}$.*

Thật vậy, nếu $\{v_1, ..., v_n\}$ không tối đại thì tồn tại một véc tơ của S, ta ký hiệu v_{n+1}, sao cho hệ $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\}$ độc lập tuyến tính. Lập luận tương tự và vì hệ S hữu hạn nên quá trình bổ sung thêm này sẽ dừng lại, cuối cùng ta được hệ $\{v_1,...,v_n,v_{n+1},...,v_{n+k}\}$ độc lập tuyến tính tối đại của S.

Ví dụ 2.16: Tìm hệ con độc lập tuyến tính tối đại hệ véc tơ $S=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$:

$$u_1=(3,1,4),\ u_2=(2,-3,5),\ u_3=(5,-2,9),\ u_4=(1,4,-1).$$

- Hai véc tơ $\{u_1,u_2\}$ độc lập vì không tỉ lệ.
- Có thể kiểm tra được: $u_3=u_1+u_2$; $u_4=u_1-u_2$.

Vậy $\{u_1,u_2\}$ là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S.

Tương tự có thể kiểm tra được $\{u_1,u_3\}$, $\{u_1,u_4\}$, $\{u_2,u_3\}$, $\{u_2,u_4\}$ cũng là các hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S.

Qua ví dụ ta nhận thấy một hệ véc tơ có thể có nhiều hệ con độc lập tuyến tính tối đại. Tuy nhiên số các véc tơ của các hệ con độc lập tuyến tính tối đại đều bằng nhau. Ta sẽ chứng minh điều này trong mục tiếp sau.

2.4.2 Hạng của một hệ hữu hạn các véc tơ

Định lý 2.8 (Định lý thế Steinitz (Xtêi-nít)): *Nếu hệ S độc lập tuyến tính có n véc tơ và mỗi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ R có k véc tơ thì $n\le k$.*

Chứng minh: Giả sử $S=\{v_1,...,v_n\}$, $R=\{u_1,...,u_k\}$. Ta sẽ chứng minh rằng có thể thay dần các véc tơ của hệ R bằng các véc tơ của hệ S để có các hệ R_1, R_2,... mà mỗi véc tơ của hệ S vẫn còn là tổ hợp tuyến tính của R_1, R_2,....

Thật vậy, ta có $v_1=\alpha_1u_1+...+\alpha_ku_k$, $v_1\ne 0$ (vì S độc lập) nên $\alpha_1,...,\alpha_k\in\mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0, ta giả sử $\alpha_1\ne 0$ (có thể đánh lại số thứ tự của R), suy ra $u_1=\dfrac{1}{\alpha_1}v_1-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}u_2-...-\dfrac{\alpha_k}{\alpha_1}u_k$.

Xét hệ $R_1=\{v_1,u_2,...,u_k\}$. Rõ ràng mọi véc tơ của S vẫn còn là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của R_1.

Tương tự ta có $v_2=\beta_1v_1+\beta_2u_2+...+\beta_ku_k$, vì $\{v_1,v_2\}$ độc lập nên $\beta_2,...,\beta_k\in\mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0, ta giả sử $\beta_2\ne 0$.

Khi đó $$u_2=\frac{1}{\beta_2}v_2-\frac{\beta_1}{\beta_2}v_1-\frac{\beta_3}{\beta_2}u_3-...-\frac{\beta_k}{\beta_2}u_k.$$

Xét hệ $R_2 = \{v_1, v_2, u_3, ..., u_k\}$, mọi véc tơ của S cũng còn là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của R_2.

Nếu $n > k$, tiếp tục quá trình này cuối cùng ta được mọi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ $R_k = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$, là hệ con của S. Điều này mâu thuẫn với giả thiết hệ S độc lập tuyến tính. Vậy $n \le k$.

<u>Định lý 2.9</u>: *Mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ hữu hạn S các véc tơ của V đều có số phần tử bằng nhau.*

Chứng minh: Giả sử $\{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\}$ và $\{v_{j_1}, ..., v_{j_n}\}$ là hai hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S lần lượt có k phần tử và n phần tử. Từ tính tối đại của mỗi hệ, suy ra rằng mọi véc tơ của hệ này là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ kia. Áp định lý thế 2.8 ta có $n \le k$ và $k \le n$, vậy $n = k$.

<u>Định nghĩa 2.9</u>: *Số các véc tơ của một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S được gọi là hạng (rank) của S, ký hiệu $r(S)$.*

*Qui ước hệ chỉ có véc tơ **0** có hạng là* 0.

2.5 CƠ SỞ, SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VÉC TƠ

<u>Định nghĩa 2.10</u>: *Mỗi hệ sinh độc lập tuyến tính của V được gọi là một cơ sở của V.*

<u>Định lý 2.10</u>: *Giả sử $\{e_1, ..., e_n\}$ là một hệ các véc tơ của V. Các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) *Hệ $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V.*

(ii) *Hệ $\{e_1, ..., e_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính tối đại của V.*

(iii) *Mọi véc tơ $u \in V$ tồn tại một cách viết duy nhất:*

$$u = x_1 e_1 + ... + x_n e_n \ , \ \ x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(2.8)}$$

Chứng minh: (i)⇒(ii): Hiển nhiên từ định nghĩa của cơ sở và tính chất 2.7.

(ii)⇒(iii): Suy từ tính chất 2.6 và tính chất 2.7.

(iii)⇒(i): Rõ ràng $\{e_1, ..., e_n\}$ là hệ sinh.

Giả sử $x_1 e_1 + ... + x_n e_n = \mathbf{0}$, ta cũng có $\mathbf{0} = 0 e_1 + ... + 0 e_n$. Do cách viết duy nhất suy ra $x_1 = ... = x_n = 0$. Vậy $\{e_1, ..., e_n\}$ là một hệ sinh độc lập, do đó là một cơ sở.

Định nghĩa 2.11: $(x_1,...,x_n)$ *trong* (2.8) *được gọi là tọa độ của véc tơ u trong cơ sở* $\{e_1,...,e_n\}$.

Ta ký hiệu tọa độ của véc tơ u trong cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là $(u)_{\mathscr{B}}$.

Vậy nếu u thỏa mãn (2.8) thì

$$(u)_{\mathscr{B}}=(x_1,...,x_n) \tag{2.9}$$

Ví dụ 2.17: Hai hệ véc tơ $\mathscr{B}=\{e_1,e_2\}$, $\mathscr{B}'=\{e'_1,e'_2\}$, với $e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)$ và $e'_1=(1,1),\ e'_2=(4,3)$ là hai cơ sở của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$.

Với mọi $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $u=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x(1,0)+y(0,1)=xe_1+ye_2$.

Giả sử $u=(x,y)=x'e'_1+y'e'_2=x'(1,1)+y'(4,3)=(x'+4y',x'+3y')$.

Do đó $\begin{cases}x'+4y'=x\\ x'+3y'=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=4y-3x\\ y'=x-y\end{cases}$

Vậy:

$$(u)_{\mathscr{B}}=(x,y);\ (u)_{\mathscr{B}'}=(4y-3x,x-y). \tag{2.10}$$

Cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,e_2\}$ được gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

Định lý 2.11: Giả sử V là không gian véc tơ hữu hạn sinh và $\{v_1,...,v_k\}$ là hệ độc lập tuyến tính các véc tơ của V. Khi đó có thể bổ sung thêm để có được hệ $\{v_1,...,v_k,v_{k+1},...,v_{k+m}\}$ là một cơ sở của V.

Chứng minh: Giả sử V có một hệ sinh có n véc tơ. Nếu $S=\{v_1,...,v_k\}$ không phải là cơ sở thì S không phải là hệ sinh, theo tính chất 2.6-3) tồn tại véc tơ, ta ký hiệu v_{k+1}, sao cho hệ $\{v_1,...,v_k,v_{k+1}\}$ độc lập tuyến tính. Tiếp tục quá trình này cuối cùng ta có hệ $\{v_1,...,v_k,v_{k+1},...,v_{k+m}\}$ độc lập tuyến tính và là hệ sinh, $k+m\le n$ (theo Bổ đề 2.8). Vậy $\{v_1,...,v_k,v_{k+1},...,v_{k+m}\}$ là một cơ sở cần tìm.

Hệ quả 2.12: *Mọi không gian hữu hạn sinh đều tồn tại cơ sở.*

Định lý 2.13: *Số phần tử của mọi cơ sở của đều bằng nhau.*

Chứng minh: Áp dụng Định lý 2.8 ta suy ra hai cơ sở bất kỳ của V đều có số phần tử bằng nhau.

Định nghĩa 2.12: *Số véc tơ của một cơ sở của V được gọi là số chiều của V, ký hiệu* $\dim V$. *Quy ước* $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Ví dụ 2.18: Trong không gian $\mathbb{R}^n$ ta xét hệ $\mathscr{B} = \{ e_1, ..., e_n \}$ trong đó:

$$e_1 = (1,0,...,0),\ e_2 = (0,1,...,0), ..., e_n = (0,0,...,1) \qquad \textbf{(2.11)}$$

là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gọi là cơ sở chính tắc. Vậy $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Ví dụ 2.19: Hệ $\mathscr{B} = \{ 1, t, ..., t^n \}$ là một cơ sở của $\mathbf{P}_n$, gọi là cơ sở chính tắc. Vậy $\dim \mathbf{P}_n = n + 1$.

Nhận xét 2.1: Không gian $\mathbf{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_n$ là một ví dụ về không gian véc tơ không hữu hạn sinh. Thật vậy, hệ $\{ 1, t, t^2, ... \}$ có vô hạn véc tơ và độc lập tuyến tính nên không thể là hữu hạn sinh.

Định lý 2.14: *Giả sử* $\dim V = n$ *và* $S = \{ v_1, ..., v_m \}$ *là hệ m véc tơ của* V. *Khi đó:*

(i) *Nếu hệ* S *độc lập tuyến tính thì* $m \le n$.

(ii) *Nếu hệ* S *là hệ sinh của thì* $m \ge n$.

(iii) *Nếu* $m = n$ *thì hệ* S *độc lập tuyến tính khi và chỉ khi* S *là hệ sinh.*

Chứng minh: Gọi $\mathscr{B}$ là một cơ sở của V. Áp dụng Định lý 2.8 cho hai hệ $\mathscr{B}$ và S suy ra các điều cần chứng minh.

Định lý 2.15: Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của V thì

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) \qquad \textbf{(2.12)}$$

Đặc biệt:

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 \qquad \textbf{(2.13)}$$

Chứng minh: Giả sử $\{ e_1, ..., e_l \}$ là một cơ sở của $W_1 \cap W_2$ (nếu $W_1 \cap W_2 = \varnothing$ thì $l = 0$). Theo định lý 2.11 ta có thể bổ sung thêm để $\{ e_1, ..., e_l, u_1, ..., u_m \}$ là một cơ sở của W_1 và $\{ e_1, ..., e_l, v_1, ..., v_k \}$ là một cơ sở của W_2. Với mọi $v \in W_1 + W_2$ thì:

$$v = (x_1 + x'_1)e_1 + ... + (x_l + x'_l)e_l + y_1 u_1 + ... + y_m u_m + z_1 v_1 + ... + z_k v_k .$$

Vậy $\{ e_1, ..., e_l, u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_k \}$ là hệ sinh của $W_1 + W_2$.

Mặt khác, giả sử $x_1 e_1 + ... + x_l e_l + y_1 u_1 + ... + y_m u_m + z_1 v_1 + ... + z_k v_k = 0$ (*)

thì $x_1e_1+...+x_le_l+y_1u_1+...+y_mu_m=-z_1v_1-...-z_kv_k\in W_1\cap W_2$.

$\Rightarrow\ -z_1v_1-...-z_kv_k=t_1e_1+...+t_le_l\in W_1\cap W_2 \Rightarrow\ z_1v_1+...+z_kv_k+t_1e_1+...+t_le_l=0$

Vì $\{e_1,...,e_l,v_1,...,v_k\}$ độc lập $\Rightarrow z_1=...=z_k=t_1=...=t_l=0$

Thay vào (*) $\Rightarrow\ x_1=...=x_l=y_1=...=y_m=0$.

Vậy $\{e_1,...,e_l,u_1,...,u_m,v_1,...,v_k\}$ là một cơ sở của W_1+W_2.

Do đó: $\dim W_1+\dim W_2=2l+m+k=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$.

Định lý 2.16: *Giả sử S là hệ hữu hạn các véc tơ của V, S_0 là một hệ con của S. Đặt $W=\operatorname{span}S$. Khi đó:*

(i) *S_0 là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S khi và chỉ khi S_0 là một cơ sở của W, do đó $r(S)=\dim W$.*

(ii) *Khi thực hiện một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp sau lên hệ S:*

- *Nhân một số khác 0 với một véc tơ của hệ S;*
- *Cộng vào một véc tơ của hệ S một tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của S; thì hệ S biến thành hệ S'.*

Đặt $W'=\operatorname{span}S'$ thì $W=W'$, do đó $r(S)=r(S')=\dim W$.

Chứng minh: (i) Giả sử S_0 là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S thì S_0 cũng sinh ra W, do đó S_0 là một cơ sở của W. Ngược lại nếu S_0 là một cơ sở của W thì S_0 là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của W, do đó cũng là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S.

$r(S)=$ số véc tơ của $S_0=\dim W$.

(ii) Có thể kiểm chứng rằng $S'\subset W$ do đó $W'\subset W$. Tương tự cũng có $W\subset W'$.

Vậy $W=W'\Rightarrow r(S)=r(S')$.

Nhận xét 2.2: Để tìm hạng của hệ véc tơ $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ ta có thể sử dụng 2 cách sau:

Cách 1: Áp dụng định lý 2.16 bằng cách thực hiện các phép biến đổi sơ cấp lên hệ véc tơ đã cho để đưa về hệ véc tơ mà ta dễ dàng nhận được hạng của nó.

Khi thực hành ta có thể viết tọa độ các véc tơ thành một bảng, mỗi véc tơ nằm trên một cột, sau đó biến đổi lên các cột của bảng số (đổi vị trí 2 cột, nhân một số khác 0 vào 1 cột, cộng vào 1 cột một tổ hợp tuyến tính các cột khác) để đưa bảng số tương ứng về bảng số mà các phần tử khác 0 có dạng hình thang. Khi đó các cột khác 0 tạo thành hệ véc tơ độc lập tuyến tính tối đại cần tìm.

$$\begin{matrix} * & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \# & * & 0 & \cdots & \cdots \\ \# & \# & 0 & \cdots & \cdots \\ \# & \# & * & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

trong đó * là các phần tử khác 0, các phần tử # có thể bằng 0.

Cách 2: Áp dụng tính chất 2.6 theo từng bước như sau:

1. Loại các véc tơ $v_i = \mathbf{0}$,
2. Giả sử $v_{i_j} \neq \mathbf{0}$, loại các véc tơ v_i tỉ lệ với v_{i_j},
3. Giả sử $\left\{v_{i_1},...,v_{i_k}\right\}$ độc lập, khi đó $\left\{v_{i_1},...,v_{i_k}, v_j\right\}$ độc lập khi và chỉ khi v_j không biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của $\left\{v_{i_1},...,v_{i_k}\right\}$.

Ví dụ 2.20: Tìm hạng của hệ véc tơ sau:

$v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,1,-1)$, $v_3 = (1,3,1,3)$, $v_4 = (1,2,0,2)$, $v_5 = (1,2,1,2)$.

Giải: • Cách1:

$$\begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \end{cases} \to \begin{cases} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{cases}$$

(Cột 1 $\to$ cột 1, cột 2 - cột1 $\to$ cột 2, cột 3 - cột1 $\to$ cột 3, cột 4 - cột1 $\to$ cột 4, cột 5 - cột4 $\to$ cột 5)

$$\to \begin{cases} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{cases}$$

(Cột 3 + cột 2 $\to$ cột 3, cột 4 +(1/2) cột 2 - cột 5 $\to$ cột 4).

(-1/2cột 2 $\to$ cột 2, cột 5 $\to$ cột 3).

Vậy hệ véc tơ có hạng là 3.

• Cách 2: v_1, v_2 không tỉ lệ nên độc lập. Nếu $v_3 = xv_1 + yv_2$ thì

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \\ x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=2,\ y=-1.$$

Vậy $v_3 = 2v_1 - v_2$. Nghĩa là $\{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc.

Nếu $v_4 = xv_1 + yv_2$ thì $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \\ x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$, hệ vô nghiệm. Vậy $\{v_1, v_2, v_4\}$ độc lập.

Nếu $v_5 = xv_1 + yv_2 + zv_4$ thì $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=2 \\ x+y=1 \\ x-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow x=3/2,\ y=-1/2, z=0.$

Nghĩa là $v_5 = 3/2v_1 - 1/2v_2$. Do đó $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ phụ thuộc.

Vậy $\{v_1, v_2, v_4\}$ là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

2.1) Tập $\mathbb{R}^3$ với các phép toán được định nghĩa trong các trường hợp sau có phải là không gian véc tơ không? Chỉ rõ tiên đề mà phép toán không thoả mãn.

a) $\begin{cases} (x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z') \\ \alpha(x,y,z)=(\alpha x,y,z)\ ;\ \alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z') \\ \alpha(x,y,z)=(2\alpha x,2\alpha y,2\alpha z);\ \alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x,y,z)+(x',y',z')=(x+x'+1,y+y'+1,z+z'+1) \\ \alpha(x,y,z)=(0,0,0);\ \alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$.

2.2) Xét các hàm số xác định trong đoạn $[a,b]\subset\mathbb{R}$ với các phép cộng hai hàm số và phép nhân hàm số với số thực. Tập các hàm số sau có phải là không gian véc tơ không?

a) Tập các hàm liên tục trong đoạn $[a,b]$.

b) Tập các hàm số khả vi trong khoảng (a,b) (có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a,b)$).

c) Tập các hàm số bị chặn trong đoạn $[a,b]$.

d) Tập các hàm số trong đoạn $[a,b]$ sao cho $f(b)=0$.

e) Tập các hàm số trong đoạn $[a,b]$ sao cho $f(b)=1$.

f) Tập các hàm số không âm trong đoạn $[a,b]$.

2.3) Tập hợp các véc tơ có dạng sau có phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không?

a) Các véc tơ có dạng $(x,0,0)$.

b) Các véc tơ có dạng $(x,1,1)$.

c) Các véc tơ có dạng (x,y,z) thoả mãn $x+y+z=0$.

d) Các véc tơ có dạng (x,y,z) thoả mãn $x+y+z=1$.

e) Các véc tơ có dạng (x,y,z), $2x-y+z=0$, $x+y-4z=0$.

2.4) Tìm x,y,z nếu $(2,-3,4)=x(1,1,1)+y(1,1,0)+z(1,0,0)$.

2.5) Hãy biểu diễn véc tơ u thành tổ hợp tuyến tính của v_1,v_2,v_3:

a) $u=(7,-2,15)$; $v_1=(2,3,5)$, $v_2=(3,7,8)$, $v_3=(1,-6,1)$.

b) $u=(1,4,-7,7)$; $v_1=(4,1,3,-2)$, $v_2=(1,2,-3,2)$, $v_3=(16,9,1,-3)$.

2.6) Hãy xác định λ sao cho u là tổ hợp tuyến tính của v_1,v_2,v_3:

a) $u=(7,-2,\lambda)$; $v_1=(2,3,5)$, $v_2=(3,7,8)$, $v_3=(1,-6,1)$.

b) $u=(1,3,5)$; $v_1=(3,2,5)$, $v_2=(2,4,7)$, $v_3=(5,6,\lambda)$.

2.7) Viết đa thức $p=-3+4x+x^2$ thành tổ hợp tuyến tính của các đa thức :

$$p_1=5-2x+x^2,\ p_2=-3x+2x^2,\ p_3=3+x.$$

2.8) Chứng minh $\{v_1,v_2,v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, tìm tọa độ của u trong cơ sở này.

a) $u=(6,9,14)$; $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,1,2)$, $v_3=(1,2,3)$.

b) $u=(6,2,-7)$; $v_1=(2,1,-3)$, $v_2=(3,2,-5)$, $v_3=(1,-1,1)$.

2.9) Mỗi hệ véc tơ sau có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không?

a) $u=(1,1,1)$, $v=(2,2,0)$, $w=(3,0,0)$.

b) $u=(2,-1,3)$, $v=(4,1,2)$, $w=(8,-1,8)$.

c) $u=(3,1,4)$, $v=(2,-3,5)$, $w=(5,-2,9)$, $s=(1,4,-1)$.

2.10) Các hệ véc tơ dưới đây độc lập hay phụ thuộc tuyến tính.

a) $u=(4,-2,6)$, $v=(6,-3,9)$ trong $\mathbb{R}^3$.

b) $u=(2,-3,1)$, $v=(3,-1,5)$, $w=(1,-4,3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

c) $u=(5,4,3)$, $v=(3,3,2)$, $w=(8,1,3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

d) $u=(4,-5,2,6)$, $v=(2,-2,1,3)$, $w=(6,-3,3,9)$, $s=(4,-1,5,6)$ trong $\mathbb{R}^4$.

2.11) Tìm chiều và một cơ sở của không gian con của $\mathbb{R}^4$

a) Các véc tơ có dạng $(a,b,c,0)$.

b) Các véc tơ có dạng (a,b,c,d) với $d=a+b$ và $c=a-b$.

c) Các véc tơ có dạng (a,b,c,d) với $a=b=c=d$.

2.12) Tìm chiều và một cơ sở của không gian con sinh bởi hệ các véc tơ sau:

a) $v_1=(2,4,1)$, $v_2=(3,6,-2)$, $v_3=(-1,2,-1/2)$.

b) $v_1=(1,0,0,-1)$, $v_2=(2,1,1,0)$, $v_3=(1,1,1,1)$, $v_4=(1,2,3,4)$, $v_5=(0,1,2,3)$.

c) $v_1=(1,1,1,1,0)$, $v_2=(1,1,-1,-1,-1)$, $v_3=(2,2,0,0-1)$, $v_4=(1,1,5,5,2)$,

$v_5=(1,-1,-1,0,0)$.

2.13) Chứng minh rằng tập các hàm khả vi trên $[a,b]$ và thoả mãn $f'+4f=0$ tạo thành không gian con của $C[a,b]$. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con này.

2.14) Cho 3 véc tơ v_1,v_2,v_3 của không gian véc tơ V. Chứng minh:

a) Nếu $\{v_1,v_2\}$ độc lập thì $\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$ cũng độc lập.

b) Nếu $\{v_1,v_2,v_3\}$ độc lập thì $\{v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_1\}$ cũng độc lập.

2.15) Chứng minh nếu hai hệ véc tơ $\{v_1,...,v_n\}$ và $\{u_1,...,u_m\}$ của không gian véc tơ V mà mỗi véc tơ của hệ này đều biểu thị thành tổ hợp tuyến tính của hệ kia thì hai hệ đó có cùng hạng.

2.16) Giả sử U,V và W là ba không gian véc tơ con của một không gian véc tơ. Chứng minh rằng $(U\cap V)+(U\cap W)\subset U\cap(V+W)$.

2.17) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét các véc tơ: $u_1=(1,2,-1,3)$, $u_2=(2,4,1,-2)$, $u_3=(3,6,3,-7)$;

Và $v_1=(1,2,-4,11)$, $v_2=(2,4,-5,14)$. Đặt U, V là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ lần lượt sinh bởi hệ véc tơ $\{u_1,u_2,u_3\}$ và $\{v_1,v_2\}$. Chứng minh rằng $U=V$.

2.18) Chứng minh rằng các tập con sau

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x+y+z=0\right\},\ W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x-y-z=0\right\}$$

là các không gian con của $\mathbb{R}^3$. Tìm một cơ sở của $V\cap W, V, W$.

2.19) Chứng minh rằng các tập con sau

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x=0\right\},\ W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| y=0\right\}$$

là các không gian con của $\mathbb{R}^3$. Xác định $V\cap W, V+W$. Tổng này có phải là tổng trực tiếp không?

2.20) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét:

$$V=\operatorname{span}\{(1,0,0,2);(0,2,1,-1);(-1,6,3,7)\},\ W=\operatorname{span}\{(3,2,0,1);(1,2,1,1)\}$$

Tìm số chiều của $V, W, V\cap W, V+W$.

2.21) Tìm điều kiện của x,y,z để $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ thuộc không gian véc tơ con sinh bởi: $u_1=(2,1,0)$, $u_2=(1,-1,2)$, $u_3=(0,3,-4)$.

2.22) Chứng minh rằng $W=\left\{(x,y,0) \middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$ là không gian véc tơ con sinh bởi hai véc tơ u,v trong đó :

a) $u=(1,2,0)$, $v=(0,1,0)$.

b) $u=(2,-1,0)$, $v=(1,3,0)$.

2.23) W_1, W_2 là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$W_1=\left\{(x,y,z) \middle| x,y,z\in\mathbb{R}; x=y=z\right\};\ W_2=\left\{(0,y,z) \middle| y,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

Chứng minh rằng $\mathbb{R}^3=W_1\oplus W_2$.

2.24) Cho hai véc tơ $u_1=(1,-3,2)$, $u_2=(2,-1,1)$ của $\mathbb{R}^3$.

a) Viết $(1,7,-4)$ thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

b) Viết $(2,-5,4)$ thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

c) Tìm các giá trị của k để $(1,k,5)$ viết được thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

d) Tìm điều kiện x, y, z để (x, y, z) viết được thành tổ hợp tuyến tính của hai véc tơ u_1, u_2.

2.25) Tìm $W_1 \cap W_2$, trong đó : $W_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. W_2 là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi hai vec tơ $(1,2,3)$ và $(1,-1,1)$.

2.26) W_1, W_2, W_3 là ba không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$W_1 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}; x + y + z = 0\}; W_2 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}; x = z\};$$
$$W_3 = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Chứng minh rằng: a) $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$; b) $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_3$; c) $\mathbb{R}^3 = W_2 + W_3$.

Trong các tổng trên trường hợp nào là tổng trực tiếp.

2.27) Giả sử W là không gian véc tơ con của không gian véc tơ n chiều V. Chứng minh rằng $\dim W \le n$.

$\dim W = n$ khi và chỉ khi $W = V$.

2.28) Cho W_1, W_2 là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ xác định như sau:

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}; y + z + t = 0\}; W_2 = \{(x, y, z, t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}; x + y = 0, z = 2t\}$$

Tìm một cơ sở và chiều của các không gian véc tơ con W_1, W_2 và $W_1 \cap W_2$.

2.29) Giả sử W_1, W_2 là hai không gian véc tơ con 2 chiều của $\mathbb{R}^3$. Chứng minh rằng $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

2.30) Giả sử W_1, W_2 là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn điều kiện $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ và $W_1 \not\subset W_2$. Chứng minh rằng $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

2.31) Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của không gian véc tơ V sao cho $W_1 \cup W_2 = V$. Chứng minh $W_1 = V$ hoặc $W_2 = V$.

2.32) Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của không gian véc tơ V. Chứng minh rằng hai tính chất bất kỳ trong ba tính chất sau kéo theo tính chất thứ ba:

1) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$,

2) $W_1 + W_2 = V$,

3) $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$.

2.33) Chứng minh rằng mọi không gian con W của V đều có bù tuyến tính, nghĩa là tồn tại không gian con Z sao cho $V = W \oplus Z$. Hỏi Z có duy nhất không?

2.34) Cho hệ véc tơ $\{v_1,...,v_n\}$ của không gian véc tơ V. Chứng minh rằng hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^{n}\mathbb{R}v_i$ là tổng trực tiếp và $v_i \neq \mathbf{0}$ với mọi $i = 1,...,n$.

2.35) Giả sử $V = W_1 \oplus ... \oplus W_n$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\mathscr{S}_i$ là một hệ độc lập tuyến tính của W_i với mọi $i = 1,...,n$ thì $\mathscr{S}_1 \cup ... \cup \mathscr{S}_n$ là hệ độc lập tuyến tính của V.

b) Nếu $\mathscr{S}_i$ là một hệ sinh của W_i với mọi $i = 1,...,n$ thì $\mathscr{S}_1 \cup ... \cup \mathscr{S}_n$ là hệ sinh của V.

c) Nếu $\mathscr{S}_i$ là một cơ sở của W_i với mọi $i = 1,...,n$ thì $\mathscr{S}_1 \cup ... \cup \mathscr{S}_n$ là một cơ sở của V.

2.36) Giả sử $k_1,...,k_n$ là n số thực cho trước, trong $\mathbb{R}^n$ xét tập:

$$W = \left\{ v = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \middle| k_1x_1 + ...k_nx_n = 0 \right\}$$

a) Chứng minh W là không gian con của $\mathbb{R}^n$.

b) Chứng minh rằng $\dim W = n-1$ nếu $k_1,...,k_n$ không đồng thời bằng 0.

2.37) Cho hệ véc tơ $M = \{v_1,...,v_p,u_1,...,u_q\}$ của không gian véc tơ V. Giả sử hệ $M_1 = \{v_1,...,v_p\}$ có hạng là m và hệ $M_2 = \{u_1,...,u_q\}$ có hạng n. Chứng minh hạng của $M \leq m+n$.

2.38) Giả sử V là không gian véc tơ (hữu hạn sinh):

a) Chứng minh rằng, với mọi hệ sinh hữu hạn $\mathscr{S}$ của V, tồn tại cơ sở $\mathscr{B}$ của V sao cho $\mathscr{B} \subset \mathscr{S}$.

b) Chứng minh rằng, với mọi hệ sinh hữu hạn $\mathscr{S}$ của V và hệ độc lập tuyến tính $\mathscr{U}$ của V sao cho $\mathscr{U} \subset \mathscr{S}$, tồn tại cơ sở $\mathscr{B}$ của V sao cho $\mathscr{U} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{S}$.

c) Chứng minh rằng, với mọi hệ sinh hữu hạn $\mathscr{S}$ của V và hệ độc lập tuyến tính $\mathscr{U}$ của V, tồn tại cơ sở $\mathscr{B}$ của V sao cho $\mathscr{U} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{S} \cup \mathscr{U}$.

CHƯƠNG III

MA TRẬN

Lý thuyết ma trận có mặt khắp nơi, trong toán học cũng như trong các ngành khoa học khác. Vì vậy chúng ta dễ lầm tưởng rằng lý thuyết ma trận ra đời đã lâu lắm nhưng thực tế lý thuyết này mới ra đời từ đầu thế kỷ 19, mặc dù nhiều loại bảng số có tính chất đặc biệt đã được biết đến từ hàng trăm năm nay. Các ma trận vuông xuất hiện đầu tiên ở đầu thế kỷ 19 trong các công trình về dạng toàn phương hay về các phép thế tuyến tính. Phép nhân hai ma trận vuông cấp 3 được Gauss (Gau-xơ) đưa ra vào năm 1801. Tên gọi ma trận được nhà toán học Anh Sylvester (Synvét) đưa ra năm 1850. Cayley (Kê-li) là người đầu tiên mô tả một cách tổng quát các phép tính với các ma trận bất kỳ và ma trận nghịch đảo (1858). Peano là người đầu tiên đưa ra cách biểu diễn một ánh xạ tuyến tính qua các ma trận. Còn Gauss là người đầu tiên sử dụng ma trận để nghiên cứu các dạng toàn phương.

Ký hiệu ma trận cô đọng, rất có ích và thuận tiện trong khi thực hiện các phép biến đổi tuyến tính (chương 6) và cho phép ta phát triển một phương pháp hoàn chỉnh để giải các hệ phương trình vi phân tuyến tính. Sự quan tâm của các nhà vật lý đối với lý thuyết ma trận, đặc biệt tăng lên sau khi Heisenberg, Born, Jordan vào năm 1925 đã dùng nó trong các bài toán của cơ học lượng tử. Sự phát triển của máy tính hiện đại thực hiện dễ dàng những phép tính ma trận cơ bản càng thúc đẩy thêm sự ứng dụng rộng rãi ma trận vào những lĩnh vực khác.

Có người ví ma trận như là số học của toán cao cấp. Cách ví von này hoàn toàn hợp lý vì ma trận được sử dụng rộng rãi trong các chuyên ngành khác nhau của toán học. Với tư cách là sự biểu diễn của các phép biến đổi tuyến tính, ma trận được sử dụng trong các bài toán cực trị của hàm nhiều biến, đạo hàm hàm hợp, ma trận Jacobi trong phép đổi biến số, giải các hệ phương trình vi phân tuyến tính. Các ma trận dương dùng để mô tả các đặc trưng của véc tơ ngẫu nhiên, mô tả xác suất chuyển của chuỗi Markov trong lý thuyết xác suất. Ma trận còn được sử dụng để giải các bài toán quy hoạch tuyến tính, phân loại các đường, mặt bậc 2...

Chương trình phần mềm MATLAB (Matrix laboratory) hỗ trợ cho việc tính toán, đồ hoạ và mô phỏng cũng được thực hiện trong môi trường ma trận.

Nắm vững khái niệm ma trận giúp học viên học tốt các chương 4,5,6,7.

Trong chương này ta chỉ xét khái niệm ma trận cùng với các phép toán cộng ma trận, nhân một số với ma trận, nhân hai ma trận và ma trận chuyển vị.

Cộng hai ma trận cùng cỡ được thực hiện bằng cách cộng các phần tử nằm trên các hàng các cột tương ứng với nhau. Nhân một số với ma trận là nhân số này với mọi phần tử của ma trận. Hai phép toán này được thực hiện một cách dễ dàng. Phép nhân hai ma trận chỉ thực hiện được khi số cột của ma trận trước bằng số hàng của ma trận sau. Khi đó phần tử ở hàng i cột j của ma trận tích có được bằng cách lấy các phần tử trên hàng thứ i của ma trận trước nhân tương ứng với các phần tử trên cột thứ j của ma trận sau rồi cộng lại. Như vậy phép nhân ma trận được thực hiện khó hơn nhiều. Học viên cần luyện tập nhiều về phép nhân ma trận.

Tập hợp các ma trận cùng cỡ với phép cộng ma trận và phép nhân một số với ma trận là một không gian véc tơ. Tập hợp các ma trận vuông cùng cấp với phép cộng ma trận và phép nhân ma trận với ma trận là một vành có đơn vị, không giao hoán và không nguyên.

Ma trận của một hệ véc tơ trong một cơ sở $\mathscr{B}$ nào đó là ma trận có các cột là toạ độ của hệ véc tơ này trong cơ sở $\mathscr{B}$. Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$ là ma trận của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$ viết trong cơ sở $\mathscr{B}$. Hạng của ma trận là hạng của hệ véc tơ cột.

Ma trận nghịch đảo được xét trong chương 4 khi ta đã học định thức của ma trận. Bài toán chéo hoá ma trận được xét trong chương 6 cùng với bài toán chéo hoá tự đồng cấu tuyến tính. Ma trận trực giao và bài toán chéo hoá trực giao của một ma trận được xét trong chương 7 bằng cách sử dụng tích vô hướng.

3.1 KHÁI NIỆM MA TRẬN

Định nghĩa 3.1: *Một bảng số có m hàng n cột có dạng*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.1)}$$

được gọi là một ma trận cỡ $m \times n$.

a_{ij} là phần tử ở hàng thứ i và cột j.

Khi $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j$ thì A được gọi là ma trận nguyên, $a_{ij} \in \mathbb{C}, \forall i, j$ thì A được gọi là ma trận phức. Nếu không chỉ rõ a_{ij} thì ta quy ước A là ma trận thực.

Ma trận A cỡ $m \times n$ có thể được viết tắt dạng

$$A = \left[a_{ij} \right]_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}} \quad \text{hay} \quad A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Khi $m = n$ ta nói A là ma trận vuông cấp n.

Tập hợp tất cả các ma trận cỡ $m\times n$ được ký hiệu $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu $\mathcal{M}_n$.

Ví dụ 3.1: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & \pi \\ -3 & 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ là ma trận cỡ 2×3.

Hai ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m'\times n'}$ bằng nhau khi cùng cỡ và có các phần tử tương ứng đều bằng nhau:

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[b_{ij}\right]_{m'\times n'} \Leftrightarrow \begin{cases} m=m' \\ n=n' \\ a_{ij}=b_{ij}, \forall i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n} \end{cases} \tag{3.3}$$

3.2 CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN

3.2.1 Phép cộng ma trận

Cho hai ma trận cùng cỡ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$

Tổng của hai ma trận A,B là ma trận cùng cỡ được ký hiệu và định nghĩa bởi

$$A+B=\left[c_{ij}\right]_{m\times n},\ c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \text{ với mọi } i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}. \tag{3.4}$$

Ví dụ 3.2: $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 9 & 4 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 8 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

3.2.2 Phép nhân một số với ma trận

Cho ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ cỡ $m\times n$, và số thực k. Ta định nghĩa và ký hiệu:

$$kA=\left[ka_{ij}\right]_{m\times n} \tag{3.5}$$

Ví dụ 3.3: $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ 3 & -8 & 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 3.4: Tìm x,y,z và w nếu: $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$.

Giải: Theo (3.4) và (3.5) ta được $\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+w-1 & 2w+3 \end{bmatrix}$.

Theo (3.3) ta có $\begin{cases} 3x = x+4 \\ 3y = x+y+6 \\ 3z = z+w-1 \\ 3w = 2w+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ 2y = x+6 \\ 2z = w-1 \\ w = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ w = 3 \end{cases}$

<u>Tính chất 3.1</u>: Các tính chất sau đây đúng đối với các ma trận cùng cỡ:

1) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

2) Ma trận có các phần tử đều bằng 0 gọi là ma trận không và ký hiệu $\mathbf{0}$.

Khi đó: $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$;

3) $A + (-A) = \mathbf{0}$, trong đó $-A = \left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$;

4) $A + B = B + A$.

Vậy $(\mathcal{M}_{m\times n}, +)$ là một nhóm Abel.

Ta cũng kiểm chứng được các tính chất sau đúng với mọi số thực k, h với mọi ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ cỡ $m \times n$:

5) $k(A + B) = kA + kB$;

6) $(k + h)A = kA + hA$;

7) $k(hA) = (kh)A$;

8) $1A = A$.

Với 8 tính chất này tập $\mathcal{M}_{m\times n}$ là không gian véc tơ.

Ký hiệu E_{ij} là ma trận cỡ $m \times n$ có các phần tử đều bằng 0 ngoại trừ phần tử ở hàng i cột j bằng 1. Hệ các ma trận $\left\{E_{ij} \,\middle|\, i = \overline{1,m}\ ; j = \overline{1,n}\right\}$ là một cơ sở của $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Vậy $\dim \mathcal{M}_{m\times n} = m \cdot n$.

<u>Ví dụ 3.5</u>: Ma trận cỡ 2×3 bất kỳ có thể biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{13}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+a_{21}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}+a_{22}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}+a_{23}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

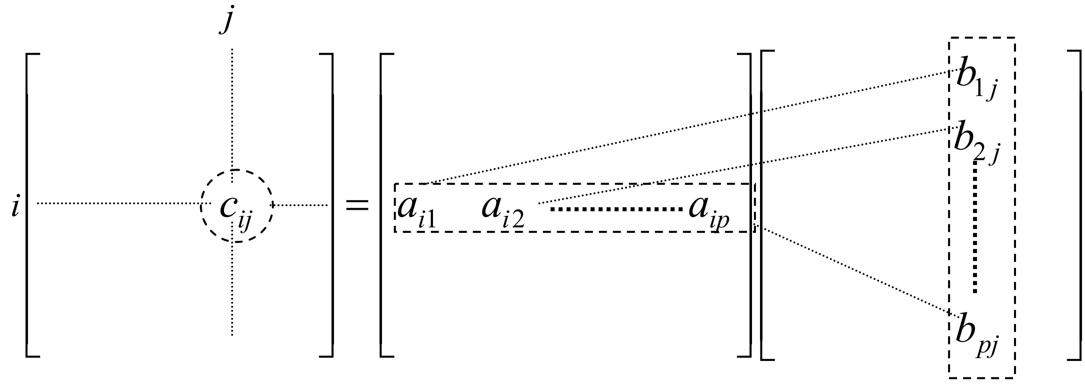
Vậy $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},...,\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ là một cơ sở của $\mathcal{M}_{2\times 3}$.

3.2.3 Phép nhân ma trận

Định nghĩa 3.2: *Tích hai ma trận* $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ *và* $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ *là ma trận cỡ* $m\times n$ *được ký hiệu và định nghĩa bởi* $AB=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$, *trong đó*

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj} \text{ với mọi } i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}. \qquad \textbf{(3.6)}$$

Vậy phần tử ở hàng thứ i cột thứ j của AB bằng tổng của tích các phần tử của hàng thứ i của A với các phần tử tương ứng của cột thứ j của B.



Ví dụ 3.6: $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 15\\ 7 & 17\end{bmatrix}.$

$$\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 8 & -4\\ 3 & 12 & -6\end{bmatrix}.$$

Ta thấy rằng tích của hai ma trận A và B định nghĩa được khi số cột của A bằng số hàng của B. Vì vậy có thể định nghĩa AB nhưng không định nghĩa được BA nếu số cột của B không bằng số hàng của A.

Khi A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thì ta có đồng thời AB và BA. Mặc dầu vậy chưa chắc có đẳng thức $AB = BA$, nói cách khác tích ma trận không có tính giao hoán. Chẳng hạn, xét

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 2 & 3 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & \dots & 0\\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0 & \dots & 0\\ 11 & 4 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \neq BA=\begin{bmatrix}3 & 6 & 0 & \dots & 0\\ -3 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

<u>**Tính chất 3.2**</u>: Giả sử A, B, C là các ma trận với số cột số hàng thích hợp để các phép toán sau xác định được thì ta có các đẳng thức:

1) $A(BC)=(AB)C$ *tính kết hợp.*

2) $A(B+C)=AB+AC$ *tính phân phối bên trái phép nhân ma trận với phép cộng.*

3) $(B+C)A=BA+CA$ *tính phân phối bên phải phép nhân ma trận với phép cộng.*

4) Với mọi $k\in\mathbb{R}$, $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

5) Với mọi số tự nhiên dương n ta xét ma trận I_n vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo bằng 1 và các phần tử ở vị trí khác đều bằng 0.

$$I_n=\begin{bmatrix}1 & & \bigcirc\\ & \ddots & \\ \bigcirc & & 1\end{bmatrix}$$

Khi đó với mọi ma trận A cỡ $m\times n$ ta có

$$I_m A = A = AI_n. \qquad \textbf{(3.7)}$$

Ma trận I_n được gọi là ma trận đơn vị cấp n.

Từ các tính chất trên ta thấy tập hợp các ma trận vuông cấp $n\geq 2$ cùng với phép cộng và nhân ma trận $(\mathcal{M}_n,+,.)$ là một vành không giao hoán, có đơn vị và không nguyên vì có ước của $\mathbf{0}$. Chẳng hạn

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&\dots&0\\2&4&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2&-6&0&\dots&0\\-1&3&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$A,B\neq\mathbf{0}$ nhưng $AB=\mathbf{0}$.

3.2.4 Đa thức ma trận

Giả sử $p(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_kt^k$ là một đa thức bậc k.

Với mọi ma trận A vuông cấp n. Ta định nghĩa đa thức của ma trận A như sau:

$$p(A)=a_0I+a_1A+\cdots+a_kA^k \tag{3.8}$$

Qui ước $A^0=I$, $A^1=A$.

Ví dụ 3.7: Cho $A=\begin{bmatrix}1&2\\4&-3\end{bmatrix}$ và đa thức $p(t)=5-4t+t^3$. Ta có:

$$A^3=\begin{bmatrix}-7&22\\60&-67\end{bmatrix},\ p(A)=5\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&2\\4&-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\4&-3\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}-6&30\\44&-50\end{bmatrix}.$$

3.2.5 Ma trận chuyển vị

Định nghĩa 3.3: *Cho ma trận A cỡ $m\times n$,* nếu *ta đổi các hàng của ma trận A thành các cột (và do đó các cột thành các hàng) thì ta được ma trận mới cỡ $n\times m$, gọi là ma trận chuyển vị của ma trận trên A, ký hiệu A^t*

$$A^t=\left[c_{ij}\right]_{n\times m}: c_{ij}=a_{ji}\quad\forall\ i=\overline{1,n}\ ; j=\overline{1,m}\ . \tag{3.9}$$

Ví dụ 3.8: $$A=\begin{bmatrix}-4&1\\2&0\\5&9\end{bmatrix};\ A^t=\begin{bmatrix}-4&2&5\\1&0&9\end{bmatrix}.$$

Tính chất 3.3:

1) $(A+B)^t=A^t+B^t$.

2) $(kA)^t=kA^t$.

3) $(AB)^t=B^tA^t$.

Định nghĩa 3.4:

1) *Nếu* $A = A^t$ *thì* A *được gọi là ma trận đối xứng* (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo thứ nhất).

2) $A = -A^t$ *thì* A *được gọi là phản đối xứng* (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng và trái dấu qua đường chéo thứ nhất, các phần tử trên đường chéo thứ nhất bằng 0).

3.3 MA TRẬN CỦA MỘT HỆ VÉC TƠ

3.3.1 Định nghĩa ma trận của một hệ véc tơ

Giả sử V là không gian n chiều với một cơ sở $\mathscr{B} = \{ e_1,.....e_n \}$.

$\{v_1,...,v_m\}$ là một hệ gồm m véc tơ của V có toạ độ trong cơ sở $\mathscr{B}$:

Giả sử $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \,;\, j = \overline{1,m}$, khi đó ma trận $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times m}$ có các cột là các toạ độ của các véc tơ $\{ v_1,...,v_m \}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ được gọi là ma trận của hệ véc tơ $\{v_1,...,v_m\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

$$A = \left[a_{ij} \right]_{n \times m} \,;\; v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \quad , j = \overline{1,m} \tag{3.10}$$

Ngược lại, với ma trận A cỡ $n \times m$ cho trước thì ta có hệ m véc tơ mà toạ độ của nó trong cơ sở $\mathscr{B}$ là các cột của A.

Vậy khi không gian véc tơ V với cơ sở cố định $\mathscr{B} = \{ e_1,.....e_n \}$ thì có tương ứng 1 - 1 giữa các ma trận cỡ $n \times m$ với các hệ m véc tơ của V.

Nói riêng, nếu $u = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ theo (2.9) ta ký hiệu tọa độ của u trong cơ sở $\mathscr{B}$ là

$$(u)_{\mathscr{B}} = (x_1,...,x_n) \tag{3.11}$$

Ma trận của u trong cơ sở $\mathscr{B}$ là

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Ví dụ 3.9: Ma trận của hệ véc tơ $v_1=(4,1,3,-2)$, $v_2=(1,2,-3,2)$, $v_3=(16,9,1,-3)$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ là

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 16 \\ 1 & 2 & 9 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

3.3.2 Ma trận chuyển cơ sở

Giả sử $\mathscr{B}=\{e_1,.....e_n\}$, $\mathscr{B}'=\{e'_1,.....e'_n\}$ là hai cơ sở của V. Ma trận của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ được gọi là *ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$*. Nghĩa là nếu

$$e'_j=\sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i \ , j=\overline{1,n} \ldots$$

Thì

$$T=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \tag{3.13}$$

là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$.

Khi đó với véc tơ bất kỳ $u\in V$; $u=\sum_{i=1}^{n} x_ie_i=\sum_{i=1}^{n} x'_i\,e'_i$. Ta có:

$$\left[x_i\right]_{n\times 1}=\left[t_{ij}\right]_{n\times n}\left[x'_j\right]_{n\times 1} \tag{3.14}$$

Nghĩa là

$$\left[u\right]_{\mathscr{B}}=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\left[u\right]_{\mathscr{B}'} \tag{3.15}$$

(3.14), (3.15) *được gọi là công thức đổi tọa độ*

Nếu A, A' lần lượt là ma trận của $\{v_1,...,v_m\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ thì

$$A=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}A' \tag{3.16}$$

Ví dụ 3.10: (Xem ví dụ 2.16 Chương 2) Hai hệ véc tơ $\mathscr{B}=\{e_1,e_n\}, \mathscr{B}'=\{e'_1,e'_n\}$, với $e_1=(1,0)$, $e_n=(0,1)$ và $e'_1=(1,1)$, $e_n=(4,3)$ là hai cơ sở của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$.

Theo công thức (2.10): $\forall u=(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ u=xe_1+ye_2=(4y-3x)e'_1+(x-y)e'_2$;

$$(u)_{\mathscr{B}}=(x,y);\ (u)_{\mathscr{B}'}=(4y-3x,x-y).$$

Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ là $T=\begin{bmatrix}1&4\\1&3\end{bmatrix}$, do đó

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4y-3x\\x-y\end{bmatrix}.$$

Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang $\mathscr{B}$ là $T'=\begin{bmatrix}-3&4\\1&-1\end{bmatrix}$, do đó

$$\begin{bmatrix}4y-3x\\x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&4\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

3.4 HẠNG CỦA MA TRẬN

3.4.1 Định nghĩa và tìm hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp

Định nghĩa 3.5: *Ta gọi hạng của ma trận A, ký hiệu $r(A)$, là hạng của các véc tơ cột của A.*

Phương pháp tìm hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp

Hạng $r(S)$ của một hệ véc tơ S của không gian V là số véc tơ của một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S hay là chiều của $\operatorname{span}S$ (xem Định lý 2.16 chương 2). Vì vậy khi ta thực hiện liên tiếp các phép biến đổi sau, gọi là các phép biến đổi sơ cấp, thì $\operatorname{span}S$ không đổi do đó hạng của hệ không thay đổi:

1) *Đổi chỗ cho nhau hai véc tơ của hệ.*

2) *Nhân vào một véc tơ của hệ một số khác* 0.

3) *Cộng vào một véc tơ của hệ một tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của hệ.*

Vì vậy để tìm hạng của một ma trận ta thực hiện các biến đổi sơ cấp lên các cột (sau này ta sẽ chứng minh được rằng ta cũng có thể biến đổi theo các hàng) để đưa ma trận về dạng tam giác hoặc hình thang (xem Nhận xét 2.2, cách 1). Số các véc tơ cột khác 0 là hạng của ma trận.

Ví dụ 3.11: $$A=\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\2&1&1&4\\-1&-2&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{3c_1+c_2\to c_2\\4c_1+c_3\to c_3\\-2c_1+c_4\to c_4}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&7&-7&0\\-1&-5&5&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{c_1 \to c_1 \\ c_2 \to c_2 \\ c_2 + c_3 \to c_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $r(A) = 2$.

<u>**Ví dụ 3.12**</u>:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{c_1 \to c_4 \\ c_2 \to c_5 \\ c_3 \to c_1 \\ c_4 \to c_2 \\ c_5 \to c_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{c_1 \to c_1 \\ c_1 + c_2 \to c_2 \\ -c_1 + c_3 \to c_3 \\ c_1 + c_4 \to c_4 \\ -2c_1 + c_5 \to c_5}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & a+1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{c_1 \to c_1 \\ c_2 \to c_3 \\ c_3 \to c_2 \\ -(a+3)c_2 + (a+1)c_3 + 2c_4 \to c_4 \\ (3-2a)c_2 - 3c_3 + 2c_5 \to c_5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2-2a & 2-2a \end{bmatrix}$$

Vậy $r(B) = \begin{cases} 4 & \text{nếu } a \neq 1 \\ 3 & \text{nếu } a = 1 \end{cases}$.

3.4.2 Các ma trận tương ứng với các phép biến đổi sơ cấp

Xét các ma trận vuông cấp n sau:

$$R(k,\lambda) = \left[a_{ij}\right] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ \cdots & \cdots & \lambda & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{hàng } k \\ \\ \\ \end{array} \\ \text{cột k} \end{array} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \neq k \\ \lambda & i = j = k \end{cases} \tag{3.17}$$

$$P(i,j) = \left[a_{kl}\right] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{hàng } i \\ \\ \text{hàng } j \\ \\ \end{array} \\ \text{Cột } i \quad \text{Cột } j \end{array} \qquad a_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \neq i; j \\ 0 & k = l \text{ và bằng } i \text{ hoặc } j \\ 1 & k = i, l = j \\ 1 & k = j, l = i \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác} \end{cases} \tag{3.18}$$

$$Q(i,j,\lambda)=\left[a_{kl}\right]=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & \lambda & \cdots & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \text{hàng } i \qquad a_{kl}=\begin{cases} 1 & k=l \\ \lambda & k=i, l=j \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác} \end{cases} \tag{3.19}$$

Cột j

Tính chất 3.5: Ta dễ dàng kiểm tra được:

a) Nếu nhân $R(k,\lambda)$ vào bên phải của ma trận A thì ma trận tích $AR(k,\lambda)$ có được bằng cách nhân thêm λ vào cột k của ma trận A.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & \lambda b & c \\ a' & \lambda b' & c' \\ a'' & \lambda b'' & c'' \end{bmatrix}$$

b) Nếu nhân $P(i,j)$ vào bên phải của ma trận A thì ma trận tích $AP(i,j)$ có được bằng cách đổi chỗ hai cột i và j của A cho nhau.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b & a & c \\ b' & a' & c' \\ b'' & a'' & c'' \end{bmatrix}$$

c) Nếu nhân $Q(i,j,\lambda)$ vào bên phải của ma trận A thì ma trận tích $AQ(i,j,\lambda)$ có được bằng cách nhân λ vào cột i và cộng vào cột j của ma trận A.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+\lambda c & b & c \\ a'+\lambda c' & b' & c' \\ a''+\lambda c'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

d) Nếu nhân P,Q,R vào bên trái của ma trận A thì ta có các kết quả tương tự như trên, trong đó các tác động lên hàng đổi thành tác động lên cột và ngược lại. Chẳng hạn

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ \lambda a' & \lambda b' & \lambda c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \lambda a'+a'' & \lambda b'+b'' & \lambda c'+c'' \end{bmatrix}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG III

3.1) Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\\ 4 & -1\end{bmatrix}$. Tính:

a) $(A+B)+C$ b) $A+(B+C)$

c) A^t, B^t, C^t d) A^tB e) BC^t.

3.2) Cho $A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$.

Tính $3A+4B-2C$.

3.3) Trong không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2. Ba ma trận sau có độc lập không: $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

3.4) Trong không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2. Tìm tọa độ của ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & -7\end{bmatrix}$ trong cơ sở $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

3.5) Cho các ma trận

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -4 & 2\\ -1 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}.$$

a) Tính $A+B$, $A+C$, $3A-4B$.

b) Tính AB, AC, AD, BC, BD, CD.

c) Tính A^t, A^tC, D^tA^t, B^tA, D^tD, DD^t.

3.6) Tính: a) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}17 & -6\\ 35 & -12\end{bmatrix}^5$.

3.7) Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$.

a) Cho $f(x)=2x^3-4x+5$, tính $f(A)$.

b) Đặt $g(x)=\begin{vmatrix}1-x & 2\\ 4 & -3-x\end{vmatrix}$, tính $g(A)$.

3.8) Cho $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}7&0\\0&11\end{bmatrix}$. Tính :

a) $A+B$ b) AB c) A^2

d) A^n e) $p(A)$, trong đó $p(t)$ là một đa thức.

3.9) Chứng minh nếu $AB=BA$ thì với mọi số tự nhiên n > 0:

$$(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2 + \ldots + B^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k}B^k .$$

3.10) Tính: a) $\begin{bmatrix}1&-2\\3&-4\end{bmatrix}^5$ b) $\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}^n$ c) $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}^{1999}$

d) $\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}^n$ e) $\begin{bmatrix}\lambda_1&&\bigcirc\\&\ddots&\\\bigcirc&&\lambda_k\end{bmatrix}^n$ f) $\begin{bmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{bmatrix}^n$.

3.11) Cho $J=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$

a) Tính J^2

b) Xét ma trận $A=\alpha I+\beta J$, chứng minh A^n có dạng $A^n=\alpha_n I+\beta_n J$.

Tính α_n, β_n theo α,β,n.

3.12*) Tính A^{100} với:

a) $A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-1&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix}0&2\\-3&5\end{bmatrix}$ d) $A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&3\end{bmatrix}$.

3.13) Cho $A=\left[a_{ij}\right]$ là ma trận vuông cấp $n>2$; $a_{ij}=\begin{cases}0 & \text{nếu } i=j\\1 & \text{nếu } i\neq j\end{cases}$

a) Tìm α,β sao cho $P=\alpha A+\beta I$ thoả mãn $P^2=I$.

b) Viết cụ thể P trong các trường hợp $n=3, n=4$.

3.14) Cho ma trận $A=\left[a_{ij}\right]$ vuông cấp n. Ta gọi $\mathrm{Tr}A=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$ (tổng các phần tử trên đường chéo chính) là vết của A. Chứng minh:

a) $\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}\,A+\mathrm{Tr}\,B$;

b) $\mathrm{Tr}AB=\mathrm{Tr}BA$ (mặc dù $AB\neq BA$);

c) nếu $B=P^{-1}AP$ thì $\mathrm{Tr}A=\mathrm{Tr}B$;

d) không tồn tại ma trận A,B sao cho $AB-BA=I$.

3.15) Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$

a) Chứng minh A thoả mãn phương trình $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$.

b) Chứng minh $A^k=0$ với số nguyên dương $k\geq 2$ khi và chỉ khi $A^2=0$.

3.16) Cho $D=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_n & d_n\end{bmatrix}$.

Tính DA và BD.

3.17) Hai ma trận A,B được gọi là giao hoán nếu $AB=BA$. Chứng minh rằng A giao hoán với mọi ma trận vuông cùng cấp khi và chỉ khi A là ma trận vô hướng (nghĩa là $A=kI$).

3.18) Tìm tất cả các ma trận $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t\end{bmatrix}$ giao hoán với $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

3.19) Chứng minh rằng tập hợp tất cả các ma trận đối xứng vuông cấp n $(A^t=A)$ là không gian véc tơ con của không gian véc tơ $\mathcal{M}_n$ các ma trận vuông cấp n. Tìm một cơ sở của không gian véc tơ con này.

3.20) Tìm các ma trận $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ trong các trường hợp sau:

a) $A^2=0$ b) $A^2=I$

c) $c=0$ và $A^n=I$ với n nào đó.

3.21) Ma trận vuông A được gọi là luỹ đẳng nếu $A^2=A$. Chứng minh rằng tổng của hai ma trận luỹ đẳng A,B là luỹ đẳng khi và chỉ khi $AB+BA=0$.

3.22) Cho A, B là hai ma trận cỡ $m\times n$. Chứng minh rằng $r(A+B)\le r(A)+r(B)$.

3.23) Tìm các ví dụ về hai ma trận A, B vuông cấp 2 thỏa mãn từng điều kiện sau:

a) $r(A+B)< r(A), r(B)$.

b) $r(A+B)= r(A)= r(B)$.

c) $r(A+B)> r(A), r(B)$.

3.24) Tính tích ma trận AB bằng cách dùng phép nhân ma trận khối

$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\4&5&6&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ có dạng ma trận khối $A=\begin{bmatrix}E&F\\0&G\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}R&S\\0&T\end{bmatrix}$,

trong đó $E=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $G=[2]$, $R=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$, $S=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $T=[1]$.

CHƯƠNG IV
ĐỊNH THỨC

Ma trận và định thức ngày nay luôn đi liền với nhau và ai cũng nghĩ là khái niệm định thức phải ra đời sau khái niệm ma trận, nhưng sự thực ngược lại. Định thức hình thành là nhằm để giải các hệ phương trình tuyến tính mà việc làm này đã có một lịch sử lâu đời trước đó.

Khái niệm định thức lần đầu tiên được Leibniz (Lépnít) đưa ra vào năm 1693 khi bàn đến việc giải hệ phương trình tuyến tính. Định thức được tiếp tục phát triển và nghiên cứu qua các công trình của Cramer (Còrame) (Thụy sĩ), Vandermonde (Vănđécmông) (Hà Lan), Laplace (Pháp), Jacobi (ia-cô-bi) (Đức)... Người đầu tiên nghiên cứu khái niệm định thức một cách hệ thống là Cauchy (Cô-si) (Pháp).

Ngoài ứng dụng để giải hệ phương trình tuyến tính, định thức còn được sử dụng để nghiên cứu những vấn đề của ma trận như: ma trận nghịch đảo, hạng của ma trận, tìm giá trị riêng... Khảo sát tính chất độc lập của một hệ véc tơ. Định thức Jacobi được sử dụng trong phép đổi biến số của tích phân nhiều lớp. Định thức Wronsky (vrông-xki) dùng để kiểm tra tính chất độc lập tuyến tính của các nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

Định thức của một ma trận vuông được định nghĩa bằng tổng của tất cả các số hạng có được bằng cách lấy tích của các phần tử trên tất cả các hàng nằm trên các cột khác nhau của ma trận và nhân với dấu của hoán vị tương ứng. Tuy nhiên khi tính định thức ta thường sử dụng các tính chất của nó và phương pháp khai triển theo hàng, theo cột hoặc nhiều hàng, nhiều cột (Định lý Laplace).

Để định nghĩa định thức ta sử dụng khái niệm phép thế đó là một song ánh từ một tập có n phần tử vào chính nó, ảnh của phép thế là hoán vị. Khái niệm phép thế, hoán vị ta đã gặp ở chương 1, trong mục giải tích tổ hợp.

Trong chương này ta xét đến hai ứng dụng của định thức đó là tìm ma trận nghịch đảo và tìm hạng của ma trận bằng cách tính các định thức con. Trong chương 5 ta sẽ ứng dụng định thức để giải hệ phương trình tuyến tính. Trong chương 6 ta sẽ ứng dụng định thức để tìm giá trị riêng của ma trận hoặc tự đồng cấu tuyến tính.

Trong chương 3, ta đã chỉ ra rằng tập các ma trận vuông cùng cấp với phép cộng ma trận và phép nhân ma trận là một vành có đơn vị nhưng không nguyên, do đó nó không phải là một trường. Vì vậy tồn tại những ma trận vuông khác ma trận không và không khả nghịch. Sử dụng tính chất định thức của tích hai ma trận bằng tích hai định thức của hai ma trận này, ta chứng minh được điều kiện cần và đủ để một ma trận khả nghịch là định thức của nó khác 0. Đồng thời ta có công thức tính ma trận nghịch đảo bằng nghịch đảo của định thức nhân với chuyển vị của ma trận phụ hợp.

Hạng của một ma trận bằng cấp cao nhất của định thức con khác 0 chứa trong ma trận.

Vì vậy yêu cầu của chương này là phải nắm vững được định nghĩa định thức của một ma trận vuông, các tính chất của định thức và các phương pháp tính định thức. Từ đó có thể tính toán thành thạo định thức của các ma trận thông thường, vận dụng để giải các bài toán về ma trận nghịch đảo, về hạng của ma trận.

Ngoài phương pháp sử dụng định thức ta có thể sử dụng phương pháp Gauss-Jordan để tìm ma trận nghịch đảo, thực chất của phương pháp này là sử dụng phép biến đổi sơ cấp lên các hàng của ma trận.

4.1 HOÁN VỊ VÀ PHÉP THẾ

Định nghĩa 4.1:

1) *Mỗi song ánh* $\sigma:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ *được gọi là một phép thế bậc n.*

Ta thường ký hiệu một phép thế bằng một ma trận có hàng thứ nhất là các số $1,2,...,n$ sắp theo thứ tự tăng dần còn hàng thứ hai là ảnh của nó:

$$\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & ... & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n)\end{bmatrix}$$

2) *Ảnh của một phép thế được gọi là hoán vị.* Với phép thế σ ta có hoán vị tương ứng

$$\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n)\end{bmatrix}.$$

3) *Dấu của phép thế:*

Mỗi cặp $i<j$ mà $\sigma(i)>\sigma(j)$ được gọi là một *nghịch thế* của phép thế σ.

Giả sử k là số các nghịch thế của σ, ta định nghĩa và ký hiệu dấu của phép thế σ là

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^k \qquad \textbf{(4.1)}$$

Như vậy phép thế lấy dấu + hoặc – nếu số các nghịch thế tương ứng là chẵn hoặc lẻ.

Ta dễ dàng kiểm chứng được rằng tập các phép thế bậc n với luật hợp thành là phép hợp của hai ánh xạ tạo thành một nhóm không giao hoán, gọi là *nhóm đối xứng bậc* n, ký hiệu S_n.

Trong chương 1 ta đã biết tập S_n có đúng $n!$ phần tử. Chẳng hạn S_2 có 2 phần tử, S_3 có 6 phần tử ...

Ví dụ 4.1: Hoán vị $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ ứng với phép thế $\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ có một nghịch thế là cặp (2, 3). Vậy $\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^1=-1$.

Để tìm số các nghịch thế k của phép thế σ ta thực hiện các bước sau:

Trong hoán vị $\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n)\end{bmatrix}$ có i_1 là giá trị sao cho $\sigma(i_1)=1$.

♦ Gọi k_1 là số các số trong $\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n)\end{bmatrix}$ đứng trước $\sigma(i_1)=1$; (k_1 là số các nghịch thế ứng với 1).

♦ Xoá số $\sigma(i_1)=1$, tồn tại i_2 sao cho $\sigma(i_2)=2$, gọi k_2 là số các số còn lại trong $\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n)\end{bmatrix}$ đứng trước $\sigma(i_2)=2$; (k_2 là số các nghịch thế ứng với 2).

♦ Xoá số $\sigma(i_2)=2$ và tiếp tục đếm như thế ...

Cuối cùng số các nghịch thế của σ là:

$$k=k_1+k_2+...+k_{n-1}$$

Ví dụ 4.2: 1) Hoán vị $\begin{bmatrix}3 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ *có* $k_1=3,\ k_2=2,\ k_3=0$.

Vậy $k=k_1+k_2+k_3=3+2+0=5$ do đó $\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^5=-1$.

2) Hoán vị $\begin{bmatrix}4 & 2 & 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$ *có* $k_1=3,\ k_2=1,$ xóa 1, 2 $\Rightarrow k_3=2, k_4=0$.

Vậy $k=k_1+k_2+k_3+k_4=6$ do đó $\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^6=1$.

Tính chất 4.1:

1) Cặp $(i,j), i\neq j$ là một nghịch thế của phép thế σ (nghĩa là $i<j$ và $\sigma(i)>\sigma(j)$) khi và chỉ khi dấu của $\dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$ bằng -1. Vậy

$$\operatorname{sgn}\sigma=\prod_{1\le i\neq j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\right). \qquad \textbf{(4.2)}$$

2) Phép thế chuyển vị $\sigma=\begin{bmatrix}i_0 & j_0\end{bmatrix}$ là phép thế chỉ biến đổi hai phần tử i_0, j_0 cho nhau và giữ nguyên các phần tử còn lại:

$$\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & i_0 & \dots & j_0 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & j_0 & \dots & i_0 & \dots & n\end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.3)}$$

Dễ dàng tính được: $k_1=\dots=k_{i_0-1}=0$, $k_{i_0}=j_0-i_0$,

$k_{i_0+1}=\dots=k_{j_0-1}=1$, $k_{j_0}=\dots=k_n=0 \;\Rightarrow\; k=2(j_0-i_0)-1$

Vậy $\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^k=-1$.

3) Với mọi $\sigma,\mu\in S_n$:

$$\operatorname{sgn}(\sigma\circ\mu)=\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\mu . \qquad \textbf{(4.4)}$$

Thật vậy, khi (i,j) chạy khắp tập $\{1,2,...,n\}\times\{1,2,...,n\}\setminus\{(1,1),...,(n,n)\}$ thì $(\mu(i),\mu(j))$ cũng chạy khắp tập này. Do đó:

$$\operatorname{sgn}\sigma=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\right)=\prod_{1\le\mu(i)\ne\mu(j)\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{\mu(i)-\mu(j)}\right)$$

$$=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{\mu(i)-\mu(j)}\right).$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\mu=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{\mu(i)-\mu(j)}\right)\cdot\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\mu(i)-\mu(j)}{i-j}\right)$$

$$=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{i-j}\right)=\operatorname{sgn}\left(\sigma\circ\mu\right).$$

4) Với mọi phép thế chuyển vị $\left[i_0\ j_0\right]$ (xem 4.3) và phép thế σ:

$$\operatorname{sgn}\sigma\circ\left[i_0\ j_0\right]=-\operatorname{sgn}\sigma .$$

4.2 ĐỊNH NGHĨA ĐỊNH THỨC

Trước hết ta liên hệ đến khái niệm định thức cấp 2 đã biết khi giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}=ab'-ba',\quad D_x=\begin{vmatrix}c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}=cb'-bc',\quad D_y=\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}=ac'-ca'.$$

Các định thức này được xác định là tích 2 phần tử của đường chéo thứ nhất trừ tích 2 phần tử của đường chéo thứ hai.

Như vậy định thức của ma trận $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ vuông cấp 2 là

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{4.5}$$

Mặt khác nhóm đối xứng S_2 có 2 phần tử là $\sigma_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $\sigma_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ có dấu $\operatorname{sgn}\sigma_1=1$, $\operatorname{sgn}\sigma_2=-1$. Vậy (4.5) có thể viết lại

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$=\operatorname{sgn}\sigma_1\, a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)}+\operatorname{sgn}\sigma_2\, a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)}=\sum_{\sigma\in S_2}\operatorname{sgn}\sigma\; a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\,.$$

Mở rộng kết quả này ta có định nghĩa định thức của ma trận vuông cấp n bất kỳ như sau:

Định nghĩa 4.2: *Định thức của ma trận vuông* $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *được ký hiệu là*

$\det A$ *hay* $|A|$ *và định nghĩa bởi biểu thức:*

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)} \tag{4.6}$$

Như vậy định thức của ma trận vuông $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ là tổng tất cả các tích gồm n phần tử trên n hàng mà ở trên n cột khác nhau của ma trận A và nhân với dấu của phép thế tương ứng.

Ví dụ 4.3: Nhóm đối xứng S_3 có 6 phần tử là (xem ví dụ 1.23 chương 1)

$$\sigma_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ \sigma_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ \sigma_3=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_4=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\ ,\ \sigma_5=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.\ \sigma_6=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

có dấu $\operatorname{sgn}\sigma_1=\operatorname{sgn}\sigma_2=\operatorname{sgn}\sigma_3=1$, $\operatorname{sgn}\sigma_4=\operatorname{sgn}\sigma_5=\operatorname{sgn}\sigma_6=-1$. Vậy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}\sigma\; a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \tag{4.7}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\,.$$

<u>Ví dụ 4.4</u>: $\begin{vmatrix} 2 & 5 & x \\ 3 & y & 4 \\ z & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12y + 3x + 20z - xyz - 8 - 90 = 3x + 12y + 20z - xyz - 98$.

<u>Ví dụ 4.5</u>: Tính định thức $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & \bigcirc & & & a_{nn} \end{vmatrix}$

Xét phép thế $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$ có $\operatorname{sgn} \sigma_0 = (-1)^0 = 1$.

Với mọi $\sigma \in S_n$, nếu $\sigma \neq \sigma_0$ thì tồn tại k sao cho $\sigma(k) \neq k \Rightarrow$ tồn tại k' sao cho $\sigma(k') < k' \Rightarrow a_{k'\sigma(k')} = 0 \Rightarrow a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = 0$. Vậy

$$D_n = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn} \sigma_0 \cdot a_{11} \dots a_{nn} = a_{11} \dots a_{nn}. \qquad \textbf{(4.8)}$$

Tương tự

$$D'_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \bigcirc & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \dots a_{nn}. \qquad \textbf{(4.9)}$$

<u>Ví dụ 4.6</u>: Tính định thức $D''_n = \begin{vmatrix} & \bigcirc & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & ⋰ & \vdots & \vdots \\ & a_{n-1,2} & \dots & \dots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Xét phép thế $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ thoả mãn $\sigma_1(k) + k = n + 1, \ \forall k = 1, \dots, n$.

Ta dễ dàng tính được

$k_1 = n - 1, k_2 = n - 2, \dots, k_{n-1} = 1 \Rightarrow k = 1 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}\sigma_1 = (-1)^{n(n-1)/2}$. Mặt khác với mọi $\sigma \in S_n$, nếu $\sigma \neq \sigma_1$ thì tồn tại k sao cho $\sigma(k) + k < n+1 \;\Rightarrow a_{k\sigma(k)} = 0 \Rightarrow a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = 0$.

Vậy
$$D''_n = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}\sigma_1 \cdot a_{n1} \dots a_{k,n-k} \dots a_{1n}$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1} \dots a_{k,n-k} \dots a_{1n} \qquad \textbf{(4.10)}$$

Tương tự

$$D'''_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ \vdots & \iddots & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1} \dots a_{k,n-k} \dots a_{1n}. \qquad \textbf{(4.11)}$$

<u>Ví dụ 4.7</u>: $\begin{vmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & -7 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) \cdot (-1) \cdot 3 = 42$.

<u>Ví dụ 4.8</u>: $\begin{vmatrix} 4 & -2 & x \\ 3 & y & 0 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3\times 2}{2}} xyz = -xyz$.

<u>Ví dụ 4.9</u>: Giả sử A là ma trận vuông cấp n có tính chất trên mỗi hàng mỗi cột có đúng một phần tử bằng 1 còn các phần tử còn lại đều bằng 0. Tính định thức của A.

Giải: Trên hàng thứ i có phần tử duy nhất trên cột j_i bằng 1 còn các phần tử còn lại đều bằng 0. Vì mỗi cột có đúng một phần tử bằng 1 nên các phần tử j_i ứng với các hàng khác nhau là khác nhau, nói cách khác $\left[j_1 \; j_2 \; \dots \; j_n \right]$ là một hoán vị của $\{1, \dots, n\}$.

Ký hiệu $\sigma_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{bmatrix}$ thì $\det(A) = \operatorname{sgn}\sigma_A$.

<u>Định nghĩa 4.3</u>: *Định thức của ma trận $A = \left[a_{ij} \right]_{n\times n}$ của hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ ứng với cơ sở $\mathscr{B}$ trong không gian véc tơ n chiều V được gọi là định thức của hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ và ký hiệu $D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_n\}$. Vậy*

$$D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_n\} = \det A. \qquad \textbf{(4.12)}$$

Ví dụ 4.10: Hệ véc tơ $v_1=(2,4,1)$, $v_2=(3,6,-2)$, $v_3=(-1,5,2)$ có ma trận trong cơ sở chính tắc $\mathscr{B}$ của $\mathbb{R}^3$ là $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 6 & 5\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$.

Vậy $D_{\mathscr{B}}\{v_1,v_2,v_3\}=\det A=49$.

4.3 CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐỊNH THỨC

Tính chất 4.2:

1) Nếu đổi chỗ hai hàng của ma trận thì định thức đổi dấu:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n},\ A'=\left[a'_{ij}\right]_{n\times n},\ a'_{ij}=\begin{cases}a_{ij} & \text{nếu } i\neq k,m\\ a_{kj} & \text{nếu } i=m\\ a_{mj} & \text{nếu } i=k\end{cases}\quad \text{thì}\ \det A'=-\det A.$$

Thật vậy: $\det A'=\sum\limits_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a'_{1\sigma(1)}\dots a'_{k\sigma(k)}\dots a'_{m\sigma(m)}\dots a'_{n\sigma(n)}$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}\dots a_{m\sigma(k)}\dots a_{k\sigma(m)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma'(1)}\dots a_{k\sigma'(k)}\dots a_{m\sigma'(m)}\dots a_{n\sigma'(n)}$$

$$=-\sum_{\sigma'\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma'\cdot a_{1\sigma'(1)}\dots a_{m\sigma'(k)}\dots a_{k\sigma'(m)}\dots a_{n\sigma'(n)}=-\det A$$

trong đó $\sigma'=\sigma\circ\left[k\quad m\right]$.

Ví dụ 4.11: $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a'' & b'' & c''\\ a' & b' & c'\\ a & b & c\end{vmatrix}$.

2) Định thức có tính chất tuyến tính đối với mỗi hàng:

Cho hai ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ và ma trận $C=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ có hàng thứ k là tổ hợp tuyến tính của hàng thứ k của A và B, các hàng khác hàng thứ k của ba ma trận này bằng nhau.

Nghĩa là $\begin{cases}c_{ij}=a_{ij}=b_{ij} & \text{nếu } i\neq k\\ c_{kj}=\alpha\, a_{kj}+\beta\, b_{kj}; & \text{với mọi } j=1,\dots,n.\end{cases}$

thì $\det C=\alpha\det A+\beta\det B$.

Thật vậy: $\det C = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot c_{1\sigma(1)}\ldots c_{k\sigma(k)}\ldots c_{n\sigma(n)}$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}\ldots(\alpha\, a_{k\sigma(k)}+\beta\, b_{k\sigma(k)})\ldots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \alpha\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}\ldots a_{k\sigma(k)}\ldots a_{n\sigma(n)} + \beta\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot b_{1\sigma(1)}\ldots b_{k\sigma(k)}\ldots b_{n\sigma(n)}$$

$$= \alpha\det A + \beta\det B.$$

<u>Ví dụ 4.12</u>: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha a_1+\beta a_2 & \alpha b_1+\beta b_2 & \alpha c_1+\beta c_2 \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

3) Từ 1) và 2) suy ra rằng trong một định thức có hai hàng tỷ lệ thì định thức bằng 0.

4) Nếu ta cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác thì định thức không thay đổi.

5) Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận đó:

Giả sử $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $A^t=\left[a'_{ij}\right]_{n\times n}$, $a'_{ij}=a_{ji}, i,j=1,\ldots,n$ thì $\det A^t=\det A$.

$$\det A^t = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a'_{1\sigma(1)}\ldots a'_{k\sigma(k)}\ldots a'_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{\sigma(1)1}\ldots a_{\sigma(k)k}\ldots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma^{-1}(1)}\ldots a_{k\sigma^{-1}(k)}\ldots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma^{-1}\cdot a_{1\sigma^{-1}(1)}\ldots a_{k\sigma^{-1}(k)}\ldots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \det A$$

vì $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$.

<u>Ví dụ 4.13</u>: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$.

6) Từ 5) suy ra rằng các tính chất của định thức đúng với hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại. Với tính chất này tất cả các kết quả của định thức đúng đối với hàng có thể chuyển thành tính chất đúng đối với cột. Chẳng hạn, tính chất 4) chuyển thành tính chất đối với cột như sau: nếu ta cộng vào một cột một tổ hợp tuyến tính các cột khác thì định thức không thay đổi.

7) Định thức của mọi hệ n véc tơ phụ thuộc tuyến tính của không gian véc tơ n chiều đều bằng 0.

8) $$\overline{\det(A)}(\operatorname{mod} p)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\,\overline{a}_{1\sigma(1)}\ldots\overline{a}_{n\sigma(n)}=\begin{vmatrix}\overline{a}_{11} & \ldots & \overline{a}_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{a}_{n1} & \ldots & \overline{a}_{nn}\end{vmatrix} \qquad \textbf{(4.13)}$$

<u>Ví dụ 4.14</u>: $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ với $a_{ij}=\pm 1$

$$\overline{\det(A)}(\operatorname{mod} 2)=\begin{vmatrix}\overline{1} & \ldots & \overline{1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{1} & \ldots & \overline{1}\end{vmatrix}=\overline{0}(\operatorname{mod} 2)\ \Rightarrow\ \det A \text{ chẵn.}$$

<u>Ví dụ 4.15</u>: $$D_n=\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & a & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 1 & a & \ldots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+n-1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ a+n-1 & a & 1 & \ldots & 1\\ a+n-1 & 1 & a & \ldots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a+n-1 & 1 & 1 & \ldots & a\end{vmatrix}$$

(cộng các cột vào cột 1)

$$=(a+n-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & a & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 1 & a & \ldots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & a\end{vmatrix}=(a+n-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & a-1 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & 0 & a-1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a-1\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D_n=(a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

4.4 CÁC CÁCH TÍNH ĐỊNH THỨC

4.4.1 Khai triển theo hàng, theo cột

Nếu ta nhóm theo cột thứ j công thức (4.6) thì ta được:

$$\det A=a_{1j}\left(\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(1)=j}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\ldots a_{n\sigma(n)}\right)+$$

$$+a_{2j}\left(\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(2)=j}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}a_{3\sigma(3)}\ldots a_{n\sigma(n)}\right)+\ldots+$$

$$+a_{nj}\left(\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(n)=j}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n-1\sigma(n-1)}\right).$$

Vì vậy định thức của ma trận A được viết lại dưới dạng

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \qquad \textbf{(4.14)}$$

gọi là công thức **khai triển của A theo cột thứ j**.

A_{ij} được gọi là phần bù đại số của a_{ij}.

Định lý 4.3: *Ký hiệu M_{ij} là định thức của ma trận cấp n-1 có được bằng cách xoá hàng i cột j của ma trận A thì*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad \textbf{(4.15)}$$

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh $A_{11} = M_{11}$. Ta có :

$$A_{11} = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1)=1} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma' \; a_{2\sigma'(2)} \ldots a_{n\sigma'(n)} = M_{11}$$

với $\sigma' = \sigma\big|_{\{2,\ldots,n\}}$ là phép thế trong tập hợp $\{2,\ldots,n\}$.

Trường hợp A_{ij} bất kỳ, ta thực hiện i-1 lần đổi chỗ các hàng và j-1 lần đổi chỗ các cột để đưa về hàng 1 cột 1.

Do đó $A_{ij} = (-1)^{(i-1)+(j-1)} M_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Công thức **khai triển theo hàng i** được suy từ tính chất 3.7: 6)

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} \qquad \textbf{(4.16)}$$

Nhận xét 4.1: Công thức khai triển theo cột thứ j (4.14) và công thức khai triển theo cột I (4.16) cho phép tính định thức cấp n theo tổng các định thức cấp $n-1$ dạng $a_{ij}A_{ij}$, trong đó việc chọn hàng thứ i và cột thứ j là tùy ý. Nếu ở hàng thứ i hoặc cột j mà $a_{ij} = 0$ thì $a_{ij}A_{ij} = 0$. Vì vậy để tính định thức ta thức hiện các bước sau:

- Chọn hàng i hoặc cột j có nhiều phần tử bằng 0 hoặc dễ triệt tiêu.
- Thực hiện các phép biến đổi (cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác) để triệt tiêu các phần tử trên hàng (hoặc cột) đã chọn.
- Khai triển theo hàng hoặc cột đã triệt tiêu.

<u>Ví dụ 4.16</u>: $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}\overset{\substack{-c_1+c_3\to c_3\\-2c_1+c_4\to c_4}}{=}\begin{vmatrix}1&2&2&2\\1&0&0&0\\3&-1&-4&-6\\1&2&-1&-7\end{vmatrix}$

Khai triển theo hàng thứ 2 ta được $D=(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2&2&2\\-1&-4&-6\\2&-1&-7\end{vmatrix}$.

Tiếp tục triệt tiêu hàng thứ nhất của định thức trên ta có

$$D=-\begin{vmatrix}2&0&0\\-1&-3&-5\\2&-3&-9\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-3&-5\\-3&-9\end{vmatrix}=(-2)(-3)\begin{vmatrix}1&-5\\1&-9\end{vmatrix}=6(-9+5)=-24.$$

4.4.2 Định lý khai triển Laplace (theo k hàng k cột)

Từ ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ta để ý k hàng: $i_1<...<i_k$ và k cột: $j_1<...<j_k$.

Giao của k hàng k cột này là một ma trận cấp k. Định thức của ma trận này được ký hiệu là $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$.

Nếu từ ma trận A ta xoá đi k hàng $i_1,...,i_k$ và k cột $j_1,...,j_k$ thì ta có ma trận con cấp $n-k$. Định thức của ma trận này được ký hiệu là $\overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ và

$$A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}=(-1)^{i_1+...+i_k+j_1+...+j_k}\,\overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \tag{4.17}$$

được gọi là phần bù đại số của $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$.

<u>Ví dụ 4.17</u>: $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{bmatrix}$

$$M_{13}^{25}=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{15}\\a_{32}&a_{35}\end{vmatrix}$$

$$A_{13}^{25} = (-1)^{1+3+2+5}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

<u>Định lý 4.4</u> (Laplace):

1) Khai triển k hàng $i_1 < ... < i_k$:

$$\det A = \sum_{1 \le j_1 < ... < j_k \le n} M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \tag{4.18}$$

Định thức của A bằng tổng tất cả các định thức con cấp k nằm trên k hàng $i_1 < ... < i_k$ nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

2) Khai triển k cột $j_1 < ... < j_k$:

$$\det A = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \tag{4.19}$$

Định thức của A bằng tổng tất cả các định thức con cấp k nằm trên k cột $j_1 < ... < j_k$ nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

Đặc biệt khi $k = 1$ ta có công thức khai triển theo hàng và theo cột (4.14), (4.16).

Chứng minh: Trường hợp $i_1 = 1,...,i_k = k$:

$$M_{1,...,k}^{1,...,k} = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} ... a_{k\sigma(k)}$$

$$\overline{M}_{1,...,k}^{1,...,k} = \sum_{\sigma' \in S_{n-k}} \operatorname{sgn}\sigma' \cdot a_{k+1\sigma'(k+1)} ... a_{n\sigma'(n)} = A_{1,...,k}^{1,...,k}$$

Ứng với mỗi phép thế σ của tập $\{1,...,k\}$ và σ' của $\{k+1,...,n\}$ thì phép thế μ có hoán vị tương ứng $[\sigma(1),...,\sigma(k),\sigma(k+1),...,\sigma(n)]$ có số các nghịch thế bằng số các nghịch thế của σ cộng với số các nghịch thế của σ'. Do đó $\operatorname{sgn}\mu = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\sigma'$. Vì vậy mỗi tích

$$\operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} ... a_{k\sigma(k)} \cdot \operatorname{sgn}\sigma' \cdot a_{k+1\sigma'(k+1)} ... a_{n\sigma'(n)}$$

là một hạng tử trong tổng của $\det A$. Nói cách khác $M_{1,...,k}^{1,...,k}\overline{M}_{1,...,k}^{1,...,k}$ chỉ bao gồm các hạng tử của $\det A$; nó là một bộ phận trong biểu thức tổng của $\det A$. Trường hợp tổng quát $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$, ta biến đổi hàng và cột của $\det A$ để đưa $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ về định thức con bậc

k góc trên bên trái. Ta thực hiện $i_1 - 1$ lần đổi chỗ hàng thứ i_1 để đưa về hàng thứ 1, ..., $i_k - 1$ lần đổi chỗ hàng thứ i_k để đưa về hàng thứ k. Tương tự đổi chỗ $j_1 - 1, ..., j_k - 1$ lần để đưa các cột $j_1, ..., j_k$ về các cột $1, ..., k$. Vì vậy định thức đổi dấu

$$(-1)^{(i_1-1)+...+(i_k-1)+(j_1-1)+...+(j_k-1)} = (-1)^{i_1+...+i_k+j_1+...+j_k}.$$

Khi đổi vị trí như vậy định thức bù của $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ vẫn là $\overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$.

Do đó $A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} = (-1)^{i_1+...+i_k+j_1+...+j_k}\overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$, như vậy các hạng tử của $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \cdot A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ cũng chỉ là các hạng tử của $\det A$.

Mặt khác mỗi $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \cdot A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ có $k!(n-k)!$ hạng tử. Số các định thức con $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ trên k hàng $i_1,...,i_k$ bằng số các tổ hợp n chập k và bằng C_n^k.

Các hạng tử của $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \cdot A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ và $M_{i_1,...,i_k}^{j'_1,...,j'_k} \cdot A_{i_1,...,i_k}^{j'_1,...,j'_k}$ khác nhau từng đôi một nếu $\{j_1,...,j_k\} \neq \{j'_1,...,j'_k\}$.

Do đó tổng $\sum\limits_{1\le j_1<...<j_k\le n} M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ có $C_n^k k!(n-k)! = n!$ hạng tử phân biệt của $\det A$ nhưng $\det A$ cũng chỉ có $n!$ hạng tử. Vậy mỗi hạng tử của $\det A$ đều là hạng tử nào đó của một trong những $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \cdot A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ với $1 \le j_1 < ... < j_k \le n$. Vậy ta có đẳng thức (4.18).

Công thức khai triển theo cột (4.19) được chứng minh trực tiếp hoàn toàn tương tự cách trên hoặc có thể suy ra từ kết quả trên và áp dụng tính chất $\det A = \det A^t$.

<u>**Ví dụ 4.18**</u>:

$$D_n = \left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline a_{k+11} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \textbf{(4.20)}$$

Giải:

Từ điều kiện $1 \le j_1 < ... < j_k \le n \Rightarrow j_k \ge k$.

- Nếu $j_k > k$ thì $M_{1,\dots,k}^{j_1,\dots,j_k} = 0$ vì định thức này có ít nhất một cột bằng 0.

- Nếu $j_k = k$ thì $M_{1,\dots,k}^{j_1,\dots,j_k} = M_{1,\dots,k}^{1,\dots,k} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$

  và $A_{1,\dots,k}^{1,\dots,k} = (-1)^{1+\dots+k+1+\dots+k} \begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Vậy $$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

<u>Ví dụ 4.19</u>: Tính $D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 2 & 2 & 2 \\ g & h & -1 & -4 & -6 \\ i & j & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 24(ad-bc)$;

(Xem Ví dụ 4.16).

<u>Ví dụ 4.20</u>: Với hai ma trận vuông cùng cấp A, B bất kỳ luôn có

$$\det AB = \det A \det B \qquad \textbf{(4.21)}$$

Thật vậy, giả sử $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$,

$$C = AB = \left[c_{ij}\right]_{n\times n}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Xét định thức cấp $2n$:

$$D_{2n} = \left|\begin{array}{ccc:ccc} & & & 0 & & 0 \\ & a_{ij} & & & \bigcirc & \\ & & & 0 & & 0 \\ \hdashline -1 & & \bigcirc & & & \\ & \ddots & & & b_{ij} & \\ \bigcirc & & -1 & & & \end{array}\right|$$

Khai triển Laplace theo n hàng đầu ta có $D_{2n} = \det A \det B$ (xem ví dụ 4.14). Mặt khác, nhân b_{11} với cột 1, b_{21} với cột 2,..., b_{n1} với cột n của D_{2n} xong cộng tất cả vào cột n+1 thì định thức D_{2n} trở thành:

$$D_{2n} = \left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & & \bigcirc & 0 & b_{12} & b_{1n} \\ & -1 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & -1 & 0 & b_{n2} & b_{nn} \end{array}\right|$$

Tiếp tục biến đổi tương tự như trên cuối cùng được:

$$D_{2n} = \left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ \hdashline -1 & & \bigcirc & 0 & & 0 \\ & -1 & & & \bigcirc & \\ \bigcirc & & -1 & 0 & & 0 \end{array}\right|$$

Khai triển Laplace theo n hàng cuối ta được:

$$D_{2n} = (-1)^{1+2+\ldots+n+n+1+\ldots+2n} \begin{vmatrix} -1 & & \bigcirc \\ & -1 & \\ \bigcirc & & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{2n(2n+1)}{2}+n} \cdot \det C = \det C .$$

4.5 ỨNG DỤNG ĐỊNH THỨC ĐỂ TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

4.5.1 Định nghĩa ma trận nghịch đảo

Ta đã biết vành $(\mathcal{M}_n,+,.)$ các ma trận vuông cấp n là không nguyên, vì vậy với ma trận vuông cho trước chưa chắc đã có ma trận nghịch đảo đối với phép nhân ma trận.

Định nghĩa 4.4: *Ma trận vuông A được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp B sao cho $AB = BA = I$.*

Phép nhân ma trận có tính kết hợp nên ma trận B ở định nghĩa trên nếu tồn tại thì duy nhất, ta gọi ma trận này là *ma trận nghịch đảo* của A, ký hiệu A^{-1}.

4.5.2 Điều kiện cần và đủ để tồn tại ma trận nghịch đảo

Định lý 4.5: (điều kiện cần) *Nếu* A *khả nghịch thì* $\det A \neq 0$ *(ta nói ma trận* A *không suy biến).*

Chứng minh: $AA^{-1} = I \Rightarrow \det A \det A^{-1} = \det AA^{-1} = \det I = 1$.

Do đó $\det A = \dfrac{1}{\det A^{-1}} \neq 0$.

Định nghĩa 4.5: *Ma trận* $B = \left[A_{ij}\right]_{n\times n}$*, trong đó* A_{ij} *là phần bù đại số của phần tử* a_{ij} *của ma trận* $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$*, được gọi là ma trận phụ hợp của* A.

Định lý 4.6: (điều kiện đủ) Nếu $\det A \neq 0$ thì A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^t, \tag{4.22}$$

với B là ma trận phụ hợp của A.

Chứng minh: Khai triển định thức của ma trận A theo hàng thứ k ta được:

$$a_{k1}A_{k1} + \ldots + a_{kn}A_{kn} = \det A.$$

Vì vậy tổng $a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{in}A_{kn}$ là khai triển theo hàng thứ k của định thức của ma trận có được bằng cách thay hàng thứ k của A bởi hàng thứ i của A, do đó bằng 0 (vì hàng thứ k và hàng thứ i bằng nhau). Vậy

$$a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \Rightarrow AB^t = (\det A)I. \tag{4.23}$$

Tương tự, khai triển theo cột ta có:

$$a_{1i}A_{1k} + \ldots + a_{ni}A_{nk} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \Rightarrow B^t A = (\det A)I. \tag{4.24}$$

Công thức (4.23)-(4.24) suy ra kết quả (4.22).

Hệ quả 4.7: *Nếu* $BA = I$ *hoặc* $AB = I$ *thì tồn tại* A^{-1} *và* $A^{-1} = B$.

Chứng minh: $BA = I \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ và

$$B = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = A^{-1}.$$

Hệ quả 4.8: Ma trận $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ vuông cấp 2 với định thức $|A|=ad-bc\neq 0$ có ma trận nghịch đảo là $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^t=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Ví dụ 4.21: $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ có ma trận nghịch đảo là $A^{-1}=\dfrac{1}{24}\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 4.22: Ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ có $\det A=-1$.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}=40$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=-13$, $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-5$,

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}=-16$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=5$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2$,

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-9$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=1$,

Vậy $A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}^t=-\begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 4.23: Ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ có $\det A=-56$.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-13$, $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-5$,

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-14$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=18$,

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=3$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=-29$,

Vậy $A^{-1}=\dfrac{1}{-56}\begin{bmatrix} 7 & -13 & -5 \\ -14 & 2 & 18 \\ 7 & 3 & -29 \end{bmatrix}^t=-\dfrac{1}{56}\begin{bmatrix} 7 & -14 & 7 \\ -13 & 2 & 3 \\ -5 & 18 & -29 \end{bmatrix}$.

4.5.3 Tìm ma trận nghịch đảo theo phương pháp Gauss-Jordan

Tính chất 3.5 mục 4.2 chương 3 chỉ ra rằng: việc thực hiện liên tiếp các phép biến đổi sơ cấp lên các hàng của ma trận A để đưa A về ma trận đơn vị tương ứng với việc nhân bên trái của A các ma trận $E_1,...,E_k$ dạng $R(k,\lambda)$, $P(i,j)$, $Q(i,j,\lambda)$ (xem 3.15, 3.16, 3.17) sao cho $E_1...E_kA = I$. Mặt khác theo Hệ quả 4.7 thì $A^{-1} = E_1...E_k$.

Cũng với lập luận như trên ta có: $E_1...E_k = E_1...E_kI$ là ma trận có được bằng cách thực hiện bởi cùng các phép biến đổi sơ cấp tương ứng như đã thực hiện đối với ma trận A lên các hàng của ma trận đơn vị I. Vì vậy để tìm ma trận A^{-1} ta thực hiện các bước sau:

1) Viết ma trận đơn vị I bên phải ma trận A: $\quad A|I$

2) Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp đồng thời lên các hàng của $A|I$ để đưa ma trận A ở vế trái về ma trận đơn vị I.

3) Khi vế trái trở thành ma trận đơn vị thì vế phải là ma trận A^{-1}.

$$A|I \to ....\to I|A^{-1}. \qquad \textbf{(4.25)}$$

__Ví dụ 4.24__: Tìm A^{-1} với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (ví dụ 4.22)

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{\substack{h_1 \to h_1 \\ -2h_1 + h_2 \to h_2 \\ -h_1 + h_3 \to h_3}} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\substack{h_1 \to h_1 \\ h_2 \to h_2 \\ 2h_2 + h_3 \to h_3}} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{\substack{h_1 \to h_1 \\ -h_2 \to h_2 \\ -h_3 \to h_3}} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\substack{-3h_3 + h_1 \to h_1 \\ 3h_3 + h_2 \to h_2 \\ h_3 \to h_3}} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right. \xrightarrow{\substack{-3h_2 + h_1 \to h_1 \\ h_2 \to h_2 \\ h_3 \to h_3}} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right.$$

Vậy $A^{-1}=\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Nhận xét 4.2: Tìm A^{-1} theo phương pháp Gauss-Jordan sẽ dễ dàng khi các phần tử của A^{-1} là các số nguyên (thường gặp khi $\det A = \pm 1$).

4.6 TÌM HẠNG CỦA MA TRẬN BẰNG ĐỊNH THỨC

Định thức của một hệ phụ thuộc tuyến tính bằng 0 (xem Tính chất 4.2-7). Do đó nếu định thức $D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_n\} \neq 0$ thì hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính.

Ngược lại, nếu hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính thì $D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_n\} \neq 0$. Thật vậy, giả sử hệ $\{v_1,...,v_n\}$ có ma trận trong cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là $A=\left[a_{ij}\right]$, nghĩa là $v_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$. Ta có $\det A = D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_n\}$.

Mặt khác vì hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính nên nó cũng là một cơ sở của V.

Vậy ta có $e_j=\sum_{i=1}^{n} b_{ij}v_i$. Đặt $B=\left[b_{ij}\right]$, ta có thể kiểm tra được $AB=I \Rightarrow \det A \neq 0$.

Định lý 4.10: *Hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập khi và chỉ khi $D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_n\} \neq 0$.*

Nhận xét 4.3: Ta đã chứng minh được nếu $T=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang $\mathscr{B}$ là T^{-1}.

$$T=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}, \;\Rightarrow\; \left[t'_{ij}\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=T^{-1} \tag{4.26}$$

Định lý 4.12: *Giả sử $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ là một ma trận cỡ $m\times n$. Nếu tồn tại định thức con cấp p của A khác 0 và mọi định thức con cấp $p+1$ bao quanh nó đều bằng 0 thì $r(A)=p$.*

Chứng minh: Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết định thức con cấp p góc trái $M_{1,...,p}^{1,...,p} \neq 0$. Khi đó p véc tơ cột đầu độc lập tuyến tính, vì nếu có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của $p-1$ véc tơ còn lại thì mâu thuẫn với giả thiết $M_{1,...,p}^{1,...,p} \neq 0$ (định lý 4.10), do đó $r(A) \geq p$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức ngược lại.

Với mọi $k=1,...,m;\ s=p+1,...,n$; Xét ma trận cấp $p+1$:

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{1p} & a_{1s} \\ a_{21} & ... & ... & a_{2p} & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & ... & ... & a_{pp} & a_{ps} \\ a_{k1} & ... & ... & a_{kp} & a_{ks} \end{bmatrix}$$

Khi $k \le p$: Ma trận B có hai hàng bằng nhau, do đó $\det B = 0$.

Khi $k > p$: $\det B = 0$, vì $\det B$ là định thức cấp $p+1$ bao $M_{1,...,p}^{1,...,p}$.

Mặt khác khai triển theo hàng cuối ta được dạng sau:

$$a_{k1}\mu_1 + ... + a_{kp}\mu_p + a_{ks}M_{1,...,p}^{1,...,p} = 0$$

$\Rightarrow a_{ks} = \lambda_1 a_{k1} + ... + \lambda_p a_{kp}$, với mọi $k = 1,2,...,m$.

Vì vậy véc tơ cột v_s là tổ hợp tuyến tính của p véc tơ cột đầu. Vậy $r(A) \le p$. ■

Hệ quả 4.13: *A là một ma trận cỡ $m \times n$ thì $r(A) = r(A^t) \le \min(m,n)$.*

Nhận xét 4.4: Để tìm hạng ma trận A ta tìm định thức con cấp 2 khác 0. Bao định thức này bởi các định thức con cấp 3. Nếu tất cả các định thức cấp 3 bao quanh đều bằng 0 thì $r(A)=2$. Nếu có định thức con cấp 3 khác 0 thì ta tiếp tục bao định thức cấp 3 này bởi các định thức cấp 4...

Ví dụ 4.25: Ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ có :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 20,\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Vậy $r(A)=2$.

Ví dụ 4.26: Ma trận $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ nhưng } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Bao định thức này bởi định thức cấp 3: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$.

Định thức cấp 4 chính là định thức $|B| = 0$.

Vậy $r(B) = 3$.

Ví dụ 4.27: Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

Ta có $|A| = (a+3)(a-1)^3$.

Vậy:
- Khi $a \neq -3, a \neq 1$ thì $r(A) = 4$;
- Khi $a = 1$ thì $r(A) = 1$;
- Khi $a = -3$, $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$.

Trong thực hành ta có thể kết hợp phương pháp này với phương pháp biến đổi sơ cấp lên các hàng các cột ma trận thì quá trình tìm hạng ma trận sẽ nhanh hơn.

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

4.1) Cho hai phép thế $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ và $\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Xác định $\sigma \circ \mu$, $\mu \circ \sigma$, σ^{-1}.

b) Xác định dấu: $\operatorname{sgn}\sigma$, $\operatorname{sgn}\mu$, $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \mu)$, $\operatorname{sgn}(\mu \circ \sigma)$, $\operatorname{sgn}\sigma^{-1}$.

4.2) Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

4.3) Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$.

4.4) Tính định thức $\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix}$.

4.5) Tính các định thức

a) $\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix}$.

4.6) Tìm các giá trị của k sao cho $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$.

4.7) Tính định thức của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & -1/3 \\ 3/4 & 1/2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{bmatrix}$.

4.8) Tính định thức của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{bmatrix}$.

4.9) Giải phương trình: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}=0$.

4.10) Biết 299, 966, 161 chia hết 23. Chứng minh $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 9 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ chia hết 23.

4.11) Không cần tính định thức, chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix}=-2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

4.12) Cho định thức Vandermond $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Chứng minh: $D_n=\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)=\prod\limits_{k=2}^{n}\left(\prod\limits_{i=1}^{k-1}(x_k-x_i)\right)=\prod\limits_{i=1}^{n-1}\left(\prod\limits_{k=i+1}^{n}(x_k-x_i)\right)$.

4.13) Tính $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$

4.14*) Chứng minh a) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$

b) $\begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix} = 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

4.15*) Chứng minh $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

4.16*) Cho định thức $D_n = \det\left[a_{ij}\right]$ với a_{ij} bằng 1 hoăc -1, với mọi $i, j = 1, \dots, n$.

a) Chứng minh D_n là một số chẵn;

b) Tìm giá trị lớn nhất của các định thức D_3;

c) Chứng minh $D_n \le (n-1)(n-1)!$ với mọi $n \ge 3$.

4.17*) Tính định thức của các ma trận vuông cấp n trong các trường hợp sau:

a) $a_{ij} = \min(i, j)$, b) $a_{ij} = \max(i, j)$,

c) $a_{ij} = |i - j|$, d) $a_{ij} = \dfrac{1}{(i + j - 1)!}$

4.18) Tính $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$

4.19) Chứng minh $\dfrac{d}{dx}\left|a_{ij}(x)\right| = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a'_{ij}(x) A_{ij}(x)$.

4.20) Tìm λ để hệ véc tơ sau phụ thuộc tuyến tính:

$$u=\left(\lambda,\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right),\ v=\left(\frac{-1}{2},\lambda,\frac{-1}{2}\right),\ w=\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},\lambda\right).$$

4.21) Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}4 & 3 & -5 & 2 & 3\\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2\\ 8 & 3 & -8 & 2 & 7\\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5\\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}3 & m & 1 & 2\\ 1 & 4 & 7 & 2\\ 1 & 10 & 17 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ m & -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & m & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$

4.22) Các ma trận sau có khả nghịch không, nếu khả nghịch hãy tìm ma trận nghịch đảo:

a) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 2\end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$

e) $E=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

4.23) Cho $A=\begin{bmatrix}t-1 & 3 & -3\\ -3 & t+5 & -3\\ -6 & 6 & t-4\end{bmatrix}$

a) Tìm các giá trị của t để A khả nghịch.

b) Khi $t=3$ tìm A^{-1}.

4.24) Cho $A = \begin{bmatrix} t+1 & 7 & 3 \\ -1 & t-1 & -2 \\ t-5 & 2t-5 & t-6 \end{bmatrix}$

a) Tìm các giá trị của t để A khả nghịch.

b) Khi $t = 2$ tìm A^{-1}.

4.25) Giả sử A là ma trận chéo và B là ma trận tam giác có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & b_2 & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}.$$

a) Chứng tỏ rằng ma trận phụ hợp của A có dạng chéo và ma trận phụ hợp của B có dạng tam giác.

b) Chứng tỏ rằng B khả nghịch khi và chỉ khi mọi $b_i \neq 0$; do đó A khả nghịch khi và chỉ khi mọi $a_i \neq 0$.

c) Chứng tỏ rằng nếu A, B khả nghịch thì ma trận nghịch đảo tương ứng có dạng:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & b_2^{-1} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

4.26) Chứng tỏ ma trận vuông $\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ A & I_q \end{bmatrix}$ khả nghịch, với $A \in \mathcal{M}_{q\times p}$. Tìm ma trận nghịch đảo.

4.27*) Chứng tỏ rằng nếu $P^{-1}AP = Q^{-1}BQ$ thì tồn tại các ma trận R và S sao cho $A = RS,\ B = SR$.

4.28) Chứng tỏ rằng mọi ma trận vuông phản đối xứng $(A^t = -A)$ cấp lẻ là suy biến. Ma trận vuông phản đối xứng cấp chẵn có suy biến không? Chứng minh rằng ma trận nghịch đảo của ma trận phản đối xứng cũng là ma trận phản đối xứng.

4.29*) Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận vuông cấp n sau:

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda\end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix}1 & a & a^2 & \dots & a^n\\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \dots & a^{n-2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$

4.30*) Chứng minh nếu $A^k=0$ thì $I+A,\ I-A$ khả nghịch.

4.31*) Chứng minh nếu $A^n=0$, $B^m=0$ và $AB=BA$ thì $I+A+B$ khả nghịch.

4.32*) Chứng minh rằng nếu $(I+A)^k=0$ thì $\det A\neq 0$.

4.33*) Chứng minh nếu $I+AB$ khả nghịch thì $I+BA$ cũng khả nghịch.

4.34*) Tìm tất cả các ma trận vuông cấp n dạng tam giác $A=\left[a_{ij}\right],\ a_{ij}\geq 0$ có

$A^{-1}=\left[b_{ij}\right],\ b_{ij}\geq 0$.

4.35*) Giả sử ma trận A vuông cấp n thoả mãn $(XA)^2=0$ với mọi ma trận X vuông cấp n. Chứng minh $A=0$.

4.36*) Chứng minh đẳng thức Wagner đúng với mọi ma trận A,B,C vuông cấp 2:

$$(AB-BA)^2C-C(AB-BA)^2=0.$$

4.37*) Cho hai ma trận A,B vuông cấp n thoả mãn tính chất $AB-BA=B$.

a) Chứng minh $AB^k=B^k(A+kI)$ với mọi k.

b) Từ đó suy ra $\det B=0$.

4.38) Cho ma trận khối $M=\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & C\end{bmatrix}$, trong đó A,C là hai ma trận vuông. Chứng minh rằng $|M|=|A||C|$.

4.39) Cho A,B,C,D là các ma trận vuông cấp n giao hoán. Chứng minh rằng ma trận khối $M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ vuông cấp $2n$ có định thức $|M|=|A||D|-|B||C|$.

CHƯƠNG V

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Hệ phương trình tuyến tính là bài toán thường gặp phải khi nghiên cứu các hệ tuyến tính. Đối với hệ phi tuyến người ta xấp xỉ bởi hệ tuyến tính. Vì vậy hệ phương trình tuyến tính có rất nhiều ứng dụng trong thực tế.

Nhờ sự hỗ trợ của công nghệ thông tin, các bài toán hệ phương trình tuyến tính ngày càng được ứng dụng rộng rãi hơn. Có thể chỉ ra đây một vài bài toán dạng này:

- Sự phân phối dòng điện trong những sơ đồ có nhiều ghép nối.
- Giải gần đúng những bài toán của lý thuyết thế vị.
- Giải gần đúng một vài bài toán trong các vấn đề bức xạ điện từ.
- Sự phân phối vận tốc các dòng nước trong các hệ thuỷ lực học phức tạp.
- Ứng dụng phân tích thống kê vào tâm lý học, xã hội học và kinh tế học.
- Chuỗi Markov, phân bố dừng của chuỗi Markov ứng dụng trong bài toán chuyển mạch của tổng đài ...

Hệ phương trình tuyến tính đã được biết đến rất sớm. Ở Trung Quốc người ta tìm thấy một cuốn sách có khoảng từ năm 500 trước công nguyên, trong đó có những chỉ dẫn về việc dùng một bàn tính để giải các hệ phương trình tuyến tính qua các ví dụ cụ thể. Phương pháp giải này chính là thuật toán khử Gauss. Ở châu Âu thuật toán này đã được mô tả trong công trình của Buteo (Pháp) năm 1550, trước Gauss hơn hai thế kỷ. Một phương pháp khác để giải hệ phương trình tuyến tính là sử dụng định thức của Cramer.

Thoạt tiên ta có thể thấy rằng hình như vấn đề giải hệ phương trình tuyến tính đã cũ rồi và có thể giải quyết bằng những phương tiện tính toán sơ cấp quen biết. Tuy nhiên để giải các bài toán nêu ra ở trên ta thường phải khảo sát khoảng từ 150 đến 200 phương trình đồng thời. Tình trạng ấy trong thực hành đã gây ra nhiều khó khăn lớn đến nổi hầu như không thể giải quyết nổi nếu chỉ dùng phương pháp sơ cấp. Với sự hỗ trợ của máy tính và các thuật toán mới đã khiến cho hệ phương trình tuyến tính được ứng dụng hiệu quả để giải quyết các bài toán thực tế. Mùa hè năm 1949, Giáo sư Wassily Leontief trường Đại học HarVard đã gửi đến Trung tâm tính toán của trường Đại học Mark II đề nghị giải hệ phương trình tuyến tính gồm 500 phương trình với 500 ẩn biểu diễn các chỉ tiêu kinh tế của Mỹ. Mark II là một trong những trung tâm máy tính điện tử lớn nhất thời bấy giờ cũng không giải quyết được. Leontief buộc phải đưa bài toán về hệ 45 phương trình với 45 ẩn. Với kết quả này Leontief nhận được giải Nobel kinh tế năm 1973, ông ta được xem là người mở cánh cửa vào kỹ nguyên mới về các mô hình toán học về kinh tế.

Một hệ phương trình tuyến tính có thể viết dưới dạng ma trận, dưới dạng một véc tơ là một tổ hợp tuyến tính của một hệ các véc tơ khác hoặc biểu thức toạ độ của một ánh xạ tuyến tính (chương 6).

Nếu ta ký hiệu các hệ số của hệ m phương trình có n ẩn thành một ma trận cỡ $m \times n$, các ẩn thành ma trận cột $n \times 1$, các hệ số vế sau thành ma trận cột $m \times 1$ thì hệ phương trình đã cho có thể biểu diễn dưới dạng ma trận. Với cách biểu diễn này ta thấy nếu ma trận các hệ số khả nghịch thì hệ phương trình có duy nhất nghiệm (hệ Cramer).

Nếu ta xét $n+1$ véc tơ có m thành phần trong đó n véc tơ đầu là các hệ số ứng với các ẩn còn véc tơ thứ $n+1$ là hệ số của vế sau của hệ phương trình. Khi đó hệ phương trình được biểu diễn dưới dạng véc tơ, vế sau là một tổ hợp tuyến tính của n véc tơ các hệ số. Với cách biểu diễn này thì hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi véc tơ vế sau thuộc vào không gian con sinh bởi n véc tơ của các hệ số.

Điều này cho thấy ta có thể giải quyết một bài toán hệ phương trình tuyến tính bằng ma trận, bằng biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính. Điều kiện tồn tại nghiệm liên quan đến hạng của hệ véc tơ hoặc tập ảnh của ánh xạ tuyến tính ... và ngược lại. Vì vậy khi học chương này đòi hỏi học viên thấy được mối liên hệ giữa các khái niệm trên để giải quyết bài toán một cách linh hoạt. Học viên cần nắm vững và vận dụng thành thạo hai phương pháp: phương pháp Cramer và phép khử Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính.

Phương pháp Cramer sử dụng định thức để giải hệ phương trình, khi Cramer đưa ra quy tắc này thì nó trở thành "mốt" trong các công trình về toán ứng dụng trong một thời gian dài. Tuy nhiên phương pháp khử của Gauss đôi khi tỏ ra đơn giản hơn. Giải bài toán theo phương pháp khử của Gauss là sử dụng các phép biến đổi tương đương lên các phương trình của hệ để đưa hệ phương trình cần giải về hệ tương đương đơn giản hơn mà ta dễ dàng tìm được nghiệm. Thực chất của phương pháp này là sử dụng các phép biến đổi sơ cấp lên các hàng của ma trận hệ số của hệ phương trình.

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất liên quan đến nhân của ánh xạ tuyến tính được khảo sát trong chương 6, Tập hợp nghiệm của hệ phương trình thuần nhất là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^n$ (định lý 5.4).

5.1 KHÁI NIỆM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

5.1.1 Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình tuyến tính n ẩn có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \textbf{(5.1)}$$

Hoặc viết tắt $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1,...,m$

trong đó $x_1, x_2,..., x_n$ là n ẩn,

a_{ij} là hệ số của ẩn thứ j trong phương trình i,

b_i là vế phải của phương trình thứ i; $i = 1,...,m$; $j = 1,...,n$.

Khi các vế phải $b_i = 0$ thì hệ phương trình được gọi là *thuần nhất*.

Nghiệm của hệ phương trình là bộ gồm n số $(x_1, x_2,..., x_n)$ sao cho khi thay vào (5.1) ta có các đẳng thức đúng. Giải một hệ phương trình là đi tìm tập hợp nghiệm của hệ.

Hai hệ phương trình cùng ẩn là tương đương nếu tập hợp nghiệm của chúng bằng nhau. Vì vậy để giải một hệ phương trình ta có thể giải hệ phương trình tương đương của nó.

5.1.2 Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Với hệ (5.1) ta xét các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.2)}$$

A, B, X lần lượt được gọi là ma trận hệ số, ma trận vế sau và ma trận ẩn. Khi đó hệ phương trình (5.1) được viết lại dưới dạng ma trận:

$$AX = B \quad \textbf{(5.3)}$$

5.1.3 Dạng véc tơ của hệ phương trình tuyến tính

Nếu ta ký hiệu véc tơ cột thứ i của ma trận A là $v_i = (a_{1i},..., a_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ và véc tơ vế sau $b = (b_1,..., b_m) \in \mathbb{R}^m$, thì hệ (5.1) được viết dưới dạng véc tơ:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b \quad \textbf{(5.4)}$$

Với cách viết này ta thấy rằng hệ phương trình (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi $b \in \operatorname{span}\{v_1,...,v_n\}$.

Ví dụ 5.1: Xét hệ phương trình viết dưới dạng tổng quát:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - \ x_3 + \ x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - \ x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \end{cases}$$

Hệ phương trình viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Xét các véc tơ $v_1 = (2,4,8)$, $v_2 = (2,3,5)$, $v_3 = (-1,-1,-3)$, $v_4 = (1,2,4)$; $b = (4,6,12)$. Hệ phương trình trên có thể viết dưới dạng véc tơ:

$$x_1(2,4,8) + x_2(2,3,5) + x_3(-1,-1,-3) + x_4(1,2,4) = (4,6,12).$$

5.2 ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM

Định lý 5.1: (Kronecker-Kapelli) Hệ phương trình (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\tilde{A})$ trong đó $\tilde{A}$ là ma trận có được bằng cách bổ sung thêm vào ma trận hệ số A một cột cuối là vế phải của hệ phương trình.

$$r(A) = r(\tilde{A});\ \tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \qquad \textbf{(5.5)}$$

Chứng minh: Hệ (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$ sao cho $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b$. Nghĩa là $b \in \operatorname{span}\{v_1,...,v_n\}$ (b biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_1,...,v_n\}$). Vậy $r(v_1,...,v_n) = r(v_1,...,v_n,b)$. Do đó $r(A) = r(\tilde{A})$. ■

Ví dụ 5.2: Hệ phương trình trong ví dụ 5.1 có ma trận hệ số $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, ma trận bổ sung cột cuối $\widetilde{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \end{bmatrix}$.

Hạng $r(A)=r(\widetilde{A})=3$, do đó hệ phương trình có nghiệm.

5.3 PHƯƠNG PHÁP CRAMER

5.3.1 Hệ Cramer và cách giải

Định nghĩa 5.2: *Hệ n phương trình tuyến tính n ẩn có ma trận hệ số A không suy biến được gọi là hệ Cramer.*

Định lý 5.2: *Mọi hệ Cramer đều tồn tại duy nhất nghiệm.*

Cụ thể hệ $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i=1,...,n$ có nghiệm $x_i = D_i / D$, $i=1,...,n$;

trong đó

$$D=\det A = D_{\mathscr{B}}\left\{v_1,...,v_{i-1},v_i,v_{i+1},...,v_n\right\}$$

$$D_i = D_{\mathscr{B}}\left\{v_1,...,v_{i-1},b,v_{i+1},...,v_n\right\} \quad \textbf{(5.6)}$$

D_i là định thức của hệ các véc tơ cột là các cột hệ số của hệ phương trình nhưng véc tơ cột thứ i được thay bởi véc tơ cột vế sau.

Chứng minh: $\det A \neq 0 \Rightarrow$ hệ $\left\{v_1,...,v_n\right\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Do đó b được biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính của $\left\{v_1,...,v_n\right\}$. Nghĩa là tồn tại duy nhất $x_1,x_2,...,x_n$ sao cho $x_1v_1+x_2v_2+...+x_nv_n=b$.

Gọi $\mathscr{B}=\left\{e_1,...,e_n\right\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Khi đó:

$$D_i = D_{\mathscr{B}}\left\{v_1,...,v_{i-1},b,v_{i+1},...,v_n\right\} = D_{\mathscr{B}}\left\{v_1,...,v_{i-1},\sum_{k=1}^{n} x_k v_k, v_{i+1},...,v_n\right\}$$

$$= x_i D_{\mathscr{B}}\left\{v_1,...,v_{i-1},v_i,v_{i+1},...,v_n\right\} = x_i D \Rightarrow x_i = D_i / D,\ i=1,...,n. \quad \blacksquare$$

Ví dụ 5.3: Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & 5 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=22,\ D_x=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 8 & 5 & 2\\ -1 & -2 & -3\end{vmatrix}=66,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 8 & 2\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=-22,\ D_z=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 5 & 8\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=44.$$

Do đó hệ có nghiệm $x=3,\ y=-1,\ z=2$.

5.3.2 Giải hệ phương trình tuyến tính trường hợp tổng quát

Giả sử hệ phương trình có nghiệm và $r(v_1,...,v_n)=r(v_1,...,v_n,b)=r(v_1,...,v_p)$; $p\le n$ (trong trường hợp khác cách giải hoàn toàn tương tự). Với giả thiết này p véc tơ hàng phía trên của A tạo thành hệ độc lập tuyến tính tối đại của hệ các véc tơ hàng của A. Vì vậy hệ (5.1) tương đương với p phương trình đầu

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ ....\\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+...+a_{pn}x_n=b_p\end{cases}$$

Giả sử $\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{p1} & \cdots & a_{pp}\end{vmatrix}\neq 0$ (trường hợp khác cách giải hoàn toàn tương tự)

Hệ phương trình trên được viết lại:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1p}x_p=b_1-a_{1p+1}x_{p+1}-...-a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2p}x_p=b_2-a_{2p+1}x_{p+1}-...-a_{2n}x_n\\ ....\\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+...+a_{pp}x_p=b_p-a_{pp+1}x_{p+1}-...-a_{pn}x_n\end{cases}$$

đây là hệ Cramer có vế sau phụ thuộc vào các ẩn $x_{p+1},...,x_n$.

Vậy hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $x_{p+1},...,x_n$; các ẩn $x_{p+1},...,x_n$ nhận giá trị tùy ý.

<u>**Ví dụ 5.4**</u>: Giải và biện luận theo tham số λ hệ $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=1\\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=1\end{cases}$

Từ ví dụ 4.14 chương 4 ta có $\det A = (\lambda+3)(\lambda-1)^3$.

♦ Khi $\lambda \neq -3, \lambda \neq 1$: Hệ đã cho là hệ Cramer nên có nghiệm duy nhất. Ngoài ra khi thay đổi vai trò của các ẩn trong hệ thì hệ không thay đổi, do đó hệ có nghiệm:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \implies x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda+3}.$$

♦ Khi $\lambda = 1$: $r(A) = r(\tilde{A}) = 1$, hệ phương trình đã cho tương đương với phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

Hệ phương trình có vô số nghiệm $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$ với x_2, x_3, x_4 tuỳ ý.

♦ Khi $\lambda = -3$: $\det A = 0 \Rightarrow r(A) < 4$ (theo Ví dụ 4.23 $r(A) = 3$) nhưng ma trận bổ sung $\tilde{A}$ có định thức con cấp 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \Rightarrow r(\tilde{A}) = 4 \Rightarrow \text{ hệ vô nghiệm.}$$

5.4 PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

<u>Định lý 5.3</u>: *Hệ Cramer* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,...,n$ *có nghiệm dưới dạng ma trận*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \det A \neq 0 \Rightarrow X = A^{-1}B. \quad \textbf{(5.7)}$$

<u>Ví dụ 5.5</u>: Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad + 8x_3 = c \end{cases}$.

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ có $\det A = -1$, do đó hệ đã cho là hệ Cramer có nghiệm theo công thức (5.7).

Từ Ví dụ 4.22 có $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Vậy $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40a+16b+9c \\ 13a-5b-3c \\ 5a-2b-c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -40a+16b+9c \\ x_2 = 13a-5b-3c \\ x_3 = 5a-2b-c \end{cases}$.

Nhận xét 5.1: Từ công thức đổi tọa độ (3.13), công thức (4.25) về ma trận chuyển cơ sở và từ ví dụ 5.5 ta thấy:

$$\text{Nếu } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \forall i = 1,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}b_j = x_i, \forall i = 1,\dots,n \end{cases} \text{ và } A = \left[a_{ij}\right] \text{ thì } A^{-1} = \left[c_{ij}\right] \tag{5.8}$$

5.5 GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP KHỬ GAUSS

Ta có thể kiểm tra được rằng: khi thực hiện các biến đổi sơ cấp sau lên các phương trình của hệ thì sẽ được hệ mới tương đương:

- Đổi chỗ hai phương trình;
- Nhân, chia một số khác 0 vào cả 2 vế của một phương trình;
- Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính các phương trình khác.

Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp (có thể đổi chỉ số các ẩn nếu cần) để đưa hệ phương trình (5.1)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i;\ i = 1,\dots,m.$$

về hệ tương đương

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}\,x'_j = b'_i;\ i = 1,\dots,m.$$

Các ẩn $x'_1,\dots,x'_n$ là các ẩn $x_1,\dots,x_n$ nhưng có thể thay đổi thứ tự chỉ số và ma trận bổ sung của hệ mới có dạng

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \cdots & \cdots & b'_1 \\ \bigcirc & a'_{pp} & \cdots & b'_p \\ \hline & & & b'_{p+1} \\ \bigcirc & & \bigcirc & \\ & & & b'_m \end{array}\right] \tag{5.9}$$

trong đó $a'_{11}\dots a'_{pp} \neq 0$.

♦ Nếu một trong các $b'_{p+1},...,b'_m$ khác 0 thì tồn tại phương trình mà vế trái bằng 0, vế phải khác 0 nên hệ vô nghiệm.

♦ Nếu $b'_{p+1} = ... = b'_m = 0$ thì hệ đã cho tương đương với hệ p phương trình

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \quad ... \quad + a'_{1n}x'_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x'_2 + \quad ... \quad + a'_{2n}x'_n = b'_2 \\ \qquad \text{......................................} \\ \qquad\qquad a'_{p1}x'_1 + ... + a'_{pn}x'_n = b'_p \end{cases} \tag{5.10}$$

Ta có thể tìm các nghiệm $x'_1,...,x'_p$ phụ thuộc $x'_{p+1},...,x'_n$.

Chú ý rằng khi ta biến đổi tương đương lên các phương trình thì thực chất là biến đổi các hệ số trong các phương trình. Vì vậy trong thực hành ta chỉ cần biến đổi ma trận bổ sung (5.5) của hệ để đưa về ma trận có dạng (5.9) và giải hệ phương trình (5.10) từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình ban đầu.

<u>Ví dụ 5.6</u>: Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad + 8x_3 = c \end{cases}$. (xem ví dụ 5.5)

Ma trận bổ sung hệ số $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix}$.

Thực hiện các biến đổi tương đương ta được

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 2 & -5 & a-c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40a+16b+9c \\ 0 & 1 & 0 & 13a-5b-3c \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}.$$

Vậy ta đã tìm được hệ phương trình tương đương và cũng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x_1 = -40a + 16b + 9c \\ x_2 = 13a - 5b - 3c \\ x_3 = 5a - 2b - c \end{cases}$$

Ví dụ 5.7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8 \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9 \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7 \\ x_1+8x_2-7x_3=12 \end{cases}$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x_1=3,\ x_2=2,\ x_3=1$.

Ví dụ 5.8: Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4=3 \\ 2x_1+3x_2+6x_3+8x_4=5 \\ x_1-6x_2-9x_3-20x_4=-11 \\ 4x_1+x_2+4x_3+mx_4=2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 20 & 32 & 64 & 36 \\ 0 & 15 & 24 & 48 & 27 \\ 0 & -5 & -8 & m-16 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix}.$$

Hệ đã cho tương đương với hệ: $\begin{cases} x_1-x_2-x_3-4x_4=-2 \\ 5x_2+8x_3+16x_4=9 \\ mx_4=1 \end{cases}$

♦ Khi $m=0$: hệ vô nghiệm;

♦ Khi $m\neq 0$: hệ có vô số nghiệm

$$x_4 = \frac{1}{m}\ ,\ x_2 = \frac{9m-16}{5m} - \frac{8}{5}x_3,\ x_1 = \frac{4-m}{5m} - \frac{3}{5}x_3;\ x_3 \text{ tùy ý.}$$

<u>Ví dụ 5.9</u>: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 + x_4 - x_5 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 \quad = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 - 4x_5 = -2 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - 16x_4 - 5x_5 = -3 \\ x_1 + x_2 + \quad\quad x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -9 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -8 & -4 & -2 \\ 6 & 1 & 1 & -16 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & -22 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & -22 & -2 & 14 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad\quad = -2 \\ \quad x_2 \quad - 3x_4 \quad = 2 \\ \quad\quad x_3 - 3x_4 \quad = 2 \\ \quad\quad\quad 2x_4 + x_5 = -1 \end{cases} \quad \text{suy ra nghiệm} \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 + 3x_4 \\ x_3 = 2 + 3x_4 \\ x_5 = -1 - 2x_4;\ x_4 \text{ tuỳ ý} \end{cases}$$

5.6 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad \textbf{(5.11)}$$

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.11) có ít nhất nghiệm tầm thường $x_1 = ... = x_n = 0$. Điều kiện tồn tại nghiệm (5.5) luôn thỏa mãn $r(\tilde{A}) = r(A) \le n$.

Nhận xét 5.2: Vế sau của hệ phương trình thuần nhất luôn bằng 0 do đó không thay đổi khi ta giải hệ theo phương pháp khử Gauss. Vì vậy để giải hệ phương trình thuần nhất ta chỉ cần biến đổi ma trận hệ số của hệ.

Ví dụ 5.10: Giải hệ phương trình thuần nhất $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -7 & -5 & -6 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases};\ x_3, x_4 \text{ tùy ý.}$$

Định lý 5.5:

a) Hệ (5.11) chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $r(A) = n$.

b) Nếu $r(A) = p < n$ thì tập hợp nghiệm của hệ (5.11) là không gian con $n - p$ chiều của $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh: Ta chứng minh b). Thực hiện các biến đổi tương đương lên ma trận bổ sung (5.5) của hệ để đưa về hệ tương đương với ma trận bổ sung có dạng

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & 0 \\ 0 & \ddots & * & * & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Suy ra nghiệm có dạng $\begin{cases} x'_1 = c_{11}x'_{p+1} + \ ... \ + c_{1n-p}x'_n \\ .... \\ x'_p = c_{p1}x'_{p+1} + \ ... \ + c_{pn-p}x'_n \end{cases}$

trong đó $(x'_1, ..., x'_n)$ là một hoán vị của $(x_1, ..., x_n)$.

Để đơn giản trong cách trình bày ta giả sử $x'_1 = x_1, ..., x'_n = x_n$ (trường hợp khác được chứng minh tương tự), khi đó tập hợp nghiệm:

$$\left\{(c_{11}x_{p+1} + ... + c_{1n-p}x_n, ..., c_{p1}x_{p+1} + ... + c_{pn-p}x_n, x_{p+1}, ..., x_n) \middle| x_{p+1}, ..., x_n \in \mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{(c_{11},...,c_{p1},1,0,...,0)x_{p+1}+...+(c_{1n-p},...,c_{pn-p},0,0,...,1)x_n \,\middle|\, x_{p+1},...,x_n \in \mathbb{R}\right\}$$

là không gian con $n-p$ chiều của $\mathbb{R}^n$.

<u>Ví dụ 5.11</u>: Tập $W_2=\left\{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x-3y+4z=0\right\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$ có chiều $\dim W_2=3-1=2$ (xem ví dụ 2.7).

<u>Ví dụ 5.12</u>: Đặt V_1, V_2 lần lượt là tập hợp nghiệm của hệ phương trình (I) và hệ phương trình (II):

$$(I)\begin{cases}4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0\\ 5x_1+7x_2+2x_3 \qquad\quad =0\end{cases},\quad (II)\begin{cases}2x_1-3x_2-3x_3-2x_4=0\\ 4x_1-7x_2-5x_3-6x_4=0\\ 3x_1-5x_2-4x_3-4x_4=0\end{cases}$$

Hãy tìm một cơ sở của các không gian con V_1, V_2, $V_1\cap V_2$. Suy ra số chiều của V_1+V_2.

Giải: Giải hệ phương trình (I) :

$$\begin{bmatrix}4&5&-2&3\\3&5&6&-4\\5&7&2&0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-8&7\\3&5&6&-4\\1&2&4&-3\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-8&7\\0&5&30&-25\\0&2&12&-10\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-8&7\\0&1&6&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=8x_3-7x_4\\ x_2=-6x_3+5x_4\end{cases}$$

$$v=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in V_1 \Leftrightarrow v=(8x_3-7x_4,-6x_3+5x_4,x_3,x_4)=x_3(8,-6,1,0)+x_4(-7,5,0,1)$$

$$V_1=\left\{x_3(8,-6,1,0)+x_4(-7,5,0,1) \,\middle|\, x_3,x_4\in\mathbb{R}\right\}.$$

Tương tự, từ ví dụ 5.10 ta có

$$V_2=\left\{x_3(3,1,1,0)+x_4(-2,-2,0,1) \,\middle|\, x_3,x_4\in\mathbb{R}\right\}.$$

$V_1\cap V_2$ là không gian nghiệm của hệ 6 phương trình

$$\begin{cases}4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0\\ 5x_1+7x_2+2x_3 \qquad\quad =0\\ 2x_1-3x_2-3x_3-2x_4=0\\ 4x_1-7x_2-5x_3-6x_4=0\\ 3x_1-5x_2-4x_3-4x_4=0\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm: $x_1=-x_2=x_3=x_4$; x_4 tùy ý.

$$\Rightarrow V_1\cap V_2=\left\{x_4(1,-1,1,1) \,\middle|\, x_4\in\mathbb{R}\right\}.$$

$\Rightarrow \dim V_1 + V_2 = 3$.

Ví dụ 5.13: Cho hệ phương trình thuần nhất có n phương trình $n+1$ ẩn :

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j = 0;\ i = 1,...,n. \qquad \textbf{(5.13)}$$

Đặt D_j là định thức của ma trận vuông cấp n có được bằng cách xóa cột thứ j, $j = 1,...,n+1$ của ma trận hệ số $A = \left[a_{ij} \right]_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n+1}}}$.

Nếu tồn tại $D_{j_0} \neq 0$ thì không gian nghiệm của (5.13) có chiều bằng 1 và có dạng

$$\left\{ t\left(D_1, -D_2, ..., (-1)^{j+1} D_j, ..., (-1)^n D_{n+1} \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \textbf{(5.14)}$$

Giải: Xét định thức cấp $n+1$:

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_j & \cdots & y_{n+1} \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{i,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{n,n+1} \end{vmatrix}.$$

Khai triển theo hàng thứ nhất ta được:

$$D = (-1)^2 y_1 D_1 + y_2 (-1)^3 D_2 + \cdots + y_j (-1)^{j+1} D_j + \cdots + y_{n+1} (-1)^n D_{n+1}.$$

Với mỗi $i = 1,...,n$: thay $y_1 = a_{i1}$, $y_2 = a_{i2}$, … , $y_{n+1} = a_{i,n+1}$ thì định thức D tương ứng bằng 0 (vì hàng thứ 1 và hàng thứ $i+1$ bằng nhau). Điều này chứng tỏ

$$(D_1, -D_2, ..., (-1)^{j+1} D_j, ..., (-1)^n D_{n+1})$$

là một nghiệm khác không của hệ phương trình (5.13).

Mặt khác tồn tại $D_j \neq 0$ do đó không gian nghiệm có chiều bằng 1. Vậy tập nghiệm có dạng

$$\left\{ t\left(D_1, -D_2, ..., (-1)^{j+1} D_j, ..., (-1)^n D_{n+1} \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Định lý 5.6: *Giả sử $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$ là một nghiệm của phương trình không thuần nhất (5.1). Khi đó $(x_1, ..., x_n)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng (5.11) khi và chỉ khi $(x_1 + \overline{x}_1, ..., x_n + \overline{x}_n)$ là nghiệm của phương trình (5.1).*

Cho $W \subset \mathbb{R}^n$, $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in \mathbb{R}^n$; ký hiệu

$$(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)+W=\left\{(\overline{x}_1+x_1,...,\overline{x}_n+x_n)\middle|(x_1,...,x_n)\in W\right\} \quad \textbf{(5.15)}$$

Định lý 5.6 có thể viết lại:

Giả sử $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$ là một nghiệm của (5.1); khi đó

W là tập nghiệm của (5.11) khi và chỉ khi $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)+W$ là tập nghiệm của (5.1).

Ví dụ 5.14: Giải và biện luận theo tham số a,b hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1+ax_2+a^2x_3=1 \\ x_1+bx_2+b^2x_3=1 \end{cases}$$

Giải: Hệ có một nghiệm riêng $\overline{x}_1=1$, $\overline{x}_2=0$, $\overline{x}_3=0$.

Ma trận hệ số $A=\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix}$.

- Trường hợp $a=b$: $r(A)=1$, hệ phương trình tương đương với một phương trình do đó có vô số nghiệm $x_1=1-ax_2-a^2x_3$; x_2, x_3 tùy ý.
- Trường hợp $a\neq b$: $r(A)=2$. Theo ví dụ 5.12 không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất tương ứng có chiều bằng 1 và có dạng $\left\{t\left(D_1,-D_2,D_3\right)\middle| t\in\mathbb{R}\right\}$.

$$D_1=\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}=ab(b-a),\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ 1 & b^2 \end{vmatrix}=(a+b)(b-a),\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}=b-a.$$

Vậy không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất tương ứng:

$$\left\{t(b-a)\left(ab,-(a+b),1\right)\middle| t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Do đó hệ đã cho có nghiệm $\begin{cases} x_1=1+abt \\ x_2=-(a+b)t. \\ x_3=t;\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

BÀI TẬP CHƯƠNG V

5.1) Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+13x_3+5x_4=4 \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3 \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0 \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0 \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0 \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0 \end{cases}$

5.2) Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

5.3) Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + mx_4 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1+m)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+m)x_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + (1+m)x_3 = m^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$

5.4) Chứng minh hệ phương trình sau luôn có nghiệm với mọi $a \neq 0, b, c, d$.

$$\begin{cases} ax + (1-b)y + cz + (1-d)t = a \\ (b-1)x + ay + (d-1)z + ct = b \\ -cx + (1-d)y + az + (b-1)t = c \\ (d-1)x - cy + (1-b)z + at = d \end{cases}$$

5.5*) Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + nx_n = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + ... + nx_1 = 2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + ... + nx_{n-1} = n \end{cases}$

5.6) Xác định các giá trị của tham số m sao cho các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my + 3z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + my - z = -2 \\ x - 3z = -3 \\ x + 2y + mz = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + mz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = m \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y + mz = 1 \\ 2x + my + 8z = 3 \end{cases}$

i) Vô nghiệm.

ii) Có nhiều hơn 1 nghiệm.

iii) Có duy nhất nghiệm.

5.7) Tìm điều kiện của a, b, c để hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y - z = a \\ x - 2y + 4z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$

5.8*) Chứng minh rằng hệ phương trình sau tồn tại duy nhất nghiệm

$$\begin{cases} 1/2\, x_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ 1/2\, x_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1/2\, x_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad \text{trong đó } a_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

5.9) Véc tơ $v = (3, 9, -4, -2)$ có thuộc không gian sinh bởi các véc tơ:

$$u_1 = (1, -2, 0, 3),\ u_2 = (2, 3, 0, -1) \text{ và } u_3 = (2, -1, 2, 1).$$

5.10) Giải phương trình $AX = B$ với ẩn là ma trận X, trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.11) Giả sử U, W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\},$$

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0, x_3 = 2x_4\right\}.$$

Hãy tìm một cơ sở của các không gian con U, W, $U \cap W$. Suy ra số chiều của $U + W$.

5.12) Đặt V_1, V_2 lần lượt là hai không gian nghiệm của hệ phương trình (I) và hệ phương trình (II):

$$(I)\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 \qquad = 0 \end{cases}, \quad (II)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Hãy tìm một cơ sở của các không gian con V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$. Suy ra số chiều của $V_1 + V_2$.

5.13) Tìm hệ phương trình thuần nhất có không gian nghiệm W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hệ véc tơ: $\{(1,-2,0,3), (1,-1,-1,4), (1,0,-2,5)\}$.

5.14) Tìm hệ phương trình thuần nhất có không gian nghiệm W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^5$ sinh bởi hệ véc tơ: $\{(1,-2,0,3,-1), (2,-3,2,5,-3), (1,-2,1,2,-2)\}$.

5.15) Tìm ma trận X vuông cấp 2 thỏa mãn phương trình.

$$X^2 - 2X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

5.16*) Cho hệ phương trình tuyến tính có 10 phương trình và 11 ẩn số. Biết rằng:

1) Bộ số $(1993, 1994, ..., \ 2003)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

2) Khi xoá cột thứ j trong ma trận hệ số của hệ phương trình đã cho thì ta được một ma trận vuông có định thức đúng bằng $j\,(j = 1,\ 2,\ ...,\ 11)$.

Hãy tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đã cho.

5.17) Cho hệ phương trình gồm n phương trình n ẩn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

a) Giả sử hệ phương trình thuần nhất tương ứng chỉ có nghiệm tầm thường. Chứng minh rằng hệ phương trình (1) có duy nhất nghiệm đối với mọi cách chọn các hệ số b_i, $i = 1,...,n$.

b) Giả sử hệ phương trình thuần nhất tương ứng có nghiệm không tầm thường. Chứng minh rằng tồn tại các hệ số b_i, $i = 1,...,n$ sao cho hệ phương trình (1) vô nghiệm. Trong trường hợp này nếu hệ phương trình (1) có nghiệm thì nghiệm không duy nhất.

CHƯƠNG VI

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Ánh xạ tuyến tính (biến đổi tuyến tính) từ không gian véc tơ vào không gian véc tơ là một ánh xạ bảo toàn phép cộng véc tơ và phép nhân một số với véc tơ. Ánh xạ tuyến tính là một nội dung chính của đại số tuyến tính. Một ánh xạ tuyến tính từ một không gian véc tơ vào chính không gian đó được gọi là tự đồng cấu tuyến tính (gọi tắt là tự đồng cấu) hay toán tử tuyến tính. Nhà toán học Peano (Italia) là người đầu tiên đưa ra khái niệm ánh xạ tuyến tính (1888).

Ánh xạ tuyến tính còn bảo toàn các không gian con qua các tập ảnh và ảnh ngược. Nghĩa là ảnh qua ánh xạ tuyến tính của một không gian con là một không gian con, ảnh ngược của không gian con cũng là không gian con. Đặc biệt ảnh $f(V)$ của ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ là không gian con của W được gọi là ảnh của f. Còn ảnh ngược $f^{-1}\{0\}$ là không gian véc tơ con của V được gọi là nhân của f. Chiều của không gian véc tơ ảnh $f(V)$ được gọi là hạng của f.

Ánh xạ tuyến tính và đơn ánh được gọi là đơn cấu, toàn ánh được gọi là toàn cấu, song ánh được gọi là đẳng cấu. Nếu tồn tại một đẳng cấu từ không gian này lên không gian kia thì ta nói hai không gian đó đẳng cấu. Có những tiêu chuẩn riêng để nhận biết một ánh xạ tuyến tính là toàn cấu, đơn cấu hay đẳng cấu. Một ánh xạ tuyến tính là toàn cấu khi và chỉ khi hạng của nó bằng chiều của không gian đích. Một ánh xạ tuyến tính là đơn cấu khi và chỉ khi nhân của nó chỉ gồm véc tơ không. Ánh xạ tuyến tính từ một không gian véc tơ vào một không gian véc tơ cùng chiều là toàn cấu khi và chỉ khi là đơn cấu (do đó là đẳng cấu), điều này cũng giống như ánh xạ giữa hai tập hữu hạn có cùng số phần tử.

Một ánh xạ tuyến tính hoàn toàn được xác định bởi ảnh của cở sở bất kỳ qua ánh xạ này. Vì vậy khi đã cho cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ của V và cơ sở $\mathscr{B}'$ của W thì ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ hoàn toàn được xác định bởi ma trận của hệ véc tơ $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ viết trong cơ sở $\mathscr{B}'$. Điều này giải thích tại sao đại số tuyến tính thường được xem là lý thuyết ma trận. Ma trận của tổng hai ánh xạ tuyến tính bằng tổng hai ma trận, ma trận của tích một số với một ánh xạ tuyến tính bằng tích của số này với ma trận xác định ánh xạ tuyến tính, ma trận của hợp hai ánh xạ tuyến tính bằng tích hai ma trận của chúng. Nói cách khác tương ứng giữa ánh xạ tuyến tính và ma trận của nó là một đẳng cấu bảo toàn phép cộng, phép nhân một số với ma trận và phép nhân hai ma trận. Hạng của ánh xạ tuyến tính bằng hạng của ma trận của nó. Ma trận của một tự đồng cấu trong hai cơ sở khác nhau là đồng dạng. Chính vì lý do này nên một bài toán về ma trận có thể giải quyết bằng phương pháp ánh xạ tuyến tính và ngược lại.

Công thức xác định ảnh của một ánh xạ tuyến tính có biểu thức tọa độ là một hệ phương trình tuyến tính. Tìm véc tơ thuộc không gian ảnh tương ứng với tìm điều kiện của vế sau để hệ phương trình tuyến tính có nghiệm. Nhân của ánh xạ tuyến tính là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng với ánh xạ này.

Một bài toán quan trọng của lý thuyết ma trận là chéo hoá ma trận, đó là tìm một ma trận đồng dạng của ma trận cho trước mà ma trận đồng dạng này có các phần tử không ở trên đường chéo bằng không. Vấn đề này tương đương với việc tìm một cơ sở gồm các véc tơ riêng của tự đồng cấu xác định bởi ma trận đã cho. Thuật toán chéo hoá ở cuối chương sẽ giúp học viên giải quyết được bài toán dạng này. Bài toán chéo hóa ma trận có rất nhiều ứng dụng. Bài toàn chéo hóa trực giao ma trận được xét trong chương 7.

6.1 KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

6.1.1 Định nghĩa và ví dụ

<u>Định nghĩa 6.1</u>: *Ánh xạ f từ không gian véc tơ V vào không gian W thoả mãn:*

với mọi $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

$$\begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{cases} \tag{6.1}$$

được gọi là ánh xạ tuyến tính (đồng cấu tuyến tính hay gọi tắt là đồng cấu) từ V vào W.

Khi $V = W$ thì f được gọi là tự đồng cấu.

<u>Ví dụ 6.1</u>: Xét các ánh xạ sau:

1) Ánh xạ không $\quad \begin{aligned} 0 : V &\to W \\ u &\mapsto 0(u) = \mathbf{0} \end{aligned}$

2) Ánh xạ đồng nhất $\quad \begin{aligned} \mathrm{Id}_V : V &\to V \\ u &\mapsto \mathrm{Id}_V(u) = u \end{aligned}$

3) Phép vị tự tỷ số $k \in \mathbb{R}$ $\quad \begin{aligned} f : V &\to V \\ u &\mapsto f(u) = ku \end{aligned}$

4) Giả sử $W_1 \oplus W_2 \subset V$, xét phép chiếu lên thành phần thứ nhất:

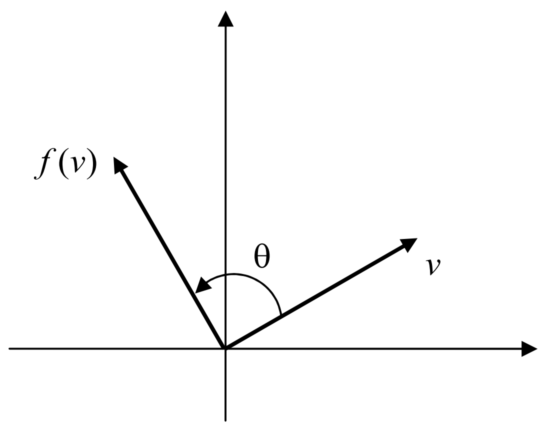
$$\begin{aligned} \mathrm{Pr}_1 : W_1 \oplus W_2 &\to V \\ v_1 + v_2 &\mapsto v_1 \end{aligned}$$

5) Phép tịnh tiến theo véc tơ $v_0 \in V$, $f: V \to V$

$$u \mapsto u + v_0$$

6) Phép quay góc θ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$



Ánh xạ 1), 2), 3), 4), 6) là ánh xạ tuyến tính.

2), 3) , 6) là tự đồng cấu.

5) không phải là ánh xạ tuyến tính nếu $v_0 \neq \mathbf{0}$.

7) Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, tương ứng $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$(x_1,...,x_n) \mapsto f(x_1,...,x_n) = (y_1,...,y_m)$$

xác định bởi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.2)}$$

là một ánh xạ tuyến tính.

Ngược lại ta có thể chứng minh được (xem mục 4) mọi ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ đều có dạng như trên.

6.1.2 Các tính chất

Định lý 6.1: *Nếu $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính thì*

(i) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(ii) *với mọi* $v \in V$: $f(-v) = -f(v)$

(iii) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i)$, $\forall \alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}, \forall v_1,...,v_n \in V$.

Chứng minh: (i) $f(\mathbf{0}) = f(0\cdot\mathbf{0}) = 0f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(ii) $f(v) + f(-v) = f(v + (-v)) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Rightarrow f(-v) = -f(v)$.

(iii) Dễ dàng chứng minh bằng cách quy nạp theo n. ■

Định lý 6.2: *Ánh xạ $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi:*

$$\forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \qquad \textbf{(6.3)}$$

Chứng minh: Với mọi $u, v \in V$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta chứng minh điều kiện (6.1) tương đương điều kiện (6.3).

(6.1) $\Rightarrow$ (6.3): $f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha u) + f(\beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

(6.3) $\Rightarrow$ (6.1): $\begin{cases} f(u+v) = f(1u) + f(1v) = 1f(u) + 1f(v) = f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) = f(\alpha u + 0v) = \alpha f(u) + 0f(v) = \alpha f(u). \end{cases}$ ■

Định lý 6.3: *Mỗi ánh xạ tuyến tính từ V vào W hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của V; nghĩa là với cơ sở $\mathscr{B} = \{ e_1, ..., e_n \}$ cho trước của V, khi đó với mỗi hệ véc tơ $u_1, ..., u_n \in W$:*

Tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ sao cho $f(e_i) = u_i,\ i = 1, ..., n$. **(6.4)**

Chứng minh: *) Tồn tại: Với mọi $v \in V$, giả sử $(x_1, ..., x_n)$ là tọa độ của v trong cơ sở $\mathscr{B}$, nghĩa là $v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$. Đặt $f(v) = x_1u_1 + ... + x_nu_n \in W$.

Ta có thể kiểm chứng được rằng f là ánh xạ tuyến tính và $f(e_i) = u_i$, với mọi $i = 1, ..., n$.

*) Duy nhất: Giả sử $g : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính sao cho $g(e_i) = u_i$, với mọi $i = 1, ..., n$ khi đó với bất kỳ $v \in V, v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$,

$$g(v) = g(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1g(e_1) + ... + x_ng(e_n) = x_1u_1 + ... + x_nu_n = f(v)$$

Vậy $g = f$. ■

Hệ quả 6.4: *$f, g : V \to W$ là hai ánh xạ tuyến tính. $\mathscr{B} = \{ e_1, ..., e_n \}$ là một cơ sở của V. Khi đó*

$$f = g \Leftrightarrow f(e_i) = g(e_i);\ \forall i = 1, ..., n. \qquad \textbf{(6.5)}$$

6.1.3 Các phép toán của các ánh xạ tuyến tính

6.1.3.1 Hom(V,W)

Cho hai không gian véc tơ V, W. Tập các ánh xạ tuyến tính từ V vào W được ký hiệu là $\mathrm{Hom}(V,W)$ (homomorphism).

Với $f,g \in \mathrm{Hom}(V,W)$, tương ứng: $V \to W$

$$v \mapsto f(v)+g(v) \qquad \textbf{(6.6)}$$

là một ánh xạ tuyến tính, được ký hiệu $f+g$ và gọi là tổng của f và g.

Tương tự, với $k \in \mathbb{R}$, tương ứng: $V \to W$

$$v \mapsto kf(v) \qquad \textbf{(6.7)}$$

là ánh xạ tuyến tính được ký hiệu là kf.

Vậy ta đã xác định hai phép toán: cộng hai ánh xạ tuyến tính, nhân một số với ánh xạ tuyến tính. Có thể chứng minh được với hai phép toán này thì $(\mathrm{Hom}(V,W),+,\cdot)$ có cấu trúc không gian véc tơ và $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

<u>**Ví dụ 6.2**</u>: Cho hai ánh xạ tuyến tính $f,g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh như sau:

$$f(x,y,z)=(3x-5y+2z,4x+y-6z),\ g(x,y,z)=(2x+6y-7z,x-5z).$$

Ta có: $2f(x,y,z)=(6x-10y+4z,8x+2y-12z)$.

$$(3f-2g)(x,y,z)=(5x-27y+20z,10x+3y-8z).$$

6.1.3.2 EndV

Giả sử $f:V\to V'$ và $g:V'\to V''$ là hai ánh xạ tuyến tính. Có thể chứng minh được rằng ánh xạ hợp $g\circ f:V\to V''$ cũng là một ánh xạ tuyến tính.

Ký hiệu tập các tự đồng cấu của V là $\mathrm{End}V$ (endomorphism).

Với hai phép toán cộng và hợp ánh xạ $(\mathrm{End}V,+,\circ)$ có cấu trúc vành không giao hoán, có đơn vị, không nguyên.

Ngoài ra với hai phép toán (6.6) , (6.7) thì $\left(\mathrm{End}V,+,\cdot\right)$ còn là một không gian véc tơ.

Vậy $\mathrm{End}V$ vừa có cấu trúc vành, vừa có cấu trúc không gian véc tơ.

Cho $f\in\mathrm{End}V$ và $p(t)=a_0+\cdots+a_nt^n$ là một đa thức bậc n, ta ký hiệu

$$p(f)=a_0\,\mathrm{Id}_V+\cdots+a_nf^n;\ \text{trong đó}\ f^0=\mathrm{Id}_V,\ f^1=f,\ f^n=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\ \text{lần}} \qquad \textbf{(6.7)}$$

<u>**Ví dụ 6.3**</u>: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh như sau:

$$f(x,y)=(3x-5y,4x+y).$$

a) $f^2(x,y)=(-11x-20y,16x-19y)$

b) Xét đa thức $p(t)=50-9t+2t^2$.

$$p(f)(x,y)=\left(50\,\mathrm{Id}_V-9f+2f^2\right)(x,y)=(x+5y,-4x+3y).$$

6.2 NHÂN VÀ ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Định lý 6.5: *Giả sử $f:V\to W$ là ánh xạ tuyến tính, khi đó:*

(i) *Nếu V_1 là không gian con của V thì $f(V_1)$ là không gian con của W. S là một hệ sinh của V_1 thì $f(S)$ là một hệ sinh của $f(V_1)$. Do đó* $\dim f(V_1)\le\dim V_1$.

(ii) *Nếu W_1 là không gian con của W thì $f^{-1}(W_1)$ là không gian con của V, ngoài ra nếu $W_1\subset f(V)$ thì* $\dim W_1\le\dim f^{-1}(W_1)$.

Chứng minh:

(i) • Với mọi $u_1,u_2\in f(V_1)$ tồn tại $v_1,v_2\in V_1$ sao cho $u_1=f(v_1)$, $u_2=f(v_2)$. Do đó với mọi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\alpha u_1+\beta u_2=\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)=f(\alpha v_1+\beta v_2)\in f(V_1).$$

• Với mọi $u\in f(V_1)$, tồn tại $v\in V_1$ sao cho $f(v)=u$.

Giả sử $\{e_1,...,e_n\}$ là một hệ sinh của V_1, khi đó: $v=x_1v_1+...+x_nv_n$

$\Rightarrow u=f(v)=f(x_1e_1+...+x_ne_n)=x_1f(e_1)+...+x_nf(e_n)$

$\Rightarrow$ $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ là một hệ sinh của $f(V_1)$.

Điều này suy ra $\dim f(V_1)\le\dim V_1$.

(ii) • Với mọi $v_1,v_2\in f^{-1}(W_1)$, với mọi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

$$f(\alpha v_1+\beta v_2)\in\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)\in W_1\Rightarrow\alpha v_1+\beta v_2\in f^{-1}(W_1).$$

• Giả sử $\{u_1,...,u_n\}$ là một hệ độc lập tuyến tính của W_1 và $\{v_1,...,v_n\}\subset f^{-1}(W_1)$ sao cho $f(v_i)=u_i$ thì $\{v_1,...,v_n\}$ cũng độc lập tuyến tính.

Vậy $\dim W_1\le\dim f^{-1}(W_1)$ ■

Định nghĩa 6.2: *Với ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$ ta ký hiệu và định nghĩa*

$$\mathrm{Ker}f=f^{-1}\{\mathbf{0}\},\quad \mathrm{Im}\,f=f(V) \qquad \textbf{(6.9)}$$

là hạt nhân và là ảnh của f *.*

Vậy $\mathrm{Ker} f = \{v \in V \,|\, f(v) = \mathbf{0}\}$ là một không gian véc tơ con của V.

$$\forall v \in V: \ v \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow f(v) = \mathbf{0} \qquad \textbf{(6.10)}$$

$\mathrm{Im}\, f = \{f(v) \,|\, v \in V\}$ là một không gian véc tơ con của W.

$$\forall u \in W: \ u \in \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow \exists v \in V: \ u = f(v) \qquad \textbf{(6.11)}$$

Ta ký hiệu và định nghĩa

$$r(f) = \dim \mathrm{Im}\, f \qquad \textbf{(6.12)}$$

là hạng của ánh xạ f *.*

<u>Định lý 6.6</u>: *Với mọi ánh xạ tuyến tính* $f: V \to W$

$$\dim V = r(f) + \dim \mathrm{Ker}\, f \qquad \textbf{(6.13)}$$

Chứng minh: Giả sử $\{e_1, ..., e_m\}$ là một cơ sở của $\mathrm{Ker}\, f$ (khi $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$ thì m = 0). Ta có thể bổ sung để $\{e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_{m+k}\}$ là một cơ sở của V.

Ta sẽ chứng minh $\{f(e_{m+1}), ..., f(e_{m+k})\}$ là một hệ sinh, độc lập tuyến tính của $\mathrm{Im}\, f$ (do đó là một cơ sở).

- Với mọi $f(v) \in \mathrm{Im}\, f$; $v = x_1 e_1 + ... + x_m e_m + x_{m+1} e_{m+1} + ... + x_{m+k} e_{m+k} \in V$

$$f(v) = x_1 f(e_1) + ... + x_m f(e_m) + x_{m+1} f(e_{m+1}) + ... + x_{m+k} f(e_{m+k})$$
$$= x_{m+1} f(e_{m+1}) + ... + x_{m+k} f(e_{m+k}).$$

Vậy $\{f(e_{m+1}), ..., f(e_{m+k})\}$ là một hệ sinh của $f(V)$.

- Giả sử $y_1 f(e_{m+1}) + ... + y_k f(e_{m+k}) = \mathbf{0}$ thì $y_1 e_{m+1} + ... + y_k e_{m+k} \in \mathrm{Ker}\, f$

$$\Rightarrow \ y_1 e_{m+1} + ... + y_k e_{m+k} = z_1 e_1 + ... + z_m e_m$$

$$\Rightarrow \ y_1 e_{m+1} + ... + y_k e_{m+k} - z_1 e_1 - ... - z_m e_m = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \ y_1 = ... = y_k = 0.$$

Vậy $\{f(e_{m+1}), ..., f(e_{m+k})\}$ độc lập tuyến tính ■

<u>Nhận xét 6.1</u>: Giả sử $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính và $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V. Ta có thể chứng minh được $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ là một hệ sinh của $\mathrm{Im}\, f$, do đó mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ là cơ sở của $\mathrm{Im}\, f$.

Ví dụ 6.4: Xét ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z,t) = \left(2x - y + 3z + 5t, 3x - 2y + 3z + 4t, x + 3z + 6t\right).$$

Tìm một cơ sở của $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ của f. Từ đó suy ra hạng $r(f)$.

Giải: Theo (6.11): $\forall u \in \mathbb{R}^3$: $u \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^4$: $u = f(v)$.

Nói cách khác $u = (a,b,c) \in \operatorname{Im} f$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x & -y & +3z & +5t & = a \\ 3x & -2y & +3z & +4t & = b \\ x & & +3z & +6t & = c \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp khử Gauss ta được:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 & a \\ 3 & -2 & 3 & 4 & b \\ 1 & 0 & 3 & 6 & c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 & c \\ 0 & -1 & -3 & -7 & a-2c \\ 0 & -1 & -3 & -7 & b-a-c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 & c \\ 0 & -1 & -3 & -7 & a-2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-2a+c \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi $b - 2a + c = 0$. Do đó

$$u = (a,b,c) \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow u = (a, 2a - c, c) = a(1,2,0) + c(0,-1,1).$$

Vậy $\operatorname{Im} f$ có một cơ sở là $\{(1,2,0), (0,-1,1)\}$.

Tương tự, từ (6.10) ta có: $v = (x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} f$ khi và chỉ khi (x,y,z,t) là nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x & -y & +3z & +5t & = 0 \\ 3x & -2y & +3z & +4t & = 0 \\ x & & +3z & +6t & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3z - 6t \\ y = -3z - 7t \end{cases}$$

Vậy $\operatorname{Ker} f$ có một cơ sở là $\{(-3,-3,1,0), (-6,-7,0,1)\}$.

$r(f) = 2$, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$; $r(f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim \mathbb{R}^4$ (nghiệm đúng công thức 6.13).

Mặt khác ngoài cơ sở $\{(1,2,0), (0,-1,1)\}$ của $\operatorname{Im} f$, theo nhận xét 6.1 và $r(f) = 2$ thì hai véc tơ cột bất kỳ của ma trận $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ đều là cơ sở của $\operatorname{Im} f$.

6.3 TOÀN CẤU, ĐƠN CẤU, ĐẲNG CẤU

6.3.1 Toàn cấu

Định nghĩa 6.3: *Ánh xạ tuyến tính và toàn ánh được gọi là toàn cấu.*

Định lý 6.6: *Với ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$, các mệnh đề sau tương đương:*

(i) *f toàn cấu.*

(ii) *Ảnh của hệ sinh của V là hệ sinh của W.*

(iii) $r(f) = \dim W$.

Chứng minh: $(i) \Rightarrow (ii)$: Giả sử $\{v_1, ..., v_n\}$ là hệ sinh của V. Khi đó với mọi $u \in W$, tồn tại $v \in V$ sao cho $f(v) = u$ (vì $f(V) = W$).

$$v = x_1v_1 + ... + x_nv_n \Rightarrow u = f(v) = f(x_1v_1 + ... + x_nv_n) = x_1f(v_1) + ... + x_nf(v_n).$$

Vậy $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ là hệ sinh của W.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Giả sử $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V thì $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ là hệ sinh của $W \Rightarrow W = \operatorname{span}\{f(e_1), ..., f(e_n)\} = f(V) \Rightarrow f$ toàn cấu.

$(i) \Leftrightarrow f(V) = W \Leftrightarrow \dim f(V) = \dim W \Leftrightarrow r(f) = \dim W$. ■

6.3.2 Đơn cấu

Định nghĩa 6.4: *Ánh xạ tuyến tính và đơn ánh được gọi là đơn cấu.*

Định lý 6.7: *Với ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$, các mệnh đề sau tương đương:*

(i) *f đơn cấu.*

(ii) $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.

(iii) *Ảnh của hệ độc lập tuyến tính của V là hệ độc lập tuyến tính của W.*

(iv) $r(f) = \dim V$.

Chứng minh: $(i) \Rightarrow (ii)$: Hiển nhiên.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Giả sử $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow \mathbf{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2) \Rightarrow v_1 - v_2 = \mathbf{0} \Rightarrow v_1 = v_2$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Giả sử $\{v_1, ..., v_m\}$ độc lập, ta chứng minh $\{f(v_1), ..., f(v_m)\}$ độc lập:

$$\forall x_1, ..., x_m \in \mathbb{R} : x_1f(v_1) + ... + x_mf(v_m) = \mathbf{0} \Rightarrow x_1v_1 + ... + x_mv_m \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow x_1v_1 + ... + x_mv_m = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = ... = x_m = 0.$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Giả sử $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V thì $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ là hệ sinh độc lập tuyến tính của $f(V)$. Do đó $r(f) = \dim V$.

$$(iv) \Rightarrow (ii): \left.\begin{aligned} \dim V &= r(f) + \dim \operatorname{Ker} f \\ \dim V &= r(f) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}.$$ ■

Ví dụ 6.5: Ánh xạ tuyến tính xét ở ví dụ 6.4 không đơn cấu vì $\operatorname{Ker} f \neq \{\mathbf{0}\}$, không toàn cấu vì $r(f) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$.

6.3.3 Đẳng cấu

Định nghĩa 6.5: Á*nh xạ tuyến tính vừa đơn cấu vừa toàn cấu được gọi là đẳng cấu.*

Vậy đẳng cấu là một ánh xạ tuyến tính và song ánh.

Hai không gian V, W được gọi là đẳng cấu nếu có ánh xạ tuyến tính đẳng cấu $f : V \to W$.

Phép đẳng cấu $f : V \to V$ được gọi là *tự đẳng cấu* của không gian V. Tập hợp các tự đẳng cấu của V được ký hiệu là $\mathrm{Gl}(V)$.

Định lý 6.8: *V và W đẳng cấu khi và chỉ khi* $\dim V = \dim W$.

Chứng minh: $(\Rightarrow)$: Nếu $f : V \to W$ đẳng cấu thì

$$\left.\begin{array}{l} \dim V = r(f) \quad \text{(đơn cấu)} \\ \dim W = r(f) \quad \text{(toàn cấu)} \end{array}\right\} \Rightarrow \dim V = \dim W.$$

$(\Leftarrow)$: Ngược lại nếu $\dim V = \dim W = n$.

Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ là cơ sở lần lượt của V và W. Gọi $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính thoả mãn $f(e_i) = \omega_i$; $i = 1, ..., n$ (xem chứng minh định lý 6.3). Khi đó $r(f) = \dim V = \dim W \Rightarrow f$ đẳng cấu. ■

Ví dụ 6.6: Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$f(x, y) = (2x - y, x + y)$$

là một đơn cấu vì $f(x, y) = (0, 0) \Rightarrow (2x - y, x + y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$.

f đơn cấu do đó f là một đẳng cấu vì vậy: với mọi $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tồn tại duy nhất $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $(x', y') = f(x, y) = (2x - y, x + y)$.

Như vậy f đẳng cấu khi và chỉ khi hệ phương trình sau tồn tại duy nhất nghiệm:

$$\begin{cases} 2x - y = x' \\ x + y = y' \end{cases}.$$

Ta có thể tìm được nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{x' + y'}{3}$, $y = \dfrac{2y' - x'}{3}$.

Ví dụ 6.7: Xét ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbf{P}_2$ xác định bởi:

$$f(x,y,z)=(x+2y+3z)+(2x+5y+6z)t+(x+8z)t^2 .$$

Theo ví dụ 5.6 hệ phương trình $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=a \\ 2x_1+5x_2+3x_3=b \\ x_1 \qquad\quad +8x_3=c \end{cases}$ tồn tại duy nhất nghiệm.

Do đó $\forall a+bt+ct^2 \in \mathbf{P}_2$, $\exists!(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ thỏa mãn $f(x,y,z)=a+bt+ct^2$.

Vậy f là một đẳng cấu.

Định lý 6.9: $\left(\mathrm{Gl}(V),\circ\right)$ *là một nhóm không giao hoán.*

Chứng minh: Ta dễ dàng chứng minh nếu f là tự đẳng cấu của V thì ánh xạ ngược f^{-1} cũng là tự đẳng cấu của V. Nếu f,g tự đẳng cấu thì $g\circ f$ cũng tự đẳng cấu.

Ta đã biết rằng ánh xạ từ một tập hữu hạn vào một tập hữu hạn có cùng số phần tử là đơn ánh khi và chỉ khi là toàn ánh (Nhận xét 1.3-5, chương 1). Điều này cũng còn đúng đối với ánh xạ tuyến tính giữa hai không gian véc tơ có cùng số chiều.

Định lý 6.10: *Giả sử* $\dim V=\dim W$ *và* $f:V\to W$ *là ánh xạ tuyến tính từ* V *vào* W. *Khi đó:* f *đơn cấu khi và chỉ khi* f *toàn cấu, do đó đẳng cấu.*

Chứng minh:

f toàn cấu $\Leftrightarrow r(f)=\dim W \Leftrightarrow r(f)=\dim V \Leftrightarrow f$ đơn cấu. ■

6.4 ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH VÀ MA TRẬN

6.4.1 Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Theo định lý 6.3, mọi ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$ hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của V (công thức (6.4)).

Giả sử $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của V, khi đó ánh xạ tuyến tính f hoàn toàn được xác định bởi hệ véc tơ $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$.

Mặt khác nếu $\mathscr{B}'=\{\omega_1,...,\omega_m\}$ là một cơ sở của W thì hệ $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ hoàn toàn được xác định bởi ma trận cỡ $m\times n$ có n cột là các tọa độ của các véc tơ $f(e_1),...,f(e_n)$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ (công thức (3.10)). Vì vậy với hai cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ cho trước thì ánh xạ tuyến tính f hoàn toàn được xác định bởi ma trận:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}, \text{ với } f(e_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\omega_i;\ j=1,...,n \tag{6.14}$$

Định nghĩa 6.6: *Ma trận A có các cột lần lượt là tọa độ của hệ véc tơ $f(e_1),...,f(e_n)$ viết trong cơ sở $\mathscr{B}'$ (công thức (6.14)) được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ của V và $\mathscr{B}'$ của W. Ký hiệu:*

$$A=[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}. \quad \textbf{(6.15)}$$

Nếu f là một tự đồng cấu của không gian véc tơ V, khi đó ma trận A của f trong cùng một cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ của V được ký hiệu

$$A=[f]_{\mathscr{B}} \quad \textbf{(6.16)}$$

thay cho $[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cơ sở chính tắc được gọi là *ma trận chính tắc*.

Ví dụ 6.8: Xét ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x,y,z)=(2x+y-4z,3x+5z)$

$$f(1,0,0)=(2,3)=2(1,0)+3(0,1).$$

$$f(0,1,0)=(1,0)=1(1,0)+0(0,1).$$

$$f(0,0,1)=(-4,5)=-4(1,0)+5(0,1).$$

Vậy ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$ là

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-4\\3&0&5\end{bmatrix}.$$

Nhận xét 6.2: Bằng cách tính toán như ví dụ trên ta có thể kiểm tra được rằng ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ với công thức xác định ảnh:

$$f(x_1,...,x_m)=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m,...,a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m)$$

Có ma trận chính tắc:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nm}\end{bmatrix}$$

Ví dụ 6.9: Toán tử đạo hàm $D:\ \mathbf{P}_3\to\mathbf{P}_2$ là một ánh xạ tuyến tính thỏa mãn:

$$D(1)=0,\ D(t)=1,\ D(t^2)=2t,\ D(t^3)=3t^2.$$

Do đó có ma trận trong cơ sở chính tắc của $\mathbf{P}_3$ và $\mathbf{P}_2$ là $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$.

Nếu cố định cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ của V và cơ sở $\mathscr{B}'=\{\omega_1,...,\omega_m\}$ của W thì: Với mỗi ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$ tồn tại duy nhất ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ xác định bởi (6.14).

Ngược lại, cho ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$. Xét hệ véc tơ $\{u_1,...,u_n\}$ của W có tọa độ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ là các cột của ma trận A, theo định lý 6.3 tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$ thỏa mãn (6.4). Do đó $[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\in\mathscr{M}_{m\times n}$.

Vậy có tương ứng 1 - 1 giữa $\mathrm{Hom}(V,W)$ và $\mathscr{M}_{m\times n}$.

<u>Định lý 6.11</u>: *Tương ứng* $\mathrm{Hom}(V,W)\to\mathscr{M}_{m\times n}$

$$f \mapsto A=[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

xác định bởi (6.14) là một song ánh thỏa mãn các tính chất:

$$[f+g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}+[g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'};\ \forall\lambda\in\mathbb{R}: [\lambda f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=\lambda[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}. \tag{6.17}$$

$$r(f)=r([f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}). \tag{6.18}$$

Chứng minh: $[f+g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là ma trận của hệ véc tơ cột $\{(f+g)(e_1),...,(f+g)(e_n)\}$, $[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là ma trận của hệ véc tơ cột $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ và $[g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là ma trận của hệ véc tơ cột $\{g(e_1),...,g(e_n)\}$. Do đó $[f+g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}+[g]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. Đẳng thức thứ hai của công thức (6.17) được chứng minh tương tự.

Để chứng minh công thức (6.18) ta nhận thấy rằng hạng $r(A)$ của ma trận $A=[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là hạng của hệ các véc tơ cột $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$.

Mặt khác $\mathrm{span}\{f(e_1),...,f(e_n)\}=f(V)$, do đó $r(A)=\dim f(V)=r(f)$. ■

Cho hai ánh xạ tuyến tính $f,g:\ V\xrightarrow{f}V'\xrightarrow{g}V''$. V,V',V'' lần lượt có cơ sở là $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$, $\mathscr{B}'=\{e'_1,...,e'_m\}$, $\mathscr{B}''=\{e_1'',...,e_l''\}$.

Giả sử $A=[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ và $B=[g]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$ là ma trận của g trong cơ sở $\mathscr{B}'$, $\mathscr{B}''$ thì BA là ma trận của $g\circ f$ trong cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}''$. Thật vậy:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n},\ \text{xác định bởi } f(e_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}e'_i\ ;\ j=1,...,n$$

$B=\left[b_{ki}\right]_{l\times m}$, xác định bởi $g(e'_i)=\sum_{k=1}^{l} b_{ki}e''_k$; $i=1,...,m$

$$g\circ f(e_j)=g\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i\right)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}g(e'_i)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{l} b_{ki}e''_k\right)=\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}\right)e''_k .$$

Điều này chứng tỏ BA là ma trận của $g\circ f$.

$$\left[g\circ f\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}=\left[g\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}\left[f\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \qquad \textbf{(6.19)}$$

Khi $V=V'=V''$ và ta chọn cố định một cơ sở của V thì có tương ứng 1-1 giữa các tự đồng cấu của V và các ma trận vuông cấp n.

Định lý 6.12: *Tương ứng* $\mathrm{End}(V)\to \mathscr{M}_n$

$$f\mapsto A=\left[f\right]_{\mathscr{B}}$$

là một đẳng cấu vành, trong đó $A=\left[f\right]_{\mathscr{B}}$ *là ma trận của* f *trong một cơ sở cố định* $\mathscr{B}$ *của* V *xác định bởi* (6.14), (6.16).

Hệ quả 6.13: *Cho* $f\in \mathrm{End}V$, $\mathscr{B}$ *là một cơ sở của* V. *Đặt* $A=\left[f\right]_{\mathscr{B}}$, *khi đó:*

f *là tự đẳng cấu khi và chỉ khi* A *khả nghịch, đồng thời ma trận của* f^{-1} *trong cơ sở* $\mathscr{B}$ *có dạng* $\left[f^{-1}\right]_{\mathscr{B}}=A^{-1}$.

Hệ quả 6.14: *Cho* $f\in \mathrm{End}V$, $\mathscr{B}$ *là một cơ sở của* V. *Giả sử* $p(t)=a_0+\cdots+a_nt^n$ *là một đa thức bậc* n. *Đặt* $A=\left[f\right]_{\mathscr{B}}$; *theo* (6.8), (6.16) - (6.19) *ta có:*

Ma trận của $p(f)=a_0\,\mathrm{Id}_V+\cdots+a_nf^n$ *trong cơ sở* $\mathscr{B}$ *là* $p(A)=a_0I+\cdots+a_nA^n$.

Ví dụ 6.10: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh

$$f(x,y,z)=(x+2y+2z,3x+y+5z,x-y+z).$$

a) Chứng minh rằng f là một đẳng cấu. Tìm công thức xác định ảnh của ánh xạ ngược $f^{-1}(x,y,z)$.

b) Cho đa thức $p(t)=2-4t+3t^2$. Viết ma trận chính tắc của $p(f)$.

Giải: a) Ma trận chính tắc của f là $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\3&1&5\\1&-1&1\end{bmatrix}$. A khả nghịch và

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & -4 & 8\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 3 & -5\end{bmatrix}.$$

Do đó f là một đẳng cấu và ánh xạ ngược xác định như sau:

$$f^{-1}(x,y,z)=\frac{1}{2}(6x-4y+8z,2x-y+z,-4x+3y-5z).$$

b) Ma trận chính tắc của $p(f)$:

$$A^2=\begin{bmatrix}9 & 2 & 14\\ 11 & 2 & 16\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow p(A)=2I-4A+3A^2=\begin{bmatrix}25 & -2 & 34\\ 21 & 4 & 28\\ -7 & 4 & -8\end{bmatrix}.$$

6.4.2 Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

Giả sử $f:V\to W$ là ánh xạ tuyến tính.

Gọi $T=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}_1}$ là ma trận chuyển cơ sở $\mathscr{B}_1=\{e_1,...,e_n\}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'_1=\{e'_1,...,e'_n\}$ của không gian V.

Gọi $P=\left[p_{ki}\right]_{\mathscr{B}'_2}^{\mathscr{B}_2}$ là ma trận chuyển cơ sở $\mathscr{B}_2=\{\omega_1,...,\omega_m\}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'_2=\{\omega'_1,...,\omega'_m\}$ của W.

$A=\left[f\right]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$,

$A'=\left[f\right]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}'_2}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}'_1,\mathscr{B}'_2$ thì

$$\left[p_{ki}\right]_{\mathscr{B}'_2}^{\mathscr{B}_2}\left[f\right]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}'_2}=\left[f\right]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}_1} \qquad \textbf{(6.20)}$$

Hoặc

$$PA'=AP;\quad A'=P^{-1}AT \qquad \textbf{(6.21)}$$

Thật vậy: Giả sử $A=\left[f\right]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}=\left[a_{ki}\right]_{m\times n}\Rightarrow f(e_i)=\sum_{i=1}^{m}a_{ki}\omega_k$

$$A'=\left[f\right]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}'_2}=\left[a'_{ki}\right]_{m\times n}\Rightarrow f(e'_j)=\sum_{i=1}^{m}a'_{ij}\,\omega'_i$$

$$P=\left[p_{ki}\right]_{\mathscr{B}'_2}^{\mathscr{B}_2}\Rightarrow \omega'_i=\sum_{i=1}^{m}p_{ki}\omega_k$$

$$T=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}_1} \Rightarrow e'_j=\sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i \,.$$

Ta có:

$$f(e'_j)=\sum_{i=1}^{m} a'_{ij}\,\omega'_i=\sum_{i=1}^{m} a'_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} p_{ki}\omega_k\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m} p_{ki}a'_{ij}\right)\omega_k \quad (*)$$

Mặt khác:

$$f(e'_j)=f\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i\right)=\sum_{i=1}^{n} t_{ij} f(e_i)=\sum_{i=1}^{n} t_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}\omega_k\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}t_{ij}\right)\omega_k \quad (**)$$

(*) và (**) suy ra $\sum_{i=1}^{m} p_{ki}a'_{ij}=\sum_{i=1}^{n} a_{ki}t_{ij}$ với mọi $j=1,...,n$; $k=1,...,m$.

Do đó $PA'=AT$. Vậy $A'=P^{-1}AT$.

Đặc biệt nếu f là tự đồng cấu của không gian véc tơ V . Gọi A, A' là ma trận của f trong hai cơ sở $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ và T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì:

$$A'=T^{-1}AT \qquad \textbf{(6.22)}$$

$$[f]_{\mathscr{B}'}=\left(\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^{-1}[f]_{\mathscr{B}}\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \qquad \textbf{(6.23)}$$

Ví dụ 6.11: Tự đồng cấu tuyến tính f có ma trận ứng với cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ xác định như sau:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{bmatrix}.$$

Hãy tìm ma trận A' của f trong cơ sở $\mathscr{B}'=\{e_1,e_3,e_2,e_4\}$.

Giải:

Cách 1 (Tìm trực tiếp theo định nghĩa 6.6 công thức (6.14)-(6.16)):

Đặt $e'_1=e_1$, $e'_2=e_3, e'_3=e_2, e'_4=e_4$.

Theo giả thiết ta có:

$$f(e'_1)=f(e_1)=e_1+3e_2+2e_3+e_4=e'_1+2e'_2+3e'_3+e'_4\,;$$

$$f(e'_2)=f(e_3)=-e_2+3e_3+e_4=3e'_2-e'_3+e'_4\,;$$

$f(e'_3) = f(e_2) = 2e_1 + 5e_3 + 2e_4 = 2e'_1 + 5e'_2 + 2e'_4$;

$f(e'_4) = f(e_4) = e_1 + 2e_2 + e_3 + 3e_4 = e'_1 + e'_2 + 2e'_3 + 3e'_4$;

Vậy ma trận A' của f trong cơ sở $\mathscr{B}' = \{e_1, e_3, e_2, e_4\}$:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Cách 2 (Áp dụng công thức 6.22, 4.25, 3.12):

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 6.7: *Hai ma trận A, B được gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $B = T^{-1}AT$.*

Công thức (6.22) cho thấy hai ma trận của một tự đồng cấu bất kỳ trong hai cơ sở khác nhau là đồng dạng. Mặt khác, nếu A, B đồng dạng thì $\det A = \det B$. Vì vậy ta có thể định nghĩa định thức của một tự đồng cấu f là

$$\det f = \det A \qquad \textbf{(6.24)}$$

trong đó A là ma trận của f trong một cơ sở nào đó.

Ví dụ 6.12: Cho hai ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ và $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$f(x, y) = (x - 2y, x, -3x + 4y),\ g(x, y, z) = (x - 2y - 5z, 3x + 4y)$$

Tìm ma trận chính tắc của $g \circ f$, tính $\det(g \circ f)$.

Giải : Gọi A, B lần lượt là ma trận chính tắc của f và g thì:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

và ma trận chính tắc của $g \circ f$ là $BA = \begin{bmatrix} 14 & -22 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$.

Định thức: $\det(g \circ f) = \begin{vmatrix} 14 & -22 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 70$.

6.4.3 Biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính

Giả sử $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính, $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V và $\mathscr{B}' = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$ là một cơ sở của W.

Nếu $(x_1, ..., x_n) = (v)_{\mathscr{B}}$ là tọa độ của $v \in V$ trong cơ sở $\mathscr{B}$,

$(y_1, ..., y_m) = (f(v))_{\mathscr{B}'}$ là tọa độ của $f(v) \in W$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ (xem 3.10)

và $[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = [a_{ij}]_{m\times n}$ là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ thì

$$[f(v)]_{\mathscr{B}'} = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}[v]_{\mathscr{B}}\text{; nghĩa là } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.25)}$$

(6.25) *được gọi là biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính* f.

Đặc biệt nếu $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$(y_1, ..., y_m) = f(x_1, ..., x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \, ..., \, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

thì ma trận chính tắc của f là $[a_{ij}]_{m\times n}$ (xem nhận xét 6.2). Ngược lại từ công thức (6.25) suy ra rằng mọi ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ đều có dạng trên, điều này giải thích công thức (6.2) của ví dụ 6.1.

6.4.4 Ánh xạ tuyến tính và hệ phương trình tuyến tính

Đẳng thức (6.25) có thể viết dưới dạng hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ .... \\ y_m = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad \textbf{(6.26)}$$

Điều này cho phép giải quyết các bài toán về ánh xạ tuyến tính thông qua hệ phương trình tuyến tính.

Giả sử $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính, $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V và $\mathscr{B}' = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$ là một cơ sở của W.

Từ công thức (6.10), (6.11) xác định $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ và biểu thức tọa độ dưới dạng hệ phương trình tuyến tính (6.26) ta có các kết quả sau:

- Với mọi $u \in W$, $u = b_1\omega_1 + \cdots + b_m\omega_m$. Khi đó

$u \in \operatorname{Im} f$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ có nghiệm **(6.27)**

- Với mọi $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in V$;

$v \in \operatorname{Ker} f$ khi và chỉ khi $(x_1,...,x_n)$ là nghiêm của phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(6.28)}$$

<u>**Ví dụ 6.13**</u>: Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_2$ có công thức xác định ảnh

$$f(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = (5a_0 + 2a_1 - 3a_2 + a_3) + (4a_0 + a_1 - 2a_2 + 3a_3)t$$
$$+ (a_0 + a_1 - a_2 - 2a_3)t^2$$

a) Viết biểu thức tọa độ của f trong cơ sở chính tắc.

b) Tìm một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ và $\operatorname{Im} f$.

Giải: a) Đặt $f(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = b_0 + b_1t + b_2t^2$, biểu thức tọa độ (6.24) của f trong cơ sở chính tắc có dạng

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Dạng phương trình (6.25):

$$\begin{cases} b_0 = 5a_0 + 2a_1 - 3a_2 + a_3 \\ b_1 = 4a_0 + a_1 - 2a_2 + 3a_3 \\ b_2 = a_0 + a_1 - a_2 - 2a_3 \end{cases}$$

b) $q = b_0 + b_1t + b_2t^2 \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists\, p = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : f(p) = q$.

Điều này tương đương hệ phương trình (với ẩn a_0, a_1, a_2, a_3) sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 5a_0 + 2a_1 - 3a_2 + a_3 = b_0 \\ 4a_0 + a_1 - 2a_2 + 3a_3 = b_1 \\ \ \ a_0 + a_1 - a_2 - 2a_3 = b_2 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp khử Gauss ta được:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 & b_0 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & b_1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & b_2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & b_2 \\ 3 & 0 & -1 & 5 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 + b_1 - b_0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -7 & 2b_2 - b_1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 + b_1 - b_0 \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi $b_2 + b_1 - b_0 = 0$.

Do đó

$$q = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow q = (b_1 + b_2) + b_1 t + b_2 t^2 = b_1(1+t) + b_2(1+t^2).$$

Vậy $\operatorname{Im} f$ có một cơ sở là $\left\{ q_1 = 1 + t,\ q_2 = 1 + t^2 \right\}$.

Theo nhận xét 6.1 và tương tự ví dụ 6.4 ta cũng nhận thấy rằng hai véc tơ cột bất kỳ của ma trận $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ độc lập, do đó các cặp véc tơ tương ứng tạo thành cơ sở của $\operatorname{Im} f$.

Chẳng hạn $\{r_1, r_2\}$, $\{r_1, r_3\}$, $\{r_1, r_4\}$, $\{r_2, r_3\}$, $\{r_2, r_4\}$, $\{r_3, r_4\}$ là các cơ sở của $\operatorname{Im} f$, trong đó $\left\{ r_1 = 5 + 4t + t^2,\ r_2 = 2 + t + t^2,\ r_3 = -3 - 2t - t^2,\ r_4 = 1 + 3t - 2t^2 \right\}$.

$p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \operatorname{Ker} f$ khi và chỉ khi a_0, a_1, a_2, a_3 là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{cases} 5a_0 + 2a_1 - 3a_2 + a_3 = 0 \\ 4a_0 + a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_0 + a_1 - a_2 - 2a_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -2a_0 + a_1 - 7a_3 = 0 \\ 3a_0 - a_2 + 5a_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2a_0 + 7a_3 \\ a_2 = 3a_0 + 5a_3 \end{cases}$$

Do đó:

$$p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow p = a_0 + (2a_0 + 7a_3)t + (3a_0 + 5a_3)t^2 + a_3 t^3$$

$$\Leftrightarrow p = a_0(1 + 2t + 3t^2) + a_3(7t + 5t^2 + t^3).$$

Vậy $\operatorname{Ker} f$ có một cơ sở là $\left\{ p_1 = 1 + 2t + 3t^2;\ p_2 = 7t + 5t^2 + t^3 \right\}$.

Nhận xét 6.3:

a) Từ hai định lý 6.11, 6.12 hệ quả 6.13, 6.14 và các ví dụ trên ta thấy rằng một bài toán về ánh xạ tuyến tính có thể chuyển sang bài toán ma trận, hệ phương trình tuyến tính và ngược lại. Chẳng hạn để chứng minh định thức của ma trận A khác 0 ta chỉ cần chứng minh tự đồng cấu tuyến tính f với $A = [f]_{\mathscr{B}}$ là đơn cấu hoặc toàn cấu, hoặc hệ phương trình tuyến tính tương ứng (6.25), (6.26) có duy nhất nghiệm.

b) $\dim \operatorname{Ker} f$ là chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất (6.28), hạng của ma trận hệ số bằng hạng của f. Áp dụng định lý 5.5-b) ta nhận được đẳng thức (6.13) của định lý 6.6.

6.5 CHÉO HOÁ MA TRẬN

Trong phần này ta giải quyết bài toán: Với tự đồng cấu tuyến tính f của không gian V, hãy tìm một cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{6.28}$$

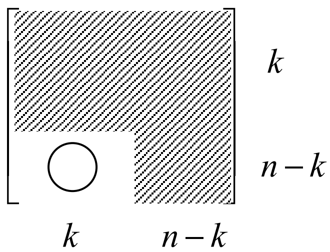
Bài toán trên cũng tương đương với bài toán: Cho ma trận A tìm ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

Ta sẽ chỉ ra khi nào bài toán này có lời giải, cách tìm cơ sở để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo hoặc cách tìm ma trận T sao cho $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

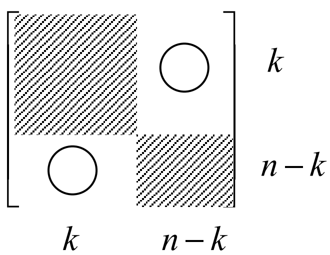
6.5.1 Không gian con bất biến

Định nghĩa 6.8: *Không gian con W của không gian V được gọi là bất biến đối với tự đồng cấu f trên V nếu $f(W) \subset W$.*

Giả sử $\{e_1,...,e_k\}$ là một cơ sở của W, ta bổ sung để $\{e_1,...,e_k,e_{k+1},...,e_n\}$ là cơ sở của V. Với cơ sở này ma trận của f có dạng



Nếu $V = W_1 \oplus W_2$, W_1, W_2 bất biến đối với f thì có thể chọn cơ sở để ma trận của f có dạng



6.5.2 Véc tơ riêng, giá trị riêng

<u>Định nghĩa 6.9</u>: λ được gọi là giá trị riêng của ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nếu tồn tại $x_1,...,x_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ hay } \left(A-\lambda I\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.30)}$$

Khi đó $v=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ được gọi là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

Như vậy các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ là các nghiệm khác không của phương trình thuần nhất (6.29). Không gian nghiệm của (6.29) được gọi là không gian riêng ứng với giá trị riêng λ.

<u>Định nghĩa 6.10</u>: λ *được gọi là một giá trị riêng của tự đồng cấu* f *nếu tồn tại véc tơ* $v\in V$ *:*

$$v\neq \mathbf{0} \text{ sao cho } f(v)=\lambda v \qquad \textbf{(6.31)}$$

v là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

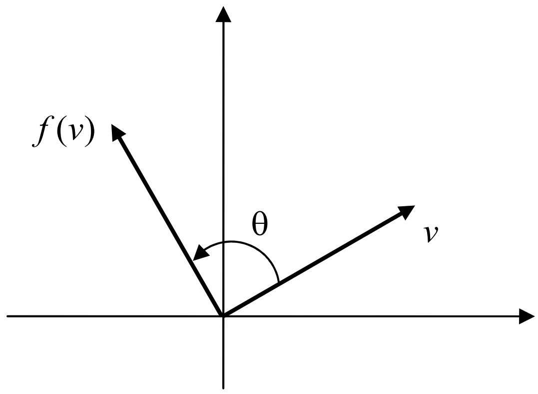
<u>Ví dụ 6.14</u>:

a) Xét ánh xạ đồng nhất $\mathrm{Id}_V : V\to V$.

Với mọi $v\in V$, $\mathrm{Id}_V(v)=v$.

Vậy 1 là một giá trị riêng của Id_V.

b) Phép quay góc θ (ví dụ 6.1)



$f_\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$(x,y)\mapsto f_\theta(x,y)=(x\cos\theta-y\sin\theta, x\sin\theta+y\cos\theta)$

- Khi $\theta=0$, f_θ là ánh xạ đồng nhất $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$: chỉ có giá trị riêng là 1.
- Khi $\theta=\pi$, f_θ: chỉ có giá trị riêng là -1.
- Khi $\theta\neq 0,\pi$, f_θ không có giá trị riêng.

c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi: $f(x,y)=(3x-y,-2x+4y)$.

Dễ dàng thấy $f(x,x)=2(x,x)$. Vậy 2 là một giá trị riêng và mọi véc tơ $v=(x,x)$; $x\neq 0$ là véc tơ riêng tương ứng.

<u>Định nghĩa 6.11</u>: *Cho tự đồng cấu f của V. Với mỗi $\lambda\in\mathbb{R}$, ký hiệu*

$$V_\lambda = \{v \in V \,|\, f(v) = \lambda v\} = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_V) \tag{6.32}$$

Rõ ràng rằng V_λ là không gian con của V.

Nếu λ là giá trị riêng thì V_λ được gọi là không gian riêng ứng với giá trị riêng λ.

<u>Định lý 6.15</u>: *1) λ là giá trị riêng của f khi và chỉ khi $V_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$.*

2) Nếu λ là giá trị riêng của f thì mọi véc tơ $v \neq \mathbf{0}$ của V_λ đều là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

3) Vơi mọi λ, không gian con V_λ bất biến đối với f.

Chứng minh: Ta chứng minh 3)

a) Trường hợp $V_\lambda = \{\mathbf{0}\}$ là hiển nhiên.

b) Trường hợp V_λ là không gian riêng:

Với mọi $v \in V_\lambda \Rightarrow f(v) = \lambda v \Rightarrow f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) \Rightarrow f(v) \in V_\lambda$ ■

<u>Nhận xét 6.4</u>: Nếu $A = [f]_{\mathscr{B}}$ là ma trận của tự đồng cấu f trong cơ sở $\mathscr{B}$. Khi đó $v \in V$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của f khi và chỉ khi $(v)_{\mathscr{B}}$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của A. Nghĩa là:

$$v \in V;\, (v)_{\mathscr{B}} = (x_1, \ldots, x_n), v \neq \mathbf{0} : f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.33}$$

6.5.3 Đa thức đặc trưng

<u>Định nghĩa 6.12</u>: *A là một ma trận vuông cấp n. Định thức*

$$\mathscr{P}(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{6.34}$$

là một đa thức bậc n của λ được gọi là đa thức đặc trưng của A.

Nếu f là một tự đồng cấu trong không gian véc tơ V có ma trận $A = [f]_{\mathscr{B}}$ trong một cơ sở $\mathscr{B}$ nào đó của V. Khi đó định thức

$$\mathscr{P}(\lambda) = \det(f - \lambda \operatorname{Id}_V) = \det(A - \lambda I) \tag{6.35}$$

không phụ thuộc vào cơ sở của V, cũng được gọi là đa thức đặc trưng của f.

Định lý 6.16: λ_0 là giá trị riêng của A (tương ứng của f) khi và chỉ khi λ_0 là nghiệm của đa thức đặc trưng của A (tương ứng của f).

Chứng minh: λ_0 là giá trị riêng khi và chỉ khi $V_{\lambda_0} \neq \{\mathbf{0}\}$. Điều này tương đương với các điều sau: Ánh xạ $f - \lambda_0 \operatorname{Id}_V$ không đơn cấu, hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (6.33) có nghiệm không tầm thường.

Vậy λ_0 là giá trị riêng khi và chỉ khi $r\left(f - \lambda_0 \operatorname{Id}_V\right) < n$; do đó $\det\left(f - \lambda_0 \operatorname{Id}_V\right) = 0$ hoặc $\det\left(A - \lambda_0 I\right) = 0$. Nghĩa là $\mathscr{P}(\lambda_0) = 0$. ■

Ví dụ 6.15: Tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của tự đồng cấu trong $\mathbb{R}^2$ có ma trận chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ (xem ví dụ 6.14-c).

Đa thức đặc trưng

$$\mathscr{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) = 0$$

có các nghiệm $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5$.

* Véc tơ riêng $v = (x, y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ là nghiệm khác 0 của hệ

$$\left(A - \lambda_1 I\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ hay } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình tương đương với phương trình $x - y = 0 \Rightarrow y = x$.

Vậy $v = (x, x) = x(1,1),\ x \neq 0$.

* Véc tơ riêng $v = (x, y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 5$ là nghiệm khác 0 của hệ

$$\left(A - \lambda_2 I\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ hay } \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình tương đương với phương trình $2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$.

Vậy $v = (x, -2x) = x(1, -2);\ x \neq 0$.

Ví dụ 6.16: Phép quay góc θ (ví dụ 6.1, 6.14-b) $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh $f_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$.

Đa thức đặc trưng:

$$\mathscr{P}(\lambda) = \det\left(f_\theta - \lambda \operatorname{Id}_V\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta.$$

Do đó f_θ chỉ có giá trị riêng khi $\sin^2\theta \Rightarrow \theta = 0$ hoặc $\theta = \pi$.

Định lý 6.17: *Mọi tự đồng cấu f trong không gian thực n chiều $(n \ge 1)$ đều có ít nhất một không gian con bất biến một chiều hoặc hai chiều.*

Chứng minh: Giả sử A là ma trận của tự đồng cấu f trong cơ sở $\{e_1,...,e_n\}$.

Đa thức đặc trưng $\mathscr{P}(\lambda) = |A - \lambda I|$ là đa thức bậc n của λ.

- Trường hợp phương trình $\mathscr{P}(\lambda) = 0$ có nghiệm thực λ_0, theo Định lý 6.16 và Định nghĩa 6.10 tồn tại $v \ne 0$ sao cho $f(v) = \lambda_0 v$. Không gian con một chiều sinh bởi $\{v\}$ bất biến đối với f.

- Trường hợp phương trình $\mathscr{P}(\lambda) = 0$ không có nghiệm thực thì có ít nhất một nghiệm phức $\lambda_1 = a + ib$ (xem phụ lục).

Xét hệ phương trình tuyến tính phức

$$\left[A - \lambda_1 I\right]\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.36)}$$

Rõ ràng rằng hệ phương trình này không thể có nghiệm thực, vì nếu $z_1, ..., z_n$ thực thì $A\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ thực nhưng $\lambda_1\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ phức, vô lý.

Mặt khác, vì $\det\left(A - \lambda_1 I\right) = 0$ nên hệ phương trình (6.36) tồn tại nghiệm $(z_1,..., z_n)$ không đồng thời bằng 0.

Giả sử $z_1 = x_1 + iy_1,\ ...,\ z_n = x_n + iy_n$ thì:

- $x_1,..., x_n$ không thể đồng thời bằng 0 (vì nếu $x_1 = ... = x_n = 0$ thì $y_1,..., y_n$ là nghiệm thực của phương trình).
- $y_1,..., y_n$ không thể đồng thời bằng 0 (vì nếu $y_1 = ... = y_n = 0$ thì $x_1,..., x_n$ là nghiệm thực của phương trình).
- $x_1,..., x_n$ và $y_1,..., y_n$ không tỉ lệ. Thật vậy, nếu $x_1 = ky_1, ... , x_n = ky_n$ thì

$$(z_1,... , z_n) = (k+i)(y_1,..., y_n)$$

$$\left[A - \lambda_1 I\right]\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \left[A - \lambda_1 I\right](k+i)\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[A - \lambda_1 I\right]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

điều này chứng tỏ $y_1,...,y_n$ là nghiệm thực của hệ, vô lý.

Đặt $v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, $u = y_1e_1 + ... + y_ne_n$, vì $x_1,...,x_n$ và $y_1,...,y_n$ không đồng thời bằng 0 và không tỉ lệ nên hệ hai véc tơ $\{v,u\}$ độc lập.

Mặt khác bằng cách đồng nhất phần thực và phần ảo của số phức ta suy ra

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad A\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Vậy
$$\begin{cases} f(v) = av - bu \\ f(u) = bv + au \end{cases} \quad \textbf{(6.37)}$$

Do đó $W = \text{span}\{v,u\}$ là không gian con hai chiều bất biến đối với f. ■

6.5.4 Tự đồng cấu chéo hoá được

Định nghĩa 6.13: 1) *Tự đồng cấu f trong không gian véc tơ V chéo hoá được nếu tồn tại một cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.*

Từ định nghĩa này ta thấy rằng f chéo hoá được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f.

2) Ma trận vuông A chéo hoá được nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

Định lý 6.18: *Nếu $v_1,...,v_m$ là các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt $\lambda_1,...,\lambda_m$ của tự đồng cấu f (hoặc ma trận A) thì hệ véc tơ $\{v_1,...,v_m\}$ độc lập tuyến tính.*

Chứng minh: Ta chứng minh quy nạp theo k rằng hệ $\{v_1,...,v_k\}$ độc lập tuyến tính với $1 \le k \le m$.

* Khi $k = 1$ hệ một véc tơ $v_1 \ne \mathbf{0}$ là độc lập tuyến tính.

* Giả sử hệ $\{v_1,...,v_k\}$ với $1 \le k \le m-1$ độc lập tuyến tính. Ta chứng minh hệ $\{v_1,...,v_k,v_{k+1}\}$ độc lập. Thật vậy, giả sử

$$x_1v_1 + ... + x_kv_k + x_{k+1}v_{k+1} = \mathbf{0} \quad (*)$$

$$\Rightarrow f(x_1v_1 + ... + x_kv_k + x_{k+1}v_{k+1}) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1x_1v_1 + ... + \lambda_kx_kv_k + \lambda_{k+!}x_{k+1}v_{k+1} = \mathbf{0} \quad (**)$$

Nhân λ_{k+1} vào (*) rồi trừ cho (**) ta được

$$(\lambda_{k+1}-\lambda_1)x_1v_1+\ldots+(\lambda_{k+1}-\lambda_k)x_kv_k=\mathbf{0}$$

Vì $\{v_1,\ldots,v_k\}$ độc lập và các $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ khác nhau từng đôi một suy ra

$$x_1=\ldots=x_k=0 \Rightarrow x_{k+1}=0\,.$$ ■

<u>Hệ quả 6.19</u>: *Nếu đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f trong không gian n chiều V (hoặc ma trận A vuông cấp n) có đúng n nghiệm thực phân biệt thì f (tương ứng ma trận A) chéo hoá được.*

Chứng minh: Vì đa thức đặc trưng có n nghiệm phân biệt nên n véc tơ riêng tương ứng với n giá trị riêng này là một hệ độc lập, do đó là một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f. Vậy f chéo hoá được. ■

<u>Hệ quả 6.20</u>: *Giả sử đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f (hoặc ma trận A vuông cấp n) chỉ có các nghiệm thực:*

$$\mathscr{P}(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$$

với $m_1+\ldots+m_k=n$ và các $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ khác nhau từng đôi một.

Khi đó f (tương ứng ma trận A) chéo hoá được khi và chỉ khi chiều của không gian riêng ứng với giá trị riêng λ_i bằng độ bội m_i của nghiệm. Nghĩa là

$$\forall\ i=1,\ldots,k:\ \dim V_{\lambda_i}=m_i. \qquad \textbf{(6.38)}$$

Chứng minh: $(\Leftarrow)$: Trong mỗi V_{λ_i} ta chọn một cơ sở gồm m_i véc tơ. Hệ n véc tơ gộp lại từ các véc tơ của các cơ sở vừa chọn là một hệ độc lập tuyến tính, do đó hệ này là một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f. Vậy f chéo hoá được.

$(\Rightarrow)$: Giả sử f chéo hoá được, khi đó tồn tại cơ sở gồm các véc tơ riêng để ma trận f có dạng chéo

$$\begin{bmatrix}\mu_1 & & \bigcirc\\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \mu_n\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \mathscr{P}(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\mu_1)\ldots(\lambda-\mu_n)$$

Suy ra các giá trị riêng $\mu_1,\ldots,\mu_n$ phải trùng với $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$.

Vậy có đúng m_i giá trị riêng trong các $\mu_1,\ldots,\mu_n$ bằng λ_i, $i=1,\ldots,k$. Do đó có đúng m_i véc tơ riêng độc lập ứng với giá trị riêng λ_i, nghĩa là $\dim V_{\lambda_i}=m_i$. ■

6.5.5 Thuật toán chéo hoá

❖ Bài toán 1: Cho tự đồng cấu f trên không gian V. Hãy tìm cơ sở của V để ma trận f trong cơ sở này có dạng chéo.

❖ Bài toán 2: Cho ma trận A vuông cấp n. Tìm ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

Cho tự đồng cấu f trong không gian véc tơ V. Giả sử $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở trong V và ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}$ là $A=[f]_{\mathscr{B}}$. Khi đó bài toán 1 trở thành bài toán 2. Ngược lại, cho ma trận vuông A ta xét ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là A. Khi đó bài toán 2 trở thành bài toán 1.

Vì vậy, để giải hai bài toán này ta cần tìm cơ sở $\mathscr{B}'=\{e'_1,...,e'_n\}$ gồm các véc tơ riêng của f và ma trận cần tìm T chính là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$. Vậy ta cần thực hiện các bước sau:

Bước 1: Viết đa thức đặc trưng dạng:

$$\mathscr{P}(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{m_1}...(\lambda_k-\lambda)^{m_k}Q(\lambda)$$

trong đó $Q(\lambda)$ là đa thức không có nghiệm thực.

➢ Nếu $m_1+\cdots+m_k<n$ (khi bậc của $Q(\lambda)\geq 2$): không chéo hóa được.

➢ Nếu $m_1+\cdots+m_k=n$ thì $\lambda_1,...,\lambda_k$ là các giá trị riêng phân biệt; tiếp tục bước 2.

Bước 2: Với mỗi giá trị riêng λ_i tìm một cơ sở của không gian riêng V_{λ_i}. Các véc tơ riêng $v=x_1e_1+...+x_ne_n$ có $(x_1,...,x_n)$ là nghiệm khác 0 của hệ phương trình thuần nhất:

$$[A-\lambda_i I]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.39)}$$

$\dim V_{\lambda_i}=d_i=n-r(A-\lambda_i I)$.

➢ Nếu $d_i<m_i$ với i nào đó, $1\leq i\leq k$ thì f không hoá chéo được.

➢ Nếu $d_i=m_i$, $\forall i:1\leq i\leq k$. Tiếp tục bước 3.

Bước 3: Với giá trị riêng λ_i, $i=1,...,k$ ta đã chọn được m_i véc tơ riêng độc lập tuyến tính. Gộp tất cả các véc tơ này ta được hệ gồm $m_1+...+m_k=n$ véc tơ riêng độc lập, đó là cơ sở $\mathscr{B}'$ cần tìm. Ma trận T có các cột là tọa độ của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$.

Ví dụ 6.17: Chéo hóa ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A: $\mathscr{P}(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & -5-\lambda & -3 \\ -8 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(3-\lambda).$$

A có ba giá trị riêng phân biệt $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=3$ nên chéo hóa được.

*) Véc tơ riêng $v=(x,y,z)\neq \mathbf{0}$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1=-1$ là nghiệm khác không của hệ phương trình

$$\left[A-\lambda_1 I\right]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ta có: $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ: $\begin{cases} 3x-y=0 \\ 4x+z=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=3x \\ z=-4x \end{cases}$

Do đó $v\in V_{\lambda_1}\Leftrightarrow v=\left(x,3x,-4x\right)=x(1,3,-4)$ chọn $e'_1=(1,3,-4)$.

**) Véc tơ riêng $v=(x,y,z)\neq \mathbf{0}$ ứng với giá riêng $\lambda_2=1$ là nghiệm khác không của hệ phương trình

$$\left[A-\lambda_2 I\right]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ta có: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ: $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=x \\ z=-2x \end{cases}$

Do đó $v \in V_{\lambda_2} \Leftrightarrow v = (x, x, -2x) = x(1,1,-2)$ chọn $e'_2 = (1,1,-2)$.

***) Giá trị riêng $\lambda_3 = 3$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm khác không của hệ phương trình $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ta có $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 4x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = \dfrac{-4}{3}x \end{cases}$

Do đó $v \in V_{\lambda_3} \Leftrightarrow v = \left(x, -x, \dfrac{-4}{3}x \right) = \dfrac{x}{3}(3,-3,-4)$ chọn $e'_3 = (3,-3,-4)$.

Cơ sở mới gồm các véc tơ riêng $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

Đặt $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ thì $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

<u>Ví dụ 6.18</u>: Xét tự đồng cấu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (3x - 2y, -2x + 3y, z).$$

Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.

Ma trận chính tắc của f: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng

$$\mathscr{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1 = 5$ và $\lambda_2 = 1$ (kép).

*) Giá trị riêng $\lambda_1 = 5$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm khác không của hệ phương trình: $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

có hệ phương trình tương đương: $\begin{cases} x+y \quad =0 \\ \qquad z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}$

$v=(-y,y,0)=y(-1,1,0)$ chọn $e'_1=(-1,1,0)$.

**) Giá trị riêng $\lambda_2=1$ có véc tơ riêng $v=(x,y,z)$ là nghiệm khác không của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với phương trình: $x-y=0$, z tuỳ ý.

$v=(x,x,z)=x(1,1,0)+z(0,0,1)$ chọn $e'_2=(1,1,0)$, $e'_3=(0,0,1)$.

Chọn cơ sở $\mathscr{B}'=\{e'_1,e'_2,e'_3\}$; $f(e'_1)=5e'_1$, $f(e'_2)=e'_2$, $f(e'_3)=e'_3$.

Ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng $A'=[f]_{\mathscr{B}'}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

__**Ví dụ 6.19**__: Cho tự đồng cấu $f:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_2$ có công thức xác định ảnh

$$f(a_0+a_1t+a_2t^2)=(-a_0+a_1+a_2)+(a_0-a_1+a_2)t+(a_0+a_1-a_2)t^2.$$

Tìm một cơ sở của $\mathbf{P}_2$ để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.

Ma trận chính tắc của f: $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A

$$\mathscr{P}(\lambda)=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda+2)^2.$$

Đa thức đặc trưng có nghiệm $\lambda_1=1$ và $\lambda_2=-2$ (kép).

*) Véc tơ riêng $p=a_0+a_1t+a_2t^2\neq\mathbf{0}$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1=1$ là nghiệm khác không của hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Ta có $\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}-2&1&1\\3&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với: $\begin{cases}-a_0+a_2=0\\a_0-a_1\quad=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=a_2\\a_0=a_1\end{cases}$

$p\in V_{\lambda_1}\Leftrightarrow p=a_0+a_0t+a_0t^2=a_0(1+t+t^2)$ chọn $p'_1=1+t+t^2$.

**) Véc tơ riêng $p=a_0+a_1t+a_2t^2\neq\mathbf{0}$ ứng với giá trị riêng $\lambda_2=-2$ là nghiệm khác không của hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với phương trình: $a_0+a_1+a_2=0$.

$p\in V_{\lambda_2}\Leftrightarrow p=-a_1-a_2+a_1t+a_2t^2=a_1(-1+t)+a_2(-1+t^2)$.

Chọn $p'_2=-1+t$, $p'_3=-1+t^2$.

Xét cơ sở $\mathscr{B}'=\{p'_1,p'_2,p'_3\}$; $f(p'_1)=p'_1$, $f(p'_2)=-2p'_2$, $f(p'_3)=-2p'_3$.

Ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng $A'=[f]_{\mathscr{B}'}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$.

<u>**Ví dụ 6.20**</u>: Chéo hóa ma trận $A=\begin{bmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A

$$\mathscr{P}(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-3&4\\4&-7-\lambda&8\\6&-7&7-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-3&4\\2+2\lambda&-1-\lambda&0\\6&-7&7-\lambda\end{vmatrix}=(1+\lambda)\begin{vmatrix}-5-\lambda&-3&4\\0&-1&0\\-8&-7&7-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1+\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda & -3 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ -1-\lambda & -7 & 7-\lambda\end{vmatrix}=(1+\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda & -3 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda+1)^2.$$

Đa thức đặc trưng có nghiệm $\lambda_1=-1$ (kép) và $\lambda_2=3$.

Giá trị riêng $\lambda_1=-1$ có véc tơ riêng $v=(x,y,z)$ là nghiệm khác không của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ 4 & -6 & 8\\ 6 & -7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Biến đổi ta được hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases}2x-3y+4z=0\\ \quad\; y-2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2z\\ x=z\end{cases}\Rightarrow\; v=\left(x,2x,x\right)=x(1,2,1)$$

Không gian riêng $V_{\lambda_2}=\left\{x(1,2,1)\,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$ có $\dim V_{\lambda_2}=1<2$ nên ma trận A không chéo hoá được.

BÀI TẬP CHƯƠNG VI

6.1) Ánh xạ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính:

a) $f(x,y)=(2x,x+y)$ b) $f(x,y)=(x^2,y)$

c) $f(x,y)=(y,x)$ d) $f(x,y)=(x,y+1)$

e) $f(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ f) $f(x,y)=(\sqrt[3]{x},\sqrt[3]{y})$

6.2) Ánh xạ $f:\mathcal{M}_2\to\mathbb{R}$ nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính:

a) $f\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)=a+d$ b) $f\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$

c) $f\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)=2a+3b+c-d+1$ d) $f\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)=a^2+d^2$.

6.3) Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ xác định như sau:

$$f(1,0,0)=(1,1),\; f(0,1,0)=(3,0),\; f(0,0,1)=(4,-7).$$

a) Tìm ma trận chính tắc của f.

b) Tính $f(1,3,8)$, $f(x,y,z)$.

6.4) Chứng minh mọi ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ đều có dạng:

$$f(x,y)=(ax+by,cx+dy)$$

Hãy tổng quát hoá đối với ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

6.5) Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ có ma trận chính tắc $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -8 & 4\end{bmatrix}$:

a) Vectơ nào sau đây thuộc $\operatorname{Ker} f$: $(5,10);(3,2);(1,1)$.

b) Vectơ nào sau đây thuộc $\operatorname{Im} f$: $(1,-4);(5,0);(-3,12)$.

6.6) a) Chứng minh rằng tập $\mathcal{M}$ các ma trận vuông cấp hai có dạng $\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$ là không gian con của $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp hai. Tìm một cơ sở của $\mathcal{M}$.

b) Chứng minh ánh xạ $f:\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}a+c & b\\ b & a+b+c\end{bmatrix}$ là một tự đồng cấu tuyến tính của $\mathcal{M}$. Tìm nhân và ảnh của f.

6.7) Tự đồng cấu tuyến tính f có ma trận ứng với cơ sở $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ là

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

Hãy tìm ma trận của f trong cơ sở $\{e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,e_1+e_2+e_3+e_4\}$.

6.8) Viết ma trận chính tắc, tìm một cơ sở của $\operatorname{Im} f$, tìm một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ của các ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ sau:

a) $f(x,y,z)=(x-y+3z,5x+6y-4z,7x+4y+2z)$

b) $f(x,y,z)=(2x-z,-x+2z,0)$

c) $f(x,y,z)=(2x+2y-8z,x+6y+z,3x+6y-9z,x+5y)$

d) $f(x,y,z,t)=(x+4y+5z+9t,3x-2y+z-t,-x-y-t,2x+3y+5z+8t)$.

6.9) Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ có ma trận chính tắc là $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Hãy tìm ma trận của f trong cơ sở $\{v_1,v_2,v_3\}$; $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,1,0)$, $v_3=(1,0,0)$.

6.10) a) Chứng tỏ $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(2,5,3)$, $v_3=(1,0,10)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

b) Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(v_1)=(1,0)$, $f(v_2)=(1,0)$, $f(v_3)=(0,1)$. Tìm công thức xác định ảnh $f(x,y,z)$.

6.11) Cho $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x,y)=(x+y,2x)$ và đa thức $p(t)=3-2t+t^2$. Tìm $p(f)(x,y)$.

6.12) Cho $D:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_2$ là toán tử lấy đạo hàm. Cho đa thức $p(t)=-5+2t+t^2$. Tìm $p(D)(q(t))$, trong đó $v(x)\in\mathbf{P}_2$, $q(t)=at^2+bt+c$.

6.13) Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_2$ có ma trận $A=\begin{bmatrix}1&3&-1\\2&0&5\\6&-2&4\end{bmatrix}$ trong cơ sở $\mathscr{B}=\{q_1,q_2,q_3\}$; $q_1=3t+3t^2$, $q_2=-1+3t+2t^2$, $q_3=3+7t+2t^2$.

a) Tìm tọa độ trong cơ sở $\mathscr{B}$ ảnh của các vectơ của cơ sở $\mathscr{B}$:

$$[f(q_1)]_{\mathscr{B}},\ [f(q_2)]_{\mathscr{B}},\ [f(q_3)]_{\mathscr{B}}.$$

b) Tìm $f(q_1)$, $f(q_2)$, $f(q_3)$.

c) Tìm $f(1+t^2)$.

6.14*) a) Với hai ma trận cùng cấp bất kỳ A,B chứng minh: $r(A+B)\le r(A)+r(B)$.

b) Với hai ma trận vuông cấp n bất kỳ A,B, chứng minh bất đẳng thức Sylvester:

$$r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min(r(A),r(B)).$$

6.15*) Với ba ma trận vuông cấp n bất kỳ A,B,C; chứng minh bất đẳng thức Frobenius: $r(AB)+r(BC)\le r(B)+r(ABC)$.

6.16*) Giả sử A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^2=I$. Chứng minh:

$$r(A+I)+r(A-I)=n$$

6.17*) Giả sử A,B là hai ma trận có cỡ lần lượt $m\times n, n\times p$.

a) Chứng minh rằng các vectơ có dạng $(BX)^t$, với $X^t\in\mathbb{R}^p$, thoả mãn điều kiện $ABX=0$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$ có số chiều bằng $r(B)-r(AB)$.

b) Chứng minh rằng $r(A)=r(B)$ khi và chỉ khi $ABX=0\Rightarrow BX=0$.

6.18) Ma trận A vuông cấp n được gọi là luỹ linh nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho $A^k=0$. Chứng minh rằng A luỹ linh khi và chỉ khi $A^n=0$.

6.19) Giả sử $\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V. Tự đồng cấu f thỏa mãn $f(e_1)=0$, $f(e_2)=a_{21}e_1$, $f(e_3)=a_{31}e_1+a_{32}e_2$, ..., $f(e_n)=a_{n1}e_1+\cdots+a_{n,n-1}e_{n-1}$. Chứng minh rằng $f^n=0$.

6.20) Tìm định thức của các tự đồng cấu sau:

a) f là tự đồng cấu của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z)=(2x-z, x+2y-4z, 3x-3y+z).$$

b) f là tự đồng cấu của không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2 xác định bởi:

$$f(A)=MA \text{ trong đó } A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

6.21*) Giả sử $f:V\to W$ là đồng cấu tuyến tính:

a) Chứng minh rằng f toàn cấu khi và chỉ khi tồn tại đồng cấu $g:W\to V$ sao cho $f\circ g=\mathrm{Id}_W$.

b) Chứng minh rằng f đơn cấu khi và chỉ khi tồn tại đồng cấu $h:W\to V$ sao cho $h\circ f=\mathrm{Id}_V$.

6.22*) Cho ba không gian vectơ V_1,V_2,V_3:

a) Giả sử $f:V_1\to V_2$, $g:V_1\to V_3$ là hai ánh xạ tuyến tính. Chứng minh: $\mathrm{Ker}\, f\subset \mathrm{Ker}\, g$ khi và chỉ khi tồn tại ánh xạ tuyến tính $h:V_2\to V_3$ sao cho $g=h\circ f$.

b) Giả sử $f:V_2\to V_3$, $g:V_1\to V_3$ là hai ánh xạ tuyến tính. Chứng minh: $\mathrm{Im}\, f\supset \mathrm{Im}\, g$ khi và chỉ khi tồn tại ánh xạ tuyến tính $h:V_1\to V_2$ sao cho $g=f\circ h$.

6.23*) Giả sử A,B là hai ma trận vuông cấp n sao cho với mọi ma trận cột X thì $AX=0\Rightarrow BX=0$. Chứng minh tồn tại ma trận C cấp n sao cho $B=CA$.

6.24*) Giả sử W_1,W_2 là hai không gian vectơ con của V. Chứng minh rằng hai tính chất sau tương đương:

(i) Tồn tại tự đồng cấu f của V sao cho $\mathrm{Im}\, f=W_1$, $\mathrm{Ker}\, f=W_2$.

(ii) Tồn tại một phần bù W_3 của W_2 trong không gian vectơ V sao cho W_3 đẳng cấu với W_1.

6.25*) Giả sử $f:V\to W$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại ánh xạ tuyến tính $g:W\to V$ sao cho $f\circ g\circ f=f$ và $g\circ f\circ g=g$.

6.26*) Tìm các giá trị riêng, cơ sở của không gian riêng của các ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

6.27) Giả sử $D: V \to V$ là toán tử vi phân, nghĩa là $D(v) = \dfrac{dv}{dt}$. Tính định thức $\det(D)$ (Tìm đa thức đặc trưng , trang 204, 9.13, 9.3) trong các trường hợp sau:

a) V là không gian véc tơ sinh bởi $\left\{1, t, ..., t^n\right\}$.

b) V là không gian véc tơ sinh bởi $\left\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\right\}$.

c) V là không gian véc tơ sinh bởi $\left\{\sin t, \cos t\right\}$.

6.28) Chứng tỏ rằng các ma trận sau không chéo hoá được:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$.

6.29) Chéo hóa hai ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

6.30) Tìm ma trận P làm chéo hoá A và xác định $P^{-1}AP$.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -a-1 & a & a+1 \\ -a & a & a+1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$

6.31) Trong mỗi trường hợp sau tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ánh xạ tuyến tính f có ma trận dạng chéo:

a) $f(x,y,z) = (x-y, 2x+3y+2z, x+y+2z)$

b) $f(x,y,z) = (3x+y+z, 2x+4y+2z, x+y+3z)$

c) $f(x,y,z) = (x+2y+2z, x+2y-z, -x+y+4z)$

d) $f(x,y,z) = (x+y+z, 2y+z, 2y+3z)$.

6.32) Tìm đa thức đặc trưng và các giá trị riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

6.33) Chứng minh rằng A và A^t có cùng đa thức đặc trưng.

6.34) Giả sử f, g là hai tự đồng cấu tuyến tính của không gian vectơ V thoả mãn $f \circ g = g \circ f$. Chứng minh $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$ bất biến đối với g.

6.35) Cho $B = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận A thỏa mãn $B = A^3$.

6.36) Cho đa thức $p(t)$ bất kỳ. Chứng minh rằng :

a) $p(A^t) = p(A)^t$. b) $p(P^{-1}AP) = P^{-1}p(A)P$.

c) Nếu $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_1 & a & \cdots & b \\ 0 & a_2 & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ thì $p(A)$, $p(B)$ có dạng:

$$p(A) = \begin{bmatrix} p(a_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(a_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(a_n) \end{bmatrix}, \; p(B) = \begin{bmatrix} p(a_1) & x & \cdots & y \\ 0 & p(a_2) & \cdots & z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(a_n) \end{bmatrix}$$

6.37) Giả sử f_i là các tự đồng cấu tuyến tính của không gian vectơ con W_i, $i=1,...,n$ và $V = W_1 \oplus ... \oplus W_n$. Với mọi $v \in V$, tồn tại cách viết duy nhất $v = v_1 + ... + v_n$, trong đó $v_1 \in W_1,..., v_n \in W_n$. Đặt $f(v) = \sum_{i=1}^{n} f_i(v_i)$. Chứng minh f là tự đồng cấu tuyến tính của V và: $\operatorname{Ker} f = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i$, $\operatorname{Im} f = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} f_i$.

6.38*) $p(t) = t^{100} + t^2 - 1$ và ma trận $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. Tính $\det p(A)$.

6.39*) Cho $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$. Ký hiệu $A^n = \left[a_{ij}(n)\right]_{3\times 3}$. Tìm $\lim_{n\to\infty} a_{ij}(n)\,; i,j = 1,2,3$.

6.40*) Tìm điều kiện cần và đủ đối với các phần tử a,b,c,d để ma trận $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ chéo hoá được.

6.41*) Giả sử tự đồng cấu tuyến tính f của không gian vectơ n chiều V có n giá trị riêng phân biệt. Chứng minh rằng nếu tự đồng cấu g của không gian vectơ V giao hoán với f (nghĩa là $f \circ g = g \circ f$) thì g chéo hoá được.

6.42*) Cho tự đồng cấu tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc có dạng $A = \left[a_{ij}\right]$ với $a_{ij} = 0$ nếu $1 \le i,j \le p$ hay $p+1 \le i,j \le n$. Chứng minh rằng nếu λ là giá trị riêng của f thì $-\lambda$ cũng là giá trị riêng của f.

6.43*) Cho tự đồng cấu tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc có dạng $A = \left[a_{ij}\right]$ với $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i+1 < j \\ 1 & \text{nếu } j = i+1 \\ 0 & \text{nếu } i = j = 2,...,n \\ \text{nhận giá trị tuỳ ý trong các trường hợp khác} & \end{cases}$

a) Đặt $v = e_n = (0,...,0,1)$. Chứng minh $\left\{v, f(v), ..., f^{n-1}(v)\right\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$.

b) Chứng minh rằng nếu f chéo hoá được thì các giá trị riêng của f khác nhau từng đôi một.

6.44*) Cho hai ánh xạ tuyến tính $f, g : V \to W$. Chứng minh:

$$r(f+g)=r(f)+r(g) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g=\{\mathbf{0}\} \\ \operatorname{Ker} f+\operatorname{Ker} g=V \end{cases}$$

6.45*) Cho ma trận A vuông cấp n phản đối xứng. Chứng minh $I_n + A$ khả nghịch.

6.46*) Cho $V = W_1 \oplus W_2$, với mọi $v \in V$, $v = v_1 + v_2$, $v_i \in W_i$ xét ánh xạ $p: V \to V$, $p(v) = v_1$: phép chiếu lên W_1 song song với W_2.

a) Chứng minh $p \circ p = p$, $\operatorname{Im} p = W_1$, $\operatorname{Ker} p = W_2$.

b) Ngược lại, nếu $p: V \to V$, $p \circ p = p$ thì p là phép chiếu lên $\operatorname{Im} p$ song song $\operatorname{Ker} p$.

6.47) a) Giả sử v là một véc tơ riêng của hai tự đồng cấu f, g. Chứng minh rằng v cũng là véc tơ riêng của $af + bg$, với mọi hằng số a, b.

b) Nếu λ là một giá trị riêng của tự đồng cấu f thì $p(\lambda)$ là một giá trị riêng của tự đồng cấu $p(f)$, trong đó $p(t)$ là một đa thức.

6.48) Chứng minh rằng A và A^t có cùng các giá trị riêng. Cho ví dụ chứng tỏ A và A^t có các véc tơ riêng khác nhau.

6.49) Giả sử f, g là hai tự đồng cấu thỏa mãn $f \circ g = g \circ f$. Giả sử W là không gian riêng ứng với giá trị riêng λ của f. Chứng minh rằng W bất biến đối với g.

6.50) Giả sử f, g là hai tự đồng cấu chéo hóa được và thỏa mãn $f \circ g = g \circ f$. Chứng minh rằng tồn tại một cơ sở gồm các véc tơ riêng đồng thời của f và g.

6.51) Định lý Cayley-Hamilton: Gọi $\mathscr{P}(\lambda) = |A - \lambda I|$ là đa thức đặc trưng của A, chứng minh rằng $\mathscr{P}(A) = 0$.

6.52) Với đa thức bất kỳ $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$, ma trận vuông cấp n sánh đôi với $p(t)$ có dạng $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$. Chứng minh rằng $p(A) = 0$.

6.53) Cho tự đồng cấu $f: V \to V$. Giả sử tồn tại $v \in V$ sao cho $f^{k-1}(v) \neq \mathbf{0}$ và $f^k(v) = \mathbf{0}$. Đặt $S = \{v, f(v), ..., f^{k-1}(v)\}$; $W = \operatorname{span} S$. Chứng minh rằng:

i) Hệ S độc lập tuyến tính.

ii) Không gian véc tơ con W bất biến đối với f.

iii) Thu hẹp của f vào không gian véc tơ con W : $\widetilde{f} = f\big|_W$ là lũy linh.

iv) Tìm ma trận của $\widetilde{f}$ trong cơ sở $\left\{f^{k-1}(v), ..., f(v), v\right\}$ của W .

6.54*) Chứng minh rằng đa thức đặc trưng của ma trận A có thể biểu diễn dưới dạng: $\left|A-\lambda I\right| = (-\lambda)^n + C_1(-\lambda)^{n-1} + C_2(-\lambda)^{n-2} + ... + C_n$, trong đó C_k là tổng tất cả các định thức con chính bậc k của A (định thức con chính là định thức con có các chỉ số hàng và chỉ số cột bằng nhau).

CHƯƠNG VII
KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE
DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Euclide là người đầu tiên đã trình bày toán học một cách hệ thống trong bộ sách "Cơ sở", trong đó Euclide đã xây dựng môn hình học chỉ dựa trên năm tiên đề. Cuốn sách này được dùng làm sách giáo khoa cho đến tận thế kỷ 19. Không gian Euclide ban đầu được hiểu như là không gian thực 3 chiều với hệ tiên đề Euclide. Sự mở rộng sang không gian nhiều chiều xuất phát từ những công trình của Banach (1892-1945), nhà toán học Ba Lan.

Không gian afin được xây dựng trên nền là không gian véc tơ, trong đó ta chỉ khảo sát các phẳng và quan hệ song song. Không gian Euclide được xây dựng trên nền không gian véc tơ Euclide, trong đó ta có thể tính được độ dài, quan hệ trực giao, khái niệm góc.... Mặt phẳng và không gian ta gặp trong chương trình phổ thông là các không gian Euclide.

Không gian véc tơ Euclide là một không gian véc tơ với tích vô hướng. Tích vô hướng là một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương. Khái niệm tích vô hướng được khái quát hoá từ khái niệm tích vô hướng đã gặp ở phổ thông, trong đó tích vô hướng của hai véc tơ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ là số thực $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\left\|\overrightarrow{u}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{v}\right\|\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$.

Hai véc tơ được gọi là trực giao nhau nếu tích vô hướng của chúng bằng 0. Hệ véc tơ gồm các véc tơ trực giao nhau được gọi là một hệ trực giao. Véc tơ có tích vô hướng với chính nó bằng 1 được gọi là véc tơ đơn vị. Một hệ trực giao gồm các véc tơ đơn vị được gọi là hệ trực chuẩn. Cho một hệ véc tơ độc lập tuyến tính thì ta có thể tìm được một hệ trực chuẩn sao cho không gian sinh bởi hai hệ này là trùng nhau. Để tìm hệ trực chuẩn này ta sử dụng lược đồ trực chuẩn hoá Gram-Shmidt.

Trong viễn thông người ta hay dùng phương pháp này trong lý thuyết truyền dẫn tín hiệu, trong đó mỗi tín hiệu được biểu diễn dưới dạng một hàm số theo thời gian t. Tích vô hướng của hai tín hiệu $f(t), g(t)$ là $\left\langle f(t), g(t)\right\rangle=\int_a^b f(t)g(t)dt$. Lúc đó người ta tìm một hệ các tín hiệu chuẩn là một hệ trực chuẩn (bằng cách trực chuẩn hoá Gram-Shmidt), còn các tín hiệu khác được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu chuẩn này.

Ma trận trực giao là ma trận vuông có các véc tơ cột là một hệ trực chuẩn. Ma trận chuyển cơ sở của hai cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao. Ma trận của ánh xạ trực giao trong cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao. Ma trận trực giao khả nghịch và ma trận nghịch đảo bằng ma trận chuyển vị của nó.

Bài toán chéo hoá trực giao ma trận vuông A là tìm ma trận trực giao T sao cho $T^t AT$ là ma trận chéo. Ma trận vuông chéo hoá trực giao được khi và chỉ khi nó là ma trận đối xứng. Để chứng minh điều này ta sử dụng tự đồng cấu đối xứng.

Khái niệm dạng toàn phương có rất nhiều ứng dụng.

Một dạng toàn phương được xác định bởi duy nhất một dạng song tuyến tính đối xứng được gọi là dạng cực của dạng toàn phương đó. Ma trận của dạng cực cũng còn gọi là ma trận của dạng toàn phương. Vậy ma trận của một dạng toàn phương là ma trận đối xứng, do đó có thể chéo hoá trực giao được. Bằng phương pháp này ta có thể đưa biểu thức tọa độ của một dạng toàn phương về dạng chính tắc (chỉ chứa các thành phần bình phương, ma trận của nó có dạng chéo). Ngoài ra ta có thể đưa về dạng chính tắc bằng một số phương pháp khác; chẳng hạn: phương pháp Lagrange và phương pháp Jacobi, thuật biến đổi ma trận ....

Khi đưa biểu thức tọa độ của một dạng toàn phương về dạng chính tắc theo những phương pháp khác nhau thì các hệ số trên đường chéo của ma trận chéo có thể khác nhau, nhưng số các hệ số dương và hệ số âm luôn bằng nhau, được gọi là chỉ số quán tính của dạng toàn phương. Định lý Sylvester cho ta một tiêu chuẩn để nhận biết một dạng toàn phương là xác định dương hay xác định âm dựa vào các định thức con chính góc bên trái.

Dựa vào tính bất biến của chỉ số quán tính của dạng toàn phương ta có thể ứng dụng để phân loại các đường bậc 2 trong mặt phẳng (các đường conic: đường ellipse, hyperbol, parabol. Đây là 3 đường cong cơ bản đã được khảo sát ở phổ thông dưới dạng phương trình chính tắc) và các mặt bậc 2 trong không gian. Thực hiện phép đổi trục tọa độ để đưa đường bậc 2 trong mặt phẳng và mặt bậc 2 trong không gian về dạng chính tắc.

Hàm số chỉ đạt cực trị tại những điểm tới hạn (đạo hàm bậc nhất bằng 0 hoặc không tồn tại đạo hàm). Khi hàm một biến số có đạo hàm bậc 1 triệt tiêu tại một điểm nào đó thì số gia của hàm phụ thuộc vào dấu của đạo hàm bậc 2 tại điểm này. Trường hợp hàm nhiều biến có các đạo hàm riêng cấp 1 bằng 0 tại một điểm nào đó thì số gia của hàm tại điểm này phụ thuộc vào vi phân bậc 2, đó là một dạng toàn phương. Tuỳ theo tính chất xác định dương, xác định âm hay không xác định của dạng toàn phương này ta có thể kết luận hàm số đạt cực tiểu, cực đại hay không đạt cực trị tại điểm đã xét. Khi vi phân bậc 2 bằng 0 thì bài toán sẽ phức tạp hơn nhiều, nhưng rất may là trường hợp này ít gặp trong thực tế.

Dạng toàn phương còn được sử dụng trong bài toán bình phương cực tiểu, trong quy hoạch động, phân loại các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2 ...

Học viên nên áp dụng thành thạo lược đồ trực chuẩn hóa Gram-Shmidt. Đổi cơ sở để đưa biểu thức tọa độ của một dạng toàn phương về dạng chính tắc, đặc biệt chú trọng phương pháp chéo hóa trực giao.

7.1 DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

7.1.1 Định nghĩa dạng song tuyến tính

Định nghĩa 7.1: *Một dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V là một ánh xạ*

$$\begin{array}{rcl} \eta : V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \eta(u,v) \end{array}$$

sao cho khi cố định mỗi biến thì nó trở thành ánh xạ tuyến tính đối với biến kia.

Nghĩa là với mọi $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, với mọi $u_1, u_2, v;\ u, v_1, v_2 \in V$ thì

$$\begin{aligned} &\eta(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 \eta(u_1, v) + \alpha_2 \eta(u_2, v) \\ &\eta(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1 \eta(u, v_1) + \beta_2 \eta(u, v_2). \end{aligned} \qquad \textbf{(7.1)}$$

Định nghĩa 7.2: *Dạng song tuyến tính η được gọi là có tính:*

i) *Đối xứng: Nếu $\eta(u,v) = \eta(v,u)$ với mọi $u, v \in V$;* **(7.2)**

ii) *Không âm: Nếu $\eta(u,u) \geq 0$ với mọi $u \in V$;* **(7.3)**

iii) *Không dương: Nếu $\eta(u,u) \leq 0$ với mọi $u \in V$;* **(7.4)**

iv) *Xác định: Nếu $\eta(u,u) = 0$ khi và chỉ khi $u = \mathbf{0}$.* **(7.5)**

Dạng song tuyến tính xác định và không âm được gọi là xác định dương. Ta dễ dàng thấy rằng η xác định dương khi và chỉ khi $\eta(u,u) > 0$ với mọi $u \neq \mathbf{0}$.

Một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương được gọi là tích vô hướng. Ta thường ký hiệu tích vô hướng của u và v là $\langle u, v \rangle$ thay cho $\eta(u,v)$.

Ví dụ 7.1: Ánh xạ $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định như sau: $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$

$$\eta(u,v) = 2x_1 y_1 - 5x_1 y_2 + x_2 y_1 + 7x_2 y_2$$

Khi cố định $u = (x_1, x_2)$ thì $\eta(u,v) = 2x_1 y_1 - 5x_1 y_2 + x_2 y_1 + 7x_2 y_2$ tuyến tính đối với (y_1, y_2), nghĩa là tuyến tính đối với biến v.

Tương tự khi cố định biến v thì $\eta(u,v)$ tuyến tính đối với biến u.

Vậy $\eta(u,v)$ là một dạng song tuyến tính.

Ngoài ra $\eta(u,v) \neq \eta(v,u)$ và $\eta(u,u) = 2x_1^2 - 4x_1 x_2 + 7x_2^2 = 2(x_1 - x_2)^2 + 5x_2^2 > 0$, với mọi $u = (x_1, x_2) \neq \mathbf{0}$.

Dó đó $\eta(u,v)$ là một dạng song tuyến tính xác định dương nhưng không đối xứng.

7.1.2 Ma trận và biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính

Giả sử $\eta: V \times V \to \mathbb{R}$ là một dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V. $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V. Ma trận vuông cấp n có phần tử ở hàng i cột j là $\eta(e_i, e_j)$, ký hiệu:

$$A = [\eta]_{\mathscr{B}} = [a_{ij}]_{n\times n},\ a_{ij} = \eta(e_i, e_j) \quad \textbf{(7.6)}$$

được gọi là *ma trận của dạng song tuyến tính* η *trong cơ sở* $\mathscr{B}$.

$\forall u, v \in V;\ u = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ và $v = y_1e_1 + ... + y_ne_n$

$$\eta(u,v) = \eta(x_1e_1 + ... + x_ne_n, y_1e_1 + ... + y_ne_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \eta(e_i, e_j)x_iy_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \quad \textbf{(7.7)}$$

(7.7) *được gọi là biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính* η *trong cơ sở* $\mathscr{B}$.

Nếu đồng nhất ma trận một hàng một cột $[a]$ với chính phần tử a, thì biểu thức tọa độ (7.7) có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\eta(u,v) = [u]_{\mathscr{B}}^t [\eta]_{\mathscr{B}} [v]_{\mathscr{B}} \quad \textbf{(7.8)}$$

Ngược lại ta có thể chứng minh được rằng ánh xạ $\eta: V \times V \to \mathbb{R}$ có biểu thức tọa độ xác định bởi (7.7) hoặc (7.8) là một dạng song tuyến tính có ma trận thoả mãn (7.6).

<u>Ví dụ 7.2</u>: Xét $\eta: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định như sau: $\forall\ u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3)$

$$\eta(u,v) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3.$$

$\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Ta có: $\eta(e_1, e_1) = 3$, $\eta(e_1, e_2) = -2$, …

Do đó ma trận của η trong cơ sở chính tắc:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & -8 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

7.1.3 Biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

Giả sử η là một dạng song tuyến tính trong không gian véc tơ V

$A=\left[a_{ij}\right]=[\eta]_{\mathscr{B}}$; $A'=\left[a'_{ij}\right]=[\eta]_{\mathscr{B}'}$ là hai ma trận của η trong hai cơ sở tương ứng $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$, $\mathscr{B}'=\{e'_1,...,e'_n\}$ của V: $a_{ij}=\eta(e_i,e_j)$, $a'_{ij}=\eta(e'_i,e'_j)$.

Gọi $T=\left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$: $e'_j=\sum_{i=1}^{n}t_{ij}e_i$

$$a'_{ij}=\eta(e'_i,e'_j)=\eta\left(\sum_{k=1}^{n}t_{ki}e_k,\sum_{l=1}^{n}t_{lj}e_l\right)=\sum_{k=1}^{n}t_{ki}\left(\sum_{l=1}^{n}\eta(e_k,e_l)t_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{n}t_{ki}\left(\sum_{l=1}^{n}a_{kl}t_{lj}\right)$$

Vậy

$$A'=T^tAT \tag{7.9}$$

Công thức này cũng được suy ra từ (7.8) như sau:

$$[u]_{\mathscr{B}}=T[u]_{\mathscr{B}'};\ [v]_{\mathscr{B}}=T[v]_{\mathscr{B}'}$$

$$\begin{cases}\eta(u,v)=[u]_{\mathscr{B}}^t[\eta]_{\mathscr{B}}[v]_{\mathscr{B}}=[u]_{\mathscr{B}'}^tT^t[\eta]_{\mathscr{B}}T[v]_{\mathscr{B}'}\\ \eta(u,v)=[u]_{\mathscr{B}'}^t[\eta]_{\mathscr{B}'}[v]_{\mathscr{B}'}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ [\eta]_{\mathscr{B}'}=T^t[\eta]_{\mathscr{B}}T \tag{7.10}$$

<u>**Ví dụ 7.3**</u>: Xét dạng song tuyến tính ở ví dụ 7.2. Xét cơ sở $\mathscr{B}'=\{e'_1,e'_2,e'_3\}$ của $\mathbb{R}^3$:

$$e'_1=(1,3,4),\ e'_2=(2,0,3),\ e'_3=(3,1,2).$$

Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$: $T=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&0&1\\4&3&2\end{bmatrix}$.

Áp dụng công thức (7.9) ta có ma trận của η trong cơ sở $\mathscr{B}'$:

$$A'=T^tAT=\begin{bmatrix}11&-48&33\\18&3&20\\1&-2&31\end{bmatrix}.$$

7.2 DẠNG TOÀN PHƯƠNG

7.2.1 Định nghĩa dạng toàn phương

<u>**Định nghĩa 7.3**</u>: *Giả sử* $\eta:V\times V\to\mathbb{R}$ *là dạng song tuyến tính xác định trên không gian véc tơ* V. *Ánh xạ* $Q:V\to\mathbb{R}$ *xác định bởi* $Q(v)=\eta(v,v)$ *được gọi là một dạng toàn phương trên* V.

Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của V, $\forall v \in V$; $v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ theo công thức (7.7) và định nghĩa dạng toàn phương ta có biểu thức tọa độ:

$$Q(v) = \eta(v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \eta(e_i,e_j)x_ix_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Như vậy dạng toàn phương có biểu thức tọa độ là một đa thức đẳng cấp bậc 2.

Ngược lại ánh xạ $Q: V \to \mathbb{R}$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở $\mathscr{B}$ nào đó là một đa thức đẳng cấp bậc 2 có dạng

$$Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \text{ , với } v = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i \tag{7.11}$$

thì Q là một dạng toàn phương ứng với dạng song tuyến tính η có $a_{ij} = \eta(e_i,e_j)$.

Ví dụ 7.4: Xét dạng song tuyến tính ở ví dụ 7.1 $\eta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định như sau: $u = (x_1,x_2)$, $v = (y_1,y_2)$; $\eta(u,v) = 2x_1y_1 - 5x_1y_2 + x_2y_1 + 7x_2y_2$.

Dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^2$ tương ứng là $Q(u) = \eta(u,u) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2$.

Ta có thể xây dựng các dạng song tuyến tính khác nhau xác định cùng 1 dạng toàn phương, chẳng hạn:

Xét các ánh xạ $\eta_1: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $\eta_1(u,v) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 7x_2y_2$;

$\eta_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $\eta_2(u,v) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 - 6x_2y_1 + 7x_2y_2$;

$\eta_3: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $\eta_3(u,v) = 2x_1y_1 - 4x_2y_1 + 7x_2y_2$;

....

là các dạng song tuyến tính và

$$\eta_1(u,u) = \eta_2(u,u) = \eta_3(u,u) = ... = \eta(u,u) = Q(u).$$

7.2.2 Dạng cực của dạng toàn phương

Ví dụ trên chứng tỏ cùng một dạng toàn phương Q có nhiều dạng song tuyến tính η sao cho $Q(v) = \eta(v,v)$. Tuy nhiên chỉ có duy nhất một dạng song tuyến tính đối xứng η sao cho $Q(v) = \eta(v,v)$. Dạng song tuyến tính đối xứng η này được gọi là ***dạng cực của*** Q.

Dạng cực của Q được xác định bởi công thức:

$$\eta(u,v) = \frac{1}{2}\big(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\big) \tag{7.12}$$

7.2.3 Ma trận và biểu thức tọa độ của dạng toàn phương

Ma trận của dạng cực của Q trong cơ sở $\mathscr{B}$ cũng được gọi là ***ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở $\mathscr{B}$***. Như vậy ma trận của dạng toàn phương là ma trận đối xứng.

Như vậy ma trận trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ của dạng toàn phương Q có dạng cực η, ký hiệu $A = [Q]_{\mathscr{B}}$, được xác định như sau

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n},\ a_{ij} = \eta(e_i, e_j) = \eta(e_j, e_i) = a_{ji} \tag{7.13}$$

Biểu thức tọa độ (7.11) có thể viết lại dưới dạng ma trận

$$Q(v) = [v]_{\mathscr{B}}^{t} [Q]_{\mathscr{B}} [v]_{\mathscr{B}} \tag{7.14}$$

<u>**Ví dụ 7.5**</u>: Dạng song tuyến tính η_1 là dạng cực của dạng toàn phương Q của ví dụ 7.4. Do đó ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

<u>**Ví dụ 7.6**</u>: Tìm ma trận của dạng toàn phương Q có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ xác định như sau: $\forall v = (x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$

$$Q(v) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 4x_3^2 + 2x_2x_3.$$

Dạng cực tương ứng

$$\eta(u, v) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 4x_3y_3 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

Do đó ma trận A của Q trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

7.2.4 Biểu thức tọa độ dạng chính tắc của một dạng toàn phương

Biểu thức tọa độ của dạng toàn phương trên Q trong cơ sở nào đó của V có dạng

$$Q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ... + \lambda_n x_n^2 \tag{7.15}$$

được gọi là biểu thức tọa độ dạng chính tắc của Q.

Trong các mục tiếp theo chúng ta xét một vài phương pháp tìm cơ sở để biểu thức tọa độ của dạng toàn phương trong cơ sở này có dạng chính tắc.

7.2.5 Đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Lagrange

Giả sử trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ của không gian véc tơ V biểu thức tọa độ của dạng toàn phương Q có dạng:

$$Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ , \ a_{ij} = a_{ji} \ , \ v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ .$$

Ta thực hiện các phép đổi tọa độ sau:

♦ Trường hợp 1: Giả sử có $a_{ii} \neq 0$, chẳng hạn $a_{11} \neq 0$, ta có thể sắp xếp lại:

$$Q(v) = a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i \right) + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i \right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j - a_{11}\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} xi \right)^2 \qquad \textbf{(7.16)}$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i \right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij} x_i x_j$$

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i \\ y_j = x_j ; \ j = 2, ..., n \end{cases} \qquad \textbf{(7.17)}$$

thì $Q(v) = a_{11} y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij} y_i y_j$

Tiếp tục quá trình này với biểu thức $\sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij} y_i y_j$.

♦ Trường hợp 2: Nếu mọi $a_{ii} = 0$ và tồn tại $a_{ij} \neq 0$, chẳng hạn $a_{12} \neq 0$.

Đặt

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_j = y_j \ ; \ j = 3, ..., n \end{cases} \qquad \textbf{(7.18)}$$

thì $Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij} y_i y_j$

có $a'_{11} = a_{12} \neq 0$, vì vậy ta có thể đưa về trường hợp 1.

Tiếp tục quá trình trên, giả sử cuối cùng ta nhận được:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \text{ và } Q(v) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2 .$$

Xét hệ véc tơ có tọa độ là các cột của ma trận trên:

$$e'_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ \ldots, \ e'_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$$

Khi đó với mọi véc tơ $v \in V$: $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = z_1 e'_1 + \cdots + z_n e'_n$ và

$$Q(v) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2 .$$

Nói cách khác $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ là cơ sở cần tìm để biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc.

Ví dụ 7.7: Cho dạng toàn phương Q của $\mathbb{R}^3$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc

$$Q(v) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 .$$

Ta có $Q(v) = x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

thì $Q(v) = y_1^2 - 2y_2y_3$

Đặt $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_2 - z_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ thì $Q(v) = z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3^2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Vậy trong cơ sở mới $e'_1 = (1,0,0)$, $e'_2 = (-3,1,1)$, $e'_3 = (-1,1,-1)$;

$\forall v \in \mathbb{R}^3$: $v = (x_1, x_2, x_3) = z_1 e'_1 + z_2 e'_2 + z_3 e'_3$ thì $Q(v) = z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3^2$.

Ví dụ 7.8: Cho dạng toàn phương Q có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc của $\mathbf{P}_2$, $v = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$: $Q(v) = a_0{}^2 - 2a_0 a_1 + 2a_1{}^2 + 4a_0 a_2 + 4a_2{}^2 + 2a_1 a_2$.

Ta có
$$\begin{aligned} Q(v) &= a_0{}^2 + 2a_0(-a_1 + 2a_2) + 2a_1{}^2 + 4a_2{}^2 + 2a_1 a_2 \\ &= (a_0 - a_1 + 2a_2)^2 - (-a_1 + 2a_2)^2 + 2a_1{}^2 + 4a_2{}^2 + 2a_1 a_2 \\ &= (a_0 - a_1 + 2a_2)^2 + a_1{}^2 + 6a_1 a_2 \\ &= (a_0 - a_1 + 2a_2)^2 + (a_1 + 3a_2)^2 - 9a_2{}^2 \end{aligned}$$

Đặt
$$\begin{cases} b_0 = a_0 - a_1 + 2a_2 \\ b_1 = a_1 + 3a_2 \\ b_2 = a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = b_0 + b_1 - 5b_2 \\ a_1 = b_1 - 3b_2 \\ a_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow Q(v) = b_0{}^2 + b_1{}^2 - 9b_2{}^2$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ ma trận chuyển cơ sở } T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy trong cơ sở mới $e'_1 = 1$, $e'_2 = 1 + t$, $e'_3 = -5 - 3t + t^2$;

$\forall v \in \mathbf{P}_2$: $v = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = b_0 + b_1(1+t) + b_2(-5 - 3t + t^2)$ có $Q(v) = b_0{}^2 + b_1{}^2 - 9b_2{}^2$.

7.2.6 Đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Jacobi

Cho dạng toàn phương Q trong không gian véc tơ V với dạng cực tương ứng η và có ma trận trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là $A = \left[a_{ij}\right]$: $a_{ij} = \eta(e_i, e_j)$; $i, j = 1, ..., n$.

Giả sử các định thức con chính của A đều khác không

$$D_1 = a_{11} \neq 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \ldots,\ D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \textbf{(7.19)}$$

Khi đó với mỗi $j = 1, ..., n$; hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jj}x_j = 1 \end{cases} \qquad \textbf{(7.20)}$$

là hệ Cramer do đó có duy nhất nghiệm, ký hiệu là $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, ..., \alpha_{jj})$.

Xét hệ véc tơ

$$\begin{cases} f_1 = \alpha_{11}e_1 \\ f_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n \end{cases} \qquad \textbf{(7.21)}$$

Ta sẽ chứng minh hệ véc tơ $\mathscr{B}' = \{f_1, ..., f_n\}$ là một cơ sở của V mà biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc.

Quy ước $D_0 = 1$.

Từ điều kiện (7.19) và nghiệm của hệ (7.20) ta có:

$$\alpha_{jj} = \frac{D_{j-1}}{D_j} \neq 0 \quad \forall j = 1, ..., n.$$

Định thức của hệ $\mathscr{B}' = \{f_1, ..., f_n\}$ trong cơ sở $\{e_1, ..., e_n\}$ là $\alpha_{11}\alpha_{22}....\alpha_{nn} \neq 0$ nên hệ $\mathscr{B}'$ độc lập tuyến tính vì vậy là một cơ sở của V.

Từ (7.20) và (7.21) suy ra:

$$\begin{cases} \eta(f_j, e_i) = a_{i1}\alpha_{1j} + a_{i2}\alpha_{2j} + \dots + a_{ij}\alpha_{jj} = 0; \forall i = 1, ..., j-1 \\ \eta(f_j, e_j) = a_{j1}\alpha_{1j} + a_{j2}\alpha_{2j} + \dots + a_{jj}\alpha_{jj} = 1 \end{cases}$$

Do đó ta cũng có:

$$\begin{cases} \eta(f_j, f_i) = 0 \; ; \; \forall i < j \\ \eta(f_j, f_j) = \eta(f_j, \alpha_{1j}e_1 + \dots + \alpha_{jj}e_j) = \alpha_{jj}\eta(f_j, e_j) = \alpha_{jj} \end{cases}$$

Mặt khác dạng song tuyến tính η đối xứng nên $\eta(f_j, f_i) = 0$ với mọi $i > j$.

Vậy

$$\eta(f_i, f_j) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ \dfrac{D_{j-1}}{D_j} & \text{nếu } i = j \end{cases} \quad \text{với mọi } i, j = 1, ..., n \qquad \textbf{(7.22)}$$

Gọi A' là ma trận của Q trong cơ sở $\mathscr{B}'$. T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì :

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad T^t A T = A' = \left[\eta(f_i, f_j)\right] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Vậy biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng chính tắc:

$$v = y_1 f_1 + \ldots + y_n f_n \Rightarrow Q(v) = \frac{1}{D_1} y_1^2 + \frac{D_1}{D_2} y_2^2 + \ldots + \frac{D_{n-1}}{D_n} y_n^2 . \qquad \textbf{(7.23)}$$

<u>Ví dụ 7.9</u>: Cho dạng toàn phương Q của $\mathbb{R}^3$ có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc

$$Q(v) = x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 .$$

Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Có các định thức con chính:

$$D_1 = 1,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -8,\ D_3 = |A| = -9 .$$

Xét các hệ phương trình (7.20):

♦) $j = 1$ ta có $\alpha_{11} = \dfrac{1}{D_1} = 1$; **(7.24)**

♦) $j = 2$: Hệ phương trình (7.20) có dạng

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{nghiệm } x_1 = -\frac{1}{4},\ x_2 = -\frac{1}{8} \qquad \textbf{(7.25)}$$

♦) $j = 3$: Hệ phương trình (7.20) có dạng

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{9},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{8}{9}. \qquad \textbf{(7.26)}$$

Ta chọn cơ sở dạng (7.21)

(7.24) $\Rightarrow f_1 = e_1 = (1,0,0)$

(7.25) $\Rightarrow f_2 = -1/4e_1 - 1/8e_2 = \left(-1/4, -1/8, 0\right)$

(7.26) $\Rightarrow f_3 = -2/9e_1 + 1/3e_2 + 8/9e_3 = (-2/9, 1/3, 8/9)$.

Trong cơ sở mới này biểu thức tọa độ của Q có dạng:

$$\forall v = (x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = y_1f_1 + y_2f_2 + y_3f_3$$

$$Q(v) = \frac{1}{D_1} y_1^2 + \frac{D_1}{D_2} y_2^2 + \frac{D_2}{D_3} y_3^2 = y_1^2 - \frac{1}{8} y_2^2 + \frac{8}{9} y_3^2 .$$

Ví dụ 7.10: (Xem Ví dụ 7.8) Cho dạng toàn phương Q có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc của $\mathbf{P}_2$, $v = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$:

$$Q(v) = a_0^2 - 2a_0a_1 + 2a_1^2 + 4a_0a_2 + 4a_2^2 + 2a_1a_2 .$$

Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

có các định thức con chính:

$$D_1 = 1,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ D_3 = |A| = -9 .$$

Xét các hệ phương trình (7.20):

♦) $j = 1$ ta có $\alpha_{11} = \dfrac{1}{D_1} = 1$; **(7.27)**

♦) $j = 2$: Hệ phương trình (7.20) có dạng

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ nghiệm } x_1 = x_2 = 1 \qquad \textbf{(7.28)}$$

♦) $j = 3$: Hệ phương trình (7.20) có dạng

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow\ x_1 = \frac{5}{9},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = -\frac{1}{9}. \qquad \textbf{(7.29)}$$

Ta chọn cơ sở dạng (7.21)

(7.27) $\Rightarrow f_1 = 1$

(7.28) $\Rightarrow f_2 = 1 + t$

(7.29) $\Rightarrow f_3 = \dfrac{5}{9} + \dfrac{1}{3}t - \dfrac{1}{9}t^2$.

Trong cơ sở mới này biểu thức tọa độ của Q có dạng:

$$v = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = b_0 + b_1(1+t) + b_2\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2\right)$$

$$Q(v) = \frac{1}{D_1}b_0^2 + \frac{D_1}{D_2}b_1^2 + \frac{D_2}{D_3}b_2^2 = b_0^2 + b_1^2 - \frac{1}{9}b_2^2 .$$

Nhận xét 7.1:

1) Một dạng toàn phương có thể đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Jacobi khi mọi định thức con góc bên trái $D_k \neq o, \forall k = 1, 2, \ldots$ Vì vậy có thể đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Lagrange nhưng chưa chắc có thể về dạng chính tắc theo phương pháp Jacobi. Chẳng hạn dạng toàn phương ở ví dụ 7.7 không sử dụng phương pháp Jacobi được vì $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

2) Các ví dụ 7.8, 7.10 cho thấy rằng cùng một dạng toàn phương ta có thể đưa về các dạng chính tắc với các hệ số khác nhau. Tuy nhiên số các hệ số dương và hệ số âm là như nhau. Ta sẽ chứng minh điều này qua luật quán tính.

7.2.7 Luật quán tính

Giả sử $A = \left[a_{ij}\right] = [Q]_{\mathscr{B}}$; $A' = \left[a'_{ij}\right] = [Q]_{\mathscr{B}'}$ là hai ma trận của Q trong hai cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ của V. Gọi $T = \left[t_{ij}\right]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$, theo công thức (7.9), (7.10) ta có $A' = T^t A T$.

Theo tính chất hạng của ma trận ta có $r(A') = r(T^t A T) \leq r(A)$. Mặt khác T khả nghịch nên $A = \left(T^t\right)^{-1} A' T^{-1} \Rightarrow r(A) \leq r(A')$. Vậy $r(A) = r(A')$.

Do đó ta có thể định nghĩa hạng của dạng toàn phương Q là hạng của ma trận của nó trong một cơ sở nào đó.

Định lý 7.1 (Sylvester - Jacobi): Số các hệ số dương và số các hệ số âm trong biểu thức tọa độ dạng chính tắc của một dạng toàn phương Q là những bất biến của dạng đó (tức là không phụ thuộc vào việc lựa chọn cơ sở).

Chứng minh: Giả sử trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ biểu thức tọa độ của dạng toàn phương Q có dạng:

$$Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j , \ \ a_{ij} = a_{ji} , \ \forall \ v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i .$$

Giả sử $\mathscr{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$, $\mathscr{B}'' = \{e''_1, \ldots, e''_n\}$ là hai cơ sở sao cho biểu thức tọa độ của Q có dạng chính tắc: $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i = \sum_{i=1}^{n} z_i e''_i$;

$$Q(v) = k_1 y_1^2 + \ldots + k_p y_p^2 - k_{p+1} y_{p+1}^2 - \ldots - k_r y_r^2 \qquad \textbf{(7.30)}$$

$$Q(v) = l_1 z_1^2 + \ldots + l_q z_q^2 - l_{q+1} z_{q+1}^2 - \ldots - l_r z_r^2 \qquad \textbf{(7.31)}$$

với $r = r(A)$ là hạng của A, các hệ số $k_1,...,k_r; l_1,...,l_r > 0$.

Ta chứng minh $p = q$ bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử $p < q$ (trường hợp $q < p$ được chứng minh hoàn toàn tương tự).

Theo công thức đổi tọa độ ta có

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + ... + b_{1n}x_n \\ .... \\ y_n = b_{n1}x_1 + ... + b_{nn}x_n \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1 = c_{11}x_1 + ... + c_{1n}x_n \\ .... \\ z_n = c_{n1}x_1 + ... + c_{nn}x_n \end{cases} \quad \textbf{(7.32)}$$

(7.30) và (7.31) $\Rightarrow$

$$k_1y_1^2 + ... + k_py_p^2 + l_{q+1}z_{q+1}^2 + ... + l_rz_r^2 = l_1z_1^2 + ... + l_qz_q^2 + k_{q+1}y_{q+1}^2 + ... + k_ry_r^2 \quad \textbf{(7.33)}$$

Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một véc tơ $v \in V$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i = \sum_{i=1}^{n} y_ie'_i = \sum_{i=1}^{n} z_ie''_i \neq \mathbf{0}$$

thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} y_1 = ... = y_p = 0 \\ z_{q+1} = ... = z_r = z_{r+1} = ... = z_n = 0 \end{cases} \quad \textbf{(7.34)}$$

Thật vậy, các điều kiện (7.31) kết hợp với (7.32) xác định một hệ $n - q + p < n$ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn $x_1, x_2, ..., x_n$. Vì số phương trình ít hơn số ẩn nên tồn tại nghiệm $x_1^0, ..., x_n^0$ không đồng thời bằng 0.

Xét véc tơ $v_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 e_i \neq \mathbf{0}$.

Mặt khác từ (7.33) và (7.34) $\Rightarrow z_1 = ... = z_q = z_{q+1} = ... = z_n = 0$.

$\Rightarrow v_0 = \sum_{i=1}^{n} z_ie''_i = \mathbf{0}$, mâu thuẩn. Vậy $p = q$. □

<u>Định nghĩa 7.4</u>: *Số các hệ số dương được gọi là chỉ số quán tính dương và số các hệ số âm được gọi là chỉ số quán tính âm của dạng toàn phương.*

Giả sử (p, q) là cặp chỉ số quán tính dương và âm của dạng toàn phương Q trong không gian n chiều V khi đó $p + q = r$ (hạng của Q).

- *Trường hợp $r = n$: Q được gọi là không suy biến;*
- *Trường hợp $p = n$: Q được gọi là xác định dương;*

- *Trường hợp $q = n$: Q được gọi là xác định âm.*

Rõ ràng

- Q xác định dương khi và chỉ khi $Q(v) > 0$, với mọi $v \neq \mathbf{0}$;
- Q xác định âm khi và chỉ khi $Q(v) < 0$, với mọi $v \neq \mathbf{0}$.

Nếu η là dạng cực của dạng toàn phương Q thì:

- Q xác định dương khi và chỉ khi η xác định dương;
- Q xác định âm khi và chỉ khi η xác định âm;
- Q không suy biến khi và chỉ khi η xác định.

Ví dụ 7.11: Dạng toàn phương Q ở Ví dụ 7.8, 7.10 có chỉ số quán tính dương là 2 và chỉ số quán tính âm là 1. Q không suy biến.

Định lý 7.2 (Sylvester): Giả sử dạng toàn phương Q có ma trận là A trong một cơ sở nào đó của V. Khi đó:

(i) Q xác định dương khi và chỉ khi các định thức con góc trái của A luôn dương.

(ii) Q xác định âm khi và chỉ khi các định thức con góc trái cấp chẵn là dương và cấp lẻ là âm.

Chứng minh: (i) Giả sử $A = \left[a_{ij}\right]$ là ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$. Xét $V_k = \operatorname{span}\{e_1,...,e_k\}$ và dạng toàn phương thu hẹp vào không gian véc tơ con V_k, $Q\big|_{V_k} : V_k \to \mathbb{R}$ có ma trận trong cơ sở $\mathscr{B}_k = \{e_1,...,e_k\}$ là ma trận con A_k cấp k nằm ở góc trái của ma trận A. Nếu Q xác định dương thì $Q\big|_{V_k}$ cũng xác định dương. Mặt khác theo luật quán tính ta suy ra rằng các giá trị trên đường chéo của ma trận dạng chính tắc của dạng toàn phương xác định dương là luôn luôn dương nên định thức của nó cũng dương. Vậy $\det A_k > 0$, với mọi $k = 1,...,n$.

Ngược lại, giả sử $D_k = \det A_k > 0$, với mọi $k = 1,...,n$. Theo phương pháp Jacobi (Mục 2.5) tồn tại cơ sở $\mathscr{B}' = \{f_1,..., f_n\}$ sao cho biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng chính tắc:

$$v = y_1 f_1 + ... + y_n f_n \Rightarrow Q(v) = \frac{1}{D_1} y_1^2 + \frac{D_1}{D_2} y_2^2 + ... + \frac{D_{n-1}}{D_n} y_n^2 .$$

Vậy Q xác định dương.

Trường hợp (ii) được chứng minh tương tự. □

7.3 TÍCH VÔ HƯỚNG, KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE

7.3.1 Định nghĩa tích vô hướng và tính chất

Định nghĩa 7.5: Một *dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương được gọi là tích vô hướng.*

Một không gian véc tơ với một tích vô hướng <,> được gọi là không gian véc tơ Euclide.

Ví dụ 7.12: *Xét không gian véc tơ* $\mathbb{R}^n = \{(x_1,...,x_n) | x_i \in \mathbb{R}; i = 1,...,n\}$

Với $x = (x_1,...,x_n)$, $y = (y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$, *ta định nghĩa:*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n \tag{7.35}$$

Có thể kiểm tra được công thức (7.35) xác định một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương. Vậy $\left(\mathbb{R}^n, \langle \ , \ \rangle\right)$ là một không gian véc tơ Euclide.

Ví dụ 7.13: *Tích vô hướng có trọng số của không gian véc tơ* $\mathbb{R}^n$ *ứng với các hằng số dương* $c_1,...,c_n$ *được định nghĩa*

$$\langle x, y \rangle = c_1 x_1 y_1 + ... + c_n x_n y_n$$

Với $x = (x_1,...,x_n)$, $y = (y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Chẳng hạn

$$\langle u, v \rangle = 2u_1 v_1 + 5u_2 v_2 , \ u = (u_1, u_2) , \ v = (v_1, v_2)$$

Là một tích vô hướng có trọng số của $\mathbb{R}^2$.

Các hằng số $c_i > 0$ là các trọng số, trọng số c_i lớn thì số hạng thứ i trong tích vô hướng cũng lớn theo. Tích vô hướng có trọng đặc biệt quan trọng trong thống kê và xử lý dữ liệu, khi ta muốn nhấn mạnh một thành phần nào đó so với các thành phần khác.

Ví dụ 7.14: Xét không gian véc tơ $C^0_{[a,b]}$ của các hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$. Tích phân

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt \tag{7.36}$$

Xác định một tích vô hướng của không gian véc tơ $C^0_{[a,b]}$

Định nghĩa 7.6: *Giả sử* $\left(V, \langle \ , \ \rangle\right)$ *là một không gian véc tơ Euclide.*

Với mỗi véc tơ $v \in V$ ta định nghĩa và ký hiệu chuẩn hay môđun của véc tơ v qua biểu thức

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}. \tag{7.37}$$

Nếu $\|v\| = 1$ thì v được gọi là véc tơ đơn vị.

Tính chất 7.3: ***Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz***

Với mọi $u, v \in V$, luôn có

$$\left|\langle u, v\rangle\right| \le \|u\| \cdot \|v\| \tag{7.38}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi u, v phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh: Nếu một trong hai véc tơ bằng $\mathbf{0}$ thì cả hai vế của bất đẳng thức trên đều bằng 0, do đó bất đẳng thức nghiệm đúng.

Giả sử $v \ne \mathbf{0}$, với mọi $t \in \mathbb{R}$ ta có: $\langle u + tv, u + tv\rangle \ge 0$.

Mặt khác $F(t) = \langle u + tv, u + tv\rangle = t^2\|v\|^2 + 2t\langle v, u\rangle + \|u\|^2$ là một tam thức bậc hai đối với t và luôn luôn không âm. Vì vậy $\Delta'_F = \left|\langle v, u\rangle\right|^2 - \|v\|^2\|u\|^2 \le 0$. Từ đó suy ra bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Khi u, v phụ thuộc thì $u = kv$ (hoặc $v = ku$):

$$\left|\langle u, v\rangle\right| = \left|\langle kv, v\rangle\right| = |k| \cdot \|v\|^2 = \|kv\| \cdot \|v\| = \|u\| \cdot \|v\|.$$

Ngược lại nếu $\left|\langle u, v\rangle\right| = \|u\| \cdot \|v\|$ thì $\Delta'_F = 0$.

Do đó tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $\langle u + t_0 v, u + t_0 v\rangle = 0 \Rightarrow u = -t_0 v$. □

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz vào không gian $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng (7.35) ta có bất ***đẳng thức Bunnhiacopsky:***

$$\left(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n\right)^2 \le \left(x_1^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2}\right)\left(y_1^{\,2} + \ldots + y_n^{\,2}\right) \tag{7.39}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = ty_1, \ldots, x_n = ty_n$.

7.3.2 Trực giao - trực chuẩn hoá Gram-Shmidt

Định nghĩa 7.7: *Hai véc tơ $u, v \in V$ gọi là trực giao nhau, ký hiệu $u \perp v$, nếu $\langle u, v\rangle = 0$.*

Hệ các véc tơ $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ của V được gọi là hệ trực giao nếu hai véc tơ bất kỳ của hệ S đều trực giao nhau.

Hệ trực giao các véc tơ đơn vị được gọi là hệ trực chuẩn.

Định lý 7.4: *Mọi hệ trực chuẩn là hệ độc lập tuyến tính.*

Chứng minh: Giả sử hệ $S=\{v_1,...,v_n\}$ trực chuẩn, khi đó nếu $x_1v_1+...+x_nv_n=\mathbf{0}$ thì $x_i=\langle x_1v_1+...+x_nv_n,v_i\rangle=0$ với mọi $i=1,...,n$. Do đó S độc lập tuyến tính. □

Định lý 7.5: *Giả sử $S=\{u_1,...,u_n\}$ là một hệ các véc tơ độc lập tuyến tính của không gian Euclide V. Khi đó ta có thể tìm được hệ trực chuẩn $S'=\{v_1,...,v_n\}$ sao cho*

$$\text{span}\{v_1,...,v_k\}=\text{span}\{u_1,...,u_k\};\ \textit{với mọi}\ k=1,...,n.$$

Chứng minh: Ta xây dựng hệ trực chuẩn S' theo các bước quy nạp sau đây mà được gọi là **quá trình trực chuẩn hoá Gram-Shmidt**.

♦) $k=1$: Vì hệ S độc lập nên $u_1\neq\mathbf{0}$. Đặt $v_1=\dfrac{u_1}{\|u_1\|}$.

♦) $k=2$: Xét $\overline{v_2}=-\langle u_2,v_1\rangle v_1+u_2$, ta có $\overline{v_2}\neq\mathbf{0}$ (vì nếu $\overline{v_2}=\mathbf{0}$ thì $u_2=kv_1$, điều này trái với giả thiết hệ S độc lập). Đặt $v_2=\dfrac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|}$, hệ $\{v_1,v_2\}$ trực chuẩn và

$$\text{span}\{v_1,v_2\}=\text{span}\{u_1,u_2\}.$$

♦) Giả sử đã xây dựng được đến $k-1$. Nghĩa là tồn tại $\{v_1,...,v_{k-1}\}$ trực chuẩn sao cho $\text{span}\{v_1,...,v_{k-1}\}=\text{span}\{u_1,...,u_{k-1}\}$. Tương tự trên ta xét

$$\overline{v_k}=-\sum_{i=1}^{k-1}\langle u_k,v_i\rangle v_i+u_k \tag{7.40}$$

ta cũng có $\overline{v_k}\neq\mathbf{0}$ (vì nếu $\overline{v_k}=\mathbf{0}$ thì u_k là tổ hợp tuyến tính của $v_1,...,v_{k-1}$, do đó là tổ hợp tuyến tính của $u_1,...,u_{k-1}$, điều này mâu thuẩn với giả thiết hệ S độc lập). Đặt

$$v_k=\frac{\overline{v_k}}{\|\overline{v_k}\|} \tag{7.41}$$

thì $v_k\perp v_i$; $i=1,...,k-1$. Vậy hệ $\{v_1,...,v_k\}$ trực chuẩn và

$$\text{span}\{v_1,...,v_k\}=\text{span}\{v_1,...,v_{k-1},\overline{v_k}\}=\text{span}\{u_1,...,u_{k-1},u_k\}.$$ □

Ví dụ 7.15: Trong $\mathbb{R}^3$ xét hệ 3 véc tơ độc lập: $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(-1,1,1)$, $u_3=(1,2,1)$. Hãy trực chuẩn hoá hệ $S=\{u_1,u_2,u_3\}$

Bước 1: $\|u_1\|=\sqrt{3} \Rightarrow v_1=\dfrac{u_1}{\|u_1\|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Bước 2: $\overline{v_2}=-\langle u_2,v_1\rangle v_1+u_2=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+(-1,1,1)=\left(-\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

$$\overline{v_2}=\frac{2}{3}(-2,1,1) \Rightarrow v_2=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Bước 3: $\overline{v_3}=-\langle u_3,v_1\rangle v_1-\langle u_3,v_2\rangle v_2+u_3$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+(1,2,1)=\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{v_3}=\frac{1}{2}(0,1,-1) \Rightarrow v_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$\{v_1,v_2,v_3\}$ là hệ véc tơ trực chuẩn hoá của hệ $\{u_1,u_2,u_3\}$.

Ví dụ 7.16: Trong không gian véc tơ $\mathbf{P}_2$ các đa thức bậc ≤ 2 với tích vô hướng xác định theo công thức (7.37),

$$\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(t)q(t)dt$$

cơ sở chính tắc $1,t,t^2$ không phải là một cơ sở trực chuẩn. Thực vậy,

$$\langle 1,t\rangle=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2},\qquad \langle 1,t^2\rangle=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3},\quad \langle t,t^2\rangle=\int_0^1 t^3dt=\frac{1}{4}$$

Trực chuẩn hóa Gram-Shmidt cơ sở này ta được hệ trực chuẩn

$$u_1(t)=1,\qquad u_2(t)=\sqrt{3}(2t-1),\quad u_3(t)=\sqrt{5}(6t^2-6t+1).$$

7.3.3 Cơ sở trực chuẩn

Định nghĩa 7.8: *Một cơ sở của không gian véc tơ V đồng thời là hệ trực chuẩn được gọi là một cơ sở trực chuẩn.*

Ví dụ 7.17: Cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^n$ là cơ sở trực chuẩn.

Định lí 7.6: *Mọi hệ trực chuẩn của V đều có thể bổ sung thêm để trở thành cơ sở trực chuẩn.*

Chứng minh: Hệ gồm k véc tơ trực chuẩn S là hệ độc lập tuyến tính nên ta có thể bổ sung thêm để được một cơ sở của V. Trực chuẩn hoá Gram-Shmidt cơ sở này để được một cơ sở trực chuẩn của V. Trong quá trình trực chuẩn hoá k véc tơ của hệ S không thay đổi vì vậy thực chất ta đã bổ sung vào hệ S để có cơ sở trực chuẩn của V. □

Hệ quả 7.7: *Mọi không gian véc tơ Euclide đều tồn tại cơ sở trực chuẩn.*

Định lý 7.8: Giả sử $\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V, với mọi $u,v\in V$ ta có

i) $v=\langle v,e_1\rangle e_1+...+\langle v,e_n\rangle e_n$. **(7.42)**

ii) $\langle u,v\rangle=\langle u,e_1\rangle\langle v,e_1\rangle+...+\langle u,e_n\rangle\langle v,e_n\rangle$. **(7.43)**

iii) $\|v\|^2=\langle v,e_1\rangle^2+...+\langle v,e_n\rangle^2$ **(7.44)**

Chứng minh: Các đẳng thức trên được suy ra từ các khẳng định sau:

Nếu $v=x_1e_1+...+x_ne_n$, $u=y_1e_1+...+y_ne_n$

thì $\langle v,e_i\rangle=\langle x_1e_1+...+x_ne_n,e_i\rangle=x_i$ với mọi $i=1,...,n$

và $\langle v,u\rangle=\langle x_1e_1+...+x_ne_n,y_1e_1+...+y_ne_n\rangle=x_1y_1+...+x_ny_n$. □

7.3.4 Không gian con trực giao, phần bù trực giao

Định nghĩa 7.9: *Véc tơ $v\in V$ trực giao với tập con $S\subset V$, ký hiệu $v\perp S$, nếu v trực giao với mọi véc tơ của S*

$$v\perp S\Leftrightarrow\langle v,u\rangle=0,\ u\in S \qquad \textbf{(7.45)}$$

Tập con S_1 trực giao với tập con S_2, ký hiệu $S_1\perp S_2$, nếu mọi véc tơ của S_1 đều trực giao với mọi véc tơ của S_2.

$$S_1\perp S_2\Leftrightarrow v\perp u;\ \forall v\in S_1,\forall u\in S_2 \qquad \textbf{(7.46)}$$

Định lý 7.9:

1) $$v\perp S\Leftrightarrow v\perp \operatorname{span} S. \qquad \textbf{(7.47)}$$

2) Giả sử $\{e_1,...,e_k\}$ là một cơ sở của W, khi đó:

$$v\perp W\Leftrightarrow v\perp e_i;\ \forall i=1,...,k. \qquad \textbf{(7.48)}$$

3) Với mọi tập con $S\subset V$. Ký hiệu

$$S^{\perp}=\{v\in V\mid v\perp u,\forall u\in S\}. \qquad \textbf{(7.49)}$$

Ta có:

Tập $S^{\perp}$ là không gian véc tơ con của V **(7.50)**

$$S^{\perp} = (\operatorname{span} S)^{\perp} \quad \textbf{(7.51)}$$

$$V = (\operatorname{span} S) \oplus S^{\perp} \quad \textbf{(7.52)}$$

$$\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{span} S \quad \textbf{(7.53)}$$

4) Với mọi không gian con W của V. Ta có:

$$V = W \overset{\perp}{\oplus} W^{\perp}, \ \left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W \quad \textbf{(7.54)}$$

Hai không gian con W, $W^{\perp}$ được gọi là phần bù trực giao của nhau.

5) Nếu hệ véc tơ $\{e_1,...,e_k\}$ là một cơ sở trực chuẩn của W và $\{e_{k+1},...,e_{k+m}\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $W^{\perp}$ thì $\{e_1,...,e_k, e_{k+1},...,e_{k+m}\}$ là cơ sở trực chuẩn của V.

6) Trong không gian véc tơ Euclide $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng (7.35) xét hệ véc tơ :

$$u_1 = (a_{11},..., a_{1n}), \ \ldots, \ u_m = (a_{m1},..., a_{mn}).$$

Đặt $S = \{u_1,...,u_m\}$, khi đó:

$S^{\perp}$ là không gian nghiệm của hệ: $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ **(7.55)**

Chứng minh: 1) Với mọi $u \in \operatorname{span} S$, $u = x_1u_1 + ... + x_ku_k$, $u_1,...,u_k \in S$

$$\Rightarrow \langle v,u \rangle = \langle v, x_1u_1 + ... + x_ku_k \rangle = x_1 \langle v,u_1 \rangle + ... + x_k \langle v,u_k \rangle = 0.$$

2) Hiển nhiên từ 1).

3) $\mathbf{0} \in S^{\perp} \Rightarrow S^{\perp} \neq \varnothing$. Với mọi $v_1, v_2 \in S^{\perp}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $u \in S$:

$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, u \rangle = \alpha \langle v_1,u \rangle + \beta \langle v_2,u \rangle = 0 \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in S^{\perp}.$$

Vậy $S^{\perp}$ là không gian véc tơ con của V.

1) $\Rightarrow$ $S^{\perp} = (\operatorname{span} S)^{\perp}$.

Giả sử $\{e_1,...,e_k\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\operatorname{span} S$.

$\forall v \in V$, đặt $u = \langle v,e_1 \rangle e_1 + ... + \langle v,e_k \rangle e_k \in \operatorname{span} S$.

Ta có: $\langle v-u,e_i\rangle = 0, \forall i=1,...,k \Rightarrow v-u \in (\operatorname{span} S)^{\perp} = S^{\perp}$.

Vậy $V = (\operatorname{span} S) + S^{\perp}$.

Ngoài ra $\forall u \in (\operatorname{span} S) \cap S^{\perp}$ thì $\langle u,u\rangle = 0 \Rightarrow u = \mathbf{0}$, do đó $V = (\operatorname{span} S) \oplus S^{\perp}$.

Theo công thức (7.49) ta dễ dàng có $S \subset \left(S^{\perp}\right)^{\perp} \Rightarrow \operatorname{span} S \subset \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$.

Ngược lại với mọi $v \in \left(S^{\perp}\right)^{\perp} \subset V$, (7.52) $\Rightarrow$ $v = u_1 + u_2$, $u_1 \in \operatorname{span} S$, $u_2 \in S^{\perp}$

$$\Rightarrow 0 = \langle v,u_2\rangle = \langle u_1+u_2,u_2\rangle = \langle u_1,u_2\rangle + \langle u_2,u_2\rangle = \langle u_2,u_2\rangle$$

$$\Rightarrow u_2 = \mathbf{0} \Rightarrow v = u_1 \in \operatorname{span} S \Rightarrow \left(S^{\perp}\right)^{\perp} \subset \operatorname{span} S. \text{ Vậy } \left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{span} S.$$

4) Công thức (7.54) suy ra từ (7.51), (7.52) và $W = \operatorname{span} W$ nếu W là không gian véc tơ con. □

Ví dụ 7.18: Ký hiệu $W = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ thì $W^{\perp} = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ và $\mathbb{R}^3 = W \overset{\perp}{\oplus} W^{\perp}$.

Nhận xét 7.2: Gọi W là không gian nghiệm của phương trình thuần nhất dưới dạng tổng quát

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

hoặc viết dưới dạng ma trận $AX = 0$.

Trong chương 6, theo công thức (6.27) ta có thể xem W là nhân của ánh xạ tuyến tính có ma trận trong cơ sở chính tắc là A. Mặt khác theo công thức (7.55) ta cũng có thể xem W là tập tất cả các véc tơ trực giao với mọi véc tơ hàng của A, do đó W là phần bù trực giao của không gian véc tơ sinh bởi các véc tơ hàng của A. Theo (7.52), (7.55) ta có $\dim W = n - r(A)$. Kết quả này cho một cách chứng minh khác của định lý 5.4 chương 5 và công thức (6.13) chương 6.

7.4 MA TRẬN TRỰC GIAO VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH TRỰC GIAO

7.4.1 Ma trận trực giao

Định nghĩa 7.10: *Ma trận vuông A được gọi là ma trận trực giao nếu $A^t A = I$.*

Như vậy ma trận trực giao A là khả nghịch và có $A^{-1} = A^t$.

Ma trận $A=\left[a_{ij}\right]$ là ma trận trực giao khi

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik}=\delta_{jk}=\begin{cases}1 & \text{nếu } j=k\\ 0 & \text{nếu } j\neq k\end{cases}; \qquad \textbf{(7. 56)}$$

δ_{jk} là ***ký hiệu Kronecker***.

Vậy ma trận A trực giao khi và chỉ khi các véc tơ cột tạo thành hệ trực chuẩn. Mặt khác vì $A^{-1}=A^t \Rightarrow AA^t=I$, do đó các véc tơ hàng của A cũng tạo thành hệ trực chuẩn.

$$\det\left(A^tA\right)=\det I=1 \Rightarrow \det A=\pm 1. \qquad \textbf{(7.57)}$$

Ví dụ 7.19: Ma trận $A=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ có các cột là hệ trực chuẩn (ví dụ 7.11), do đó A là ma trận trực giao.

Ví dụ 7.20: *Mọi ma trận vuông cấp 2 trực giao đều có dạng*

$$A=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix} \quad \text{hoặc} \quad A=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{bmatrix}. \qquad \textbf{(7.58)}$$

Thật vậy, ta dễ dàng kiểm chứng hai ma trận A ở trên thoả mãn $A^tA=I$.

Ngược lại nếu $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ và $A^tA=I$ thì $\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Do đó $\begin{cases}a^2+c^2=1 & (1)\\ ab+cd=0 & (2)\\ b^2+d^2=1 & (3)\end{cases}$

Mặt khác từ (7.57) và (2) & (3) suy ra b,d là nghiệm duy nhất của hệ phương trình Cramer $\begin{cases}ax+cy=0\\ bx+dy=1\end{cases} \Rightarrow b=-\dfrac{c}{\det A},\ d=\dfrac{a}{\det A}$.

♦) Nếu $\det A=1$ thì $A=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$ và $a^2+b^2=1 \Rightarrow A=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$.

♦) Nếu $\det A=-1$ thì $A=\begin{bmatrix}a & b\\ b & -a\end{bmatrix}$ và $a^2+b^2=1 \Rightarrow A=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{bmatrix}$.

Định lý 7.10: *Ma trận của một cơ sơ trực chuẩn viết trong cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao. Như vậy mọi ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn sang cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao.*

Chứng minh: Gọi $A=\left[a_{ij}\right]$ là ma trận của cơ sở trực chuẩn $\{v_1,...,v_n\}$ viết trong cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$.

Theo công thức (7.42) ta có $v_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i=\sum_{i=1}^{n}\left\langle e_i,v_j\right\rangle e_i$

Từ (7.43) và giả thiết $\{v_1,...,v_n\}$ là cơ sở trực chuẩn ta có

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}a_{ik}=\left\langle v_j,v_k\right\rangle=\delta_{jk}$$

Vậy A là ma trận trực giao. □

7.4.2 Ánh xạ tuyến tính trực giao

Định nghĩa 7.11: *Giả sử $\left(V,\langle\ ,\ \rangle_V\right)$ và $\left(V',\langle\ ,\ \rangle_{V'}\right)$ là hai không gian véc tơ Euclide. Ánh xạ tuyến tính $f:V\to V'$ được gọi là ánh xạ trực giao nếu với mọi $u,v\in V$:*

$$\left\langle f(u),f(v)\right\rangle_{V'}=\langle u,v\rangle_V \tag{7.59}$$

Nếu $f(u)=\mathbf{0}$ thì $0=\left\langle f(u),f(u)\right\rangle_{V'}=\langle u,u\rangle_V\Rightarrow u=\mathbf{0}$, do đó mọi ánh xạ tuyến tính trực giao đều đơn cấu. Vì vậy mọi tự đồng cấu tuyến tính trực giao là đẳng cấu.

Định lý sau chỉ ra rằng, nếu điều kiện (7.59) thoả mãn đối với mọi véc tơ của một cơ sở trực chuẩn nào đó thì f cũng là ánh xạ tuyến tính.

Định lý 7.11: Giả sử f là tự đồng cấu tuyến tính của không gian véc tơ Euclide V. $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V. Khi đó f trực giao khi và chỉ khi $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V. Nói cách khác:

$$\begin{cases}\left\langle f(u),f(v)\right\rangle_{V'}=\langle u,v\rangle_V\\ \forall u,v\in V\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left\langle f(e_i),f(e_j)\right\rangle_{V'}=\left\langle e_i,e_j\right\rangle_V\\ \forall i,j=1,...,n\end{cases} \tag{7.60}$$

Chứng minh: (⇒): Hiển nhiên vì $e_i,e_j\in V$.

(⇐): Giả sử $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ là cơ sở trực chuẩn thì với mọi $u,v\in V$:

$$v=x_1e_1+...+x_ne_n,\ u=y_1e_1+...+y_ne_n.$$

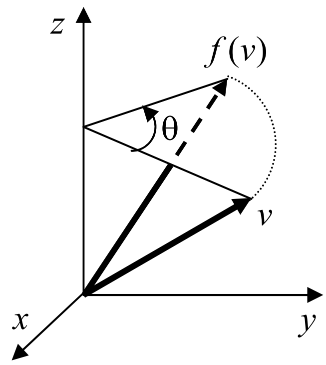
$$\left\langle f(v),f(u)\right\rangle=\left\langle x_1f(e_1)+...+x_nf(e_n),y_1f(e_1)+...+y_nf(e_n)\right\rangle=x_1y_1+...+x_ny_n=\langle v,u\rangle.$$

7.4.3 Ma trận của tự đẳng cấu trực giao

Giả sử $A=\left[a_{ij}\right]$ là ma trận của tự đẳng cấu f trong không gian Euclide V với cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$. Theo định lý 7.10 và định lý 7.11 thì tự đẳng cấu f là trực giao khi và chỉ khi A là một ma trận trực giao.

Vậy ma trận của tự đẳng cấu trực giao trong một cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao. Ngược lại, nếu A là ma trận trực giao và f là tự đồng cấu tuyến tính có ma trận trong cơ sở trực chuẩn là A thì f là ánh xạ trực giao.

Ví dụ 7.21: Phép quay xung quanh trục z một góc quay θ:



$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x,y,z)=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta,\ z)$$

Có ma trận trong cơ sở chinh tắc

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

A là ma trận trực giao do đó f là ánh xạ trực giao.

Định lý 7.12: Mọi ma trận trực giao chỉ có các giá trị riêng là -1 hay 1.

Chứng minh: Giả sử f là tự đẳng cấu trực giao có ma trận trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là A.

Giả sử $v\neq\mathbf{0}$ là một véc tơ riêng giá trị riêng λ. Khi đó

$$\langle f(v),f(v)\rangle=\langle\lambda v,\lambda v\rangle=\lambda^2\langle v,v\rangle.$$

Mặt khác $\langle f(v),f(v)\rangle=\langle v,v\rangle \Rightarrow \lambda^2\langle v,v\rangle=\langle v,v\rangle$

Vì $\langle v,v\rangle\neq 0 \Rightarrow \lambda^2=1$. Vậy $\lambda=\pm1$. ■

7.5 CHÉO HOÁ TRỰC GIAO MA TRẬN – TỰ ĐỒNG CẤU ĐỐI XỨNG

7.5.1 Bài toán chéo hoá trực giao

Cho ma trận A tìm ma trận trực giao T sao cho T^tAT là ma trận chéo.

Định lý 7.13(điều kiện cần): Nếu A chéo hoá trực giao được thì A là ma trận đối xứng.

Chứng minh: Nếu $T^t AT$ là ma trận chéo thì $\left(T^t AT\right)^t = T^t AT$. Do đó $T^t A^t T = T^t AT$.

Mặt khác vì T khả nghịch nên $A^t = A$. ■

Ngược lại, ta sẽ chứng minh nếu A đối xứng thì chéo hoá trực giao được.

7.5.2 Tự đồng cấu đối xứng

Định nghĩa 7.12: *Tự đồng cấu $f : V \to V$ được gọi là đối xứng nếu với mọi $u, v \in V$:*

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle \tag{7.61}$$

Định lý 7.14: Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V, khi đó tự đồng cấu f là đối xứng khi và chỉ khi với mọi $i, j = 1, ..., n$,

$$\langle f(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, f(e_j)\rangle \tag{7.62}$$

Chứng minh: Nếu f thỏa mãn (7.61) thì đương nhiên thỏa mãn (7.62).

Ngược lại, giả sử f thỏa mãn (7.62): $\forall\ v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, $u = y_1e_1 + ... + y_ne_n$:

$$\langle f(v), u\rangle = \langle x_1 f(e_1) + ... + x_n f(e_n), y_1e_1 + ... + y_ne_n\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle f(e_i), e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, f(e_j)\rangle = \langle v, f(u)\rangle \quad ■$$

Như vậy để chứng minh một tự đồng cấu là đối xứng thì thay vì chứng minh công thức (7.61) đúng với mọi $v, u \in V$ ta chỉ cần chứng minh công thức (7.62) đúng với một cơ sở nào đó.

7.5.3 Ma trận của một tự đồng cấu đối xứng trong một cơ sở trực chuẩn

Giả sử $A = \left[a_{ij}\right]$ là ma trận của tự đồng cấu f trong một cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$. Theo công thức (7.42) ta có:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_j), e_i\rangle e_i \tag{7.63}$$

Vậy với mọi $i, j = 1, ..., n$: $a_{ij} = \langle f(e_j), e_i\rangle$.

Từ định lý 7.14 và công thức (7.63) ta có kết quả sau.

Định lý 7.15: f đối xứng khi và chỉ khi ma trận A của f trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là ma trận đối xứng.

Ví dụ 7.22: Ánh xạ $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x,y,z)=(x-y+2z,-x+2y+z,2x+y+4z)$$

Ma trận trong cơ sở chính tắc: $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$

là ma trận đối xứng nên f là một tự đồng cấu đối xứng.

Ta cũng có thể kiểm tra lại điều kiện (7.62) như sau:

$$f(e_1)=(1,-1,2),\ f(e_2)=(-1,2,1),\ f(e_3)=(2,1,4);$$

$$\langle f(e_1),e_2\rangle=-1=\langle e_1,f(e_2)\rangle;\ \langle f(e_1),e_3\rangle=2=\langle e_1,f(e_3)\rangle;\ \langle f(e_2),e_3\rangle=1=\langle e_2,f(e_3)\rangle.$$

Định lý 7.16: Các giá trị riêng của một ma trận đối xứng là các số thực. Nói cách khác, đa thức đặc trưng của ma trận đối xứng vuông cấp n có n nghiệm thực.

Chứng minh: Giả sử f là tự đồng cấu đối xứng có ma trận trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là ma trận đối xứng A cấp n. Giả sử $\lambda=a+ib$ là nghiệm của đa thức đặc trưng $\mathscr{P}(\lambda)=|A-\lambda I|$. Khi đó theo Định lý 6.15 tồn tại hai véc tơ độc lập tuyến tính $u,v\in V$ sao cho $\begin{cases}f(v)=av-bu\\ f(u)=bv+au\end{cases}$

Do đó $\langle f(v),u\rangle=a\langle v,u\rangle-b\langle u,u\rangle$, $\langle v,f(u)\rangle=a\langle v,u\rangle+b\langle v,v\rangle$.

Vì f đối xứng suy ra $-b\langle u,u\rangle=b\langle v,v\rangle\geq 0 \Rightarrow b=0$.

Vậy mọi nghiệm của đa thức đặc trưng là nghiệm thực. □

Định lý 7.17: Hai véc tơ riêng ứng với hai giá trị riêng khác nhau của một tự đồng cấu đối xứng là trực giao nhau.

Chứng minh: Giả sử $f(v_1)=\lambda_1 v_1$, $f(v_2)=\lambda_2 v_2$; $v_1,v_2\neq 0$; $\lambda_1\neq\lambda_2$

thì $\lambda_1\langle v_1,v_2\rangle=\langle f(v_1),v_2\rangle=\langle v_1,f(v_2)\rangle=\lambda_2\langle v_1,v_2\rangle$

$$\Rightarrow\ (\lambda_1-\lambda_2)\langle v_1,v_2\rangle=0\ \Rightarrow\ \langle v_1,v_2\rangle=0.$$ □

Định lý 7.18: Với mọi tự đồng cấu đối xứng f trong V đều tồn tại một cơ sở trực chuẩn của V gồm các véc tơ riêng của f. Nói cách khác mọi tự đồng cấu đối xứng đều chéo hóa trực giao được.

Chứng minh: Theo Định lý 7.16 f có véc tơ riêng u_1 ứng với giá trị riêng $\lambda_1\in\mathbb{R}$, $\|u_1\|=1$. Đặt $W_1=\{\lambda u_1 \mid \lambda\in\mathbb{R}\}=\operatorname{span}\{u_1\}$.

$$\forall v \in W_1^{\perp},\ \langle f(v), u_1\rangle = \langle v, f(u_1)\rangle = \langle v, \lambda_1 u_1\rangle = 0 \ \Rightarrow\ f(v) \in W_1^{\perp}.$$

Vậy $W_1^{\perp}$ bất biến đối với f và $V = W_1 \oplus W_1^{\perp}$ nên ta có thể xét:

$$f_1 = f\big|_{W_1^{\perp}} : W_1^{\perp} \to W_1^{\perp},\ \dim W_1^{\perp} = \dim V - 1.$$

Quy nạp theo số chiều của không gian thì có cơ sở trực chuẩn $\{u_2,...,u_n\}$ của $W_1^{\perp}$ gồm các véc tơ riêng của f_1. Do đó $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của V gồm các véc tơ riêng của f. □

Hệ quả 7.19: Mọi ma trận đối xứng đều chéo hoá trực giao được.

Chứng minh: Giả sử f là tự đồng cấu đối xứng có ma trận A trong cơ sở trực chuẩn $\mathcal{B} = \{e_1,...,e_n\}$. Theo Định lý 7.18 tồn tại cơ sở trực chuẩn $\mathcal{B}' = \{e'_1,...,e'_n\}$ gồm các véc tơ riêng của f. Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ thì T trực giao và

$$T^t A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.64)}$$

trong đó $\lambda_1,...,\lambda_n$ là các giá trị riêng của A. □

7.5.4 Thuật toán chéo hoá trực giao

Để chéo hoá trực giao một ma trận đối xứng A, nghĩa là tìm ma trận trực giao T sao cho $T^t AT$ có dạng chéo, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm các giá trị riêng của A (nghiệm của đa thức đặc trưng).

Bước 2: Với mỗi giá trị riêng tìm được ở bước 1, tìm một cơ sở của không gian riêng tương ứng và trực chuẩn hoá Gram-Shmidt cơ sở này.

Bước 3: Gộp các cơ sở đã được trực chuẩn hoá ở bước 2 ta có một cơ sở trực chuẩn của V gồm các véc tơ riêng của A. Ma trận các véc tơ của cơ sở này là ma trận trực giao T cần tìm.

Ví dụ 7.23: Chéo hoá trực giao ma trận đối xứng $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 4-\lambda & 3-\lambda & -1 \\ 4-\lambda & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (4-\lambda) & 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (4-\lambda) & 4 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & -3 \\ 0 & -2-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (4-\lambda) & 4 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(4-\lambda)^2(\lambda+2).$$

♦ Véc tơ riêng $v=(x,y,z)\neq \mathbf{0}$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1=-2$ là nghiệm khác không của hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ta có $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Hệ phương trình trên tương đương với hệ

$$\begin{cases} x+2y \quad = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases} \quad \text{có nghiệm} \quad \begin{cases} x=-2y \\ y=z \end{cases}$$

Do đó $v\in V_{\lambda_1} \Leftrightarrow v=(-2y,y,y)=y(-2,1,1)$ chọn $v_1=(-2,1,1)$.

Trực chuẩn hoá được $u_1=(-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$.

♦ Véc tơ riêng $v=(x,y,z)\neq \mathbf{0}$ ứng với giá trị riêng $\lambda_2=4$ (nghiệm kép) là nghiệm khác không của hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ta có $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Hệ phương trình trên tương đương với phương trình $2x-y-z=0$

Do đó $v\in V_{\lambda_1} \Leftrightarrow v=(x,y,z)=\left(y/2+z/2,y,z\right)=y\left(1/2,1,0\right)+z\left(1/2,0,1\right)$.

Chọn $v_2=\left(1/2,1,0\right)$, $v_3=\left(1/2,0,1\right)$.

Trực chuẩn hoá hai véc tơ này ta có

$$u_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0),\ u_3 = (2/\sqrt{30}, -1/\sqrt{30}, 5/\sqrt{30}).$$

Vậy $T = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$ và $T^t A T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

7.5.5 Đưa biểu thức tọa độ của dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng chéo hoá trực giao

Giả sử Q là dạng toàn phương trong không gian Euclide V với cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ có ma trận $A = \left[a_{ij}\right]$ (ma trận đối xứng). Theo Hệ quả (7.19) ta có thể hoá chéo trực giao ma trận $A = \left[a_{ij}\right]$, nghĩa là ta tìm được ma trận trực giao T để $T^t A T$ là ma trận chéo. T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}'$ gồm các véc tơ riêng của A. Vì vậy biểu thức (7.11) trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng chính tắc (7.15).

<u>Ví dụ 7.24</u>: Cho dạng toàn phương $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định như sau:

Với mọi $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$: $Q(v) = 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Ma trận của Q cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Theo Ví dụ 7.23 tồn tại cơ sở $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$:

$$e'_1 = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}),\ e'_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0),\ e'_3 = (2/\sqrt{30}, -1/\sqrt{30}, 5/\sqrt{30}).$$

$$v = (x_1, x_2, x_3) = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3;\ Q(v) = -2{x'_1}^2 + 4{x'_2}^2 + 4{x'_3}^2.$$

<u>Nhận xét 7.2</u>: Khi sử dụng phương pháp Lagrange và phương pháp Jacobi thì ma trận T nhận được nói chung không phải là ma trận trực giao, các cơ sở $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ của ví dụ 7.7, 7.9 không phải là cơ sở trực chuẩn.

7.6 ĐƯỜNG BẬC 2 TRONG MẶT PHẲNG VÀ MẶT BẬC 2 TRONG KHÔNG GIAN

7.6.1 Hệ tọa độ trực chuẩn trong mặt phẳng

7.6.1.1 Tọa độ của một véc tơ, tọa độ của một điểm trong mặt phẳng

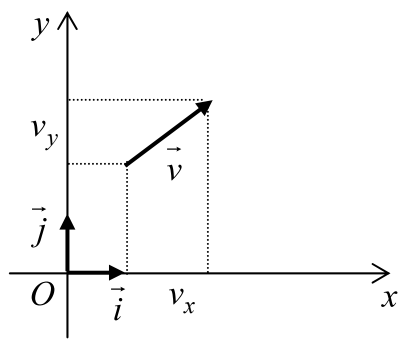
Trong mặt phẳng ta xét hai trục vuông góc $x'Ox$ và $y'Oy$ cắt nhau tại O theo chiều dương, tạo nên một hệ trục Oxy gọi là hệ trục tọa độ vuông góc Descartes (Đề các) trong mặt phẳng. Trên Ox, Oy ta chọn hai véc tơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}$ và $\vec{j}$. Hệ $\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn.

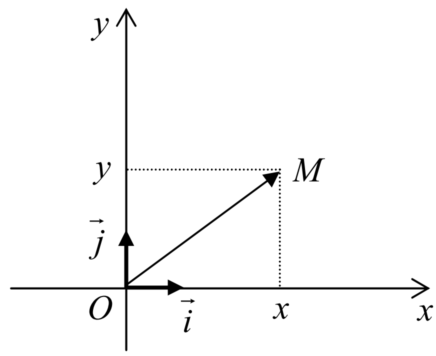
Cặp (v_x, v_y) được gọi là tọa độ của véc tơ $\vec{v}$ nếu v_x, v_y là hình chiếu của $\vec{v}$ xuống hai trục Ox, Oy.

Theo các phép toán cộng véc tơ, phép nhân một số với một véc tơ và tính vô hướng của hai véc tơ $\vec{u}\vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cos(\vec{u},\vec{v})$ thì

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = \left\langle \vec{v},\vec{i} \right\rangle \vec{i} + \left\langle \vec{v},\vec{j} \right\rangle \vec{j}.$$

Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì (x, y) được gọi là tọa độ của điểm M, ký hiệu $M(x, y)$. Nói cách khác tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{OM}$ là tọa độ của điểm M. Hai điểm A, B có tọa độ lần lượt là $(x_A, y_A);(x_B, y_B)$ thì véc tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.





7.6.1.2 Các đường bậc 2 trong mặt phẳng

Trong mặt phẳng, ta xét 3 đường bậc 2 sau:

a) Đường Ellipse (Êlíp)

Cho F_1, F_2 cố định. Đường ellipse nhận tiêu điểm F_1, F_2 với độ dài trục lớn a là tập hợp:

$$(E) = \left\{ M \,\middle|\, MF_1 + MF_2 = 2a \right\};\ a > c \text{ với } F_1F_2 = 2c.$$

Nếu $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ thì phương trình của ellipse (E) có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{với} \quad a^2 = b^2 + c^2. \qquad \textbf{(7.65)}$$

a là độ dài trục lớn, b là độ dài trục bé.

Khi $a = b \Rightarrow c = 0$: ellipse (E) trở thành đường tròn tâm O bán kính a.

b) Hyperbol

Đường hyperbol nhận tiêu điểm F_1, F_2 với độ dài trục lớn a là tập hợp:

$$(H) = \left\{ M \,\middle|\, |MF_1 - MF_2| = 2a \right\},\ a < c \text{ với } F_1F_2 = 2c.$$

Nếu $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ thì phương trình của hyperbol (H) có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } b^2 = c^2 - a^2 \tag{7.66}$$

c) Parabol:

Cho đường thẳng (Δ) và điểm F. Parabol có tiêu điểm F, đường chuẩn (Δ) là tập hợp:

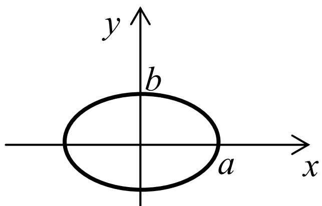
$$(P) = \left\{ M \,\middle|\, MF = d(M, \Delta) \right\}$$

trong đó $d(M, \Delta)$ là khoảng cách từ M đến đường thẳng (Δ).

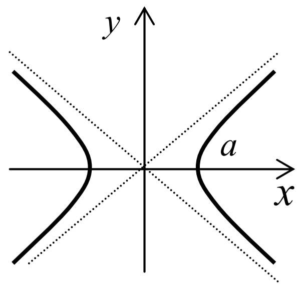
Nếu $F(p/2, 0)$, $(\Delta): x = -p/2$ thì (P) có phương trình:

$$y^2 = 2px \tag{7.67}$$

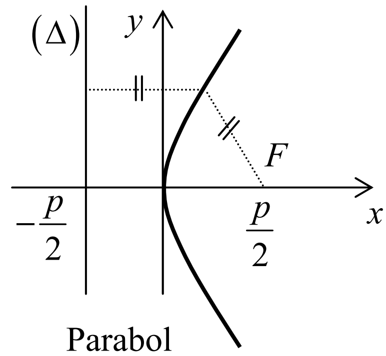
(7.65), (7.66), (7.67) là phương trình chính tắc của 3 đường cô nic



Ellipse



Hyperbol



Parabol

7.6.1.3 Phân loại đường bậc 2 trong mặt phẳng

Trong mặt phẳng cho hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy. Một đường cong bậc 2 có phương trình tổng quát:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \tag{7.68}$$

trong đó a_{11}, a_{12}, a_{22} không đồng thời bằng không.

Ta tìm một hệ trục tọa độ Descartes vuông góc mới để trong hệ tọa độ này đường cong (7.68) có dạng chính tắc.

Xét ma trận đối xứng $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $a_{12}=a_{21}$.

Ma trận A đối xứng nên chéo hóa trực giao được, nghĩa là tồn tại ma trận trực giao T sao cho:

$$\det T = 1 \text{ và } T^t A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Theo ví dụ 7.17 và Hệ quả (7.19) ta có thể chọn $T=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

Đặt

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Như vậy hệ tọa độ mới $Ox'y'$ có được bằng cách quay hệ trục Oxy quanh gốc O một góc φ.

Phương trình đường bậc 2 có công thức (7.68) trong hệ tọa độ $Ox'y'$ là:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0 \quad \textbf{(7.69)}$$

(Trường hợp $a_{12}=0$ thì không cần bước này).

Dựa vào các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, a'_1, a'_2, a_0$ ta có các đường bậc 2 sau:

1) Nếu $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ phương trình (7.69) viết được thành

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 + a'_0 = 0$$

Tịnh tiến hệ tọa độ $Ox'y'$ đến hệ tọa độ ΩXY:

$$X = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1},\ Y = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}, \text{ ta được:}$$

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a'_0 = 0. \quad \textbf{(7.70)}$$

a) $a'_0 \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 a'_0 < 0$: (7.70) là phương trình một Ellipse;

b) $a'_0 \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 a'_0 > 0$: (7.70) là phương trình một Ellipse ảo;

c) $a'_0 \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$: (7.70) là phương trình một Hyperbol;

d) $a'_0 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$: Phương trình (7.70) có dạng $|\lambda_1|X^2 - |\lambda_2|Y^2 = 0$ là phương trình cặp đường thẳng cắt nhau.

e) $a'_0 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$: Phương trình (7.70) có dạng $|\lambda_1|X^2 + |\lambda_2|Y^2 = 0$ là phương trình một điểm.

2) Có một trong hai giá trị λ_1, λ_2 bằng 0:

a) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $a'_1 \neq 0$: Phương trình (7.68) có thể viết lại:

$$\lambda_2\left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2a'_1(x' + a''_0) = 0 \qquad \textbf{(7.71)}$$

Đặt $X = x' + a''_0$, $Y = y' + \dfrac{a'_2}{\lambda_2}$ ta có: $Y^2 = -2\dfrac{a_1}{\lambda_2}X$.

Vậy (7.71) là một Parabol nhận trục ΩX làm trục đối xứng.

b) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $a'_2 \neq 0$: Đường cong (7.68) là một Parabol nhận trục ΩY làm trục đối xứng.

c) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $a'_1 = 0$ hay $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $a'_2 = 0$: Đường cong (7.68) là một điểm.

<u>Ví dụ 7.25</u>: Cho đường bậc 2 có phương trình (G): $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$.

Xét dạng toàn phương: $Q(x,y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$.

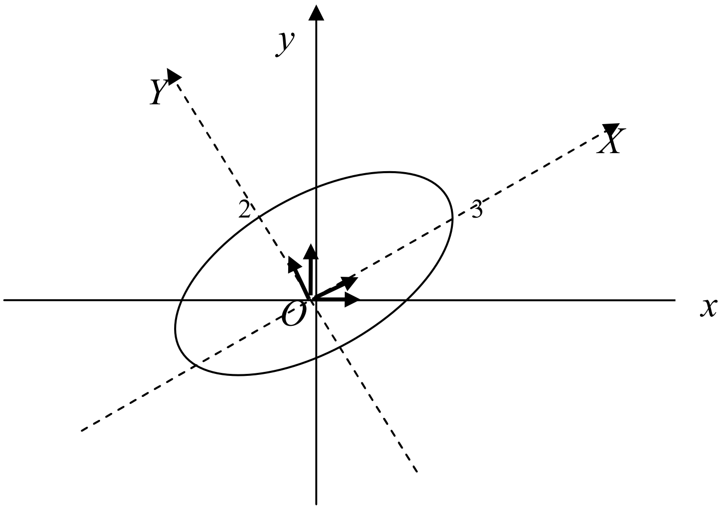
Ma trận trong cơ sở chính tắc $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ có giá trị riêng $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$ chéo hoá trực giao ta được:

$$\begin{cases} \vec{i}' = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} \\ \vec{j}' = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}X + \dfrac{1}{\sqrt{5}}Y \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}X + \dfrac{2}{\sqrt{5}}Y \end{cases}$$

phương trình của (G) trong hệ tọa độ mới:

$$4X^2 + 9Y^2 = 36 \Rightarrow \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Vậy (G) là một ellipse có bán kính trục lớn bằng 3 và bán kính trục nhỏ bằng 2.



7.6.2 Hệ tọa độ trực chuẩn trong không gian

7.6.2.1 Tọa độ của một véc tơ và tọa độ của một điểm trong không gian

Trong không gian ta xét ba trục vuông góc chung gốc O: $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$; Tạo thành một hệ trục gọi là hệ trục tọa độ vuông góc Descartes trong không gian, viết tắt $Oxyz$. Trên ba trục tọa độ này ta chọn các véc tơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Ta chỉ xét hệ trục $Oxyz$ là hệ thuận, nghĩa là nếu đứng theo chiều véc tơ $\vec{k}$ ta sẽ thấy $\vec{i}$ quay sang $\vec{j}$ theo ngược chiều kim đồng hồ.

Với mọi véc tơ $\vec{v}$ ta có thể viết

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \left\langle \vec{v}, \vec{i} \right\rangle \vec{i} + \left\langle \vec{v}, \vec{j} \right\rangle \vec{j} + \left\langle \vec{v}, \vec{k} \right\rangle \vec{k}$$

trong đó v_x, v_y, v_z lần lượt là hình chiếu của $\vec{v}$ xuống các trục Ox, Oy, Oz.

(v_x, v_y, v_z) được gọi là tọa độ của véc tơ $\vec{v}$, ký hiệu $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

Tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ được gọi là tọa độ của điểm M, ký hiệu $M(x, y, z)$.

7.6.2.2 Một số mặt bậc 2 thường gặp trong không gian

a) Ellipsoid (Êlípxôít) là mặt (E) bậc 2 có phương trình dạng chính tắc:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

*) Nếu 2 trong 3 số a, b, c bằng nhau thì ta có mặt ellipsoid tròn xoay. Chẳng hạn nếu $a = b$ thì ta có mặt tròn xoay quanh trục $z'Oz$. Nếu $a = b = c = R$ thì ta có mặt cầu tâm O bán kính R;

*) Gốc O là tâm đối xứng, các mặt phẳng tọa độ là mặt phẳng đối xứng;

*) Giao tuyến với các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ là các ellipse.

b) Hyperboloid một tầng (Hypécbôlôít) là mặt (H_1) bậc 2 có phương trình dạng chính tắc:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

*) Gốc O là tâm đối xứng;

*) Các trục tọa độ là trục đối xứng;

*) Các mặt phẳng tọa độ là mặt phẳng đối xứng;

*) Giao của (H_1) với mặt phẳng vuông góc với trục $z'Oz$ là một ellipse;

*) Giao của (H_1) với mặt phẳng chứa trục $z'Oz$ là một Hyperbol.

Tương tự có các Hyperboloid một tầng:

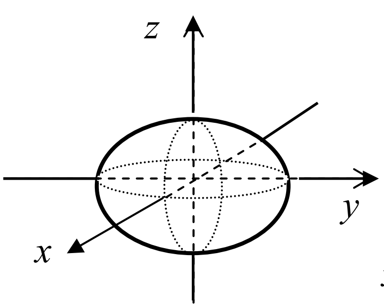
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

c) Hyperboloid hai tầng là mặt (H_2) bậc 2 có phương trình dạng chính tắc:

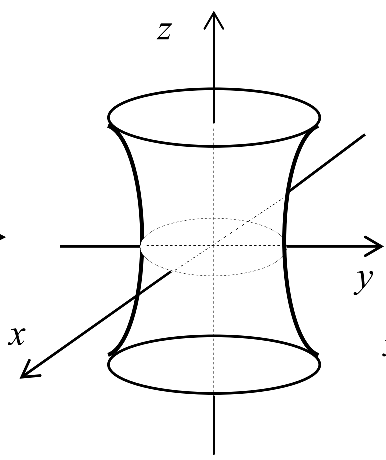
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

*) Mặt phẳng vuông góc với trục $z'Oz$ có phương trình $z=h$ sao cho $|h|>c$ cắt (H_2) theo một elippse;

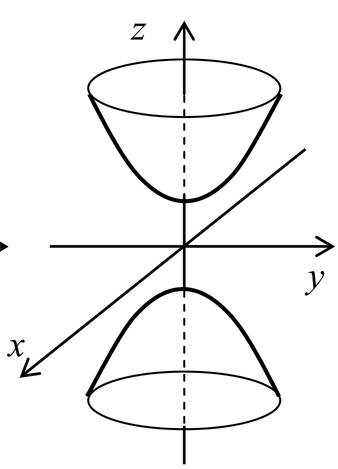
*) Giao của (H_2) với mặt phẳng chứa $z'Oz$ là một Hyperbol.



Ellisoid



Hyperboloid một tầng



Hyperboloid hai tầng

d) Paraboloid elliptic (Parabôlôít êlíptíc) theo trục Oz là mặt (P_1) bậc 2 có phương trình dạng chính tắc:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z\ .$$

*) Giao tuyến của (P_1) với mặt phẳng vuông góc trục $z'Oz$ nằm phía trên mặt phẳng Oxy là một ellipse;

*) Giao tuyến của (P_1) với mặt phẳng chứa trục $z'Oz$ là Parabol.

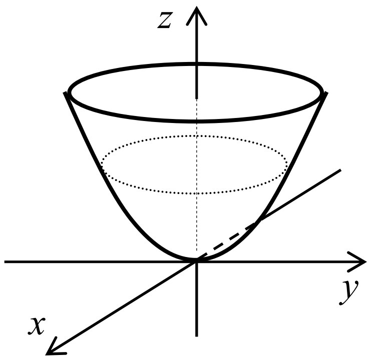
e) Paraboloid hyperbolic (mặt yên ngựa) theo trục Oz có phương trình

$$(P_2):\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\ .$$

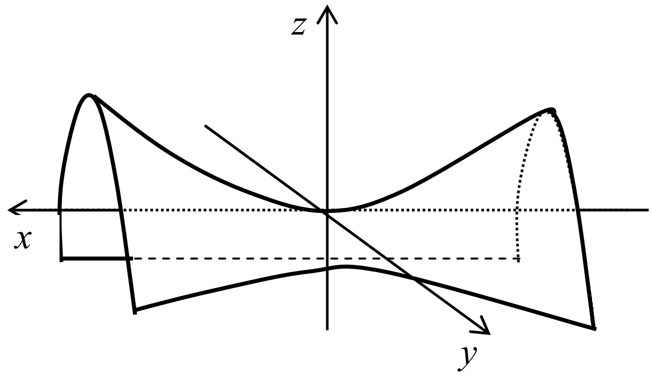
*) Giao của (P_2) với mặt phẳng vuông góc với trục $z'Oz$ là một Hyperbol;

*) Giao của (P_2) với mặt phẳng vuông góc với trục $x'Ox$ là một Parabol;

*) Giao của (P_2) với mặt phẳng vuông góc với trục $y'Oy$ là một Parabol.



Paraboloid elliptic



Paraboloid hyperbolic

Tương tự có các mặt paraboloid, hyperboloid theo trục Ox, Oy.

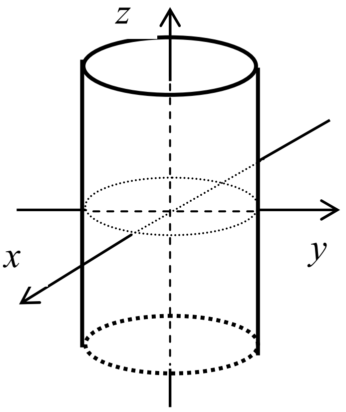
g) Các mặt trụ bậc 2

Các mặt trụ bậc 2 đối xứng qua mặt phẳng xOy

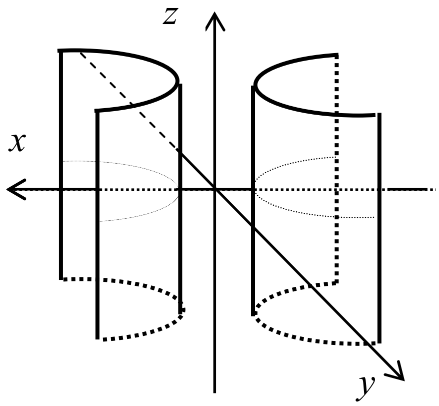
*) Trụ elliptic: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

*) Trụ Hyperbolic: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

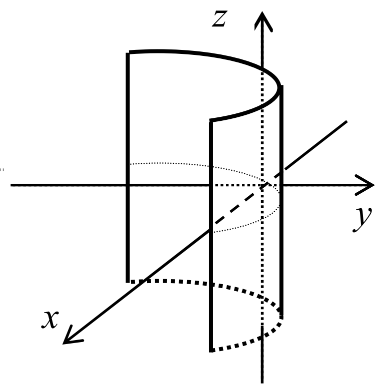
*) Trụ Parabolic: $x^2=2py$.



Trụ elliptic



Trụ Hyperbolic



Trụ Parabolic

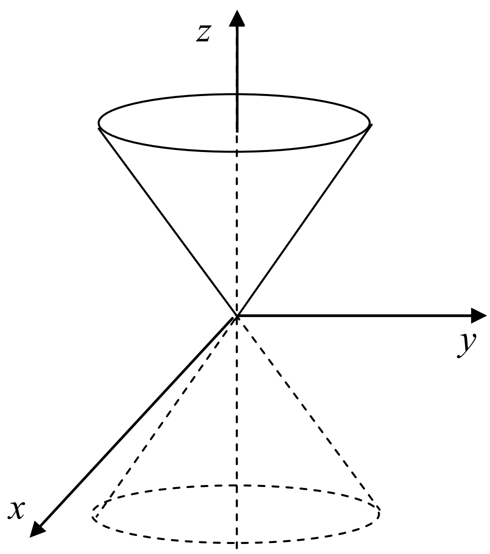
h) Các mặt nón

Các mặt nón đối xứng qua mặt phẳng xOy có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,.$$

*) Giao với mặt phẳng vuông góc với trục $z'Oz$ là một ellipse;

*) Giao với mặt phẳng chứa trục $z'Oz$ cặp đường thẳng.



Tương tự có các mặt trụ, mặt nón đối xứng qua mặt phẳng xOz , yOz .

7.6.2.3 Phân loại các mặt bậc 2

Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ xét mặt (Q) bậc 2 có phương trình:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0 \qquad \textbf{(7.72)}$$

Xét dạng toàn phương

$$Q(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz\,.$$

Ma trận chính tắc $A=\left[a_{ij}\right]_{i,j=\overline{1,3}}$ với $a_{ij}=a_{ji}$ là ma trận đối xứng nên tồn tại ma trận trực giao T sao cho $T^tAT=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}$. Có thể chọn T thỏa mãn $\det T=1$ (để hệ trục tọa độ mới tạo thành tam diện thuận).

Tương ứng với ma trận chuyển cơ sở T là chọn hệ trục tọa độ mới bằng cách quay quanh gốc tọa độ.

Công thức đổi tọa độ $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$.

Mặt bậc 2 (Q) có phương trình trong hệ trục tọa độ mới:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+2b'_1\,x'+2b'_2\,y'+2b'_3\,z'+c=0 \qquad \textbf{(7.73)}$$

Tùy theo các giá trị của $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,b'_1,b'_2,b'_3,c$ mặt (Q) có các dạng sau:

a) *Các giá trị riêng $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ khác 0* ($\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$)

Bằng cách tịnh tiến hệ trục tọa độ ta có thể đưa phương trình (7.73) về dạng:

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\lambda_3Z^2=C'. \qquad \textbf{(7.74)}$$

*) Nếu $C'\neq 0$

- $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,C'$ cùng dấu: (Q) là Ellipsoid;
- $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ cùng dấu, C' trái dấu: (Q) là Ellipsoid ảo;
- $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ chỉ có hai số cùng dấu: (Q) là Hyperboloid một tầng hoặc hai tầng.

*) Nếu $C'=0$

- $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ chỉ có hai số cùng dấu: (Q) là nón bậc 2.
- $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ cùng dấu: (Q) là nón ảo (một điểm).

Các trường hợp còn lại sau đây ta chỉ xét mỗi trường hợp một loại đại diện, các loại khác có kết quả tương tự.

b) *Có đúng một giá trị trong ba giá trị $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ bằng 0.*

Chẳng hạn $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$

*) $b'_3 \neq 0$: Tịnh tiến hệ tọa độ ta được: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2b'_3 Z = 0$.

Đây là phương trình Paraboloid elliptic nếu $\lambda_1\lambda_2 > 0$ và Paraboloid hyperbolic nếu $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

*) $b'_3 = 0$: Tịnh tiến tọa độ ta được: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = C'$.

- Nếu $C' \neq 0$: Đây là phương trình các mặt trụ.
- Nếu $C' = 0$: Đây là phương trình các cặp mặt phẳng cắt nhau hoặc truc $Z'Z$.

c) *Có đúng hai giá trị trong ba giá trị $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ bằng 0.*

Chẳng hạn $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$.

*) b'_2, b'_3 không đồng thời bằng 0.

Bằng cách quay hệ trục tọa độ

$$\begin{cases} x'_1 = x''_1 \\ x'_2 = \dfrac{b'_3 x''_2}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}} + \dfrac{b'_2 x''_3}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}} \\ x'_3 = -\dfrac{b'_2 x''_2}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}} + \dfrac{b'_3 x''_3}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}} \end{cases}$$

Phương trình trên trở thành

$$\lambda_1\left(x''_1 + \frac{b'_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}\, x''_3 + c - \frac{b'^2_1}{\lambda_1} = 0.$$

Thức hiện tịnh tiến trục toa độ ta đượcphương trình dạng:

$\lambda_1 X^2 + b''_2 Y = 0$: (Q) là mặt trụ Parabolic.

*) $b'_2 = b'_3 = 0$: Tịnh tiến hệ tọa độ ta có: $\lambda_1 X^2 = C'$. Do đó (7.72) là phương trình cặp mặt phẳng song song nếu $C' \neq 0$ và trùng nhau nếu $C' = 0$.

<u>**Ví dụ 7.26**</u>: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt bậc 2 có phương trình

$$(Q): 7x^2 + 7y^2 + 10z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 12x + 12y + 72z = 24$$

Ma trận của dạng toàn phương tương ứng $A=\begin{bmatrix}7 & 1 & 2\\ 1 & 7 & 2\\ 2 & 2 & 10\end{bmatrix}$.

Đa thức đặc trưng: $|A-\lambda I|=(6-\lambda)^2(12-\lambda)$.

Tìm cơ sở của các không gian riêng và trực chuẩn hoá Gram-Shmidt ta có ma trận trực giao

$$T=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6}\end{bmatrix} \text{ có } \det T=1 \text{ và } T^tAT=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{bmatrix}$$

Đổi tọa độ $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix}$ thì phương trình của mặt (Q) trong tọa độ mới:

$$6x'^2+6y'^2+12z'^2-12\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)$$
$$+12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)+72\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{2}{\sqrt{6}}z'\right)=24$$

$$\Rightarrow\quad 6\left(x'^2+2\sqrt{2}x'\right)+6\left(y'^2+4\sqrt{3}y'\right)+12\left(z'^2+2\sqrt{6}\right)=24$$

Tịnh tiến tọa độ: $X=x'+\sqrt{2}$, $Y=y'+2\sqrt{3}$, $Z=z'+\sqrt{6}$. Suy ra:

$$(Q):\ \frac{X^2}{30}+\frac{Y^2}{30}+\frac{Z^2}{15}=1.$$

Vậy (Q) là một Ellipsoid tròn xoay theo trục $Z'\Omega Z$.

Ω có tọa độ $\left(-\sqrt{2},-2\sqrt{3},-\sqrt{6}\right)$.

<u>Ví dụ 7.27</u>: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt bậc 2 có phương trình

$$(Q): 2xy+2xz+2yz-6x-6y+6z=0.$$

Ma trận của dạng toàn phương tương ứng $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

Đa thức đặc trưng: $|A-\lambda I|=(\lambda+1)^2(2-\lambda)$.

Tìm cơ sở của các không gian riêng và trực chuẩn hoá Gram-Shmidt ta có ma trận trực giao

$$T=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix} \text{ có } \det T=1 \text{ và } T^tAT=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

Đổi tọa độ $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$ ta được phương trình của mặt (Q) trong tọa độ mới:

$$-x'^2-y'^2+2z'^2-6\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'\right)$$
$$-6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'\right)+6\left(\frac{2}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'\right)=0.$$

$$\Rightarrow\ -x'^2-\left(y'^2-4\sqrt{6}y'\right)+2\left(z'^2-\sqrt{3}z'\right)=0$$

Tịnh tiến tọa độ: $X=x'$, $Y=y'-2\sqrt{6}$, $Z=z'-\sqrt{3}/2$. Suy ra

$$(Q):\ \frac{2X^2}{45}+\frac{2Y^2}{45}-\frac{4Z^2}{45}=1.$$

Vậy (Q) là một Hyperboloid một tầng.

BÀI TẬP CHƯƠNG VII

7.1) Xét ánh xạ $\eta:\mathcal{M}_{m\times n}\times\mathcal{M}_{m\times n}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $\eta(A,B)=\mathrm{Tr}(B^tA)$. Trong đó $\mathcal{M}_{m\times n}$ là không gian các ma trận cỡ $m\times n$ và $\mathrm{Tr}A$ là vết của ma trận vuông A. Chứng minh η là một tích vô hướng.

7.2) Trong không gian $\mathbb{R}^2$ xét dạng song tuyến tính xác định bởi:

$$\eta\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=x_1x_2-2x_1y_2-2y_1x_2+5y_1y_2$$

a) Chứng minh $\left(\mathbb{R}^2,\eta\right)$ là không gian véc tơ Euclide.

b) Trực chuẩn hoá Gram-Schmidt cơ sở $\{(1,0),(0,1)\}$ của $\mathbb{R}^2$.

7.3) Giả sử $u=(x_1,y_1)$, $v=(x_2,y_2)$ là hai véc tơ thuộc $\mathbb{R}^2$.

a) Chứng minh rằng dạng song tuyến tính sau là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$:

$$\eta_1(u,v) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2y_1x_2 + 7y_1y_2 .$$

b) Tìm các giá trị k để dạng song tuyến tính sau là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$:

$$\eta_2(u,v) = x_1x_2 - 3x_1y_2 - 3y_1x_2 + ky_1y_2 .$$

c) Với các giá trị nào của $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ thì dạng song tuyến tính sau là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$:

$$\eta_3(u,v) = ax_1x_2 + bx_1y_2 + cy_1x_2 + dy_1y_2 .$$

7.4) Chứng minh rằng:

(i) Tổng của hai tích vô hướng là một tích vô hướng.

(ii) Tích của một số dương với một tích vô hướng là một tích vô hướng.

7.5) Trong không gian véc tơ Euclide $V,\langle,\rangle$.

a) Chứng minh bất đẳng thức hình bình hành $\|u+v\| + \|u-v\| = 2\|u\| + 2\|v\|$.

b) Công thức dạng cực $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$.

c) $\|u\| = \|v\|$ khi và chỉ khi $\langle u+v, u-v\rangle = 0$.

d) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ khi và chỉ khi $\langle u,v\rangle = 0$.

7.6) Trong không gian véc tơ Euclide $V,\langle,\rangle$. Chứng minh rằng: với mọi $u,v,w \in V$, $\|u-v\|^2 \le 2\left(\|u-w\|^2 + \|w-v\|^2\right)$.

7.7) Hai hệ véc tơ $\{u_1,...,u_n\}$, $\{v_1,...,v_n\}$ của không gian véc tơ Euclide $V,\langle,\rangle$ được gọi là tương hỗ nếu $\langle u_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \ne j \\ 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$; $i,j = 1,...,n$.

Chứng minh: a) Nếu $\{u_1,...,u_n\}$ độc lập tuyến tính thì mọi hệ $\{v_1,...,v_n\}$ tương hỗ của nó cũng độc lập tuyến tính.

b) Với mọi cơ sở $\{e_1,...,e_n\}$ đều tồn tại duy nhất một cơ sở $\{v_1,...,v_n\}$ tương hỗ của nó. Khi đó nếu $u = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} y_ie_i$ thì $x_i = \langle u, v_i\rangle$ và $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$.

7.8) Cho W là không gian véc tơ con của không gian véc tơ Euclide $V,\langle,\rangle$. Chứng minh rằng: với mọi $v \in V$, tồn tại duy nhất véc tơ $u_0 \in W$ sao cho $\|u_0 - v\|^2 \le \|u - v\|^2$ với mọi $u \in W$. u_0 được gọi là hình chiếu của v xuống W.

7.9) W_1, W_2 là hai không gian con của không gian véc tơ Euclide $V, \langle , \rangle$. Giả sử $\dim W_1 < \dim W_2$. Chứng minh tồn tại véc tơ khác $\mathbf{0}$ của W_2 trực giao với mọi véc tơ của W_1.

7.10) Xét ánh xạ $\eta : \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\eta(A,B) = \mathrm{Tr}(A^t MB)$, trong đó $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathcal{M}_2$ là không gian các ma trận vuông cấp 2.

Chứng minh rằng η là một dạng song tuyến tính.

Tìm ma trận của η trong cơ sở $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

7.11) Giả sử η là một dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$\eta\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2 .$$

a) Tìm ma trận A của η trong cơ sở $\{u_1 = (1,0),\ u_2 = (1,1)\}$.

b) Tìm ma trận B của η trong cơ sở $\{v_1 = (2,1),\ v_2 = (1,-1)\}$.

c) Tìm ma trận P chuyển từ cơ sở $\{u_i\}$ sang $\{v_i\}$, và nghiệm lại rằng $B = P^t AP$.

7.12) Tìm ma trận trực giao P sao cho $P^t AP$ có dạng chéo:

a) $\begin{bmatrix} 7 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

7.13*) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ là ma trận đối xứng bậc 2 có hai giá trị riêng là α, β. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất có thể có của a_{12}.

7.14) Giả sử Q là một dạng toàn phương trên không gian véc tơ V với dạng cực tương ứng là η. Nghiệm lại rằng $\eta(u,v) = \dfrac{1}{2}\big(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\big),\ u, v \in V$.

7.15) Giả sử η là một dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V. Với mọi tập con $S \subset V$, ký hiệu:

$$S^{\perp} = \{v \in V : \eta(u,v) = 0, \forall u \in S\}\ ;\ S^{\mathsf{T}} = \{v \in V : \eta(v,u) = 0, \forall u \in S\}.$$

a) Chứng minh rằng:

i) $S^{\perp}$, S^{T} là hai không gian véc tơ con của V.

ii) $S_1 \subset S_2$ thì $S_2^{\perp} \subset S_1^{\perp}$ và $S_2^{\mathsf{T}} \subset S_1^{\mathsf{T}}$.

iii) $\{\mathbf{0}\}^{\perp} = \{\mathbf{0}\}^{\mathsf{T}} = V$.

b) Giả sử U, W là hai không gian véc tơ con của V. Chứng minh rằng

i) $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

ii) $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$.

7.16) Tìm một cơ sở của không gian véc tơ con W của $\mathbb{R}^4$ trực giao với hai véc tơ $u_1 = (1,-2,3,4)$ và $u_2 = (3,-5,7,8)$

7.17) Giả sử W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^5$ sinh bởi $u = (1,2,3,-1,2)$ và $v = (2,4,7,2,-1)$. Hãy tìm một cơ sở của phần bù trực giao $W^{\perp}$ của W.

7.18) Trong không gian véc tơ $\mathbf{P}_2$ các đa thức bậc ≤ 2, xét tương ứng

$$\langle p,q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

a) Chứng minh rằng $\langle , \rangle$ là một tích vô hướng.

b) Tìm một cơ sở của không gian con W trực giao với $q(t) = 2t+1$.

c) Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở chính tắc $\{1, t, t^2\}$.

7.19) Không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2 với tích vô hướng

$$\eta(A,B) = \mathrm{Tr}(B^t A).$$

a) Chứng minh rằng $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ là một cơ sở trực chuẩn.

b) Tìm một cơ sở của phần bù trực giao của:

(i) Các ma trận đường chéo.

(ii) Các ma trận đối xứng.

7.20) Viết ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở chính tắc. Tìm cơ sở để biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc:

a) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$

b) $Q(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$

c) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

d) $Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2-x_3^2-2x_4^2+2x_1x_2-4x_2x_3+2x_2x_4$

e) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$

f) $Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$.

7.21) Tìm phép biến đổi trực giao để đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

a) $Q(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$.

b) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$.

c) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.

d) $Q(x_1,x_2,x_3)=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

e) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$.

7.22) Tìm λ để các dạng toàn phương sau xác định dương:

a) $Q(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

b) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$.

c) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

d) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$.

7.23) Hãy đưa các đường bậc hai có phương trình sau về dạng chính tắc và viết tên chúng:

a) $3x^2+8xy-3y^2+180=0$

b) $17x^2+12xy+8y^2-80=0$

c) $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$

d) $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y-18=0$

e) $4x^2+9xy+12y^2-4x+6y+1=0$

7.24) Hãy đưa các mặt bậc hai có phương trình sau về dạng chính tắc và viết tên chúng:

a) $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$;

b) $2xy - 6x + 10y + z = 31$;

c) $3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 2yz + 8x + 8y + 8z = 0$;

d) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz - 2yz = 16$;

e) $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 12z = 0$;

f) $x^2 - 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 18x + 18y + 45 = 0$.

7.25) Cho f tự đồng cấu tuyến tính của không gian véc tơ Euclide $(V, \langle , \rangle)$. Chứng minh 3 mệnh đề sau tương đương:

(i) Với mọi $v \in V$, $\langle f(v), v \rangle = 0$;

(ii) Với mọi $v, u \in V$, $\langle f(v), u \rangle = -\langle f(u), v \rangle$;

(iii) Ma trận của f trong cơ sở trực chuẩn là phản đối xứng.

7.26) a) A, B là hai ma trận vuông cấp n. Chứng minh:

$$\text{Với mọi } X, Y \in \mathbb{R}^n,\ XAY^t = XBY^t \Rightarrow A = B.$$

b) A, B là hai ma trận đối xứng cấp n. Chứng minh:

$$\text{Với mọi } X \in \mathbb{R}^n,\ XAX^t = XBX^t \Rightarrow A = B.$$

c) A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh A phản đối xứng khi và chỉ khi Với mọi $X \in \mathbb{R}^n$, $XAX^t = 0$.

7.27) Giả sử $A = \left[a_{ij} \right]$ là hai ma trận trực giao cấp n. Chứng minh rằng $\left| \sum_{1 \le i, j \le n} a_{ij} \right| \le n$. Khi nào thì có đẳng thức.

7.28*) Giả sử $\mathscr{B}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ Euclide n chiều V. $\{v_1, ..., v_n\}$ là một hệ véc tơ của V:

a) Chứng minh $\left| \det_{\mathscr{B}} \{v_1, ..., v_n\} \right| \le \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|$;

b) Xét trường hợp đẳng thức.

7.29*) a) Chứng minh rằng với mọi hệ véc tơ $\{v_1, ..., v_n\}$ của không gian Euclide V ta luôn có:

$$\begin{vmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle & \dots & \langle v_1,v_k\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle & \dots & \langle v_2,v_k\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle v_k,v_1\rangle & \langle v_k,v_2\rangle & \dots & \langle v_k,v_k\rangle \end{vmatrix} \ge 0$$

b) Nếu $\{e_1,\dots,e_k\}$ độc lập tuyến tính thì:

$$\langle v,v\rangle \ge -\frac{\begin{vmatrix} 0 & b_1 & \dots & b_k \\ b_1 & & & \\ \dots & & \langle e_i,e_j\rangle & \\ b_k & & & \end{vmatrix}}{\left|\langle e_i,e_j\rangle\right|} \quad \text{với } b_i = \langle v,e_i\rangle .$$

Ngược lại, với mọi $b_1,\dots,b_k$ cho trước, tồn tại duy nhất v sao cho $b_i = \langle v,e_i\rangle$ và bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức.

c) Chứng minh rằng nếu A là ma trận của một dạng toàn phương xác định dương thì $Q(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \dots & & A & \\ x_n & & & \end{vmatrix}$ xác định âm.

7.30*) Cho η,φ là hai tích vô hướng trên không gian véc tơ n chiều V sao cho với mọi $u,v\in V : \eta(u,v)=0 \Rightarrow \varphi(u,v)=0$. Chứng minh tồn tại $k\in\mathbb{R}$: $\varphi(u,v)=k\eta(u,v)$.

7.31*) Cho Q là một dạng toàn phương trên không gian véc tơ n chiều V có chỉ số quán tính (p,q). W là không gian véc tơ con của V. Chứng minh:

a) Nếu $Q|_W$ xác định dương thì $\dim(W)\le p$.

b) Nếu $Q|_W$ xác định âm thì $\dim(W)\le q$.

c) Nếu $\dim(W) > \max(p,q)$ thì $Q|_W$ không xác định, nghĩa là tồn tại một véc tơ $v\in W$, $v\neq 0$ sao cho $Q(v)=0$.

PHỤ LỤC 1

SỐ PHỨC

Ta biết rằng bình phương của một số thực là không âm, vì vậy trong trường số thực phương trình $x^2+1=0$ vô nghiệm. Tuy nhiên nếu ta đưa vào số ảo i sao cho $i^2=-1$ thì phương trình trên trở thành $x^2-i^2 = (x-i)(x+i)=0$. Do đó phương trình có hai nghiệm $x=\pm i$. Tổng quát hơn ta có thể mở rộng trường số thực lên một trường số rộng hơn để mọi phương trình bậc hai đều có nghiệm.

1 CÁC DẠNG CỦA SỐ PHỨC

1.1 Dạng đại số của số phức

$z=a+ib$, trong đó $a,b\in\mathbb{R}$, $i^2=-1$.

a được gọi là phần thực, ký hiệu $a=\operatorname{Re} z$

b gọi là phần ảo của z, ký hiệu $b=\operatorname{Im} z$.

Hai số phức $z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2$ bằng nhau được định nghĩa như sau:

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}. \tag{8.1}$$

Tập hợp các số phức ký hiệu là $\mathbb{C}$.

1.2 Các phép toán trên số phức

Cho hai số phức $z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2$, ta định nghĩa:

$$z_1+z_2 := (a_1+a_2)+i(b_1+b_2) \tag{8.2}$$

$$z_1z_2 := (a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1). \tag{8.3}$$

Ta có thể chứng minh được $(\mathbb{R},+,\cdot)$ là một trường con của $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

Số phức $\overline{z}=a-ib$ được gọi là số phức liên hợp với số phức $z=a+ib$.

Số phức $\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ có tính chất $\left(\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}\right)(a+ib)=1$ nên được gọi là số phức nghịch đảo của số phức $z=a+ib$, ký hiệu z^{-1} hay $\dfrac{1}{z}$. Vậy

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}. \qquad \textbf{(8.4)}$$

Ta định nghĩa: $z_1-z_2:=z_1+(-z_2)=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$;

$$\frac{z_1}{z_2}:=z_1\frac{1}{z_2}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{{a_2}^2+{b_2}^2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}. \qquad \textbf{(8.5)}$$

1.3 Biểu diễn hình học của số phức

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy. Mỗi điểm M trong mặt phẳng hoàn toàn xác định bởi toạ độ (a,b) của nó. Mặt khác mỗi số phức $z=a+ib$ cũng được xác định bởi phần thực a và phần ảo b. Vì vậy ta có thể đồng nhất số phức $z=a+ib$ với điểm $M(a,b)$. Do đó các số phức được đồng nhất với các điểm của mặt phẳng mà ta gọi là mặt phẳng phức. Phép cộng của số phức: $z_1+z_2:=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$ tương ứng với phép cộng hai vectơ $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$; $M_1(a_1,b_1), M_2(a_2,b_2)$. Hai số phức liên hợp với nhau đối xứng nhau qua trục Ox.

$\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$ được gọi là môđun của số phức $z=a+ib$ và ta ký hiệu là $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Số đo φ của góc $(Ox,\overrightarrow{OM})$ xác định sai khác bội số của 2π được gọi là argument của số phức z, ký hiệu $\operatorname{Arg} z$.

Nếu $-\pi<\varphi\le\pi$ thì φ được gọi là argument chính, ký hiệu $\arg z$.

$(|z|,\arg z)$ là toạ độ cực của M với trục cực Ox.

Tương ứng giữa toạ độ Đềcác và toạ độ cực

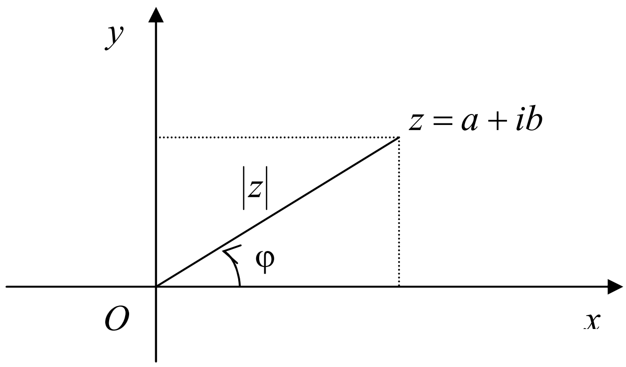
$$\begin{cases} a=r\cos\varphi \\ b=r\sin\varphi \end{cases} \qquad \textbf{(8.6)}$$

Ngược lại

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad \textbf{(8.7)}$$

Số phức $z=a+ib$ được viết lại *dạng lượng giác*

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi) \qquad \textbf{(8.8)}$$



Tính chất:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

2) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$; $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z} = \operatorname{Re} z$;

3) Giả sử $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ là đa thức với hệ số thực (xem Phụ lục 2) thì $p(\overline{z}) = a_0 + a_1\overline{z} + \ldots + a_n\overline{z}^n = \overline{p(z)}$. Vì vậy nếu z_0 là nghiệm của phương trình $p(z) = 0$ thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm.

$p(z), q(z)$ là hai đa thức với hệ số thực thì $\dfrac{p(\overline{z})}{q(\overline{z})} = \overline{\left(\dfrac{p(z)}{q(z)}\right)}$.

4) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \ge 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

5) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$; $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$; $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$;

6) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; $|z|^2 = z\overline{z}$; $|z| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{z} = \overline{z}$;

7) $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$; $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$;

8) $|\overline{z}| = |z|$; $\operatorname{Arg} \overline{z} = -\operatorname{Arg} z$.

Công thức Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \qquad \textbf{(8.9)}$$

Công thức (6.1) được viết lại $z = |z| e^{i\varphi}$ gọi là *dạng mũ của số phức*.

1.4 Luỹ thừa của số phức - Công thức Moivre

Cho số phức $z = |z|e^{i\varphi}$. Tích n lần $\underbrace{z\cdot ....\cdot z}_{n \text{ lần}}$ được gọi là luỹ thừa bậc n của z, ký hiệu z^n. áp dụng phương pháp quy nạp và các tính chất 4), 6) ở trên ta có

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Khi $|z| = 1$ ta có *công thức Moivre*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad \textbf{(8.10)}$$

<u>Ví dụ 8.1</u>: Tìm các số thực x, y sao cho:

$$3i(x+iy) + (1+2i)(x+2y) = 2+i$$

Khai triển và đồng nhất phần thực phần ảo ta được:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

<u>Ví dụ 8.2</u>: Giải hệ phương trình vói ẩn số phức z, w: $\begin{cases} 2z + iw = 3 \\ 3z + w = 1 - 2i \end{cases}$

Nhân i vào hai vế của phương trình thứ nhất xong cộng vào phương trình thứ hai ta được $z = \dfrac{1+i}{3+2i} = \dfrac{5}{13} + \dfrac{i}{13} \Rightarrow w = \dfrac{-2}{13} - \dfrac{29}{13}i$.

<u>Ví dụ 8.3</u>: a) Quỹ tích các điểm z sao cho $|z-2i| = 3$ là đường tròn tâm $2i$ bán kính 3.

b) Quỹ tích các điểm z sao cho $|z-2i| = |z-3|$ là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm 3 và $2i$.

c) Quỹ tích các điểm z sao cho $|z+3| + |z-3| = 10$ là đường ellípse có tiêu điểm $F_1(-3,0), F_2(3,0)$ độ dài trục lớn $2a = 10$.

<u>Ví dụ 8.4</u>: Theo (6.3): $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = (\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$. Mặt khác

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi - i\sin^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$$

Vậy $\begin{cases} \cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \\ \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \end{cases}$

Ví dụ 8.5: Tính $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}$

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}=\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10}=2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3}\right)$$

$$=2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2^{10}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2^{9}\left(-1+\sqrt{3}i\right).$$

1.5 Căn bậc n của số phức

Căn bậc n của số phức z là số phức w sao cho $w^n=z$. Ký hiệu $w=\sqrt[n]{z}$ hay $w=z^{\frac{1}{n}}$.

Cho $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|z|e^{i\varphi}$

*) Nếu $z=0$ thì $w=\sqrt[n]{z}=0 \quad \forall n=1,2,\ldots$.

**) Nếu $z\neq 0$. Xét $w=|w|(\cos\psi+i\sin\psi)=|w|e^{i\psi}$ thì

$$w^n=z \Leftrightarrow \begin{cases}|w|^n=|z|\\ n\psi=\varphi+k2\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|w|=\sqrt[n]{|z|}\\ \psi=\dfrac{\varphi+k2\pi}{n};\ k=0,1,\ldots,n-1\end{cases} \tag{8.11}$$

Vậy có đúng n căn bậc n của z ứng với các giá trị $k=0,1,\ldots,n-1$. Các căn bậc n này là các đỉnh của n giác đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $\sqrt[n]{|z|}$.

Ví dụ 8.6: Tính căn bậc n của đơn vị.

Ta có $1=\cos 0+i\sin 0$. Vậy các căn bậc n của 1 là:

$$\varepsilon_k=\cos\frac{k2\pi}{n}+i\sin\frac{k2\pi}{n}=e^{i\frac{k2\pi}{n}}\ ;\ k=0,1,\ldots,n-1. \tag{8.12}$$

Ví dụ 8.7: Tính $\sqrt[3]{(-2+2i)}$

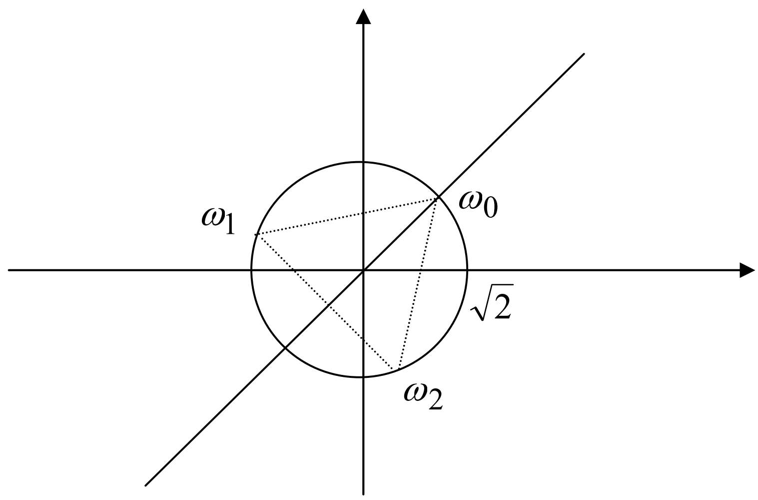
Ta có $-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Vậy $\sqrt[3]{(-2+2i)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4}+k2\pi\right)+i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4}+k2\pi\right)\right)$;

$$k=0: \quad w_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i \ ;$$

$$k=1: \quad w_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \ ;$$

$$k=2: \quad w_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$



PHỤ LỤC 2

ĐA THỨC

1 Đa thức trên một vành nguyên

Cho K là một trong các tập số: $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ hay $\mathbb{Z}_p$.

Với mỗi dãy $(a_0, a_1,..., a_n,...)$ các phân tử $a_n \in K$. Biểu thức $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $a_n \neq 0$ được gọi là đa thức bậc n của biến (hay ẩn) x. Các số $a_0, a_1,..., a_n$ được gọi là các hệ số của đa thức.

Nếu $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$ thì ta được các đa thức không và cũng ký hiệu là 0. Tập hợp các đa thức biến x với hệ số thuộc K được ký hiệu là $K[x]$.

Các đa thức được ký hiệu $p(x), q(x)...$

Hai đa thức $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $a_n \neq 0$; $q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$, $b_m \neq 0$

Hai đa thức $p(x), q(x)$ bằng nhau được ký hiệu và định nghĩa như sau:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ a_0 = b_0,..., a_n = b_n \end{cases} \tag{8.13}$$

2 Vành đa thức

Trong tập $K[x]$, giả sử $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $a_n \neq 0$

$$q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m , \; b_m \neq 0$$

Ta định nghĩa tổng $p(x) + q(x)$ và tích $p(x)q(x)$ của hai đa thức $p(x)$, $q(x)$ như sau: $p(x) + q(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ...$

$$p(x)q(x) := c_0 + c_1x + ... + c_{n+m}x^{n+m} , \; c_k = \sum_{j=1}^{k} a_jb_{k-j} , \; k = 0,1,..., n+m \tag{8.14}$$

Với quy ước $a_j = 0$ nếu $j > n$ và $b_j = 0$ nếu $j > m$.

Ta có thể chứng minh được $(K[x],+,.)$ là một vành nguyên.

$$\text{bậc}\left(p(x) + q(x)\right) \leq \max\left(\text{bậc}\, p(x), \text{bậc}\, q(x)\right) \tag{8.15}$$

$$\text{bậc}\left(p(x)q(x)\right) \leq \text{bậc}\, p(x) + \text{bậc}\, q(x) . \tag{8.16}$$

3 Phép chia đa thức - Nghiệm

Định lý 1: Với hai đa thức bất kỳ $p(x), q(x)$; $q(x) \neq 0$ đều tồn tại duy nhất hai đa thức $s(x), r(x)$ sao cho $p(x) = q(x)s(x) + r(x)$ và nếu $r(x) \neq 0$ thì bậc$\,r(x) <$ bậc$\,q(x)$.

Ví dụ 8.8: $2x^5 + 3x^3 = (x^2 + 2x + 5)(2x^3 - 4x^2 - 2x + 27) - 44x - 135$

Định nghĩa 1: *$r(x)$ được gọi là dư của phép chia $p(x)$ cho $q(x)$. Nếu $r(x) = 0$ thì ta nói $p(x)$ chia hết cho $q(x)$ hay $q(x)$ là ước của $p(x)$.*

Định nghĩa 2: *Số $c \in K$ thoả mãn $p(c) = a_0 + a_1c + ... + a_nc^n = 0$ được gọi là nghiệm của đa thức $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$.*

Định lý 2: Dư của phép chia $p(x)$ cho $x - c$ là $p(c)$.

Hệ quả 3: c là nghiệm của đa thức $p(x)$ khi và chỉ khi $x - c$ là ước của $p(x)$, nghĩa là $p(x) = (x - c)^k s(x)$.

Nếu $p(x) = (x - c)^k s(x)$ (k nguyên, $k \geq 1$) và $s(c) \neq 0$ thì c được gọi là nghiệm bội k của đa thức $p(x)$.

Định nghĩa 3: *Đa thức $p(x) \in K[x]$ được gọi là bất khả quy nếu* bậc$\,p(x) \geq 1$ *và nếu $p(x) = q(x)s(x)$ thì một trong hai đa thức $q(x)$, $s(x)$ là hằng số khác 0 của K, nghĩa là $p(x)$ chỉ chia hết cho $kp(x)$, với $k \in K \setminus \{0\}$.* Chẳng hạn: Mọi đa thức bậc nhất là bất khả quy. Đa thức bậc ≥ 2 bất khả quy khi và chỉ khi nó vô nghiệm trong K.

Định lý 4: Mọi đa thức bậc ≥ 1 trên trường số phức $\mathbb{C}$ đều có nghiệm.

Hệ quả 5: Mọi đa thức $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$ đều có thể phân tích thành $p(x) = a_n(x - x_1)...(x - x_n)$, trong đó các số phức x_k có thể trùng nhau.

Hệ quả 6: Mọi đa thức hệ số thực $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ có thể phân tích thành tích các đa thức bất khả quy là đa thức bậc nhất hay đa thức bậc 2 có biệt thức Δ âm: $p(x) = a_n(x^2 + b_1x + c1)^{k_1}...(x^2 + b_mx + c_m)^{k_m}(x - x_1)^{l_1}...(x - x_s)^{l_s}$

với $b_j{}^2 - 4c_j < 0$, $j = 1,...,m$; $2k_1 + ... + 2k_m + l_1 + ... + l_s = n$.

4 Ước chung lớn nhất, nguyên tố cùng nhau

Định nghĩa 4: *Nếu hai đa thức $p(x)$, $q(x)$ cùng chia hết cho đa thức $d(x)$ thì $d(x)$ được gọi là ước chung của $p(x)$, $q(x)$. Ngoài ra nếu mọi ước của $p(x)$, $q(x)$ đều là ước của $d(x)$ thì $d(x)$ gọi là ước chung lớn nhất của $p(x)$, $q(x)$. Ký hiệu:*

$$d(x) = UCLN(p(x), q(x)).$$

Nếu $d(x)$ là hằng số khác không thì $p(x)$, $q(x)$ được gọi là nguyên tố cùng nhau. Ký hiệu $(p(x), q(x)) = 1$.

Chú ý rằng $d(x) = UCLN(p(x), q(x))$ xác định duy nhất sai khác một hằng số khác 0. Nghĩa là

$$d(x) = UCLN(p(x), q(x)) \Leftrightarrow kd(x) = UCLN(p(x), q(x)), \text{ với } k \in K \setminus \{0\}.$$

Để tìm $UCLN(p(x), q(x))$ ta thực hiện phép chia Euclide như sau:

- Giả sử bậc $p(x) \geq$ bậc $q(x)$ thì $p(x) = q(x)s_1(x) + r_1(x)$, bậc $r_1(x) <$ bậc $q(x)$.
- Nếu $r_1(x) = 0$ thì $q(x) = UCLN(p(x), q(x))$;
- Nếu $r_1(x) \neq 0$ lặp lập quá trình trên đối với $q(x)$ và $r_1(x)$

$$q(x) = r_1(x)s_2(x) + r_2(x);$$

- Nếu $r_2(x) \neq 0$ thì $0 \neq$ bậc $r_2(x) <$ bậc $r_1(x)$.
- Tiếp tục ... $r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)s_k(x) + r_k(x)$,

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)s_{k+1}(x) + c.$$

  - $UCLN(p(x), q(x)) = UCLN(q(x), r_1(x)) = \ldots = UCLN(r_k(x), c)$.
  - Nếu $c = 0$ thì $r_k(x) = UCLN(p(x), q(x))$;
  - Nếu $c \neq 0$ thì $(p(x), q(x)) = 1$.

Định lý 7:

1) $d(x) = UCLN(p(x), q(x))$ khi và chỉ khi tồn tại các đa thức $u(x), v(x)$ sao cho $p(x)u(x) + q(x)v(x) = d(x)$.

2) $(p(x), q(x)) = 1$ khi và chỉ khi tồn tại các đa thức $u(x), v(x)$ sao cho $p(x)u(x) + q(x)v(x) = 1$.

Định lý 8:

1) Hai đa thức $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x]$ của trường số phức là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi không có nghiệm chung nào.

2) Hai đa thức $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ trên trường số thực nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi chúng không có nghiệm thực hay nghiệm phức chung nào.

Hệ quả 9: $p(x), q(x)$ là hai đa thức trên trường số thực hay số phức thì:

$$\big(p(x), q(x)\big) = 1 \;\Leftrightarrow\; \big(p^m(x), q^n(x)\big) = 1,$$ với mọi số nguyên dương m, n.

Chú ý: Các đa thức bất khả qui với hệ số ứng với bậc cao nhất bằng 1(ví dụ: $x - c; x^2 + px + q, p^2 - 4q < 0$) đóng vai trò như các số nguyên tố trong vành $\mathbb{Z}$. Vì vậy ta có thể chuyển một cách tương tự các kết quả trong vành số nguyên $\mathbb{Z}$ sang vành nguyên các đa thức $K[x]$. Chẳng hạn để tìm $d(x) = UCLN(p(x), q(x))$ ta phân tích $p(x)$ thành tích các đa thức bất khả qui. Khi đó $d(x)$ bằng tích các đa thức bất khả qui có mặt đồng thời trong $p(x)$ và $q(x)$.

Ví dụ 8.9:

$$p(x) = (x-2)^3 (x+1)^2 \left(x^2 + 2x + 3\right)^3$$

$$q(x) = (x-3)^2 (x+1)^5 \left(x^2 + 2x + 3\right)$$

$$\Rightarrow \; d(x) = (x+1)^2 \left(x^2 + 2x + 3\right).$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đoàn Quỳnh (chủ biên); Đại số tuyến tính và hình học giải tích; ĐHQG-HN.

[2] Kin Cương; Tóan cao cấp - Tập 1- Đại số- NXB ĐH-GDCN, Hà Nội, 1990.

[3] Lê Đình Thịnh, Phan Văn Hạp, Hoàng Đức Nguyên; Đại số tuyến tính, NXB KH-KT, Hà Nội 1998.

[4] Ngô Thúc Lanh; Đại số tuyến tính, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1970.

[5] Ngô Việt Trung; Giáo trình Đại số tuyến tính, NXB ĐHQG Hà Nội 2001.

[6] Nguyễn Đình Trí (chủ biên); Toán cao cấp tập một; NXB GD 1996.

[7] Nguyễn Đình Trí (chủ biên); Bài tập toán cao cấp tập một; NXB GD 1997.

[8] Trần Văn Hãn; Đại số tuyến tính trong kỹ thuật, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1978.

[9] Bellman R. ; Mở đầu lý thuyết ma trận. Bản dịch tiếng Việt: Nguyễn Văn Huệ, Hoàng Kiếm, NXB KH&KT Hà Nội 1978.

[10] B. A. Cadobnitri...; Tuyển tập các bài toán vô địch sinh viên (tiếng Nga) NXB ĐH Maxcơva 1987.

[11] Carroll Wilde; Linear Algebra, 1987.

[12] Edwin F. Beckenbach: Toán học hiện đại cho kỹ sư, bản dịch tiếng Việt, Hồ Thuần, Nguyễn Lâm, Lê Thiệu Phố, Phạm văn Ất, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1978.

[13] J. M. Monier ; Algèbre 1, 2, bản dịch tiếng Việt NXB GD, 1999.

[14] Lipshutz S. ; Linear Algebra, Mc Graw-Hill, 1987.

[15] Lipshutz S. ; Theory and problems of Linear Algebra, Schaum's Outline Series Mc Graw-Hill, 1968.

[16] Poznyak E. G. & Ilrin V. A.; Linear Algebra, Mir Pub. Moscow 1986.

[17] Proskuryakov I. U.; Problems in Linear Algebra, Mir Pub. Moscow 1978.

[18] R. Sikorski; Boolean Algebras, Springer-Verlag 1969.

MỤC LỤC