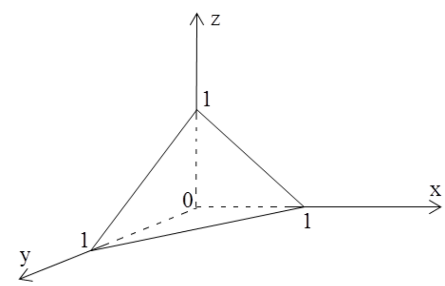
Chương 0. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1. Mặt bậc hai

Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$. Đồ thị của nó chính là một mặt cong trong không gian R^3 xác định bởi $G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D_f\}$.



VD1: Đồ thị hàm $z = 1 - x - y$ là mặt phẳng qua ba điểm $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

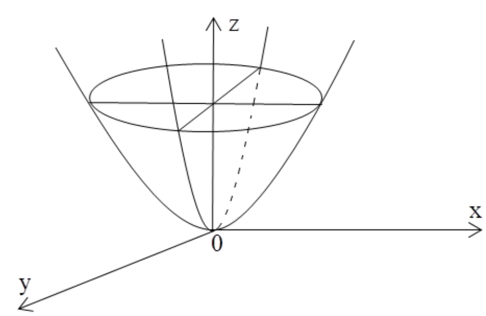
VD2: Khảo sát đồ thị hàm $z = x^2 + y^2$

Nhận xét:

i. $(x, y) \in \mathbb{R}^2, z \geq 0$

ii. Đồ thị đối xứng qua hai mặt $x = 0, y = 0$ và cắt hai mặt này theo các parabol $z = y^2, z = x^2$.

iii. Đồ thị cắt mặt phẳng $z = h \geq 0$ theo các đường tròn $x^2 + y^2 = h$



Như vậy, khi h thay đổi từ 0 đến $+\infty$ các đường tròn trên vẽ nên đồ thị, được gọi là mặt paraboloit eliptic.

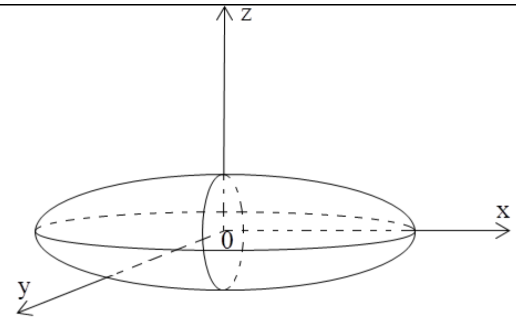
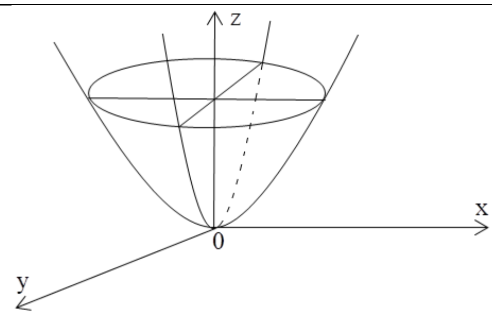
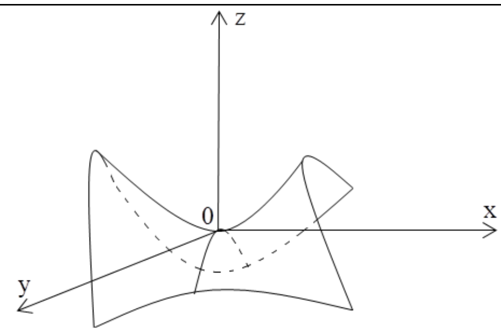
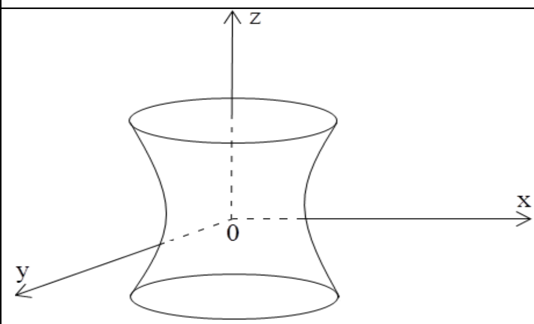
Ngoài ra chúng ta còn khảo sát một số mặt bậc hai có phương trình tổng quát là $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz + Gx + Hy + Iz + K = 0$ trong đó có ít nhất một hệ số bậc hai khác không.

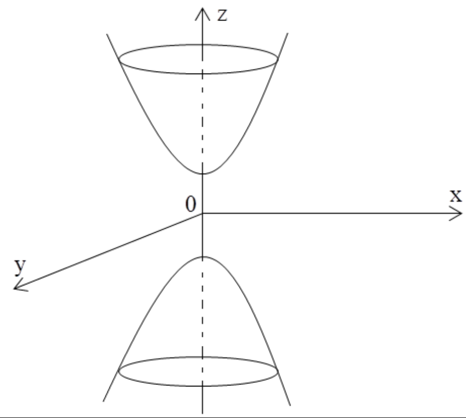
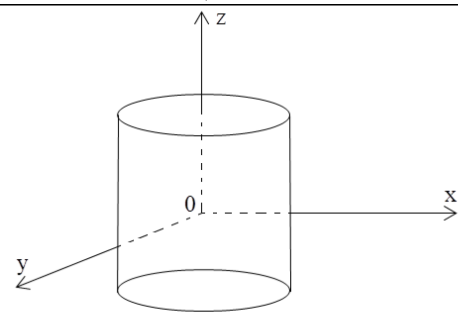
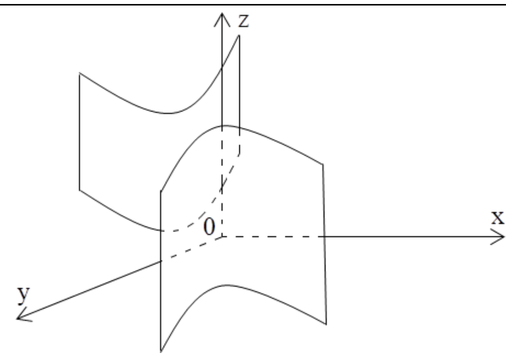
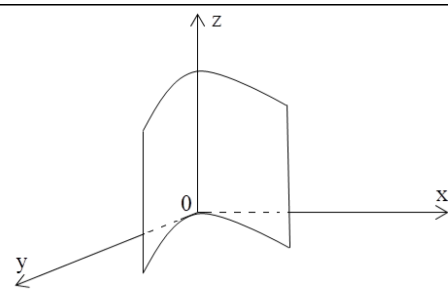
Các trường hợp suy biến

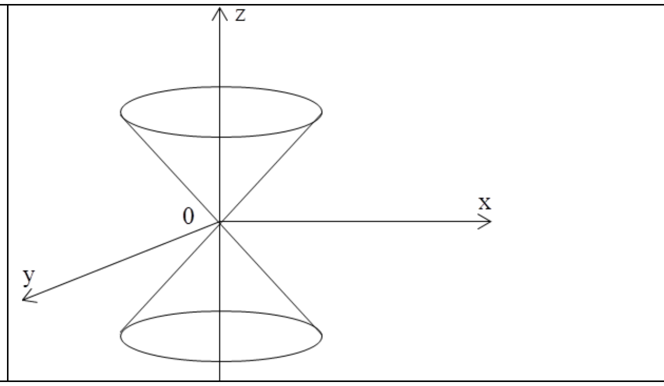
1. $x^2 + 1 = 0$: tập trống.
2. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$: một điểm gốc tọa độ $(0,0,0)$.
3. $x = 0, y = 0, z = 0$: Các mặt Oyx, Oxz, Oxy.
4. $x^2 + y^2 = 0$: Đường thẳng là giao của hai mặt $x = 0, y = 0$.

2. Các mặt bậc hai chính tắc

Tên	Phương trình	Đồ thị

Elipxoit	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
Paraboloit eliptic	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	
Paraboloit hyperbolic	$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	
Hyperboloit một tầng	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	

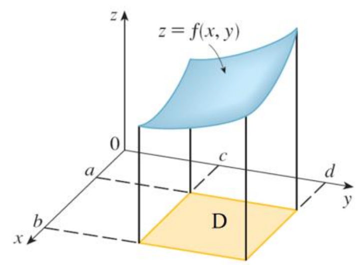
Hyperboloit hai tầng	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	
Mặt trụ eliptic	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
Mặt trụ hyperbolic	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
Mặt trụ parabolic	$y^2=2px$	

Mặt nón bậc hai	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	

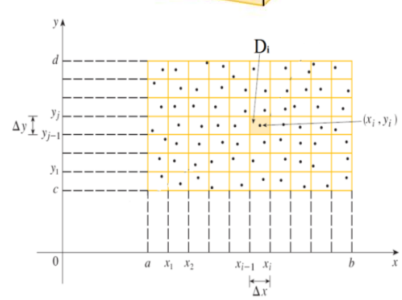
Chương 1. TÍCH PHÂN BỘI

Bài 1. TÍCH PHÂN HAI LỚP

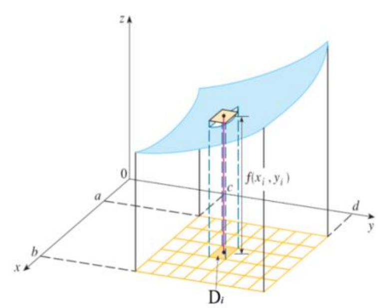
1.1. Bài toán mở đầu – thể tích hình trụ cong



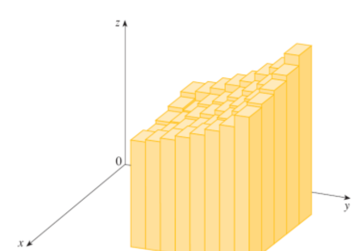
Tính thể tích hình trụ giới hạn bởi: đáy là miền $D=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$, mặt xung quanh song song trục Oz, phía trên giới hạn bởi mặt S có phương trình $z=f(x,y)$



Để tính thể tích V của khối trụ, ta chia đáy D thành n phần nhỏ không dẫm lên nhau: $D_1, D_2, ..., D_n$ có diện tích lần lượt là $S_{D_1}, S_{D_2}, ..., S_{D_n}$.



Trong mỗi D_i ta lấy điểm $M_i(x_i, y_i)$ tùy ý. Khi đó, khối trụ được chia thành n khối trụ nhỏ, gọi tên và thể tích lần lượt là ΔV_i có đáy D_i và chiều cao là $f(M_i)$



Suy ra thể tích V của khối trụ xấp xỉ bằng

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)S_{D_i} = V_n$$

Gọi d_i là *đường kính* của D_i và đặt $d=\max d_i$ là *đường kính của phép chia*. Nếu ta chia miền D càng mịn, nghĩa là khi $n\to\infty$

sao cho $d \to 0$ thì V_n càng gần với V. Vậy ta có

$$V = \lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{M}_i)\mathrm{S}_{D_i}$$

1.2. Định nghĩa và các tính chất của tích phân hai lớp

1.2.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ xác định trên miền D đóng và bị chặn trong mặt phẳng $\mathrm{O}xy$. Ta chia miền D (còn gọi là *phân hoạch* miền D) một cách tùy ý thành n phần không dẫm lên nhau: $D_1, D_2, ..., D_n$ có diện tích lần lượt là $S_{D_1}, S_{D_2}, ..., S_{D_n}$. Trong mỗi D_i ta chọn điểm tùy ý $M_i(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)$ và gọi $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{M}_i)\mathrm{S}_{D_i}$ là *tổng tích phân* của hàm số $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ trên miền D ứng với phân hoạch miền D và cách chọn điểm M_i như trên.

Gọi d_i là đường kính của D_i và đặt $d = \max \mathrm{d}_i$. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ mà giới hạn $I = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{M}_i)\mathrm{S}_{D_i}$ tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn điểm M_i thì số thực I được gọi là *tích phân hai lớp* (hay tích phân kép, tích phân bội hai) của hàm số $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ trên miền D, kí hiệu

$$\boxed{I = \iint\limits_D f(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dS}}$$

Trong đó: $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ được gọi là *hàm dưới dấu tích phân*, D là *miền lấy tích phân*, dS là *yếu tố diện tích*.

► Chú ý:

i. Xét phân hoạch miền D bởi các đường thẳng song song với $\mathrm{O}x, Oy$ ta được $\Delta S = \Delta x \Delta y$. Khi $n \to +\infty$ thì $\Delta S \to 0 \Rightarrow \begin{cases}\Delta x \to 0\\ \Delta y \to 0\end{cases} \Rightarrow dS = dxdy$. Vậy ta có

$$\boxed{I = \iint\limits_D f(\mathrm{x},\mathrm{y})dxdy}$$

ii. Nếu tồn tại tích phân $\iint\limits_D f(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dxdy}$ thì ta nói hàm $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ *khả tích* trên miền D

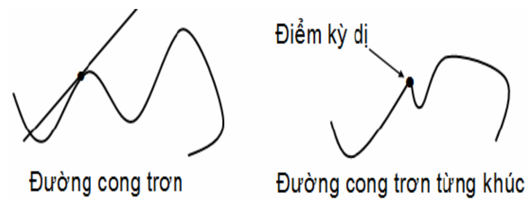
1.2.2. Đường cong trơn và định lý tồn tại tích phân hai lớp

a. Đường cong trơn

Trong mặt phẳng Oxy, xét đường cong C có phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in \Omega \subset \mathbb{R}$

Nếu $x'(t), y'(t)$ liên tục và $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0, \forall t \in \Omega$ thì ta nói C là *đường cong trơn*.

Nếu không tồn tại $x'(t_0), y'(t_0)$ hoặc $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ thì ta nói điểm $M_0(x(t_0), y(t_0))$ là *điểm kỳ dị* của đường cong C



Nếu đường cong C là hợp hữu hạn đoạn cong trơn thì ta nói C là *đường cong trơn từng khúc* (hay trơn từng đoạn).

b. Định lý tồn tại tích phân hai lớp

Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ đóng, bị chặn và có biên là đường cong trơn từng khúc thì $f(x, y)$ khả tích trên D.

1.2.3. Tính chất của tích phân hai lớp

Cho f và g là các hàm khả tích trên miền đóng, bị chặn D và $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó

i) $\iint\limits_D \alpha f(x, y)\,dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x, y)dxdy$

ii) $\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x, y)dxdy + \iint\limits_D g(x, y)dxdy$

iii) Nếu D được chia thành hai miền D_1, D_2 không dẫm lên nhau thì $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy$

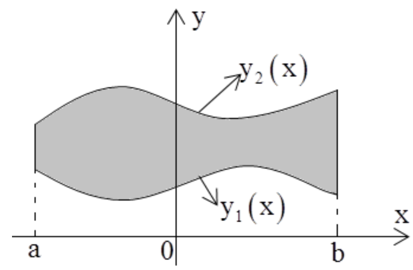
iv) Nếu $\forall (x, y) \in D, f(x, y) \le g(x, y)$ thì $\iint\limits_D f(x, y)dxdy \le \iint\limits_D g(x, y)dxdy$

v) Giả sử M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x, y)$ trên D. Khi đó $m.S_D \le \iint\limits_D f(x, y)dxdy \le M.S_D$

vi) (Định lý về giá trị trung bình) Tồn tại điểm $M \in D$ sao cho $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = f(M)S_D$

1.3. Cách tính tích phân hai lớp

1.3.1. Định lý Fubini: Đưa tích phân hai lớp về tích phân lặp

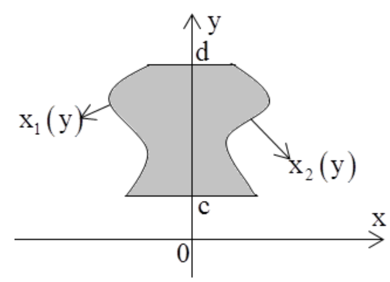


Giả sử D là miền đóng, bị chặn, có biên trơn từng khúc và có biểu diễn dưới dạng một ''*hình thang cong*'' theo y: $D = \{(x, y) | a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ hoặc viết gọn là $D: \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$

Khi đó, nếu hàm $f(x, y)$ khả tích trên D thì

$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy}$$

Tương tự, nếu D có biểu diễn là ''*hình thang cong*'' theo x: $D = \{(x, y) | c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$ thì



$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx}$$

► **Các trường hợp đặc biệt**

i) Nếu D là hình chữ nhật $D: \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$ thì

$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx}$$

ii) Hơn nữa, nếu $D: \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$ và $f(x, y)$ là hàm tách biến đối với x, y nghĩa là $f(x, y) = g(x)h(y)$ thì

$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)\,dx \right) \left(\int_c^d h(y)\,dy \right)}$$

► **Một số lưu ý khi tính tích phân hai lớp**

Cận tích phân $a \le x \le b$ hoặc $c \le y \le d$ được gọi là *cận cụ thể* (cận độc lập), cận $x_1(y) \le x \le x_2(y)$ hoặc $y_1(x) \le y \le y_2(x)$ được gọi là *cận không cụ thể* (cận phụ thuộc). Trong tích phân lặp, tích phân có cận không cụ thể được đặt ở giữa (hoặc phía sau) để ưu tiên tính trước, sau đó đến tích phân với cận cụ thể.

Khi tính tích phân $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ ta xem y là hằng số, còn tính tích phân $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ thì ta xem x là hằng số.

Trường hợp miền D đã được biểu diễn như trong định lý thì ta viết thành tích phân lặp và tính.

Trường hợp miền D chưa được biểu diễn, ta thực hiện như sau:

- Bước 1: Dựa vào phương trình của biên D, ta vẽ và xác định miền D trên mặt phẳng Oxy.
- Bước 2: Chiếu miền D lên trục Ox hoặc Oy sao cho biên của D được chia thành hai đường cong trơn.
- Bước 3: Biểu diễn miền D theo nguyên tắc ‘’ *từ trái sang phải đối với* x, *từ dưới lên trên đối với* y ’’, viết tích phân lặp rồi tính.

Trong trường hợp tổng quát, nếu miền D không có dạng như trong định lý thì ta tìm cách chia D thành các miền nhỏ có dạng này rồi tính.

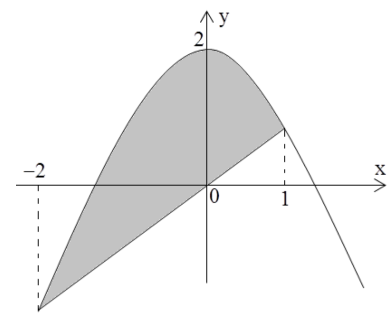
1.3.2. Một số ví dụ

VD1: Tính tích phân $I = \iint\limits_D 4y^3 \sin 2x dxdy$ trong đó D là hình chữ nhật

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

Ta có $I = \iint\limits_D 4y^3 \sin 2x dxdy = \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \right) \left(\int\limits_1^2 4y^3 dy \right) = \left(-\dfrac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \left(y^4 \Big|_1^2 \right) = 15$

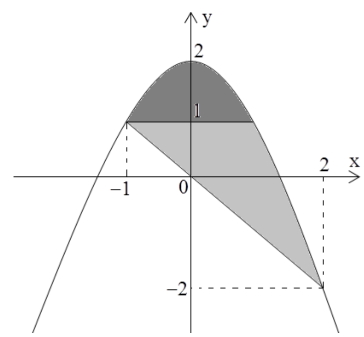
VD2: Tính tích phân $I=\iint\limits_D xydxdy$ trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi $y=2-x^2, y=x$



Ta có $D:\begin{cases}-2\le x\le 1\\ x\le y\le 2-x^2\end{cases}$. Khi đó

$$I=\iint\limits_D xydxdy=\int_{-2}^{1}dx\int_x^{2-x^2}xydy=\int_{-2}^{1}\left(\left.\frac{xy^2}{2}\right|_x^{2-x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\left[x\left(2-x^2\right)^2-x^3\right]dx=\frac{9}{8}$$

VD3: Tính tích phân $I=\iint\limits_D (x+2y)dxdy$ với D là miền phẳng kín giới hạn bởi đường thẳng $y=-x$ và parabol $y=2-x^2$



Miền D có thể biểu diễn ở hai dạng khác nhau nếu ta chiếu lên Ox hoặc Oy.

i. Chiếu lên Ox thì $D:\begin{cases}-1\le x\le 2\\ -x\le y\le 2-x^2\end{cases}$. Khi đó

$$I=\iint\limits_D (x+2y)dxdy=\int_{-1}^{2}dx\int_{-x}^{2-x^2}(x+2y)dy=\int_{-1}^{2}\left[\left.\left(xy+y^2\right)\right|_{-x}^{2-x^2}\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(x^4-x^3-4x^2+2x+4\right)dx=\frac{117}{20}$$

ii. Chiếu lên Oy thì $D=D_1\cup D_2$ với $D_1:\begin{cases}-2\le y\le 1\\ -y\le x\le\sqrt{2-y}\end{cases}$ và $D_2:\begin{cases}1\le y\le 2\\ -\sqrt{2-y}\le x\le\sqrt{2-y}\end{cases}$. Khi đó

$$I=\iint\limits_D (x+2y)dxdy=\int_{-2}^{1}dy\int_{-y}^{\sqrt{2-y}}(x+2y)dx+\int_{1}^{2}dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}(x+2y)dx$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(\left.\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\right|_{-y}^{\sqrt{2-y}}\right)dy+\int_{1}^{2}\left(\left.\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\right|_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\left(3y^2-y+2+4y\sqrt{2-y}\right)dy+4\int_{1}^{2}y\sqrt{2-y}dy=\frac{127}{60}+\frac{56}{15}=\frac{117}{20}$$

Qua ví dụ trên ta thấy, việc chọn hướng chiếu phù hợp sẽ làm cho việc tính tích phân đơn giản hơn.

1.4. Đổi thứ tự lấy tích phân

Ở **VD3** ta có hai cách biểu diễn miền D, tùy theo việc chiếu miền D lên trục tọa độ nào. Việc thay đổi cách biểu diễn miền D dẫn đến việc thay đổi thứ tự lấy tích phân lặp được gọi là *đổi thứ tự lấy tích phân*. Cũng trong **VD3**, việc chiếu miền D lên Oy tính tích phân phức tạp hơn. Tuy nhiên, do đặc điểm của hàm dưới dấu tích phân và miền lấy tích phân, đôi khi việc đổi thứ tự là bắt buộc. Ta thực hiện các bước sau:

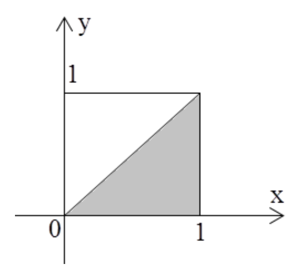
Bước 1: Từ tích phân cho trước, ta biểu diễn và vẽ miền D

Bước 2: Từ hình vẽ, ta biểu diễn lại miền D theo hướng chiếu khác.

Bước 3: Viết lại tích phân lặp.

VD4: Tính tích phân $I = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx$

Ta thấy tích phân $\int_y^1 e^{x^2} dx$ không tính được (qua các hàm sơ cấp).



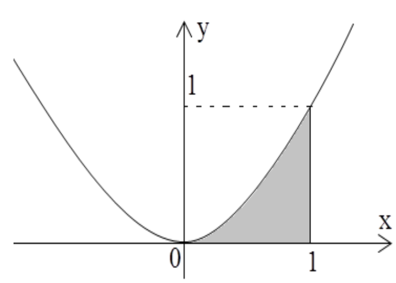
Ta thực hiện đổi thứ tự lấy tích phân.

Ta có $D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases}$

Chiếu lên Ox, ta được $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$. Khi đó

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy = \int_0^1 \left(y e^{x^2} \Big|_0^x \right) dx = \int_0^1 e^{x^2} x dx = \frac{e-1}{2}$$

VD5: Tính tích phân $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sin(\text{x}^3 - 1) dx$

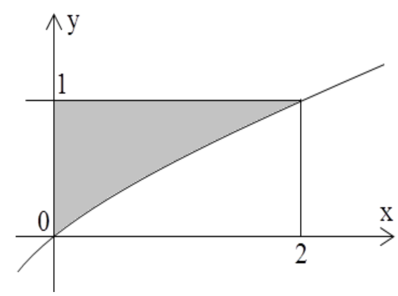


Tương tự câu a), tích phân $\int_{\sqrt{y}}^1 \sin(\text{x}^3 - 1) dx$ không tính được (qua các hàm sơ cấp). Ta thực hiện đổi thứ tự lấy tích phân.

Ta có $D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ \sqrt{y}\le x\le 1\end{cases}$. Chiếu lên trục Ox, ta có $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x^2\end{cases}$. Khi đó

$$I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 \sin\left(x^3-1\right)dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sin\left(x^3-1\right)dy$$
$$=\int_0^1\left[y\sin\left(x^3-1\right)\Big|_0^{x^2}\right]dx=\int_0^1 x^2\sin\left(x^3-1\right)dx=\frac{\cos(1)-1}{3}$$

VD6: Đổi thứ tự lấy tích phân $I=\int_0^1 dy\int_0^{y^2+y} f(x,y)dx$



Từ tích phân đã cho, ta có $D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ 0\le x\le y^2+y\end{cases}$ (chiếu lên Oy)

Từ hình vẽ, chiếu lên Ox, ta có $x=y^2+y\Leftrightarrow x+\frac{1}{4}=(y+\frac{1}{2})^2\Leftrightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{4x+1}}{2}$. Vì $y>0$ nên chọn $y=\frac{-1+\sqrt{4x+1}}{2}\Rightarrow D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ \frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}\le y\le 1\end{cases}$. Khi đó

$$I=\int_0^1 dy\int_0^{y^2+y} f\left(x,y\right)dx=\int_0^2 dx\int_{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}^1 f\left(x,y\right)dy$$

1.5. Đổi biến trong tích phân hai lớp
1.5.1. Đổi biến tổng quát

Xét tích phân Xét tích phân $I=\iint_D f(x,y)dxdy$. Trong nhiều trường hợp do đặc điểm của hàm $f\left(x,y\right)$ và miền D nên tích phân trên theo hai biến x,y không tính được hoặc tính được nhưng rất khó khăn. Khi đó ta đổi sang hai biến mới.

Giả sử phép đổi biến $\begin{cases} x = x(\text{u},\text{v}) \\ y = y(\text{u},\text{v}) \end{cases}$ là một song ánh biến miền D_{uv} trong mặt phẳng $O'uv$ thành miền D_{xy} trong mặt phẳng $\text{Ox}y$, trong đó x, y là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trên D' và định thức Jacobian $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ khắp nơi trên D'. Khi đó, $dS = dxdy = |J|\,\text{dudv}$ và ta có công thức đổi biến là

$$\boxed{I = \iint\limits_{D_{xy}} f(\text{x},\text{y})\,\text{dxdy} = \iint\limits_{D_{uv}} f\big(\text{x}(\text{u},\text{v}),\text{y}(\text{u},\text{v})\big)|J|\,dudv}$$

► **Chú ý:**

$J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$. Thường khi tính tích phân, ta tính J^{-1} rồi suy ra J

► **Nhận xét:**

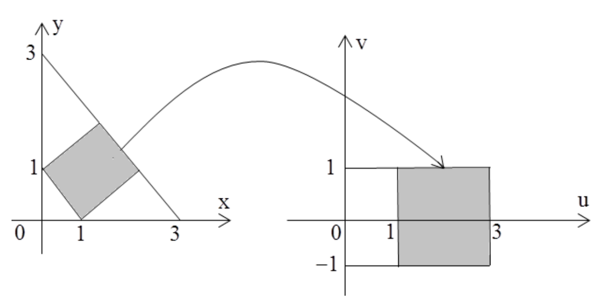
- Phép đổi trục $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$, $J = 1$. Chẳng hạn

$$I = \iint\limits_{(\text{x}-\text{x}_0)^2+(\text{y}-\text{y}_0)^2 \le a^2} f(\text{x},\text{y})dxdy = \iint\limits_{X^2+Y^2\le 1} f(\text{x}_0 + X, y_0 + \text{Y})dXdY$$

- Phép co giãn $\begin{cases} x = aX \\ y = bY \end{cases}$, $J = ab$. Chẳng hạn

$$I = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} f(\text{x},\text{y})dxdy = |ab| \iint\limits_{X^2+Y^2\le 1} f(\text{aX},\text{bY})dXdY$$

VD7: Tính tích phân $I = \iint\limits_D 3(\text{x}+\text{y})^3(\text{x}-\text{y})^2\,dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $x + y = 1, x + y = 3, x - y = -1, x - y = 1$



Nhận thấy D là hình bình hành có cạnh nằm trên hai cặp đường thẳng song song, do đó ta đặt

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow J = -\frac{1}{2}; D': \begin{cases} 1 \le u \le 3 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}$$

Khi đó $I = \iint\limits_D 3(x+y)^3(x-y)^2 dxdy = \frac{3}{2}\iint\limits_{D'} u^3v^2 dudv = \frac{3}{2}\left(\int\limits_1^3 u^3du\right)\left(\int\limits_{-1}^1 v^2dv\right) = 20$

VD8: Tính tích phân $I = \iint\limits_D 4xydxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $xy = 1, xy = 2, x - y = 0, 3x - y = 0$.

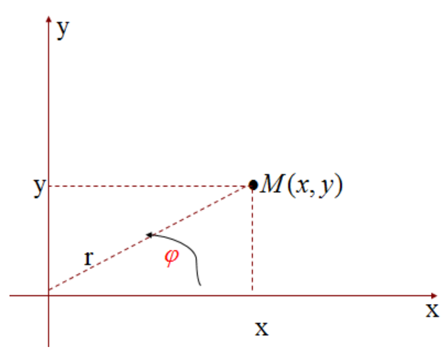
Vì $x, y \neq 0$ nên miền D giới hạn bởi $xy = 1, xy = 2, \frac{x}{y} = \frac{1}{3}, \frac{x}{y} = 1$

Đặt $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix} = -2\frac{x}{y} = -2v \Rightarrow J = -\frac{1}{2v}, D': \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ \frac{1}{3} \le v \le 1 \end{cases}$

Khi đó $I = \iint\limits_D 4xydxdy = 2\iint\limits_{D'} \frac{u}{v} dudv = 2\left(\int\limits_1^2 udu\right)\left(\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dv}{v}\right) = 3\ln 3$

1.5.2. Đổi biến trong tọa độ cực

Giả sử trong hệ tọa độ Descartes, điểm M có tọa độ (x, y) và tọa độ cực của nó là (r, φ).

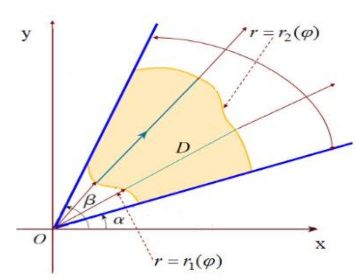


Ta đã biết công thức thể hiện mối liên hệ giữa tọa độ cực và tọa độ Descartes là $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, r \ge 0, 0 \le \varphi \le 2\pi$

Khi đó định thức Jacobian $J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$

Giả sử miền lấy tích phân D được biến đổi thành D' qua phép đổi biến này. Khi đó

$$\boxed{I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi}$$



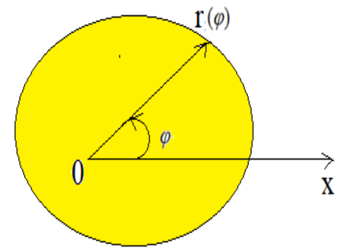
► **Chú ý:**

1. Nếu cực nằm ngoài miền D và $D: \begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \end{cases}$ thì

$$\boxed{I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr}$$

2. Nếu cực nằm trong miền D và mọi bán kính cực chỉ cắt biên của D tại một điểm có bán kính $r(\varphi)$ thì

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr}$$

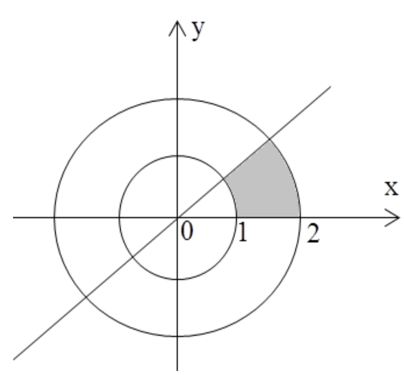


► **Chú ý:**

1) Đổi biến trong tọa độ cực thường được dùng khi biên của D là đường tròn hay một phần của đường tròn.
2) Một số kết quả

Tọa độ Descartes	Tọa độ cực
$x^2+y^2=a^2$	$r=a$
$x^2+y^2=2ax$	$r=2a\cos\varphi$
$x^2+y^2=2ay$	$r=2a\sin\varphi$
$x=a$	$r=\dfrac{a}{\cos\varphi}$
$y=b$	$r=\dfrac{b}{\sin\varphi}$

VD9: Tính tích phân $I=\iint_D (x+y)dxdy$ trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, y=0, y=x>0$

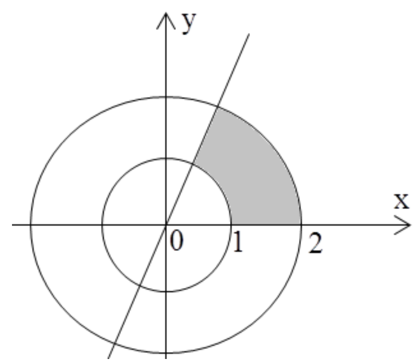


Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$. Từ hình vẽ, ta có $D': \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 1 \le r \le 2 \end{cases}$. Khi đó

$$I=\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_1^2 \left(r\cos\varphi+r\sin\varphi\right)rdr$$

$$=\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)d\varphi\right)\left(\int_1^2 r^2dr\right)=\frac{7}{3}$$

VD10: Tính $I=\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$ trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi: $x^2+y^2=4, y=0, y=x\sqrt{3}(y\ge x)$



Ta có $\tan\beta=\dfrac{y}{x}=\sqrt{3}\Rightarrow\beta=\dfrac{\pi}{3};\alpha=0\Rightarrow D:\begin{cases}0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}\\ 0\le r\le 2\end{cases}$.

Khi đó $I=\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\int_0^2 \sqrt{4-r^2}rdr=\dfrac{8\pi}{9}$

1.6. Ứng dụng của tích phân hai lớp
1.6.1. Tính diện tích hình phẳng

Diện tích của miền phẳng đóng và bị chặn D được tính bởi công thức

$$\boxed{S_D=\iint\limits_D dxdy}$$

VD11: (Sinh viên tự vẽ hình) Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x, y=2-x^2$

Hoành độ giao điểm của hai đường $2-x^2=x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=1\end{array}\right.$. Do đó hình phẳng đã cho xác định bởi $-2\le x\le 1, x\le y\le 2-x^2$ có diện tích là $S=\int_{-2}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}dy=\dfrac{9}{2}$

1.6.2. Diện tích mặt cong

Giả sử S là mặt cong có phương trình $z=f(x,y)$ và hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là miền D. Khi đó, diện tích mặt cong S được tính theo công thức

$$\boxed{S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy}$$

VD12: Tính diện tích phần mặt paraboloit $z = x^2 + y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$

Gọi S là phần mặt cong cần tính diện tích. Hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy là miền $D: x^2 + y^2 \le 1$. Phương trình mặt cong S là $z = x^2 + y^2 \Rightarrow 1 + z'^2_x + z'^2_y = 1 + 4\left(x^2 + y^2\right)$. Vậy diện tích mặt cong S là

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4\left(x^2 + y^2\right)}\, dxdy = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

1.6.3. Tính thể tích vật thể

Thể tích vật thể hình trụ cong Ω có đáy D nằm trong mặt phẳng Oxy, mặt xung quanh song song Oz và giới hạn bởi mặt trên là mặt cong có phương trình $z = f(x, y), (f(x, y) \ge 0, \forall (x, y) \in D)$, chính là

$$\boxed{V_\Omega = \iint_D f(x, y) dxdy}$$

VD13: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt: $x = 0, x = 3, y = 0, y = \ln 6, z = 0, z = 3e^{2x+y}$

Thể tích của vật thể là $V = 3\int_0^3 dx \int_0^{\ln 6} e^{2x+y} dy = 3\int_0^3 e^{2x} dx \int_0^{\ln 6} e^y dy = \frac{15}{2}\left(e^6 - 1\right)$

1.6.4. Tính khối lượng và tọa độ trọng tâm mảnh phẳng

Giả sử có mảnh phẳng vật chất $D \in Oxy$ có khối lượng riêng tại $(x, y) \in D$ là $\rho(x, y)$. Giả thiết rằng D là đóng, bị chặn và $\rho(x, y)$ là hàm khả tích trên D. Khi đó, khối lượng của bản phẳng D chính là

$$\boxed{m_D = \iint_D \rho(x, y) dxdy}$$

Trọng tâm $T(x_T, y_T)$ của mảnh phẳng D được xác định bởi

$$\boxed{x_T = \frac{\iint_D x\rho(x,y)dxdy}{m_D}, y_T = \frac{\iint_D y\rho(x,y)dxdy}{m_D}}$$

Bài 2. TÍCH PHÂN BA LỚP

2.1. Định nghĩa

Cho hàm $f(x,y,z)$ xác định trong miền bị chặn V của không gian $Oxyz$.

Chia tùy ý miền V thành n miền nhỏ không dẫm lên nhau có tên và thể tích gọi chung là $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$.

Trong mỗi miền nhỏ $\Delta v_i, i = \overline{1,n}$ lấy điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i, z_i)$ và lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$$

Gọi d_i là đường kính của miền Δv_i.

Cho $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$. Nếu tồn tại $\lim\limits_{\max d_i \to 0} I_n$ không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ của miền nhỏ Δv_i thì giới hạn đó được gọi là tích phân ba lớp của hàm $f(x,y,z)$ lấy trong miền V và được kí hiệu là

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\,dV$$

Trong đó

$f(x,y,z)$ là hàm dưới dấu tích phân.

V là miền lấy tích phân.

dV là phần tử thể tích.

Ta có

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \lim_{\max d(\Delta v_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i}$$

Nếu hàm $f(x,y,z)$ có tích phân ba lớp trong miền V thì ta nói $f(x,y,z)$ khả tích trong miền V.

♦ **Chú ý**

i. Vì giá trị của tích phân ba lớp không phụ thuộc vào cách chia miền V nên ta có thể chia miền V bởi các mặt phẳng song song với các mặt Oxy, Oyz, Ozx. Khi đó, mỗi miền nhỏ Δv_i là hình hộp chữ nhật (trừ ra một số không đáng kể các miền giao với biên). Ta có $dV = dxdydz$. Vì vậy tích phân ba lớp thường được kí hiệu dưới dạng
$$\iiint_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz}$$

ii. Dựa vào định nghĩa của tích phân ba lớp, khi $f(\mathrm{x,y,z}) = 1$ thì tích phân ba lớp của f trong miền Ω biểu diễn thể tích V của miền Ω.

2.2. Điều kiện tồn tại tích phân ba lớp

Nếu hàm $f(\mathrm{x,y,z})$ liên tục trên miền đóng và bị chặn, có biên là mặt trơn từng khúc thì $\mathrm{f(x,y,z)}$ khả tích trên V.

2.3. Tính chất của tích phân ba lớp

Cho f, g là các hàm khả tích trên V. Khi đó:

1. $\iiint_V kf(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} = k\iiint_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz}, k = const$.
2. $\iiint_V (\mathrm{f(x,y,z)} \pm \mathrm{g(x,y,z)})\,\mathrm{dxdydz} = \iiint_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} \pm \iiint_V g(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz}$
3. Nếu $f(\mathrm{x,y,z}) \geq 0, \forall(\mathrm{x,y,z}) \in \mathrm{V}$ thì $\iiint_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} \geq 0$.
4. Nếu $f(\mathrm{x,y,z}) \geq \mathrm{g(x,y,z)}, \forall(\mathrm{x,y,z}) \in \mathrm{V}$ thì $\iiint_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} \geq \iiint_V g(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz}$.
5. Nếu m, M là hai hằng số thỏa $m \leq f(\mathrm{x,y,z}) \leq M, \forall(\mathrm{x,y,z}) \in \mathrm{V}$ thì $m.V \leq \iiint_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} \leq M.V$
6. $\iiint_V 1.dxdydz = V, \left|\iiint_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz}\right| \leq \iiint_V |f(\mathrm{x,y,z})|\,dxdydz$.
7. Nếu miền V được chia thành hai miền V_1, V_2 không dẫm lên nhau thì $\iiint_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} = \iiint_{V_1} f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} + \iiint_{V_2} f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz}$.
8. (Định lý về giá trị trung bình).

Nếu hàm $f(x,y,z)$ liên tục trong miền V đóng, bị chặn và liên thông thì $\exists(x_0,y_0,z_0)\in V$ sao cho $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)V$.

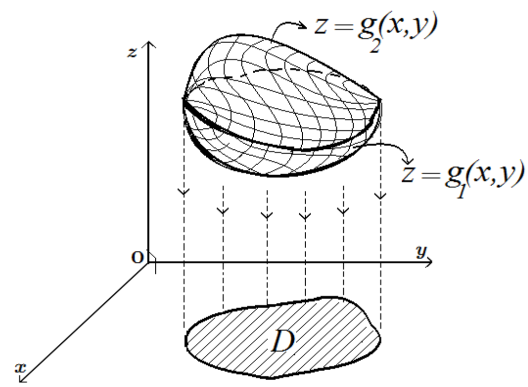
Đại lượng $\frac{1}{V}\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ gọi là giá trị trung bình của hàm $f(x,y,z)$ trên miền V

2.4. Cách tính tích phân ba lớp

2.4.1. Định lý Fubini

Cho miền V giới hạn bởi mặt phía dưới là mặt $z = g_1(x,y)$, phía trên là $z = g_2(x,y)$ có hình chiếu lên mặt phẳng Oxy là D.

Khi đó, tích phân ba lớp có thể chuyển về tích phân lặp: tích phân kép và tích phân đơn.



$$\boxed{I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dxdy}$$

♦ Đặc biệt

1) Nếu $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ thì

$$\boxed{I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz}$$

2) Nếu V là hình hộp chữ nhật $\{(x,y,z) \mid a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \le f\}$ thì

$$\boxed{I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^f f(x,y,z)\,dz}$$

3) Nếu V là hình hộp chữ nhật $\{(x,y,z) \mid a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \le f\}$ và $f(x,y,z) = f_1(x).f_2(y).f_3(z)$ thì

$$\boxed{I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b f_1(x)dx \int\limits_c^d f_2(y)dy \int\limits_e^f f_3(z)\,dz}$$

2.4.2. Các ví dụ

VD1: Tính $I = \iiint\limits_V (xy^2 + z^3)\,dxdydz$, trong đó V là hình hộp chữ nhật $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 2$.

Ta có

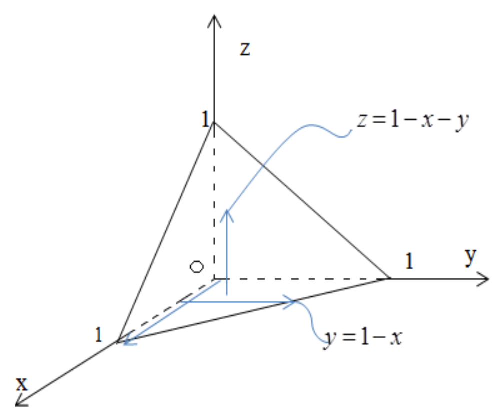
$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (xy^2 + z^3)\,dz = \int_0^1 dx \int_0^1 (xy^2 z + \frac{z^4}{4})\Big|_{z=0}^{z=2} dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (2xy^2 + 4)\,dy = \int_0^1 (\frac{2}{3}xy^3 + 4y)\Big|_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 (\frac{2}{3}x + 4)\,dx = (\frac{x^2}{3} + 4x)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{13}{3}$$

VD2: Tính $I = \iiint\limits_V xyzdxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng $x = 0, y = 0, z = 0$ và $x + y + z = 1$.

Ta thấy V xác định bởi $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y$ nên



$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyzdz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (xy\frac{z^2}{2})\Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2}xy(1-x-y)^2 dy = \int_0^1 \frac{x}{24}(1-x)^4 dx = \frac{1}{720}$$

2.5. Đổi biến trong tích phân ba lớp
2.5.1. Đổi biến tổng quát

Giả sử ta có phép biến đổi $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ là một song ánh từ miền V' của không gian uvw đến miền V của không gian xyz.

Trong đó

- Các hàm $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ khả vi liên tục.
- Định thức Jacobian

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ trong miền } V'.$$

Khi đó, ta có công thức đổi biến như sau

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)]\,|J|\,dudvdw}$$

VD3: Tính thể tích của elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$

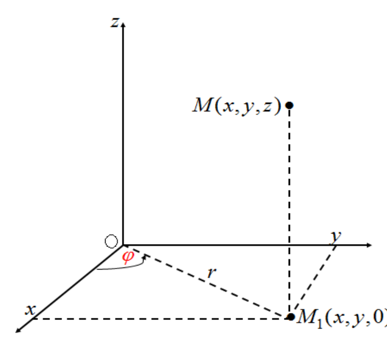
Đặt $x = au, y = bv, z = cw$. Phương trình elipsoid trong không gian uvw có dạng $u^2 + v^2 + w^2 \le 1$ (hình cầu).

Ta có $$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

Vậy

$$V = \iiint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} dxdydz = \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1} abc.dudvdw = \frac{4}{3}\pi abc.$$

2.5.2. Đổi biến trong tọa độ trụ



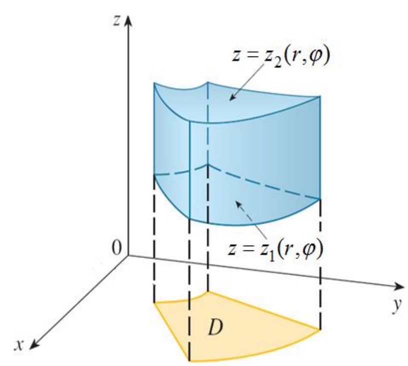
Tọa độ trụ của điểm $M(x,y,z)$ trong không gian là bộ ba (r,φ,z) trong đó

$\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1}), \mathrm{r} = \overline{OM_1}, z = \overline{MM_1}$

Từ hình vẽ, ta có công thức liên hệ giữa tọa độ Descartes và tọa độ trụ của điểm M là $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, (\mathrm{r} > 0, 0 \le \varphi \le 2\pi) \\ z = z \end{cases}$ (là song ánh từ miền V' trong không gian $r\varphi z$ đến miền V trong không gian xyz).

Định thức Jacobian $J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$

Từ công thức đổi biến tổng quát, ta có công thức đổi biến trong tọa độ trụ là



$$\boxed{\iiint\limits_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} = \iiint\limits_{V'} f(\mathrm{r}\cos\varphi, \mathrm{r}\sin\varphi, \mathrm{z})\,\mathrm{rdrd}\varphi\mathrm{dz}}$$

♦ **Đặc biệt**

1. Nếu V có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là miền $D: \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, r_1 \le r \le r_2$, giới hạn dưới và trên bởi các mặt $\mathrm{z_1(r,\varphi), z_2(r,\varphi)}$ (xem hình) thì

$$\boxed{\iiint\limits_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{z_1(\mathrm{r},\varphi)}^{z_2(\mathrm{r},\varphi)} f(\mathrm{r}\cos\varphi, \mathrm{r}\sin\varphi, \mathrm{z})\,\mathrm{rdz}}$$

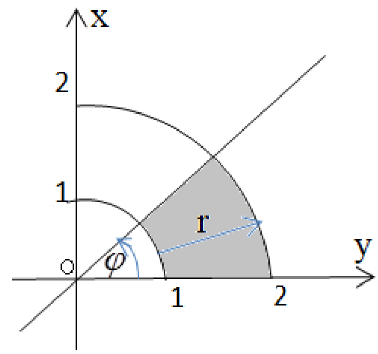
2. Hơn nữa, nếu V có hình chiếu D xuống mặt phẳng Oxy là hình tròn tâm O bán kính R thì V là miền giới hạn bởi $0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, \mathrm{z_1(r,\varphi) \le z \le z_2(r,\varphi)}$ nên

$$\boxed{\iiint\limits_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_{z_1(\mathrm{r},\varphi)}^{z_2(\mathrm{r},\varphi)} f(\mathrm{r}\cos\varphi, \mathrm{r}\sin\varphi, \mathrm{z})\,\mathrm{rdz}}$$

3. Đặc biệt, nếu V là hình trụ $x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le h$ thì

$$\boxed{\iiint\limits_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_0^h f(\mathrm{r}\cos\varphi, \mathrm{r}\sin\varphi)\,\mathrm{rdz}}$$

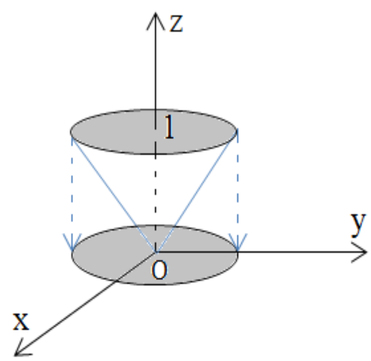
VD4: Tính $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, y = 0, y = x\,(x, y \ge 0), z = 0, z = 2$



V có hình chiếu lên mặt phẳng Oxy như hình vẽ.

Chuyển sang tọa độ trụ ta được $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} r^2.rd\varphi drdz$ trong đó V' xác định bởi $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}, 1 \le r \le 2, 0 \le z \le 2$. Do đó $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_1^2 r^3 dr \int\limits_0^2 dz = \dfrac{15}{8}\pi$

VD5: Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $z = 1, z^2 = x^2 + y^2$

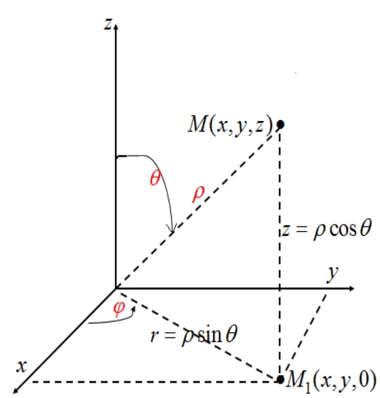


Chuyển sang tọa độ trụ thì V' là miền giới hạn bởi $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1, r \le z \le 1$. Do đó

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_r^1 r.rdz = 2\pi \int\limits_0^1 r^2(1 - r)\,dr = \frac{\pi}{6}$$

2.5.3. Đổi biến trong tọa độ cầu

Tọa độ cầu của một điểm trong không gian $Oxyz$ là bộ ba (ρ, φ, θ), trong đó



$\rho = OM$

$\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$

$\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1})$

Với M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng Oxy.

Từ hình vẽ ta có công thức liên hệ giữa tọa độ Descartes và tọa độ cầu là $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}, (\rho \ge 0, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi)$ là song ánh từ miền V' trong không gian $\rho\varphi\theta$ đến miền V trong không gian xyz.

Ta có định thức Jacobian

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\theta$$

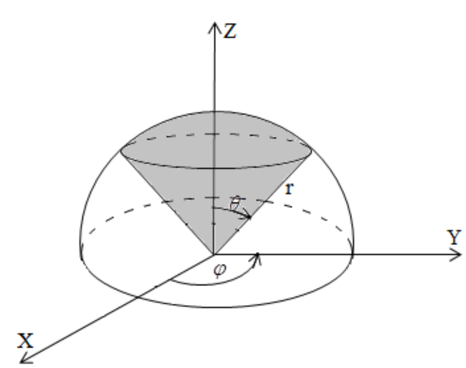
Từ công thức đổi biến tổng quát, ta có công thức đổi biến trong tọa độ cầu là

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta.d\rho d\varphi d\theta}$$

Đặc biệt, nếu V là hình cầu tâm O bán kính R thì V' xác định bởi $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \rho \le R$ thì

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho}$$

VD6: Tính $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ và mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$.



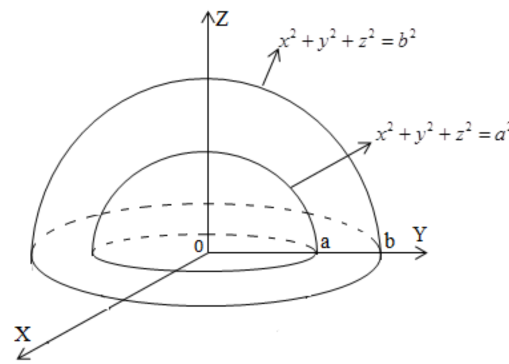
Chuyển sang tọa độ cầu bằng cách đặt $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$ thì miền V' của (ρ,φ,θ) được xác định bởi $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 0 \le \rho \le 1$.

Trong tọa độ cầu $x^2+y^2 = \rho^2\sin^2\theta$. Do đó

$$I=\iiint\limits_{V}(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)dxdydz=\iiint\limits_{V'}(\rho^2\sin^2\theta)\rho^2\sin^2\theta.d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta d\theta\int\limits_0^1\rho^4d\rho=\frac{(8-5\sqrt{2})}{30}\pi\ .$$

VD7: Tính $I=\iiint\limits_{V}(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2)\,\mathrm{dxdydz}$ trong đó V là miền giới hạn bởi hai nửa trên của các mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=b^2(\mathrm{a}<\mathrm{b})$ và mặt phẳng $z=0$.



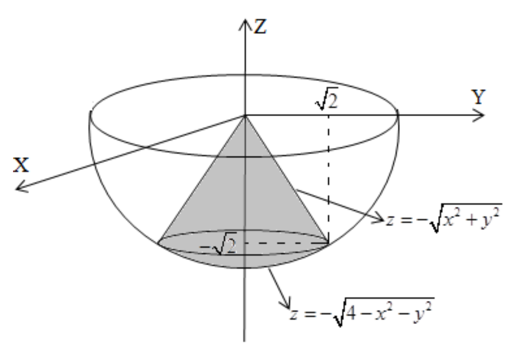
Chuyển sang tọa độ cầu bằng cách đặt $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\sin\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\theta\end{cases}$ thì miền V' của mặt phẳng $\rho\varphi\theta$ được xác định bởi $0\le\varphi\le2\pi, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, a\le\rho\le b$.

Trong tọa độ cầu thì $x^2+y^2+z^2=\rho^2$. Do đó

$$I=\iiint\limits_{V}(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2)\,\mathrm{dxdydz}=\iiint\limits_{V'}\rho^2(\rho^2\sin\theta)d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_a^b r^4dr=\frac{2}{5}(\mathrm{b}^5-\mathrm{a}^5)\pi\ .$$

VD8: Viết tích phân $I=\iiint\limits_{V}\mathrm{f(x,y,z)}dxdydz$ trong hệ tọa độ Descartes, trụ, cầu. Biết V là miền giới hạn bởi hai nửa dưới của mặt cầu và mặt nón $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}, z=-\sqrt{x^2+y^2}$.



Ta tìm phần giao của hai mặt bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases}z=-\sqrt{4-x^2-y^2}\\ z=-\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\Rightarrow z=-\sqrt{2}$.

Hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2+y^2\le2$

Trong hệ tọa độ Descartes

$$I = \iiint_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{-\sqrt{x^2+y^2}} f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dz}$$

Trong hệ tọa độ trụ

$$I = \iiint_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{-r} f(\mathrm{r}\cos\varphi, \mathrm{r}\sin\varphi, \mathrm{z})\,\mathrm{rdz}$$

Trong hệ tọa độ cầu

$$I = \iiint_V f(\mathrm{x,y,z})\,\mathrm{dxdydz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2} d\rho \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin^2\theta d\theta$$

2.6. Ứng dụng của tích phân ba lớp

2.6.1. Ứng dụng hình học – tính thể tích vật thể

Thể tích của miền Ω là $\boxed{V = \iiint_\Omega dxdydz}$

VD9: (Sinh viên tự vẽ hình) Tìm thể tích của vật thể Ω nằm phía trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ và nằm phía trên paraboloid $z = x^2 + y^2$.

Ta tìm phần giao của hai mặt bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow z^2 + z - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -3 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Vì $z \ge 0$ nên chọn $z = 2$

Ta có $V = \iiint_\Omega dxdydz$

Ω có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2 + y^2 \le 2$

Chuyển sang tọa độ trụ bằng cách đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ thì miền Ω' của hệ trục $r\varphi z$ được xác định bởi $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le \sqrt{2}, r^2 \le z \le \sqrt{6 - r^2}$

Do đó $V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} r dz = \frac{2}{3}(6\sqrt{6} - 11)\pi$.

2.6.2. Ứng dụng cơ học

Cho một vật thể không đồng chất chiếm một miền Ω trong không gian $Oxyz$ và có khối lượng riêng tại điểm $M(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ là $\delta = \delta(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$. Khi đó ta có các công thức sau:

a. Khối lượng của vật thể

$$\boxed{m = \iiint_{\Omega} \delta(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\,\mathrm{dxdydz}}$$

b. Moment quán tính của vật thể đối

Với các trục Ox, Oy, Oz

$$\boxed{\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_{\Omega} (\mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)\delta(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\,\mathrm{dxdydz} \\ I_{yy} &= \iiint_{\Omega} (\mathrm{z}^2 + \mathrm{z}^2)\delta(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\,\mathrm{dxdydz} \\ I_{zz} &= \iiint_{\Omega} (\mathrm{z}^2 + y^2)\delta(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\,\mathrm{dxdydz} \end{aligned}}$$

Với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx

$$\boxed{\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_{\Omega} \mathrm{z}^2\delta(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\,\mathrm{dxdydz} \\ I_{yz} &= \iiint_{\Omega} x^2\delta(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\,\mathrm{dxdydz} \\ I_{zx} &= \iiint_{\Omega} y^2\delta(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\,\mathrm{dxdydz} \end{aligned}}$$

Với gốc tọa độ O

$$\boxed{I_O = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\delta(x, y, z)\,dxdydz}$$

c. Trọng tâm C của vật thể có tọa độ

$$\boxed{\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} x\delta(x, y, z)\,dxdydz \\ y_C &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} y\delta(x, y, z)\,dxdydz \\ z_C &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} z\delta(x, y, z)\,dxdydz \end{aligned}}$$

VD10: Tìm tọa độ trọng tâm của nửa trên hình cầu đồng chất $x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z = 0$, biết khối lượng riêng tại mỗi điểm (x, y, z) là $\delta(x, y, z) = 1$.

Khối lượng của vật thể

$$m = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = V(\Omega) = \frac{2}{3}\pi$$

Đổi công thức tính trọng tâm sang tọa độ cầu

$$x_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz = \frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho^3 \cos\varphi \sin^2\theta d\rho = 0$$

$$y_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz = \frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho^3 \sin\varphi \sin^2\theta d\rho = 0$$

$$x_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz = \frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho^3 \cos\theta \sin\theta d\rho = \frac{3}{8}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1
TÍCH PHÂN HAI LỚP

Bài 1. Đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân sau

1. $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x, y)\,dy$

3. $\int_{1}^{2} dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy$

2. $\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx$

4. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$

Bài 2. Tính các tích phân sau

1. $\iint_D (x^2+y)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $y=0, y=x, x=a>0$.

2. $\iint_D (x^2+y)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $y=0, y=x^2, x+y=2$.

3. $\iint_D (x^2+xy)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2, y=\sqrt{x}$.

4. $\iint_D xydxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường thẳng $y=x-4, y^2=2x$.

5. $\iint_D \sin(x+y)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $y=0, y=x, x+y=\frac{\pi}{2}$.

6. $\iint_D r^2 drd\varphi$ với D là miền giới hạn bởi các đường $r=a, r=2a, (a>0)$.

7. $\iint_D r^2 drd\varphi$ với D là miền giới hạn bởi đường $r=a\sin 2\varphi$.

8. $\iint_D r\sin\varphi drd\varphi$ với D là miền giới hạn bởi các đường $r=a, \varphi=\frac{\pi}{2}, \varphi=\pi$.

9. $\iint_D r\sin\varphi drd\varphi$ với D là miền xác định bởi $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le 2a\cos\varphi$.

10. $\iint_D x^2 ydxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $y=0, y=\sqrt{2ax-x^2}$.

Bài 3. Dùng phép đổi biến tính các tích phân sau

1. $\iint_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $x+y=1, x+y=3; x-y=-1, x-y=1$.

2. $I=\iint_D \arcsin\sqrt{x+y}\,dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $x+y=0, x+y=1, y=1, y=-1$.

3. $I=\iint_D \frac{y}{x}dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $xy=1, xy=2; y=x, y=3x\left(x>0, y\geq 0\right)$.

4. $\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$ với D là miền $x^2+y^2\leq R^2$.

5. $\iint_D xy^2dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $x^2+\left(y-1\right)^2=1, x^2+y^2-4y=0$.

6. $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ với D là miền xác định bởi $x^2+y^2\leq ay\left(a>0\right)$.

7. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ với D là miền xác định bởi $x^2+y^2\leq R^2\left(x,y\geq 0\right)$.

8. $\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$ với D giới hạn bởi các đường $x^2+y^2=e^2, x^2+y^2=e^4$.

9. $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$ với D là miền xác định bởi $x^2+y^2\leq 4,\left(x,y\geq 0\right)$.

10. $\iint_D xy^2dxdy$ với D là miền xác định bởi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1,\left(x,y\geq 0\right)$.

11. $\iint_D \left(12-3x^2-4y^2\right)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

12. $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$ với D là miền xác định bởi $x^2+y^2-2x\leq 0, y\geq 0$.

Bài 4. Tính diện tích của miền phẳng D được giới hạn bởi các đường

1. Elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2. $\left(x-1\right)^2+y^2=1, y=x, \left(x-2\right)^2+y^2=4, y=0$.

3. $\left(x^2+y^2\right)^2=2y^3$.

4. $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\left(x^4+y^4\right)$.

5. $xy=1, xy=8, y^2=x, y^2=8x$.

6. $xy=1, xy=4, y^2=x, y^2=4x$.

7. $\left(x-2y+3\right)^2+\left(3x+4y-1\right)^2=100$.

Bài 5. Tính thể tích V của vật thể được giới hạn bởi các mặt sau

1. $x^2+y^2=2, z=0, z=4-x^2-y^2$.

2. $z=4-x^2-y^2, 2z=2+x^2+y^2$.

3. $x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2$.

4. $x+y=z, z=x^2+y^2$.

5. $x^2+y^2+z^2=2z, x^2+y^2=z^2$.

Bài 6. Tính giá trị trung bình

1. Hàm $f\left(x,y\right)=\sin\left(x+y\right)$ trên miền $D:\begin{cases}0\le y\le \pi-x\\ 0\le x\le \pi\end{cases}$.

2. Hàm $f\left(x,y\right)=xy$ trên miền $D:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ x,y\le 0\end{cases}$.

Bài 7. Tìm tọa độ trọng tâm của nửa hình tròn $\begin{cases}x^2+y^2\le R^2\\ x\le 0\end{cases}$. Biết khối lượng riêng tại mỗi điểm bằng khoảng cách từ điểm đó tới gốc tọa độ.

TÍCH PHÂN BA LỚP

Bài 1. Tính các tích phân sau

1. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1-x-y}$ với V là miền giới hạn bởi các mặt $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$.

2. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1-x-y}$ với V là miền xác định bởi $0 \le x \le 1, 2 \le y \le 5, 2 \le z \le 4$.

3. $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$ với V là miền giới hạn bởi các mặt $z=0, y=x^2, y+z=1$.

4. $\iiint\limits_V y\cos(x+z)dxdydz$ với V là miền giới hạn bởi các mặt $y=\sqrt{x}, y=0, z=0, x+z=\frac{\pi}{2}$.

5. $\iiint\limits_V (2x+3y-z)dxdydz$ với V là miền giới hạn bởi $z=0, z=a>0, x=0, y=0, x+y=b>0$.

6. $\iiint\limits_V (x^2+z^2)dxdydz$ với V là miền giới hạn bởi các mặt $x^2+z^2=2y, y=2$.

7. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$ với V là miền xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0$.

8. $\iiint\limits_V dxdydz$ với V là miền xác định bởi $x^2+y^2 \le 1, 0 \le z \le x^2+y^2$.

9. $\iiint\limits_V e^{x\sqrt{y^2+z^2}}dxdydz$ với V là miền giới hạn bởi các mặt $y^2+z^2=4, y^2+z^2=9, x=1, x=2$.

10. $\iiint\limits_V ydxdydz$ với V là miền giới hạn bởi các mặt $y=\sqrt{x^2+z^2}, y=h>0$.

11. $\iiint\limits_V xyzdxdydz$ với V là miền xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \le 1; x, y, z \ge 0$.

12. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ với V là miền $x^2+y^2+z^2 \le z$.

13. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$ với V là miền xác định bởi $1 \le x^2+y^2 \le 4, 0 \le z \le 2$.

14. $\iiint\limits_V |xyz|dxdydz$ với V là miền $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

15. $\iiint\limits_V z^2dxdydz$ với V giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2+z^2=a^2, z=\sqrt{x^2+y^2}$.

16. $\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz$ với V là miền giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2=1, z=0, z=x^2+y^2$.

17. $\iiint\limits_V x\sqrt{y^2+z^2}dxdydz$ với V là miền giới hạn bởi $x=1, y^2+z^2=1; x=2, y^2+z^2=4$.

18. $\iiint\limits_V x^2dxdydz$ với V là miền giới hạn bởi $z=0, x^2+y^2=1, z=2-x^2-y^2$.

19. $I=\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ với Ω giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2=2x, y=0, z=0, z=a\ge 0$.

Bài 2. Dùng tích phân ba lớp, tính thể tích V của vật thể được giới hạn bởi các mặt sau:

1. $x^2+y^2+z^2=a^2, z\ge 0$.

2. $z=x^2+y^2, x^2+y^2=4, z=0$.

3. $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

4. $x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2+z^2=9$

5. $x^2+y^2+z^2=2z, x^2+y^2=z^2, z\ge 0$.

6. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^3z, a>0$.

7. $z=2+y^2, z=4-y^2, x=-1, x=2$.

8. $x^2+y^2=z, z=4$.

9. $x^2+y^2-z^2=0, z=6-x^2-y^2\ (z\ge 0)$.

10. $x^2+y^2=2ay, x^2+y^2=2az, z=0$.

Bài 3. Tính moment quán tính đối với trục Oz của miền Ω giới hạn bởi mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ và mặt nón $x^2+y^2=z^2\left(z\geq 0\right)$.

Bài 4.

1. Tìm trọng tâm của vật thể đồng chất giới hạn bởi các mặt $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$ và $z=4$.

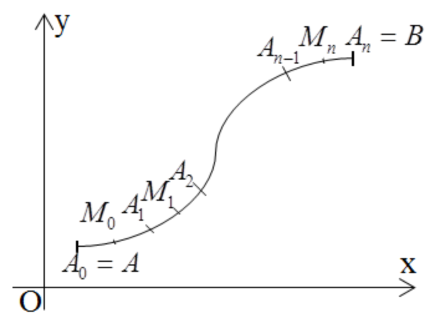
2. Tìm tọa độ trọng tâm của nửa hình cầu $x^2+y^2+z^2\leq a^2, z\geq 0$ nếu khối lượng riêng tại mỗi điểm tỉ lệ với khoảng cách từ điểm đó đến gốc tọa độ.

3. Tính moment quán tính của vật thể đồng chất giới hạn bởi các mặt $x+y+z=\sqrt{2}, z=0, x^2+y^2=1$ đối với trục Oz.

Chương 2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Bài 1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 1

1.1. Định nghĩa



Cho hàm số $f(\text{M})$ xác định trên cung trơn AB. Chia cung AB thành n phần bởi các điểm $A=A_0, A_1, ..., A_n=B$. Trên mỗi cung nhỏ A_k, A_{k+1} lấy một điểm bất kì M_k và lập tổng $I_n=\sum_{k=0}^{n} f(\text{M}_k)\Delta \text{S}_k$ gọi là tổng tích phân của hàm $f(x,y)$ trên cung AB với ΔS_k là độ dài cung A_k, A_{k+1}. Cho $\max \Delta S_k \to 0$. Nếu khi $n\to\infty$ sao cho $\max \Delta S_k \to 0$ mà I_n có giới hạn hữu hạn $I=\lim\limits_{\max \Delta S_k\to 0} I_n$, không phụ thuộc vào cách chia cung AB và cách lấy điểm M_k thì I được gọi là tích phân đường loại 1 của hàm $f(\text{M})$ trên cung AB và được kí hiệu

$$\boxed{S=\int\limits_{AB} f(\text{M})\,\text{dl}}$$

Trong đó

f được gọi là hàm dưới dấu tích phân,

AB được gọi là đường cong lấy tích phân,

dl được gọi là vi phân cung.

♦ Nếu f là hàm hai biến thì $S=\int_{AB} f(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dl}$,

♦ Nếu f là hàm ba biến thì $S=\int_{AB} f(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\,\mathrm{dl}$.

1.2. Các tính chất của tích phân đường loại 1

1. Định lý điều kiện tồn tại tích phân đường loại 1

   Nếu hàm $f(\mathrm{M})$ liên tục dọc theo cung trơn AB thì khả tích trên đó.

2. Tích phân đường loại 1 không phụ thuộc vào hướng của cung lấy tích phân, tức là $\int_{AB} f(\mathrm{M})\,\mathrm{dl}=\int_{BA} f(\mathrm{M})\,\mathrm{dl}$

3. Nếu f,g là các hàm khả tích trên AB và a,b là các hằng số thì $\int_{AB}[\mathrm{a}f(\mathrm{M})+\mathrm{bg}(\mathrm{M})]\mathrm{dl}=a\int_{AB} f(\mathrm{M})\,\mathrm{dl}+b\int_{AB}\mathrm{g}(\mathrm{M})\,\mathrm{dl}$

4. Nếu $f(\mathrm{M})\le \mathrm{g}(\mathrm{M}),\forall M\in AB$ thì $\int_{AB} f(\mathrm{M})\,\mathrm{dl}\le \int_{AB} g(\mathrm{M})\,\mathrm{dl}$

5. Nếu hàm $|f(\mathrm{M})|$ cũng khả tích trên AB thì $\left|\int_{AB} f(\mathrm{M})\,\mathrm{dl}\right|\le \int_{AB}|f(\mathrm{M})|\,dl$

6. Định lý về giá trị trung bình

   Nếu $f(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ liên tục trên cung trơn AB có độ dài L. Khi đó tồn tại điểm $M_0\in AB$ sao cho $\int_{AB} f(\mathrm{M})\,\mathrm{dl}=f(\mathrm{M}_0)\mathrm{L}$. Khi đó đại lượng $\frac{1}{L}\int_{AB} f(\mathrm{M})\,\mathrm{dl}$ gọi là giá trị trung bình của hàm $f(\mathrm{M})$ trên cung AB.

1.3. Cách tính tích phân đường loại 1

Để tính tích phân $I=\int_{AB} f(\mathrm{M})\,\mathrm{dl}$ ta đưa nó về tích phân xác định.

1.3.1. Đối với hàm hai biến

i. Nếu AB được xác định bởi $\begin{cases} x=x(\mathrm{t})\\ y=y(\mathrm{t})\end{cases}, a\le t\le b$ thì

$$\boxed{\int_{AB} f(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dl}=\int_a^b f(\mathrm{x}(\mathrm{t}),\mathrm{y}(\mathrm{t}))\sqrt{x'(\mathrm{t})^2+y'(\mathrm{t})^2}\,dt}$$

ii. Nếu AB xác định bởi $y=y(\mathrm{x}),\mathrm{a}\le \mathrm{x}\le \mathrm{b}$ thì

$$\boxed{\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx}$$

iii. Nếu AB được xác định bởi $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}, \alpha \le \varphi \le \beta$ thì

$$\boxed{\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\,d\varphi}$$

1.3.2. Đối với hàm ba biến

Nếu AB được xác định bởi $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), a \le t \le b \\ z = z(t) \end{cases}$ thì

$$\boxed{\int_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt}$$

1.3.3. Các ví dụ

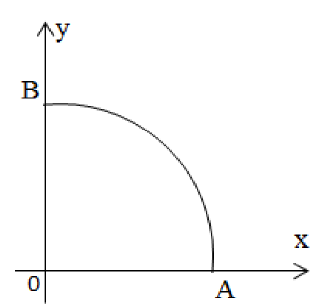
VD1: Tính $I = \int_C z^2 dl$ với $(C): \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t\,; a,b,c \in \mathbb{R}, 0 \le t \le 3 \\ z = bt \end{cases}$

Ta có $x'(t) = -a\sin t, y'(t) = a\cos t, z'(t) = b$ nên

$$I = \int_C z^2 dl = \int_0^3 b^2 t^2 \sqrt{a^2 + b^2}\,dt = 9b^2\sqrt{a^2+b^2}$$

VD2: Tính $I = \int_{AB} (x^2 - y^2)\,dl$, trong đó AB là cung phần tư của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, nằm trong góc phần tư thứ nhất.

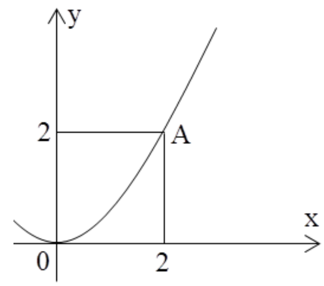
Phương trình tham số của cung AB là $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$



Ta có $x'(t) = -\sin t, y'(t) = \cos t$ nên

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t-\sin^2 t)\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt=0.$$

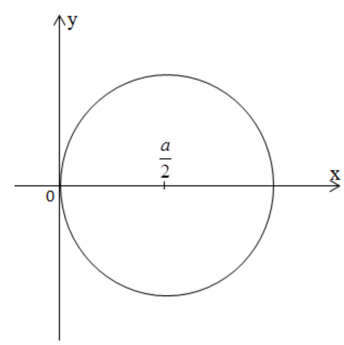
VD3: Tính $I=\int_{OA} x\,dl$, trong đó OA là cung parabol $y=\dfrac{x^2}{2}$ từ $O(0,0)$ đến $A(2,2)$.



Ta có $y=\dfrac{x^2}{2}$ nên $y'=x$. Do đó

$$I=\int_0^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1).$$

VD4: Tính $I=\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dl$ với $(C): x^2+y^2=ax$.



Đưa (C) về tọa độ cực $r=a\cos\varphi, -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, \sqrt{r^2+r'^2}=a$

Vậy $I=\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dl=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ar\,d\varphi=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=2a^2$

1.4. Một số ứng dụng của tích phân đường loại 1

1.4.1. Khối lượng và độ dài cung

Xét dây cung C không đồng chất có khối lượng riêng tại điểm M là $\delta(\mathrm{M})$. Khi đó khối lượng của dây cho bởi công thức

$$\boxed{m=\int_C \delta(\mathrm{M})\,\mathrm{dl}}$$

♦ Đặc biệt, khi $\delta(\mathrm{M})=1$ thì $m=L$ là độ dài của cung C.

1.4.2. Moment hình học và tọa độ trọng tâm của đường cong trong mặt phẳng

Cho cung C thuộc mặt phẳng Oxy có khối lượng riêng $\delta(\mathrm{x,y})$.

Moment của C đối với các trục tọa độ Ox, Oy được tính bởi

$$\boxed{M_x = \int_C y\delta(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dl}, M_y = \int_C x\delta(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dl}}$$

Từ đây, với m là khối lượng của cung C, trọng tâm của C sẽ được xác định bởi

$$\boxed{x_C = \frac{M_x}{m}, y_C = \frac{M_y}{m}}$$

♦ Đặc biệt, với L là độ dài cung C, nếu cung C đồng chất ($\delta(\mathrm{x},\mathrm{y}) = const$) thì

$$\boxed{x_C = \frac{1}{L}\int_C xdl, y_C = \frac{1}{L}\int_C ydl}$$

1.4.3. Moment hình học và tọa độ trọng tâm của đường cong trong không gian

Cho cung C trong không gian với khối lượng riêng $\delta(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$. Khi ấy moment của cung C đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oxz, Oyz được tính bởi các công thức sau

$$\boxed{\begin{aligned} M_{xy} &= \int_C z\delta(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\,\mathrm{dl} \\ M_{xz} &= \int_C y\delta(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\,\mathrm{dl} \\ M_{yz} &= \int_C x\delta(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\,\mathrm{dl} \end{aligned}}$$

Với m là khối lượng của cung C, trọng tâm của cung C được tính bởi công thức

$$\boxed{x_C = \frac{M_{yz}}{m}, y_C = \frac{M_{xz}}{m}, z_C = \frac{M_{xy}}{m}}$$

♦ Đặc biệt, với L là độ dài cung C, nếu cung C đồng chất ($\delta(\mathrm{x},\mathrm{y}) = const$) thì

$$\boxed{x_C = \frac{1}{L}\int_C xdl, y_C = \frac{1}{L}\int_C ydl, z_C = \frac{1}{L}\int_C zdl}$$

1.4.4. Các ví dụ

VD5: Tính chu vi đường tròn bán kính R.

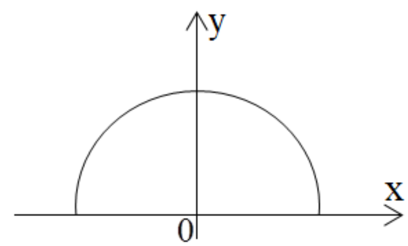
Không mất tính tổng quát, giả sử đường tròn có phương trình $(\mathrm{C}): x^2 + y^2 = R^2$

Phương trình tham số của đường tròn là $(C):\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$

Gọi L là chu vi đường tròn, ta có

$$L = \int_C dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}dt = \int_0^{2\pi} Rdt = 2\pi R$$

VD6: Tìm trọng tâm của nửa trên vòng tròn (C) có tâm O bán kính R.



Xét nửa vòng tròn như hình vẽ. Ta có phương trình tham số là $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, 0 \le \mathrm{t} \le \pi$

Độ dài của nửa vòng tròn là $L = \pi R$

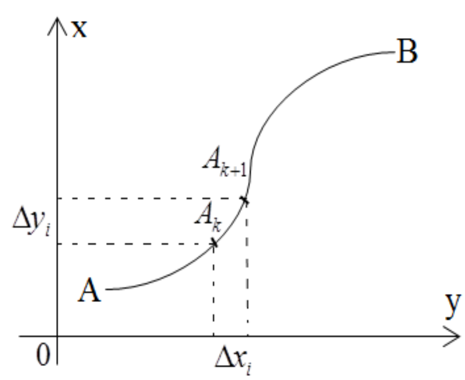
Trọng tâm của nửa vòng tròn là

$$x_C = \frac{1}{L}\int_C xdl = \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} R\cos t.Rdt = \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi}\cos tdt = 0$$

$$y_C = \frac{1}{L}\int_C ydl = \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} R\sin t.Rdt = \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi}\sin tdt = \frac{2R}{\pi}$$

Bài 2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2

2.1. Định nghĩa



Cho hai hàm $P(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{Q}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ xác định trên cung AB. Chia cung AB thành n phần bởi n điểm chia $A_0 = A, A_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_n = B$, trên mỗi cung A_kA_{k+1} lấy tùy ý điểm $M_i(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)$ và lập tổng $I_n = \sum_{k=0}^{n-1}[\mathrm{P}(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)\Delta\mathrm{x}_i + \mathrm{Q}(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)\Delta\mathrm{y}_i]$ với $\Delta x_i, \Delta y_i$ lần lượt là hình chiếu của cung A_k, A_{k+1} lên Ox, Oy.

Đặt $d = \max\left\{\Delta x_i, \Delta y_i \,/\, i = \overline{1,n}\right\}$.

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $d \to 0$ mà $I = \lim_{d \to 0} I_n$ hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia cung AB và cách lấy điểm $M_i(x_i, y_i)$ thì giá trị I được gọi là tích phân đường loại 2 của hai hàm $P(x, y), Q(x, y)$ trên cung AB. Kí hiệu

$$\boxed{I = \int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy}$$

♦ Chú ý

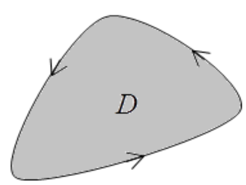
i. Nếu $AB \subset \mathbb{R}^3$ thì

$$\boxed{I = \int_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz}$$

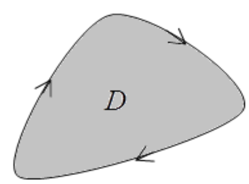
ii. Nếu cung AB là đường cong kín L, ta dùng kí hiệu

$$\boxed{I = \oint_{L} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy}$$

Khi đó, tích phân dọc theo L được quy ước: chiều dương là chiều đi dọc theo L sao cho miền D giới nội nằm bên tay trái, chiều âm là chiều đi dọc theo L sao cho miền D giới nội nằm bên tay phải.



Chiều dương



Chiều âm

2.2. Các tính chất của tích phân đường loại 2

1. Điều kiện tồn tại

   Nếu cung AB trơn và các hàm $P(x, y), Q(x, y)$ liên tục trên cung AB thì tồn tại tích phân đường loại 2 $\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$.

2. Khi đổi hướng lấy tích phân thì tích phân đổi dấu

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = -\int_{BA} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

3. Nếu cung AB được chia thành hai cung AC và CB không dẫm lên nhau thì

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{AC} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy + \int_{CB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

2.3. Cách tính tích phân đường loại 2

2.3.1. Đưa tích phân đường loại 2 về tích phân xác định

a) Nếu $(C):\begin{cases} x = x(\mathrm{t}) \\ y = y(\mathrm{t}) \end{cases}, a \le t \le b$ thì

$$\boxed{\int_C P(\mathrm{x,y})\,\mathrm{dx} + \mathrm{Q(x,y)\,dy} = \int_a^b [\mathrm{P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt}}$$

b) Nếu $(C):\begin{cases} x = x(\mathrm{t}) \\ y = y(\mathrm{t}), a \le t \le b \\ z = z(\mathrm{t}) \end{cases}$ thì

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_C \mathrm{P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz} \\ &= \int_a^b [\mathrm{P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt}\end{aligned}}$$

c) Nếu $(C):\begin{cases} y = y(\mathrm{x}) \\ a \le x \le b \end{cases}$ thì

$$\boxed{\int_C P(\mathrm{x,y})\,\mathrm{dx} + \mathrm{Q(x,y)\,dy} = \int_a^b [\mathrm{P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)]dx}}$$

d) Nếu $(C):\begin{cases} x = x(\mathrm{y}) \\ a \le y \le b \end{cases}$ thì

$$\boxed{\int_C P(\mathrm{x,y})\,\mathrm{dx} + \mathrm{Q(x,y)\,dy} = \int_a^b [\mathrm{P(x(y),y)x'(y)+Q(x(y),y)]dy}}$$

VD1: Tính $I = \int_C xydx + ydy - yzdz$ trong đó $(C):\begin{cases} x = t \\ y = t^2, 0 \le t \le 1 \\ z = t \end{cases}$

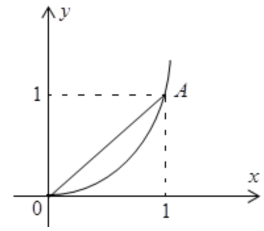
Ta có $x'(\mathrm{t}) = 1, \mathrm{y'(t)} = 2\mathrm{t}, \mathrm{z'(t)} = 1$ nên

$$I = \int_C xydx + ydy - yzdz = \int_0^1 (\mathrm{t}^3 + \mathrm{t}^2.2\mathrm{t} - \mathrm{t}^3)\,\mathrm{dt} = 2\int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{2}$$

VD2: Tính tích phân $I = \int_{OA} x^2 dx + xydy$ với $O(0,0), \mathrm{A}(1,1)$ theo hai đường

a. Đoạn thẳng OA
b. Theo parabol $y = x^2$

a. Phương trình đường thẳng OA là $y = x$. Đoạn thẳng OA được xác định bởi $\begin{cases} y = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$



Ta có $y'(x) = 1$ nên

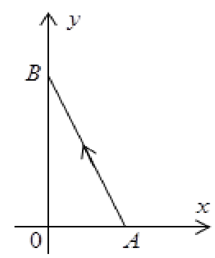
$$I = \int\limits_{OA} x^2dx + xydy = \int\limits_0^1 (x^2 + x.x.1)\,dx = \int\limits_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}$$

b. Đoạn thẳng OA được xác định bởi $\begin{cases} y = x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Ta có $y'(x) = 2x$ nên $I = \int\limits_{OA} x^2dx + xydy = \int\limits_0^1 (x^2 + x.x^2.2x)\,dx = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x^4)\,dx = \dfrac{11}{15}$

VD3: Tính $I = \int\limits_L (xy-1)\,dx + x^2\,ydy$ với L là đoạn thẳng AB, với $A(1,0), B(0,2)$

Phương trình đường thẳng $AB: y = 2 - 2x$. Đoạn AB được xác định bởi $\begin{cases} y = 2 - 2x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$



Ta có $y'(x) = -2$ nên

$$I = \int\limits_L (xy-1)\,dx + x^2\,ydy = -\int\limits_0^1 \left[x(2-2x) - 1 + x^2(2-2x)(-2)\right]dx$$

$$= -\int\limits_0^1 (4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)\,dx = 1$$

VD4: Tính $I = \int\limits_C y^2dx - x^2dy$ với C là vòng tròn tâm O bán kính 1

C có phương trình tham số là $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$. Vậy

$$I = \int\limits_C y^2dx - x^2dy = \int\limits_0^{2\pi} \left[\sin^2 t(-\sin t) - \cos^2 t.\cos t\right]dt = -\int\limits_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^3 t)\,dt = 0$$

2.3.2. Đưa tích phân đường loại hai về tích phân hai lớp

Định lý Green: Cho D là miền đóng và bị chặn trong mặt phẳng Oxy, có biên là đường cong C kín, trơn từng khúc. Các hàm $P(x,y), Q(x,y)$ có đạo hàm riêng cấp một liên tục trong miền mở chứa D. Khi đó, ta có công thức Green:

$$\boxed{\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy}$$

Trong đó tích phân đường ở vế trái lấy theo chiều dương của C.

VD5: Tính $I = \oint_L 2y^3dx + 3xy^2dy$ với $L: x^2 + y^2 = 4$

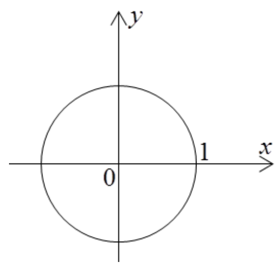
Ta thấy L là đường tròn tâm O bán kính 2. Miền giới hạn bởi L là $D: x^2 + y^2 \le 4$. Các đạo hàm riêng cấp một $\frac{\partial P}{\partial y} = 6y^2, \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2$. Do đó, áp dụng công thức Green ta có

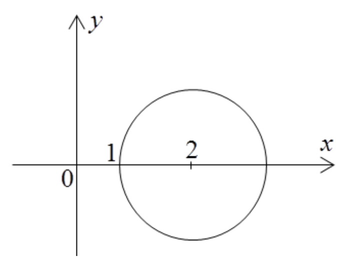
$$I = \oint_L 2y^3dx + 3xy^2dy = \iint_D (3y^2 - 6y^2)\,dxdy = -3\iint_D y^2dxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực ta được $I = -3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 \sin^2\varphi dr = -12\pi$

VD6: Tính $I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

a. C là đường tròn tâm O bán kính $R = 1$
b. C là đường tròn tâm $J(2,0)$ bán kính $R = 1$





a. Trong trường hợp này các hàm $P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ không liên tục tại $O(0,0)$ nên không thể sử dụng công thức Green. Ta tính trực tiếp bằng cách đưa về tích phân xác định.

Phương trình tham số của $C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$. Khi đó

$$I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} [\cos t.\cos t - \sin t.(-\sin t)]dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

b. Trường hợp này C không bao gốc O nên các hàm P,Q cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ liên tục trong hình tròn $\mathrm{D}:(\mathrm{x}-2)^2+y^2\le 1$. Vì vậy có thể sử dụng công thức Green.

Ta có $I=\oint\limits_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$

2.3.3. Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

Định lý bốn mệnh đề tương đương: Cho hai hàm $P(\mathrm{x},\mathrm{y}),\mathrm{Q}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền mở đơn liên D, các mệnh đề sau tương đương:

1) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\forall(\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathrm{D}$.
2) $\oint\limits_L P(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dx}+\mathrm{Q}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dy}=0$ với L là đường cong kín trơn từng khúc nằm trong D.
3) $\int\limits_{AB} P(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dx}+\mathrm{Q}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dy}$ không phụ thuộc vào đường (trơn từng khúc trong D) nối A và B mà chỉ phụ thuộc vào vị trí hai điểm A,B.
4) Tồn tại hàm $U(\mathrm{x},\mathrm{y})$ sao cho $dU=Pdx+Qdy$.

♦ Hàm $U(\mathrm{x},\mathrm{y})$ có thể được tìm theo hai cách sau

$$\boxed{U(\mathrm{x},\mathrm{y})=\int P(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dx}+k(\mathrm{y})\ \text{ thỏa }\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dx}+\mathrm{k}(\mathrm{y})\right]=Q(\mathrm{x},\mathrm{y})}$$

hoặc

$$\boxed{U(\mathrm{x},\mathrm{y})=\int Q(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dy}+h(\mathrm{x})\ \text{ thỏa }\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\int Q(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dy}+\mathrm{h}(\mathrm{x})\right]=P(\mathrm{x},\mathrm{y})}$$

► **Chú ý:** Bài toán tích phân đường loại hai sẽ phụ thuộc vào:

1) Đường lấy tích phân L kín hay hở,
2) $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ hay $\frac{\partial Q}{\partial x}\ne\frac{\partial P}{\partial y}$,

3) Trường hợp tích phân $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ không phụ thuộc đường đi ta dùng kí hiệu $\boxed{\int\limits_{A}^{B} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy}$,

4) Nếu P,Q thỏa điều kiện định lý và ta tìm được hàm U thỏa $dU = Pdx + Qdy$ thì $\boxed{\int\limits_{A}^{B} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = U(B) - U(A)}$.

Khi tính tích phân đường loại hai, ta chú ý những vấn đề trên để chọn cách tính phù hợp nhất.

VD7: Tính $I = \int\limits_{OA} y^3dx + 3xy^2dy$ với $O(0,0), A(2,4)$

Ta có $P(x,y) = y^3, Q(x,y) = 3xy^2$ nên $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow I = \int\limits_{O}^{B} y^3dx + 3xy^2dy$

Ta tìm hàm $U(x,y)$:

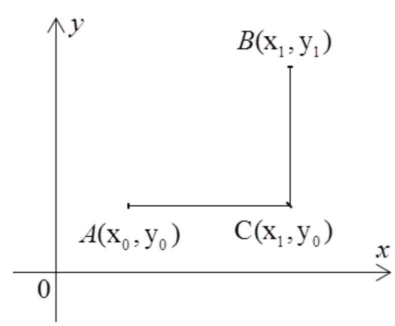
$U(x,y) = \int Pdx + k(y) = \int y^3dx + k(y) = xy^3 + k(y)$ thỏa

$\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow 3xy^2 + k'(y) = 3xy^2 \Rightarrow k'(y) = 0$ hay $k(y) = C$ (hằng số).

Vậy $U(x,y) = xy^3 + C$ nên $I = U(B) - U(O) = U(2,4) - U(0,0) = 2.4^3 + C - C = 128$

► **Chú ý:** Ta vẫn có thể tính được tích phân bằng cách tính theo các đường gấp khúc song song với các trục tọa độ mà không cần tìm hàm $U(x,y)$.

$$\boxed{\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} = \int\limits_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)\,dy}$$



Tích phân ở **VD7** có thể được tính như sau

$$I = \int\limits_{(0,0)}^{(2,4)} y^3dx + 3xy^2dy = \int\limits_{0}^{2} 0dx + \int\limits_{0}^{4} 3.2.y^2dy = 6\int\limits_{0}^{4} y^2dy = 128$$

► Trong không gian $Oxyz$, định lý bốn mệnh đề tương đương có dạng:

Cho các hàm $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền mở đơn liên D. Khi ấy các mệnh đề sau đây tương đương:

1) $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}; \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}; \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \forall (x,y,z) \in D$ hay $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{O}$.

2) $\oint\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = 0$ với L là đường cong kín trơn từng khúc nằm trong D.

3) $\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ không phụ thuộc vào đường cong trơn từng khúc trong D nối A và B mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm A, B.

4) Tồn tại hàm $U(x,y,z)$ thỏa $dU = Pdx + Qdy + Rdz$.

VD8: Tính $I = \int\limits_{AB} yzdx + xzdy + xydz$ với $A(0,1,2), B(2,4,5)$

Các hàm $P(x,y,z) = yz, Q(x,y,z) = xz, R(x,y,z) = xy$ thỏa mãn điều kiện định lý. Hơn nữa, hàm $U(x,y,z) = xyz$ thỏa $dU = yzdx + xzdy + xydz$ nên $I = U(B) - U(A) = U(2,4,5) - U(0,1,2) = 2.4.5 = 40$

VD9: Tính $I = \int\limits_{OA} (e^x\cos y + yz)\,dx + (xz - e^x \sin y)\,dy + (xy + z)\,dz$ với $O(0,0,0), A(-1,\frac{\pi}{2},2)$

Ta có $P = e^x\cos y + yz, Q = xz - e^x \sin y, R = xy + z$. Các đạo hàm riêng cấp 1 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = z - e^x \sin y = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial y} = x = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial z} = y = \dfrac{\partial R}{\partial x}$ thỏa định lý. Vậy

$$I = \int\limits_{(0,0,0)}^{(-1,\frac{\pi}{2},2)} \left(e^x \cos y + yz\right)dx + \left(xz - e^x \sin y\right)dy + \left(xy + z\right)dz$$

Hơn nữa, hàm $U(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + \dfrac{z^2}{2}$ thỏa $dU = Pdx + Qdy + Rdz$ nên

$$I = U(B) - U(A) = U\left(-1,\frac{\pi}{2},2\right) - U\left(0,0,0\right) = 1 - \pi$$

2.4. Ứng dụng của tích phân đường loại hai
2.4.1. Tính diện tích

Diện tích của hình phẳng đơn liên D được tính theo công thức

$$\boxed{S(\mathrm{D})=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\oint_C xdy=-\oint_C ydx}$$

Với C là biên của D lấy theo chiều dương.

2.4.2. Tính công

Công của trường lực $\vec{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})=\mathrm{P}\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ sinh ra dọc theo đường cong C là W được tính theo công thức

$$\boxed{\mathrm{W}=\int_C Pdx+Qdy+Rdz}$$

VD10: Tính diện tích hình elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$

Phương trình tham số của biên hình elip là $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases},0\le t\le 2\pi$ nên diện tích hình elip $S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos t.b\sin t-b\sin t(-\mathrm{asint})\right]dt=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt=\pi ab$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2
TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 1

Bài 1. Tính các tích phân sau

1. $\mathrm{I}=\int_{\mathrm{OB}}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\mathrm{dl}$ với OB là đoạn thẳng nối từ $\mathrm{O}(0,0)$ đến $\mathrm{B}(4,3)$.

2. $\mathrm{I}=\int_{\mathrm{L}}\mathrm{xydl}$ với L là biên của hình chữ nhật $\mathrm{ABCD},\mathrm{A}(0,0),\mathrm{B}(4,0),\mathrm{C}(4,2),\mathrm{D}(0,2)$.

3. $\mathrm{I}=\int_{\mathrm{L}}\left(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\right)\mathrm{dl}$ với L là biên của hình tam giác $\mathrm{OAB},\mathrm{O}(0,0),\mathrm{A}(1,1),\mathrm{B}(-1,1)$.

4. $\mathrm{I}=\int_{\mathrm{L}}\left(\mathrm{x}^{\frac{4}{3}}+\mathrm{y}^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{dl}$ với L là đường axtrôit $\sqrt[3]{\mathrm{x}^2}+\sqrt[3]{\mathrm{y}^2}=\sqrt[3]{\mathrm{a}^2}\ (\mathrm{a}>0)$.

5. $I=\int\limits_L xydl$ với L là cung đường elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

6. $I=\int\limits_L |y|dl$ với L là đường cacđiôit $r=a(1+\cos\varphi),(a>0)$.

7. $I=\int\limits_L ye^{-x}dl$ với L là đường $x=\ln(1+t^2), y=2\arctan t-t+3, 0\le t\le 1$.

8. $I=\int\limits_L |y|dl$ với L là đường xoắn ốc $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t, 0\le t\le 2\pi \\ z=bt \end{cases}$.

9. $I=\int\limits_L (x+z)dl$ trong đó L là đường cong $\begin{cases} x=t \\ y=\frac{3t^2}{\sqrt{2}}, 0\le t\le 1 \\ z=t^3 \end{cases}$.

Bài 2.

1. Tìm khối lượng của dây $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ từ $x=0$ đến $x=a$ biết khối lượng riêng $\rho(x,y)=\frac{1}{y}$.

2. Tìm trọng tâm của đường đinh ốc đồng chất có khối lượng riêng $\rho(x,y,z)=1$, phương trình đường đinh ốc là $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t, 0\le t\le 2\pi \\ z=kt \end{cases}$.

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2

Bài 1. Tính các tích phân sau

1. $I=\iint\limits_L xydx$ với L là cung parabol $y^2=x$ từ $A(1,-1)$ đến $B(1,1)$.

2. $I=\int\limits_L (xy-1)dx+x^2ydy$ với L là cung nối $A(1,0), B(0,2)$

a) Theo đường thẳng AB.
b) Theo cung parabol $y^2 = 4(1-x)$.

3. $I = \oint_L 2xdx - (x+2y)dy$ trong đó L là chu vi của tam giác ABC theo chiều ngược chiều kim đồng hồ với $A(-1,0), B(0,2), C(2,0)$.

4. $I = \oint_L \dfrac{x^2dy - y^2dx}{x\sqrt[3]{x^2} + y\sqrt[3]{y^2}}$ với L là cung axtrôit có phương trình $x = R\cos^3 t, y = R\sin^3 t$.

5. $\int_C x^2dx + y^2dy$ với C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$, chiều từ $A(-2,0)$ đến $B(2,0)$
.

6. $I = \int_L \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ với L là cung nối từ $A(-a,0)$ đến $B(a,0),(a>0)$ theo đường không đi qua gốc O.

7. $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(3,1)} \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$

8. $I = \oint_L xy^2dy - x^2ydx$ trong đó $L: x^2 + y^2 = R^2$.

9. $I = \oint_L \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ trong đó $L: x^2 + y^2 = a^2$.

10. $\int_L \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$ với L là đường nối theo chiều từ $A(1,0) \to B(0,1) \to C(-1,0)$.

11. $I = \oint_C (xy + x + 1)dx + (xy + x - y)dy, C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ lấy theo chiều dương.

12. $\oint_L (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$ với L là biên của miền D giới hạn bởi hai đường $y = x$ và $y = x^2$.

13. $I=\int\limits_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$ trong đó C là đường tròn $x^2+y^2=R^2$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

14. $I=\int\limits_C xydx+ydy-yzdz$ trong đó C là đường cong cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x=t \\ y=t^2, 0\le t\le 1. \\ z=t \end{cases}$

15. $I=\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy+\left(x^2-z^2\right)dy-2yz$

16. $\int\limits_{(1,1,1)}^{2,3,-4} xdx+y^2dy-z^3dz$

17. $I=\int\limits_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x\ln y-yz)dx+\left(\frac{x^2}{y}-xz\right)dy-xydz$

Bài 2. Hãy chứng tỏ biểu thức trong dấu tích phân đường sau là biểu thức vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó. Tìm hàm $u(x,y)$ đó và tính tích phân đã cho.

1. $I=\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy+ydx$

2. $I=\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)dx+(x+y+1)dy$

Bài 3. Cho $P(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}, Q(x,y)=-\frac{x-y}{x^2+y^2}$. Biểu thức $Pdx+Qdy$ có là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ hay không.

Tính $I_1=\int\limits_{ACB} Pdx+Qdy, I_2=\int\limits_{ADB} Pdx+Qdy$ với $A(1,0), B(-1,0), C(0,1), D(0,-1)$.

Bài 4. Xác định m để $\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{\left(x^2+y^2\right)^m}$ là vi phân toàn phần của một hàm $u(x,y)$ nào đó. Tìm $u(x,y)$.

Bài 5. Tính các tích phân sau

1. $I=\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$ với L là chu vi tam giác OAB lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ với $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$.

2. $I=\oint\limits_L \left(1-x^2\right)ydx+x\left(1+y^2\right)dy$ với $L: x^2+y^2=R^2$.

3. $I=\int\limits_C x^2ydx+x^2dy$ trong đó C là chu tuyến dương của miền giới hạn bởi các đường $y^2=x, x^2=y$.

4. $I=\int\limits_C (6y+x)dx+(y+2x)dy$ trong đó C là đường tròn $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ lấy theo chiều dương.

5. $I=\int\limits_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$ trong đó C là đường elip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Bài 6. Dùng tích phân đường để tính diện tích hình phẳng D được giới hạn bởi đường axtrôit $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, 0\le t\le 2\pi$.

Chương 3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Bài 1. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1.1. Bài toán dẫn đến phương trình vi phân

Phương trình vi phân phát sinh từ nhiều bài toán trong các ngành khoa học khác nhau có mô hình toán học chung là tìm một hàm số từ một quan hệ chứa các đạo hàm của nó.

Ví dụ, nếu số lượng (người, vật, vi khuẩn,…) phát triển với tốc độ $y' = \frac{dy}{dt}$ (t là thời gian) bằng với số lượng $y(\text{t})$ hiện tại thì mô hình số lượng $y' = y$ chính là một phương trình vi phân.

1.2. Các định nghĩa và khái niệm cơ bản

Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập, hàm phải tìm và các đạo hàm của nó: $F(\text{x}, \text{y}, \text{y}', \text{y}'', ...) = 0$.

Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong phương trình đó.

Nghiệm của phương trình vi phân là hàm số mà khi thay vào thỏa phương trình. Đồ thị của nghiệm được gọi là đường cong tích phân.

Nếu hàm phải tìm là hàm một biến thì ta có phương trình vi phân thường. Nếu hàm phải tìm là hàm nhiều biến thì ta có phương trình đạo hàm riêng.

1.3. Một số ví dụ

1. $y\sin x + y'\cos x = 0$ là phương trình vi phân thường cấp một.
2. $y'' - 2y = e^x - x$ là phương trình vi phân thường cấp hai.
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ là phương trình đạo hàm riêng cấp hai.

► Chú ý kí hiệu $\text{y}' = \frac{\text{dy}}{\text{dx}}, \text{y}'' = \frac{\text{d}^2\text{y}}{\text{dx}^2}, ...$

Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

2.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp một là phương trình vi phân có dạng $F(\text{x}, \text{y}, \text{y}') = 0$ hay $y' = f(\text{x}, \text{y})$. Trong đó x là biến độc lập, y là hàm phải tìm.

VD1: $y' = \cos(\text{x} - \text{y} - 1)$

2.2. Bài toán Cauchy

Bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân $\begin{cases} y' = f(\text{x}, \text{y}) \\ y(\text{x}_0) = \text{y}_o \end{cases}$ được gọi là bài toán Cauchy.

► **Chú ý:** Bài toán Cauchy chính là bài toán tìm đường cong tích phân của phương trình vi phân $y' = f(x,y)$ đi qua điểm (x_o, y_o).

VD2: Xét bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Từ $y' = 2x$, ta có $y = x^2 + C$. Với $x_o = 0, y_0 = 0$ ta được $0 = 0^2 + C$ hay $C = 0$

Vậy nghiệm của bài toán là $y = x^2$

2.3. Định lý Peano – Cauchy – Picard về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy

Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trong miền mở $D \subset \mathbb{R}^2$ thì với mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$, bài toán Cauchy có nghiệm xác định trong một lân cận của x_0. Ngoài ra, nếu $f'(x,y)$ liên tục trong miền D thì nghiệm đó là duy nhất.

2.4. Nghiệm của phương trình vi phân cấp một

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là hàm số $\varphi = \varphi(x,C)$ thỏa phương trình vi phân với mọi C. Nếu nghiệm tổng quát viết dưới dạng hàm ẩn $\varphi(x,y,C) = 0$ được gọi là tích phân tổng quát.

Nghiệm riêng của phương trình vi phân là nghiệm bất kì nhận được từ nghiệm tổng quát khi cho hằng số C một giá trị cụ thể. Nghiệm riêng viết dưới dạng hàm ẩn được gọi là tích phân riêng. Nghiệm của mọi bài toán Cauchy đều là nghiệm riêng.

Nghiệm kì dị là nghiệm không thể nhận được từ nghiệm tổng quát cho dù C lấy bất kì giá trị nào.

VD3: Xét phương trình vi phân $y' = \sqrt{1-y^2}$

Từ phương trình đã có, ta được $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

Với $y = 1 \vee y = -1$ thỏa phương trình nên là nghiệm (riêng).

Với $y \neq \pm 1$, chia hai vế phương trình cho $\sqrt{1-y^2}$ và biến đổi ta được $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \Rightarrow \arcsin y = x + C \Rightarrow y = \sin(x + C)$

Vậy $y=\sin(x+C)$ là nghiệm tổng quát, $y=\pm 1$ cũng là hai nghiệm của phương trình nhưng chúng không nhận được từ nghiệm tổng quát nên là các nghiệm kì dị.

2.5. Phương trình vi phân của họ đường cong

Cho trước một họ các đường cong phụ thuộc tham số C, hãy tìm phương trình vi phân sao cho các đường cong của họ đã cho là đường cong tích phân của phương trình vi phân đó.

VD4: Tìm phương trình vi phân của họ đường cong $y=Cx^3$

Lấy đạo hàm $y'=3Cx^2$. Mà $C=\dfrac{y}{x^3}$ nên $y'=3\left(\dfrac{y}{x^3}\right)x^2$ hay $xy'-3y=0$

2.6. Phương trình vi phân cấp một có biến phân ly (phương trình vi phân tách biến)

2.6.1. Định nghĩa

Là phương trình vi phân có dạng $\boxed{M(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}+\mathrm{N}(\mathrm{y})\,\mathrm{dy}=0}$

2.6.2. Cách giải

Lấy tích phân hai vế $\int M(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}+\int N(\mathrm{y})\,\mathrm{dy}=C$ và chú ý tìm nghiệm kì dị (nếu có).

2.6.3. Các ví dụ

VD5: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $\dfrac{x}{1+x^2}dx+\dfrac{y}{1+y^2}dy=0$

Lấy tích phân ta được

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{y}{1+y^2}dy=C_1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=C_1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left[\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\right]=C_1:=\frac{1}{2}\ln C$$
$$\Leftrightarrow \left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)=C$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)=C$.

VD6: Giải phương trình vi phân $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$

Với $x = \pm 1, y = \pm 1$ thỏa phương trình nên là nghiệm (riêng).

Với $x \neq \pm 1, y \neq \pm 1$, chia hai vế phương trình cho $\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}$ ta được

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0$$
$$\Rightarrow \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = C_1$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\left[\int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1-x^2\right) + \int \left(1-y^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1-y^2\right)\right] = C_1$$
$$\Rightarrow -\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = C_1$$
$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = -C_1 := C$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$.

► Phương trình $y' = f\left(ax+by+c\right)$ có thể đưa về biến phân ly bằng cách đặt $z = ax+by+c$.

VD7: Giải phương trình $y' = \cos(x-y-1)$

Đặt $z = x-y-1$. Lấy đạo hàm hai vế theo biến x ta được $z' = 1-y'$ hay $y' = 1-z'$. Thay vào phương trình đã cho ta được $1-z' = \cos z \Rightarrow z' = 1-\cos z$ hay $dz = \left(1-\cos z\right)dx$

Vì $1-\cos z = 0 \Leftrightarrow z = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ nên $z = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm.

Nếu $z \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, chia hai vế phương trình cho $1-\cos z$ ta được

$$\frac{dz}{1-\cos z} = dx \Rightarrow \frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^2 \frac{z}{2}} = dx \Rightarrow -\cot an\frac{z}{2} = x - C \Rightarrow z = 2arc\cot\left(C-x\right) + n\pi, \mathrm{n} \in \mathbb{Z}$$

Nên $x-y-1 = arc\cot\left(C-x\right) + n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = x-1-arc\cot\left(C-x\right) + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Vậy, nghiệm phương trình là

$$y = x - 1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$y = x - 1 - \operatorname{arccot}(C - x) + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

2.7. Phương trình vi phân đẳng cấp cấp một

2.7.1. Hàm đẳng cấp bậc k

Hàm $F(x,y)$ được gọi là đẳng cấp bậc k nếu với mọi $\lambda > 0$, ta có $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$.

VD8: Các hàm $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}, g(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, h(x,y) = x^2 - 2xy$ là các hàm đẳng cấp bậc $0,1,2$ vì

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{\lambda x \lambda y} = \frac{\lambda^2 (x^2 - y^2)}{\lambda^2 xy} = \lambda^0 \frac{x^2 - y^2}{xy} = \lambda^0 f(x,y)$$

$$g(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda^1 \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda^1 g(x,y)$$

$$h(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - 2\lambda y \lambda x = \lambda^2 (x^2 - 2xy) = \lambda^2 h(x,y)$$

2.7.2. Phương trình vi phân đẳng cấp cấp một

Là phương trình vi phân có dạng $y' = f(x,y)$ trong đó $f(x,y)$ là hàm số đẳng cấp bậc 0.

► Phương trình dạng $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ là phương trình đẳng cấp nếu các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ là đẳng cấp cùng bậc.

► Nếu $f(x,y)$ là đẳng cấp bậc 0 thì $f(x,y)$ là hàm số của một biến số $\dfrac{y}{x}$, nghĩa là $f(x,y)$ có thể viết dưới dạng $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

2.7.3. Cách giải

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$ đưa phương trình đẳng cấp về phương trình có biến phân ly.

Thật vậy, đặt $u=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=ux$. Lấy đạo hàm hai vế theo biến x ta được $y'=u'x+u$ thay vào phương trình đẳng cấp $y'=f(\mathrm{x},\mathrm{y})=\varphi(u)$ ta được $u'x+u=\varphi(u)\Rightarrow u'x=\varphi(u)-u$. Với $\varphi(u)-u\neq 0$ phương trình có thể đưa về dạng $\dfrac{du}{\varphi(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$. Đây là phương trình có biến phân ly.

2.7.4. Các ví dụ

VD9: Giải phương trình $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

Dễ kiểm tra được đây là phương trình đẳng cấp. Chia tử và mẫu vế phải của phương trình cho x^2 ta được $y'=\dfrac{2\dfrac{y}{x}}{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$

Đặt $u=\dfrac{y}{x}$ hay $y=ux$. Lấy đạo hàm hai vế theo biến x ta được $y'=xu'+u$ thay vào phương trình ta được $xu'+u=\dfrac{2u}{1-u^2}\Rightarrow x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u\left(1+u^2\right)}{1-u^2}$

Với $u=0\Rightarrow y=0$ thỏa phương trình nên là nghiệm.

Với $u\neq 0$, phương trình trở thành

$$\frac{\left(1-u^2\right)du}{u\left(1+u^2\right)}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\right)du=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{|u|}{1+u^2}=\ln\left|C_1x\right|\Rightarrow\frac{x\left(1+u^2\right)}{u}=\frac{1}{C_1}:=C\Rightarrow\frac{x\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)}{\dfrac{y}{x}}=C$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là $x^2+y^2=Cy$

► Phương trình dạng $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ có thể đưa về phương trình đẳng cấp theo hai cách sau:

1. Nếu hệ $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ có nghiệm (x_0, y_0), ta đặt $\begin{cases} x=u+x_0 \\ y=v+y_0 \end{cases}$
2. Nếu hệ $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ vô nghiệm, ta đặt $a_1x+b_1y=u \Rightarrow a_2x+b_2y=\dfrac{1}{\lambda}u$ với $\lambda=\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$

VD10: Giải phương trình $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$

Từ phương trình đã cho, suy ra $y' = -\dfrac{2x-4y+6}{x+y-3}$

Hệ phương trình $\begin{cases} 2x-4y=-6 \\ x+y=3 \end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x=1+u \\ y=2+v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=du \\ dy=dv \end{cases}$ thay vào phương trình ta được $v' = -\dfrac{2u-4v}{u+v}$ là phương trình đẳng cấp với biến độc lập là u hàm phải tìm là v. Chia tử và mẫu vế phải của phương trình cho u ta được $v' = \dfrac{2-4\left(\dfrac{v}{u}\right)}{1+\dfrac{v}{u}}$. Đặt $t=\dfrac{v}{u}$ hay $v=tu$, lấy đạo hàm hai vế theo biến u ta được $v' = \text{ut}'+\text{t}$ thay vào phương trình ta được $ut'+t=-\dfrac{2-4t}{1+t} \Rightarrow u\dfrac{dt}{du}=-\dfrac{(t-1)(t-2)}{t+1}$

Với $t=1 \vee t=2 \Rightarrow v=u \vee v=2u \Rightarrow y=x+1 \vee y=2x$ thỏa phương trình nên là nghiệm.

Với $t\neq 1, t\neq 2$, chia 2 vế phương trình cho $(t-1)(t-2)$ và biến đổi ta được $\dfrac{(t+1)dt}{(t-1)(t-2)}=-\dfrac{du}{u} \Rightarrow \left(\dfrac{3}{t-2}-\dfrac{2}{t-1}\right)dt+\dfrac{du}{u}=0 \Rightarrow \dfrac{u(t-2)^3}{(t-1)^2}=C$

Với $u = x-1, t = \frac{v}{u} = \frac{y-2}{x-1}$ thay vào ta có nghiệm tổng quát của phương trình là $(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2$

Lưu ý, nghiệm $y = 2x$ có thể nhận được từ nghiệm tổng quát khi cho $C = 0$ nên không phải là nghiệm kì dị.

VD11: Giải phương trình $(x+y+2)dx + (2x+2y-1)dy = 0$

Từ phương trình đã cho suy ra $y' = -\frac{x+y+2}{2x+2y-1}$

Hệ $\begin{cases} x+y+2=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Đặt $x+y=t \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=2t \\ dy = dt-dx \end{cases}$ thay vào phương trình ta được

$$\frac{dt}{dx} - 1 = -\frac{t+2}{2t-1} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{t-3}{2t-1}$$

Với $t = 3 \Rightarrow x+y=3$ thỏa phương trình nên là nghiệm.

Với $t \neq 3$, chia hai vế phương trình cho $t-3$ và biến đổi, ta được

$$\frac{2t-1}{t-3}dt = dx \Rightarrow \left(2 + \frac{5}{t-3}\right)dt = dx \Rightarrow 2t + 5\ln|t-3| = x + C$$

Với $t = x+y$, thay vào ta có nghiệm tổng quát của phương trình là

$$x + 2y + 5\ln|x+y-3| = C$$

2.8. Phương trình vi phân toàn phần và thừa số tích phân
2.8.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân dạng $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu tồn tại hàm $u(x,y)$ sao cho $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

► **Chú ý:**

Theo định lý bốn mệnh đề tương đương thì điều kiện cần và đủ để một phương trình dạng $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ là phương trình vi phân toàn phần là $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\forall(x,y)$

2.8.2. Cách giải

Nếu biết hàm $u(x,y)$ thì nghiệm của phương trình là $u(x,y)=C$.

Ta tìm hàm $u(x,y)$ theo các cách sau:

1. $u(x,y)=\int P(x,y)dx+k(\text{y})$ thỏa $\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)dx+k(\text{y})\right]=Q(x,y)$.
2. $u(x,y)=\int Q(x,y)dy+h(x)$ thỏa $\frac{\partial}{\partial x}\left[\int Q(x,y)dy+h(x)\right]=P(x,y)$.
3. $u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(\text{t},y_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,\text{t})dt$, với (x_0,y_0) chọn phù hợp sao cho P,Q xác định, khả vi, khả tích.
4. $u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(\text{t},y)dt+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,\text{t})dt$, với (x_0,y_0) chọn phù hợp sao cho P,Q xác định, khả vi, khả tích.

VD12: Giải phương trình $(x^3+y)dx+(x-y)dy=0$

Ta có $P(x,y)=x^3+y,Q(x,y)=x-y\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial y}$. Vậy phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần.

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+k(y)=\int(x^3+y)dx+k(y)=\frac{1}{4}x^4+xy+k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)\Rightarrow x+k'(y)=x-y\Rightarrow k'(y)=-y\Rightarrow k(y)=-\frac{1}{2}y^2+C_1$$

Vậy $u(x,y)=\frac{1}{4}x^4+xy-\frac{1}{2}y^2+C_1$ nên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\frac{1}{4}x^4+xy-\frac{1}{2}y^2+C_1=C_2\Rightarrow\frac{1}{4}x^4+xy-\frac{1}{2}y^2=C_2-C_1:=C$$

VD13: Giải phương trình $\left(x+\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(y-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$

Ta có $P=x+\dfrac{y}{x^2+y^2}, Q=y-\dfrac{x}{x^2+y^2}\Rightarrow\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ nên phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần.

Chọn $\left(x_0,y_0\right)=\left(1,1\right)$. Ta có

$$u\left(x,y\right)=\int_1^x\left(t+\frac{1}{1+t^2}\right)dt+\int_1^y\left(t-\frac{x}{t^2+x^2}\right)dt$$

$$=\left.\frac{t^2}{2}+\arctan t\right|_{t=1}^{t=x}+\left.\frac{t^2}{2}-\arctan\frac{t}{x}\right|_{t=1}^{t=y}+C_1$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2-2-\frac{\pi}{2}\right)+\arctan x+\arctan\frac{1}{x}-\arctan\frac{y}{x}+C_1$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\arctan x+\arctan\frac{1}{x}-\arctan\frac{y}{x}+C_2\left(C_2=C_1-2-\frac{1}{2}\right)$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\arctan x+\arctan\frac{1}{x}-\arctan\frac{y}{x}+C_2=C_3$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\arctan x+\arctan\frac{1}{x}-\arctan\frac{y}{x}=C_3-C_2:=C$$

2.8.3. Thừa số tích phân

Khi phương trình vi phân $P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0$ không là phương trình vi phân toàn phần, có thể tồn tại một hàm số $\mu\left(x,\mathrm{y}\right)$ sao cho khi nhân vào phương trình trên ta được phương trình $\mu\left(x,\mathrm{y}\right)P\left(x,y\right)dx+\mu\left(x,\mathrm{y}\right)Q\left(x,y\right)dy=0$ là phương trình vi phân toàn phần.

Hàm số $\mu\left(x,\mathrm{y}\right)$ như trên được gọi là thừa số tích phân của phương trình vi phân $P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0$. Ở đây ta chỉ xét trường hợp μ là hàm một biến $\mu=\mu\left(x\right)$ hoặc $\mu=\mu\left(y\right)$.

► Nếu $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right):=f\left(x\right)$ thì $\mu=\mu\left(x\right)$ và $\mu\left(x\right)=e^{\int f(x)dx}$

► Nếu $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right):=g\left(y\right)$ thì $\mu=\mu\left(y\right)$ và $\mu\left(y\right)=e^{\int g(y)dy}$

VD14: Chứng minh rằng phương trình $\left(x+y^2\right)dx+xydy=0$ có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x. Tìm thừa số tích phân đó và giải phương trình vi phân.

Ta có $P\left(x,y\right)=x+y^2,Q\left(x,y\right)=xy\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=2y,\frac{\partial Q}{\partial x}=y$. Khi đó $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{xy}\left(2y-y\right)=\frac{1}{x}$ nên thừa số tích phân chỉ phụ thuộc vào một biến x và $\mu\left(x\right)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln|Cx|}=Cx$. Chọn $C=1$ ta được $\mu\left(x\right)=x$, nhân vào phương trình đã cho ta được $\left(x^2+xy^2\right)dx+x^2ydy=0$ là phương trình vi phân toàn phần. Nên

$$u\left(x,y\right)=\int\left(x^2+xy^2\right)dx+k\left(y\right)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}+k\left(y\right)\text{ thỏa}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2y\Rightarrow x^2y+k'\left(y\right)=x^2y\Rightarrow k'\left(y\right)=0\Rightarrow k\left(y\right)=C_1.$$

Vậy $u\left(x,y\right)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}+C_1$ nên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}+C_1=C_2\Rightarrow\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}=C_2-C_1:=C$$

VD15: Giải phương trình $y\left(x+y\right)dx+\left(xy+1\right)dy=0$

Ta có $P\left(x,y\right)=xy+y^2,Q\left(x,y\right)=xy+1\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=x+2y,\frac{\partial Q}{\partial x}=y$

Khi đó $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{x+y}{xy+1}$ là hàm hai biến nhưng $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=-\frac{x+y}{y(x+y)}=-\frac{1}{y}$ nên thừa số tích phân chỉ phụ thuộc vào một biến y và $\mu(y)=e^{-\int\frac{1}{y}dy}=e^{\ln\left|\frac{C}{y}\right|}=\frac{C}{y}$. Chọn $C=1$, ta được $\mu(y)=\frac{1}{y}$.

Với $y=0$ thỏa phương trình nên là nghiệm.

Với $y\neq 0$, nhân $\mu(y)=\frac{1}{y}$ vào phương trình đã cho ta được $(x+y)dx+\left(x+\frac{1}{y}\right)dy=0$ là phương trình vi phân toàn phần.

Ta có $u(x,y)=\int(x+y)dx+k(y)=\frac{x^2}{2}+xy+k(y)$ thỏa

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+\frac{1}{y}\Rightarrow x+k'(y)=x+\frac{1}{y}\Rightarrow k'(y)=\frac{1}{y}\Rightarrow k(y)=\ln|C_1y|.$$

Vậy $u(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+\ln|C_1y|$ nên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\frac{x^2}{2}+xy+\ln|C_1y|=-\ln|C_2|\Rightarrow\frac{x^2}{2}+xy+\ln|C_1C_2y|=0\Rightarrow\frac{x^2}{2}+xy+\ln|Cy|=0$$

2.9. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

2.9.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp một là phương trình có dạng $y'+p(x)y=q(x)$, trong đó $p(x),q(x)$ là các hàm số liên tục.

♦ Nếu $q(x)=0$ thì phương trình được gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất.

♦ Nếu $q(x)\neq 0$ thì phương trình được gọi là phương trình tuyến tính không thuần nhất.

2.9.2. Công thức nghiệm

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp một là

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)}$$

VD16: Giải bài toán Cauchy $\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x}y = 3x \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Ta có $p(x) = \dfrac{1}{x}, q(x) = 3x$. Nghiệm tổng quát

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int 3xe^{\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right) = \frac{1}{x}\left(x^3 + C\right), y(1) = 1 \Rightarrow C + 1 = 1 \Rightarrow C = 0$$

Vậy, nghiệm (riêng) của bài toán Cauchy đã cho là $y = x^2$.

VD17: Giải phương trình $y'\left(x + y^2\right) = y$

Phương trình trên không là tuyến tính cấp một đối với y.

Với $y = 0$ thỏa phương trình nên là nghiệm.

Với $y \neq 0$, chú ý $y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)}$ phương trình có thể đưa về dạng $x' - \dfrac{1}{y}x = y$ là tuyến tính cấp một đối với x. Nghiệm tổng quát

$$x = e^{\int \frac{1}{y}dy}\left(\int ye^{-\int \frac{1}{y}dy}dy + C\right) = y^2 + Cy$$

2.10. Phương trình Bernoulli

2.10.1. Định nghĩa

Phương trình Bernoulli là phương trình có dạng $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$ trong đó $\alpha \in \mathbb{R}$, $p(x), q(x)$ là các hàm liên tục.

2.10.2. Cách giải

► Nếu $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$ thì phương trình Bernoulli chính là phương trình tuyến tính cấp một.

► Nếu $\alpha \neq 0,1$

Với $y = 0$ thỏa mãn phương trình nên là nghiệm.

Với $y \neq 0$, chia hai vế phương trình cho y^{α} ta được $y' y^{-\alpha} + p(x) y^{1-\alpha} = q(x)$, đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y'$ thay vào phương trình ta được $\frac{1}{1-\alpha} z' + p(x) z = q(x)$ hay $z' + (1-\alpha) p(x) z = (1-\alpha) q(x)$ là phương trình tuyến tính cấp một với x là biến độc lập, z là hàm phải tìm.

VD18: Giải phương trình $y' + \frac{1}{x} y = xy^2$

Với $y = 0$ thỏa phương trình nên là nghiệm.

Với $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^2 ta được $y' y^{-2} + \frac{1}{x} y^{-1} = x$

Đặt $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2} y'$ thay vào phương trình ta được $-z' + \frac{1}{x} z = x \Rightarrow z' - \frac{1}{x} z = -x$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp một.

Nghiệm tổng quát $z = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int (-x) e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = x(-x + C) = -x^2 + Cx$

Mà $z = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-x^2 + Cx}$

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

3.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp hai tổng quát là phương trình có dạng $F(x, y, y', y'') = 0$ hay $y'' = f(x, y, y')$.

VD1: $y'' = 2x + 1$ là một phương trình vi phân cấp hai.

Lấy nguyên hàm lần thứ nhất ta được $y' = x^2 + x + C_1$. Tiếp tục lấy nguyên hàm lần thứ hai ta được $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Ta thấy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai phụ thuộc hai tham số, do vậy để tìm nghiệm riêng, ta cần hai điều kiện nào đó.

3.2. Bài toán Cauchy

Bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân $\begin{cases} y'' = f\left(x, y, y'\right) \\ y\left(x_0\right) = y_0 \\ y'\left(x_0\right) = y'_0 \end{cases}$ được gọi là bài toán Cauchy. Với x_0, y_0, y'_0 là những số cho trước.

3.3. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy

Nếu hàm số $f\left(x, y, y'\right)$ và các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục trong miền mở $D \subset \mathbb{R}^3$ thì với mọi điểm $\left(x_0, y_0, y'_0\right) \in D$, tồn tại duy nhất một nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} y'' = f\left(x, y, y'\right) \\ y\left(x_0\right) = y_0 \\ y'\left(x_0\right) = y'_0 \end{cases}$$

3.4. Nghiệm của phương trình vi phân cấp hai

Nghiệm tổng quát của phương trình là hàm số $\varphi\left(x, C_1, C_2\right)$ mà khi thay vào thỏa mãn phương trình với mọi C_1, C_2. Nếu nghiệm tổng quát được viết dưới dạng hàm ẩn được gọi là tích phân tổng quát.

Nghiệm riêng của phương trình là nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho các hằng số C_1, C_2 những giá trị cụ thể. Nghiệm riêng viết dưới dạng hàm ẩn được gọi là tích phân riêng. Mọi nghiệm của bài toán Cauchy đều là nghiệm riêng.

Nghiệm kì dị là nghiệm không thể nhận được từ nghiệm tổng quát cho dù C_1, C_2 nhận bất kì giá trị nào.

3.5. Các phương trình vi phân cấp hai có thể giảm cấp được

3.5.1. Phương trình không chứa y, y'

Là những phương trình có dạng $y'' = f\left(x\right)$. Để tìm nghiệm ta lấy nguyên hàm hai lần.

VD2: Giải bài toán Cauchy $\begin{cases} y''=\sin x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

Từ $y''=\sin x$. Lấy nguyên hàm lần thứ nhất, ta được $y'=-\cos x+C_1$. Tiếp tục lấy nguyên hàm lần thứ hai, ta được $y=-\sin x+C_1x+C_2$

Từ điều kiện $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=1 \\ C_1=1 \end{cases}$. Vậy nghiệm (riêng) của phương trình là $y=-\sin x+x+1$.

3.5.2. Phương trình không chứa y

Là những phương trình có dạng $y''=f(x,y')$. Để giải loại này ta đặt $z=y'$ để giảm cấp.

VD3: Giải phương trình $y''=x-\dfrac{y'}{x}$

Đặt $z=y' \Rightarrow z'=y''$ thay vào phương trình ta được $z'=x-\dfrac{1}{x}z \Rightarrow z'+\dfrac{1}{x}z=x$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp một. Nghiệm tổng quát

$$z=e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int xe^{\int \frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)=\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x}$$

Mà $z=y' \Rightarrow y'=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{C_1}{x} \Rightarrow y=\dfrac{x^3}{6}+C_1\ln|x|+C_2$

3.5.3. Phương trình không chứa x

Là những phương trình có dạng $y''=f(y,y')$. Để giải phương trình này ta đặt $z=y'$ và xem z là hàm theo biến y. Khi đó $y''=\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}.\dfrac{dy}{dx}=y'\dfrac{dz}{dy} \Rightarrow y''=z\dfrac{dz}{dy}$ thay vào phương trình ta được $z\dfrac{dz}{dy}=f(y,z)$ là phương trình vi phân cấp một với y là biến độc lập, z là hàm phải tìm.

VD4: Giải phương trình $2yy''+y'^2=0$

Đặt $z=y'\Rightarrow y''=z\dfrac{dz}{dy}$ thay vào phương trình ta được $2yz\dfrac{dz}{dy}+z^2=0$

Với $z=0\Rightarrow y=C$ thỏa phương trình nên là nghiệm.

Với $z\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $2y\dfrac{dz}{dy}+z=0\Rightarrow \dfrac{dz}{z}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{y}\Rightarrow z\sqrt{y}=C_1$

Mà $z=\dfrac{dy}{dx}$ nên $\dfrac{dy}{dx}\sqrt{y}=C_1\Rightarrow \sqrt{y}dy=C_1dx\Rightarrow \dfrac{2}{3}y\sqrt{y}=C_1x+C_2$

3.6. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số biến

3.6.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai tổng quát có dạng $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), a<x<b$ trong đó các hàm $p(x),q(x),f(x)$ xác định trên (a,b).

Nếu $f(x)=0$ thì phương trình được gọi là thuần nhất.

Nếu $f(x)\neq 0$ thì phương trình được gọi là không thuần nhất.

VD5: $(x^2+1)y''-2xy'+2y=x(x^2+1)$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất.

VD6: $(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất.

3.6.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

a. Định nghĩa

Là phương trình có dạng $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

b. Hàm độc lập tuyến tính

Hai hàm y_1, y_2 được gọi là độc lập tuyến tính trên $[a,b]$ nếu tỉ số của chúng trên đoạn đó không phải là một hằng số, nghĩa là $\frac{y_1}{y_2} \neq const$. Ngược lại, nếu $\frac{y_1}{y_2} = \text{const}$ thì hai hàm y_1, y_2 được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

VD7: Hai hàm e^{2x} và e^{-x} là độc lập tuyến tính vì $\frac{e^{2x}}{e^{-x}} = e^{3x} \neq const$.

VD8: Hai hàm $2e^x$ và e^x là phụ thuộc tuyến tính vì $\frac{2e^x}{e^x} = 2$.

c. Định lý

Nếu y_1, y_2 là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình vi phân cấp hai thuần nhất $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ thì nghiệm tổng quát của phương trình sẽ là $y = C_1y_1 + C_2y_2$ trong đó C_1, C_2 là các hằng số.

d. Phương pháp cầu phương

Nếu biết một nghiệm riêng y_1 của phương trình thuần nhất $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ thì ta có thể tìm một nghiệm riêng y_2 của nó độc lập tuyến tính với y_1 bằng công thức sau

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{\left(y_1(x)\right)^2}dx}$$

VD9: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $\left(x^2+1\right)y'' - 2xy' + 2y = 0$, biết $y_1(x) = x$.

Phương trình đã cho tương đương $y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0$

Ta có $p(x) = -\frac{2x}{1+x^2}, q(x) = \frac{2}{1+x^2}$ nên

$$y_2(x) = x\int \frac{e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx}}{x^2}dx = x\int \frac{1+x^2}{x^2}dx = x\int\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx = x\left(-\frac{1}{x}+x\right) = x^2-1$$

(Chú ý, vì $y_2(x)$ là nghiệm riêng nên ta không cần cộng thêm hằng số khi lấy nguyên hàm).

Vậy, ta có nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = C_1x + C_2\left(x^2 - 1\right)$

3.6.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất

a. Định nghĩa

Là phương trình có dạng $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), f(x) \neq 0$. Phương trình thuần nhất tương tứng là $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

b. Định lý

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất bằng tổng của nghiệm tổng quát $\overline{y}$ của phương trình thuần nhất tương ứng và một nghiệm riêng Y nào đó của phương trình không thuần nhất.

$$\boxed{y = \overline{y} + Y}$$

c. Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Xét phương trình tuyến tính không thuần nhất $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$.

Giả sử $y = C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng.

Khi đó, một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng $Y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ với $C_1(x), C_2(x)$ thỏa điều kiện $\boxed{\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}}$

VD10: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $\left(x^2+1\right)y'' - 2xy' + 2y = x\left(x^2+1\right)$

Phương trình đã cho tương đương với $y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{2}{1+x^2}y = x$

Từ **VD9**, ta có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{2}{1+x^2}y = 0$ là $\overline{y} = C_1x + C_2\left(x^2-1\right)$

Ta tìm nghiệm riêng Y của phương trình không thuần nhất bằng cách tìm hai hàm $C_1(x)$ và $C_2(x)$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'x + C_2'(x^2-1) = 0 \\ C_1' + 2xC_2' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -x + \dfrac{2x}{1+x^2} \\ C_2' = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{x^2}{2} + \ln(1+x^2) \\ C_2 = x - \arctan x \end{cases}$$

(Chú ý, vì Y là nghiệm riêng nên khi lấy nguyên hàm tìm C_1, C_2 ta không cần cộng thêm hằng số).

Vậy nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $Y = x\ln(x^2+1) - (x^2-1)\arctan x - x + \dfrac{x^3}{2}$ nên nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \overline{y} + Y = C_1x + C_2(x^2-1) + x\ln(x^2+1) - (x^2-1)\arctan x - x + \frac{x^3}{2}$$

3.7. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng

3.7.1. Phương trình thuần nhất

a. Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng thuần nhất là phương trình có dạng $y'' + py' + qy = 0 \, (p, q \in \mathbb{R})$.

Phương trình bậc hai $k^2 + pk + q = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng.

Giả sử phương trình đặc trưng có hai nghiệm k_1, k_2. Ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất theo các trường hợp sau:

b. k_1, k_2 là hai số thực khác nhau

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $\boxed{y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}}$, C_1, C_2 là các hằng số.

c. $k_1 = k_2 = k$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $\boxed{y = (C_1 + C_2x)e^{kx}}$, C_1, C_2 là các hằng số.

d. k_1, k_2 **là hai nghiệm phức liên hợp** $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $\boxed{y = e^{\alpha x}\left[C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right]}$, C_1, C_2 là các hằng số.

VD11: Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

1. $y'' + y' - 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 2y' + 5y = 0$

1. Phương trình đặc trưng $k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -2 \end{array}\right.$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

2. Phương trình đặc trưng $k^2 - 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = 2$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{2x}$.

3. Phương trình đặc trưng $k^2 + 2k + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -1 + 2i \\ k = -1 - 2i \end{array}\right.$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$.

3.7.2. Phương trình không thuần nhất

a. Định nghĩa

Phương trình không thuần nhất là phương trình có dạng $y'' + py' + qy = f(x)$, trong đó p, q là các hằng số.

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất $y'' + py' + qy = f(x)$ có dạng $y = \overline{y} + Y$. Trong đó, $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, Y là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $y'' + py' + qy = f(x)$. Ta tìm nghiệm riêng Y của phương trình không thuần nhất $y'' + py' + qy = f(x)$ theo các trường hợp sau đây của $f(x)$:

b. $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ **(**$P_n(x)$ **là đa thức bậc** n**,** α **là hằng số)**

Ta so sánh α với các nghiệm k_1, k_2 của phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$

i. α không là nghiệm của phương trình đặc trưng

Nghiệm riêng Y có dạng

$$\boxed{Y = e^{\alpha x} Q_n(x)}$$

ii. α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng

Nghiệm riêng Y có dạng

$$\boxed{Y = x e^{\alpha x} Q_n(x)}$$

iii. α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng

Nghiệm riêng Y có dạng

$$\boxed{Y = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)}$$

Trong đó, $Q_n(x)$ là đa thức cùng bậc với $P_n(x)$ có $n+1$ hệ số mà ta cần phải xác định bằng phương pháp hệ số bất định (xem ví dụ).

VD12: Giải các phương trình sau

1. $y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$
2. $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^{x}$

1. Phương trình đặc trưng $k^2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 3 \end{array}\right.$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$.

Ta có $P_n(x) = 10$ là đa thức bậc 0, $\alpha = -2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên Y có dạng $Y = Ae^{-2x}$. Các đạo hàm cấp một và cấp hai $Y' = -2Ae^{-2x}, Y'' = 4Ae^{-2x}$. Thay Y, Y', Y'' vào phương trình $y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$ ta được $15Ae^{-2x} = 10e^{-2x} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$. Vậy $Y = \frac{2}{3}e^{-2x}$ nên nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \overline{y} + Y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} + \frac{2}{3} e^{-2x}$.

2. Phương trình đặc trưng $k^2 - 7k + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 6 \end{array}\right.$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}$.

Ta có $P_n(x) = x - 2$ là đa thức bậc nhất, $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên Y có dạng

$Y = xe^x(Ax+B) = e^x(Ax^2+Bx) \Rightarrow Y' = e^x\left[Ax^2+(2A+B)x+B\right], Y'' = e^x\left[Ax^2+(4A+B)x+2A+2B\right]$

thay vào phương trình $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$ ta được

$$(-10Ax+2A-5B)e^x = (x-2)e^x \Rightarrow \begin{cases} -10A = 1 \\ 2A-5B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{10} \\ B = \dfrac{9}{25} \end{cases}$$

Vậy $Y = e^x\left(-\dfrac{1}{10}x^2 + \dfrac{9}{25}x\right)$ nên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \overline{y} + Y = C_1e^x + C_2e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right)$$

c. $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right](\beta \neq 0)$ **(**α, β **là hằng số;** $P_n(x), Q_n(x)$ **là các đa thức bậc** m, n**)**

Ta tìm nghiệm riêng Y của phương trình không thuần nhất theo các trường hợp sau:

1) $\alpha \pm \beta i$ không là nghiệm phương trình đặc trưng

   Nghiệm riêng Y có dạng

$$\boxed{Y = e^{\alpha x}\left[U_r(x)\cos\beta x + V_r(x)\sin\beta x\right]}$$

2) $\alpha \pm \beta i$ là nghiệm phương trình đặc trưng

   Nghiệm riêng Y có dạng

$$\boxed{Y = xe^{\alpha x}\left[U_r(x)\cos\beta x + V_r(x)\sin\beta x\right]}$$

   Trong đó, $r = \max\{m, n\}$, $U_r(x), V_r(x)$ là các đa thức bậc r.

VD13: Giải các phương trình sau

1. $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$
2. $y'' + 4y = \cos 2x$

1. Phương trình đặc trưng $k^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=1\\k=-1\end{array}\right.$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$.

Ta có $P_n(x)=3, Q_m(x)=0$ là các đa thức bậc 0, $\alpha\pm\beta i=2\pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên Y có dạng

$$Y=e^{2x}\left[A\cos x+B\sin x\right]\Rightarrow\begin{cases}Y'=e^{2x}\left[(2A+B)\cos x+(2B-A)\sin x\right]\\Y''=e^{2x}\left[(3A+4B)\cos x+(3B-4A)\sin x\right]\end{cases}$$

thay vào phương trình $y''-y=3e^{2x}\cos x$ ta được

$$\left[(2A+4B)\cos x+(2B-4A)\sin x\right]e^{2x}=3e^{2x}\cos x\Rightarrow\begin{cases}2A+4B=3\\2B-4A=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{3}{10}\\B=\dfrac{3}{5}\end{cases}.$$

Vậy $Y=\dfrac{3}{10}e^{2x}(\cos x+6\sin x)$ nên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y=\overline{y}+Y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+\frac{3}{10}e^{2x}(\cos x+6\sin x).$$

2. Phương trình đặc trưng $k^2+4=0\Leftrightarrow k=\pm 2i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

Ta có $P_n(x)=1, Q_m(x)=0$ là các đa thức bậc 0, $\alpha\pm\beta i=\pm 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên Y có dạng

$$Y=xe^{0x}(A\cos 2x+B\sin 2x)\Rightarrow\begin{cases}Y'=(A+2Bx)\cos 2x+(B-2Ax)\sin 2x\\Y''=(4B-4Ax)\cos 2x-(4A+4Bx)\sin 2x\end{cases}$$

thay vào phương trình $y''+4y=\cos 2x$ ta được

$$4B\cos 2x-4A\sin 2x=\cos 2x\Rightarrow\begin{cases}4B=1\\-4A=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=\dfrac{1}{4}\\A=0\end{cases}.$$

Vậy $Y = \frac{1}{4}x\sin 2x$ nên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \overline{y} + Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2\text{x} + \frac{1}{4}x\sin 2x.$$

► Chú ý: Trong **VD12** và **VD13**, ta vẫn có thể tìm nghiệm tổng quát của bài toán bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Chẳng hạn **VD13.1.** ta có thể giải như sau:

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $\overline{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{x}$.

Ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất bằng cách tìm hai hàm $C_1(x), C_2(x)$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'e^{-x} + C_2'e^{x} = 0 \\ -C_1'\text{e}^{-x} + C_2'e^{x} = 3e^{2x}\cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -\frac{3}{2}e^{3x}\cos x \\ C_2' = \frac{3}{2}e^{x}\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3}{20}e^{3x}\left(\sin x + 3\cos x\right) \\ C_2 = \frac{3}{4}e^{x}\left(\sin x + \cos x\right) \end{cases}$$

Vậy, $Y = \frac{3}{10}e^{2x}\left(\cos x + 6\sin x\right)$ nên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \overline{y} + Y = C_1e^{-x}C_2e^{x} + \frac{3}{10}e^{2x}\left(\cos x + 6\sin x\right).$$

d. Nguyên lý chồng nghiệm

Cho các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) \qquad (1)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x) \qquad (2)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x) \quad (3)$$

Nếu Y_1, Y_2 lần lượt là nghiệm riêng của (1) và (2) thì $Y = Y_1 + Y_2$ là nghiệm riêng của (3).

VD14: Giải phương trình $y'' + y = xe^{x} + 2e^{-x}$

Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm phức $k = \pm i$ nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Nghiệm riêng Y của phương trình có dạng $Y = Y_1 + Y_2$, trong đó Y_1 là nghiệm riêng của phương trình $y'' + y = xe^x$, Y_2 là nghiệm riêng của phương trình $y'' + y = 2e^{-x}$

Bằng phương pháp hệ số bất định, ta tìm được $Y_1 = \frac{1}{2}e^x(x-1); Y_2 = e^{-x}$

Vậy, nghiệm riêng của phương trình $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$ là $Y = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{2}e^x(x-1) + e^{-x}$ nên nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}e^x(x-1) + e^{-x}$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

Bài 1. Giải các phương trình tách biến

1. $xydx + (x+1)dy = 0$
2. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$
3. $y' = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$
4. $xy' + y = y^2, y(1) = \frac{1}{2}$
5. $y' = \cos(y-x)$
6. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$
7. $y'\sin x = y\ln y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
8. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$

Bài 2. Giải các phương trình đẳng cấp

1. $y' = \frac{x+y}{x-y}$
2. $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$
3. $xy' = y + (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$
4. $(x^2-3y^2)dx + 2xydy = 0, y(2) = 0$
5. $xy' = y\ln\frac{y}{x}, y(1) = 1$
6. $x - y - 1 + (y-x+2)y' = 0$

Bài 3. Giải các phương trình tuyến tính sau

1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
2. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

3. $y = x\left(y' - x\cos x\right)$

4. $y'\left(x\cos y + 2\sin y\cos y\right) = 1$

5. $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, y\left(0\right) = 0$

6. $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x, y\left(e\right) = \dfrac{e^2}{2}$

Bài 4. Bằng cách đổi biến hay lấy đạo hàm, hãy đưa các phương trình sau về phương trình tuyến tính và giải chúng

1. $y' + \tan y = \dfrac{x}{\cos y}$

2. $\left(x+1\right)\left(yy' - 1\right) = y^2$

3. $x\left(e^y - y'\right) = 2$

4. $\left(x^2 - 1\right)y'\sin y + 2x\cos y = 2x - 2x^3$

5. $y' + 2xy = 2x^3y^3$

6. $xdx = \left(x^2 - 2y + 1\right)dy$

7. $y\left(x\right) = \int\limits_0^x y\left(t\right)dt + x + 1$

8. $\int\limits_0^x \left(x-t\right)y\left(t\right)dt = 2x + \int\limits_0^x y\left(t\right)dt$

9. $y' = \dfrac{\cos x\sin y + \tan^2 x}{\sin x\cos y}$

10. $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}, y\left(0\right) = \dfrac{9}{4}$

Bài 5. Giải các phương trình vi phân toàn phần sau

1. $\left(2x^3 - xy^2\right)dx = \left(x^2y - 2y^3\right)dy$

2. $xdx + ydy + \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$

3. $\dfrac{xdy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx$

4. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx = \sqrt{x^2 - y}dy$

5. $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{ydx - xdy}{x^2}$

6. $yx^{y-1}dx + x^y\ln xdy = 0$

Bài 6. Tìm thừa số tích phân phù hợp và giải các phương trình sau

1. $y\left(1 + xy\right)dx = xdy$

2. $y\left(x + y\right)dx + \left(xy + 1\right)dy = 0$

3. $\left(x^2 + y\right)dx = xdy$

4. $\left(x\cos y - y\sin y\right)dy + \left(x\sin y + y\cos y\right)dx = 0$

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

Bài 1. Bằng cách đổi biến thích hợp, đưa các phương trình vi phân sau về phương trình vi phân cấp một và giải chúng

1. $2xy'y''=y'^2-1$
2. $y''\left(e^x+1\right)+y'=0$
3. $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$
4. $y''+y'^2=2e^{-y}$
5. $1+y'^2=2yy''$
6. $y'''=2\left(y''-1\right)\cot x$

Bài 2. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

1. $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$ biết một nghiệm riêng $y_1=x$

2. $\left(2x-x^2\right)y''+\left(x^2-2\right)y'+2\left(1-x\right)y=0, y\left(1\right)=0, y'\left(1\right)=1$ biết một nghiệm riêng $y_1=e^x$

3. $\left(2x+1\right)y''+\left(4x-2\right)y'-8y=2e^x\left(2x+1\right)^3$ biết hai nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng là $y_1=e^{-2x}, y_2=\frac{1}{2}\left(4x^2+1\right)$

4. $\left(3x^3+x\right)y''+2y'-6xy=4-12x^2$ biết hai nghiệm riêng của phương trình đã cho là $y_1=2x, y_2=\left(x+1\right)^2$

5. $\left(2x+1\right)y''+\left(2x-1\right)y'-2y=x^2+x$ biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng là một đa thức.

Bài 3. Giải các phương trình sau

1. $y''-2y'+y=6xe^x$
2. $y''+y=4xe^x$
3. $y''-y'=2\sin x-4\cos x$
4. $y''-2y'+2y=e^x+x\cos x$
5. $y''-y'=\frac{2-x}{x^3}e^x$
6. $y''-y=4\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$
7. $y''+2y'+2y=xe^{-x}, y\left(0\right)=0, y'\left(0\right)=0$
8. $x^2y''-2xy'+2y=0$

Bài 4. Giải các phương trình vi phân sau

1. $y'\sin x = y\ln^2 y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$
2. $y' = \sin(y - x - 1)$
3. $xy'' = y' + x^2e^x$
4. $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$
5. $xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$
6. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
7. $y'' - y' = x^2e^x$
8. $y'' + 4y = x + \cos^2 x$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM
TÍCH PHÂN HAI LỚP

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} 3y^3.e^{xy} dx$

a) I = 2 – e   b) I = 0   c) I = e – 2   d) I = e + 2

Câu 2. Tính tích phân $I = \int_0^1 dx \int_0^{2x} 3(x + y) dy$

a) I = 3   b) I = -3   c) I = -4   d) I = 4

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} dx \int_0^{x} 3x.\sin y dy$

a) $I = \pi^2 - 4$ b) $I = \pi^2 - 2$ c) $I = 3\frac{\pi^2}{2} + 6$ d) $I = \pi^2 + 2$

Câu 4. Tính tích phân $I = 2\int_0^1 dy \int_0^{y} e^{x+y} dx$

a) $I = e^2 + e$ b) $I = e^2 + e - 2$ c) $I = e^2 - e$ d) $I = e^2 - 2e + 1$

Câu 5. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{y} \sin(x + y) dx$

a) I = 0   b) I = 2   c) I = 1   d) I =1/2

Câu 6. Tính tích phân kép: $I = \iint_D (\sin x + 2\cos y)dxdy$ trong đó D là hình chữ nhật $0 \le x \le \pi / 2; 0 \le y \le \pi$.

a) $I = \pi$ b) $I = -\pi$ c) $I = 2\pi$ d) $I = -2\pi$

Câu 7. Tính tích phân kép: $I = \iint_D xy^3 dxdy$ trong đó D là hình chữ nhật $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 2$

a) I = 0 b) I = 2 c) I = 4 d) I = 8

Câu 8. Tính tích phân: $I = \iint_D x^3(y^2+1)dxdy$ trong đó D là hình chữ nhật $-m \le x \le m; 0 \le y \le 1$, m là hằng số thực dương.

a) I = 0 b) I = 2m c) I = $2m^2$ d) I = $3m^2$

Câu 9. Tính tích phân: $I = \iint_D xydxdy$ trong đó D là hình chữ nhật $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 2$

a) I = 1 b) I = 2 c) I = 1/2 d) I = 1/4

Câu 10. Tính tích phân: $I = \iint_D \frac{x}{y}\ln y dxdy$ trong đó D là hình chữ nhật $0 \le x \le 2; 1 \le y \le e$

a) I = 1/2 b) I = 1 c) I = 1/4 d) I = 2

Câu 11. Tính tích phân: $I = \iint_D dxdy$ trong đó D là miền định bởi $D: 0 \le x \le a, 0 \le y \le \sqrt{x}$

a) $I = \sqrt[3]{a^2}$ b) $I = \frac{3}{2}\sqrt{a^3}$ c) $I = \frac{2}{3}\sqrt{a^3}$ d) $I = \sqrt{a^3}$

Câu 12. Tính tích phân: $I = \iint_D \frac{y}{x}dxdy$ trong đó D là miền định bởi $D: 2 \le x \le 4, x \le y \le 2x$

a) I = 1/9 b) I = 3 c) I = 12 d) I = 9

Câu 13. Tính tích phân: $I = \iint_D e^x dxdy$ trong đó D là miền định bởi $D: 1 \le y \le 2, 0 \le x \le \ln y$

a) I =1/2 b) I = 1 c) I = e – 1 d) I = e^2

Câu 14. Tính tích phân: $I = \iint_D \sin y dxdy$ trong đó D là miền định bởi $D: \pi \le x \le 3\pi, \pi \le y \le x$

a) $I = 2\pi$ b) $I = -2\pi$ c) $I = 0$ d) $I = 1$

Câu 15. Tính tích phân: $I = \iint_D (x+y)dxdy$ trong đó D là miền định bởi $D: 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y$.

a) I = 1 b) I = 2 c) I = 3/2 d) I = ½

Câu 16. Tính tích phân: $I = \iint_D 2x^2 y dxdy$ trong đó D là tam giác với các đỉnh $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$.

a) I = 1 b) I = 2 c) I = 1/5 d) I = ¼

Câu 17. Tính tích phân: $I = \iint_D (3x+2)dxdy$ trong đó D là tam giác OAB với $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$.

a) I = 0 b) I = 1 c) I = 2 d) I = 3

Câu 18. Tính tích phân: $I = \iint_D 2(x+y)dxdy$ trong đó D là tam giác OAB với $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$.

a) I = 0 b) I = 1 c) I = 1/3 d) I = 2/3

Câu 19. Tính tích phân: $I = \iint_D \cos(x+y)dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $x = 0, y = \pi, y = x.$

a) I = 2 b) I = 1 c) I = -1 d) I = -2

Câu 20. Tính tích phân: $I = \iint_D e^{y/x} dxdy$ trong đó D là tam giác giới hạn bởi các đường $x = 1, y = 0, y = x.$

a) $I=\frac{e-1}{2}$ b) $I=\frac{e+1}{2}$ c) $I=0$ d) I không tồn tại

Câu 21. Tính tích phân: $I=\iint\limits_D 2xydxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi đường thẳng $y=x$ và parabol $y=\sqrt{x}$.

a) $I=\frac{1}{12}$ b) $I=\frac{1}{6}$ c) $I=\frac{7}{12}$ d) $I=0$

Câu 22. Tính tích phân: $I=\iint\limits_D ydxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi đường thẳng $y=x$ và parabol $y=x^2$.

a) $I=1$ b) $I=\frac{1}{2}$ c) $I=\frac{8}{15}$ d) $I=\frac{1}{15}$

Câu 23. Xác định cận của tích phân: $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi các đường: $y=3x, y=x^2$.

a) $I=\int\limits_0^3 dx\int\limits_{3x}^{x^2} f(x,y)dy$ b) $I=\int\limits_0^9 dx\int\limits_{x^2}^{3x} f(x,y)dy$

c) $I=\int\limits_0^9 dy\int\limits_{y/3}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$ d) $I=\int\limits_0^3 dy\int\limits_{y/3}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

Câu 24. Xác định cận của tích phân: $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi các đường: $y=2\sqrt{x}, y=x.$

a) $I=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{2\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy$ b) $I=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$

c) $I=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{x}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$ d) $I=\int\limits_0^4 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{y} f(x,y)dx$

Câu 25. Xác định cận của tích phân: $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi các đường: $y=x^2, y=x^3$.

a) $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x^3} f(x,y)dy$ b) $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$

c) $I=\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$ d) $I=\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2}^{x^3} f(x,y)dy$

Câu 26. Đổi thứ tự tính tích phân $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$. Kết quả nào sau đây đúng?

a) $I=\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{y^2}^{y} f(x,y)dx.$ b) $I=\int\limits_1^{1/2} dy\int\limits_y^{y^2} f(x,y)dx.$

c) $I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{y} f(x,y)dx$ d) $I=\int\limits_1^{1/4} dy\int\limits_y^{y^2} f(x,y)dx.$

Câu 27. Đổi thứ tự tính tích phân $I=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx\int\limits_{x^2}^{2} f(x,y)dy$

a) $I=\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$ b) $I=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx.$

c) $I=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$ d) $I=\int\limits_0^2 dy\int\limits_1^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

Câu 28. Đổi thứ tự tính tích phân $I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_2^{4-x} f(x,y)dy.$

a) $I=\int\limits_1^2 dy\int\limits_2^{4-y} f(x,y)dx.$ b) $I=\int\limits_2^3 dy\int\limits_1^{4-y} f(x,y)dx.$

c) $I=\int\limits_2^3 dy\int\limits_{4-y}^{1} f(x,y)dx.$ d) $I=\int\limits_1^3 dy\int\limits_{4-y}^{1} f(x,y)dx.$

Câu 29. Chuyển tích phân sang hệ toạ độ cực $I=\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$, trong đó D là nửa hình tròn $x^2+y^2\le 1, y\ge 0$ ta có:

a) $I=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 rf(r)dr$ b) $I=\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^1 rf(r)dr$

c) $I=\pi\int\limits_0^1 rf(r)dr$ d) $I=\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^1 f(r)dr$

Câu 30. Tính tích phân: $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ trong đó D là hình tròn $x^2+y^2\le 1$.

a) $I=\pi/2$ b) $I=2\pi/3$ c) $I=2\pi/4$ d) $I=2\pi/8$

Câu 31. Tính tích phân: $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)^2dxdy$ trong đó D là hình tròn $x^2+y^2\le 1$.

a) $I=-\pi/3$ b) $I=2\pi/3$ c) $I=2\pi/5$ d) $I=\pi/3$

Câu 32. Tính tích phân: $I=\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ trong đó D là hình tròn $x^2+y^2\le 9$.

a) $I=3\pi$ b) $I=6\pi$ c) $I=9\pi$ d) $I=18\pi$

Câu 33. Tính tích phân kép: $I=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ trong đó D là hình vành khăn $1\le x^2+y^2\le 4$.

a) $I=\pi/2$ b) $I=\pi$ c) $I=2\pi$ d) $I=14\pi/3$

Câu 34. Chuyển tích phân sau sang toạ độ cực: $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, trong đó D là hình tròn $x^2+y^2\le 4y$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

a) $I=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^4 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$ b) $I=\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$

c) $I=\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{4\sin\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$ d) $I=\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{2} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$

Câu 35. Tính tích phân bội hai: $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ trong đó D là phần hình tròn $x^2+y^2 \le 4$ thuộc góc phần tư thứ nhất.

a) $I = 4\pi/3$ b) $I = 2\pi/3$ c) $I = 8\pi/3$ d) $I = 3\pi/4$

Câu 36. Tính tích phân: $I = \iint\limits_D x^2y^3dxdy$ trong đó D là nửa hình tròn $x \ge 0, x^2+y^2 \le 1$.

a) $I = 0$ b) $I = \pi$ c) $I = \pi/2$ d) $I = \pi/4$

Câu 37. Tính tích phân: $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ trong đó D là hình tròn $D: x^2+y^2 \le a^2$.

a) $I = 2\pi a^3$ b) $I = 2\pi a^2$ c) $I = 2\pi a^3/3$ d) $I = 2\pi a^2/3$

Câu 38. Tính tích phân: $I = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ trong đó D là nửa hình tròn $D: x^2+y^2 \le 4, y \ge 0.$

a) $I = 2\pi$ b) $I = 4\pi$ c) $I = 8\pi$ d) $I = \pi$

Câu 39. Tính tích phân: $I = \iint\limits_D xydxdy$ trong đó D là miền định bởi $D: x^2+y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0.$

a) $I = 0$ b) $I = R^4/4$ c) $I = R^4/16$ d) $I = R^4/8$

Câu 40. Tính tích phân: $I = \iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, trong đó D là ¼ hình vành khăn giữa hai đường tròn tâm O (gốc toạ độ) có bán kính lần lượt là 1 và 2, thuộc góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

a) $I = \dfrac{\pi(e^4-e^2)}{2}$ b) $I = \dfrac{\pi(e^4-e^2)}{4}$ c) $I = \dfrac{\pi e(e^3-1)}{4}$ d) $I = \dfrac{\pi e(e^3-1)}{2}$

Câu 41. Gọi S là diện tích miền giới hạn bởi các đường $y = x$ và $y = \sqrt{x}$. Chọn khẳng định đúng?

a) $S = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{x} dy.$ b) $S = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} dx = \int_0^1 dy \int_{y}^{y^2} dx.$

c) $S = \int_0^1 dx \int_0^1 dy = \int_0^1 dy \int_0^1 dx.$ d) Các khẳng định trên đều sai.

Câu 42. Tính diện tích S của miền giới hạn bởi các đường: $y = 3x^2 + x + 1; 7x - y + 1 = 0$

a) S = 1 b) S = 8 c) S = 4 d) S = 1/2

Câu 43. Tính diện tích S của miền giới hạn bởi các đường: $y = x^2 + 2x + 1; x - y + 1 = 0$

a) S = 1/3 b) S = 3 c) S = 1/6 d) S = 6

Câu 44. Gọi S là diện tích của miền giới hạn bởi các đường: $x = 2y; x = y^2/3$. Ta có:

a) S = 3 b) S = 6 c) S = 12 d) S = 24

Câu 45. Tính thể tích miền V giới hạn bởi: $x^2 + y^2 = 1, z = 4, z = 0.$

a) π b) 4π c) 3π d) 20π

Câu 46. Tính thể tích miền V giới hạn bởi: $x^2 + y^2 = 2x, z = 3, \quad z = 0.$

a) π b) 4π c) 3π d) 20π

Câu 47. Tính thể tích miền V giới hạn bởi: $x^2 + y^2 = 2y, z = 3, z = 0.$

a) π b) 4π c) 3π d) 20π

Câu 48. Tính thể tích miền V giới hạn bởi: $x^2 + y^2 = 4y, z = 5, z = 0.$

a) π b) 4π c) 3π d) 20π

TÍCH PHÂN BA LỚP

Câu 49. Xét tích phân bội ba trên hình hộp chữ nhật $\Omega : a_1 \le x \le a_2; b_1 \le y \le b_2; c_1 \le z \le c_2$. Công thức nào sau đây đúng?

a) $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx \int_{b_1}^{b_2} f(y)dy \int_{c_1}^{c_2} f(z)dz$

b) $\iiint\limits_{\Omega} f(x)g(y)h(z)dxdydz = \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)dx \int\limits_{b_1}^{b_2} g(y)dy \int\limits_{c_1}^{c_2} h(z)dz$

c) $\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)dxdydz = \int\limits_{a_1}^{a_2} xdx + \int\limits_{b_1}^{b_2} ydy + \int\limits_{c_1}^{c_2} zdz$

d) $\iiint\limits_{\Omega} xydxdydz = \int\limits_{c_1}^{c_2} xdx \int\limits_{b_1}^{b_2} ydy$

Câu 50. Xác định cận của tích phân $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ trong đó Ω là miền giới hạn bởi các mặt $x=1, y=2, z=1, z=2, x=0, y=0$.

a) $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^2 dy \int\limits_1^2 f(x,y,z)dz$

b) $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_1^2 f(x,y,z)dz$

c) $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_1^2 f(x,y,z)dz$

d) $I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_1^{1-x-2y} f(x,y,z)dz$

Câu 51. Xét tích phân bội ba $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ trong đó Ω là miền trong không gian được giới hạn bởi các mặt $x=0, y=0, x+y=2, z=0, z=2$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

a) $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^2 f(x,y,z)dz$

b) $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_0^2 f(x,y,z)dz$

c) $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_0^{2-x-y} f(x,y,z)dz$

d) $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz$

Câu 52. Tính tích phân $\iiint\limits_{\Omega} 2xydxdydz$, trong đó Ω là miền định bởi $\Omega: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 2.$

a) I = 1/2 b) I = 1 c) I = 1/4 d) I = 2

Câu 53. Tính tích phân $\iiint\limits_{\Omega} 3z^2dxdydz$, trong đó Ω là hình lập phương $\Omega: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1.$

a) I = 3 b) I = 1 c) I = 9 d) I = 6

Câu 54. Tính tích phân bội ba: $\iiint\limits_{\Omega} xye^z dxdydz$, trong đó Ω là miền : $0 \le x \le 2, -2 \le y \le 2, \ln 2 \le z \le \ln 4$.

a) I = 2 b) I = 4 c) I = 8 d) I = 0

Câu 55. Cho Ω là miền $x^2 + y^2 \le 4; 0 \le z \le 2$. Tính $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$

a) $I = 4\pi$ b) $I = 8\pi$ c) $I = \pi$ d) $I = 2\pi$

Câu 56. Cho Ω là miền $x^2 + y^2 \le \pi^2; 0 \le z \le 3$. Tính $\iiint\limits_{\Omega} \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$

a) $I = 0$ b) $I = 4\pi$ c) $I = 4\pi^2$ d) $I = 9\pi$

Câu 57. Tính tích phân $I = \iiint\limits_{\Omega} y^3 dxdydz$, trong đó Ω là hình hộp $-1 \le x \le 0, -1 \le y \le 0, -1 \le z \le 0$

a) I = -1 b) I = -1/4 c) I = 0 d) I = ¼

Câu 58. Tính tích phân $I = \iiint\limits_{\Omega} x \cos y dxdydz$, trong đó Ω là hình hộp $0 \le x \le 2, 0 \le y \le \pi/2, 0 \le z \le 3$

a) I = 2 b) I = 3 c) I = 6 d) I = 12

Câu 59. Tính tích phân $I = \iiint\limits_{\Omega} xy \cos z dxdydz$, trong đó Ω là hình hộp $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le \pi/2$

a) I = 0 b) I = 1 c) I = 1/2 d) I = 2

Câu 60. Tính tích phân $I = \iiint\limits_{\Omega} x(y^2+1)\tan z\; dxdydz$, Ω là miền $-1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le \pi/4$

a) I = 0 b) I = ln2 c) I = 2ln2 d) I = 4ln2

Câu 61. Cho miền Ω giới hạn bởi các mặt: $z = 4 - x^2 - y^2, z = 0$.

Đặt $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$. Chuyển sang tọa độ trụ và xác định cận tích phân, ta có:

a) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{4-r^2} dr \int\limits_0^4 f(r.\cos\varphi, r.\sin\varphi, z)dz$

b) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} rdr \int\limits_0^{4-r^2} f(r.\cos\varphi, r.\sin\varphi, z)dz$

c) $I = \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{4} r^2dr \int\limits_0^{4-r^2} f(r.\cos\varphi, r.\sin\varphi, z)dz$

d) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{4} rdr \int\limits_0^{4-r^2} f(r.\cos\varphi, r.\sin\varphi, z)dz$.

Câu 62. Chuyển tích phân sau sang tọa độ trụ: $I = \iiint\limits_{\Omega} \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, trong đó Ω là miền giới hạn bởi các mặt: $z = 1 - x^2 - y^2$ và $z = -8$.

a) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{3} dr \int\limits_{-8}^{1-r^2} r.\cos rdz$

b) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{3} dr \int\limits_{1-r^2}^{-8} r.\cos rdz$

c) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} dr \int\limits_{1}^{-8} r.\cos rdz$

d) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{3} dr \int\limits_{-8}^{1} r.\cos rdz$

Câu 63. Chuyển tích phân sau sang tọa độ trụ: $I = \iiint\limits_{\Omega} \ln(\sqrt{x^2+y^2}+1)dxdydz$, trong đó Ω là miền giới hạn bởi các mặt: $x^2 + y^2 \le 4, z = 0$ và $z = 3$.

a) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} dr \int\limits_{r^2}^{3} \ln(r+1)dz$

b) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} dr \int\limits_0^{3} r\ln(r+1)dz$

c) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} dr \int\limits_{r^2-4}^{3} r.\ln(r+1)dz$

d) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} dr \int\limits_{r^2-4}^{3} r.\ln(r+1)dz$

Câu 64. Chuyển tích phân sau sang tọa độ trụ và xác định cận tích phân: $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, trong đó Ω là miền giới hạn bởi các mặt: $x^2+y^2=9, z=1$ và $z=2$.

a) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r^2 dr \int\limits_1^2 dz$ b) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r dr \int\limits_1^2 dz$

c) $I = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^9 r^2 dr \int\limits_1^2 dz$ d) $I = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^9 r dr \int\limits_2^1 dz$

Câu 65. Tính tích phân: $I = \iiint\limits_{\Omega} xy^4 z^5\,dxdydz$, trong đó Ω là phần chung của hai hình cầu: $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ và $x^2+y^2+(z-R)^2 \le R^2$.

a) $I=0$ b) $I=\pi R\sqrt{3}$ c) $I=\pi R\sqrt{3}/2$ d) $I=2\pi R\sqrt{3}$

Câu 66. Cho Ω là phần hình nón $z^2 \ge x^2+y^2 (z \ge 0)$ nằm trong hình cầu $x^2+y^2+z^2 \le 4$. Đặt $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$ Chuyển sang tọa độ cầu và xác định cận tích phân, ta có:

a) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta.d\theta \int\limits_0^2 \rho^2 f(\rho^2) d\rho$ b) $I = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta.d\theta \int\limits_0^2 \rho^2 f(\rho^2) d\rho$

c) $I = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta.d\theta \int\limits_0^2 \rho^2 f(\rho^2) d\rho$ d) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} d\theta \int\limits_0^2 \rho^2 f(\rho^2) d\rho$

Câu 67. Chuyển tích phân sau sang tọa độ cầu và xác định cận tích phân: $I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, trong đó Ω là miền: $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$

a) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 r^4 dr \int\limits_0^{\pi} \sin\theta.d\theta$ b) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 r^2 dr \int\limits_0^{\pi} \sin\theta.d\theta$

c) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 r^3 dr \int\limits_0^{\pi/2} d\theta$ d) $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^4 r^4 dr \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta.d\theta$

Câu 68. Chuyển tích phân sau sang tọa độ cầu và xác định cận tích phân: $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, trong đó Ω là miền: $x^2+y^2+z^2 \le 4, z \ge 0$

a) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr \int_0^{\pi} \sin\theta.d\theta$

b) $I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta.d\theta$

c) $I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta.d\theta$

d) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta.d\theta$

Câu 69. Chuyển tích phân sau sang tọa độ cầu và xác định cận tích phân: $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,z)dxdydz$, trong đó Ω là 1/8 hình cầu: $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ thuộc tam diện toạ độ thứ nhất.

a) $I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta.d\theta \int_0^R \rho^2 f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta)d\rho$

b) $I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta.d\theta \int_0^R f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta)d\rho$

c) $I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta.d\theta \int_0^R \rho^2 f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta)d\rho$

d) $I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta.d\theta \int_0^R \rho^2 f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta)d\rho$

Câu 70. Chuyển tích phân sau sang tọa độ cầu và xác định cận tích phân: $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2, z)dxdydz$, trong đó Ω là 1/2 hình cầu: $x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0$

a) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta.d\theta \int_0^R \rho^2 f(\rho^2\sin^2\theta, \rho\cos\theta)d\rho$

b) $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta.d\theta \int_0^R \rho^2 f(\rho^2\sin^2\theta, \rho\cos\theta)d\rho$

c) $I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta.d\theta \int_0^R \rho^2 f(\rho^2\sin^2\theta, \rho\cos\theta)d\rho$

d) $I=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi}\sin\theta.d\theta\int\limits_{-R}^{R}\rho^2 f(\rho^2\sin^2\theta,\rho\cos\theta)d\rho$

Câu 71. Gọi V là thể tích hình cầu bán kính R, khẳng định nào sau đây đúng?

a) $V=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi}\sin\theta.d\theta\int\limits_{0}^{R}\rho^2 d\rho=\frac{4}{3}\pi R^3$ b) $V=2\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin\theta.d\theta\int\limits_{0}^{R}\rho^2 d\rho=\frac{4}{3}\pi R^3$

c) $V=8\int\limits_{0}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin\theta.d\theta\int\limits_{0}^{R}\rho^2 d\rho=\frac{4}{3}\pi R^3$ d) Các khẳng định trên đều đúng.

Câu 72. Gọi V là thể tích miền Ω phần nằm trong mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ được giới hạn bởi mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$, khẳng định nào sau đây đúng?

a) $V=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin\theta.d\theta\int\limits_{0}^{a}\rho^2 d\rho$ b) $V=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi/4}\sin\theta.d\theta\int\limits_{0}^{a}\rho^2 d\rho$

c) $V=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin\theta.d\theta\int\limits_{0}^{a}\rho^2 d\rho$ d) $V=\int\limits_{0}^{\pi}d\varphi\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta.d\theta\int\limits_{0}^{a}\rho^2 d\rho$

Câu 73. Gọi V là thể tích miền Ω được giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2 (0<a<b)$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, khẳng định nào sau đây đúng?

a) $V=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi/4}\sin\theta.d\theta\int\limits_{a}^{b}\rho^2 d\rho$ b) $V=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta.d\theta\int\limits_{a}^{b}\rho^2 d\rho$

c) $V=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin\theta.d\theta\int\limits_{a}^{b}\rho^2 d\rho$ d) $V=\int\limits_{0}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi/4}\sin\theta.d\theta\int\limits_{b-a}^{b}\rho^2 d\rho$

Câu 74. Tính thể tích V của vật thể: $\Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 2x, 0\le z\le y$

a) V = 2/3 b) V = 1 c) V = 1/2 d) V = 1/6

Câu 75. Tính thể tích V của vật thể: $\Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, 0\le z\le 1-2y$

a) V = 1 b) V = 1/2 c) V = 1/3 d) V = 1/6

Câu 76. Tính thể tích V của vật thể: $\Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1-x^2$

a) V = 2/3 b) V = 3/2 c) V = 2 d) V = ½

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 1

Câu 77. Tính tích phân đường $I=\int_C (x+y)dl$, trong đó C có phương trình $x+y=1, 0\le x\le 1.$

a) $I=\sqrt{2}$ b) $I=1$ c) $I=1/2$ d) $I=2$

Câu 78. Tính tích phân đường $I=\int_C (x+y)^2 dl$, trong đó C có phương trình $x+y=a, 0\le x\le a.$

a) $I=a^2$ b) $I=2a^2$ c) $I=a^2\sqrt{2}$ d**)** $I=a^3\sqrt{2}$

Câu 79. Tính tích phân đường $I=\int_C (x-y)dl$, trong đó C có phương trình $x+y=1, 0\le x\le 1.$

a) $I=1$ b) $I=-\sqrt{2}$ c) $I=0$ d) $I=\sqrt{2}$

Câu 80. Tính tích phân $I=\int_C (x-y)dl$, trong đó C là đoạn thẳng nối các điểm $O(0,0)$ và $A(2,2)$.

a) $I=-\sqrt{2}$ b) $I=\sqrt{2}$ c) $I=2$ d) $I=0$

Câu 81. Tính tích phân đường $I=\int_C \sin^5 y dl$, trong đó C có phương trình $y=x, 0\le x\le 2\pi.$

a) $I=\sqrt{2}$ b) $I=0$ c) $I=-\sqrt{2}$ d) $I=\sqrt{2}/6$

Câu 82. Tính tích phân đường $I=\int_K \frac{dl}{x+y}$, trong đó K là đoạn thẳng nối các điểm $A(3,0)$ và $B(0,3)$.

a) $I=2\sqrt{2}$ b) $I=-\sqrt{2}$ c) $I=\sqrt{2}$ d) $I=\sqrt{2}/3$

Câu 83. Tính tích phân đường $I=\int_K \frac{dl}{x+y}$, Với K là đoạn thẳng có phương trình $x+y=a, 0\le x\le a.$

a) $I=\sqrt{2}$ b) $I=\sqrt{a}$ c) $I=-\sqrt{a}$ d) $I=-\sqrt{2}$

Câu 84. Tính tích phân đường $I=\int_K \frac{dl}{x-y}$, Với K là đoạn thẳng nối các điểm $A(2,0)$ và $B(0,-2)$.

a) $I=\sqrt{2}/2$ b) $I=-\sqrt{2}/2$ c) $I=\sqrt{2}$ d) $I=-\sqrt{2}$

Câu 85. Tính tích phân đường $I=\int_C xydl$, Với C là phần đường thẳng $x+y-1=0$ bị chắn giữa hai trục toạ độ.

a) $I=\sqrt{2}/6$ b) $I=5\sqrt{2}/6$ c) $I=\sqrt{2}$ d) $I=-\sqrt{2}/6$

Câu 86. Tính tích phân đường $I=\int_C ydl$, trong đó C có phương trình $x+y=1, 0\le x\le 1.$

a) $I=\sqrt{2}$ b) $I=\sqrt{2}/2$ c) $I=3\sqrt{2}/2$ d) $I=1/2$

Câu 87. Tính tích phân đường $I=\int_C (6x+6y+2)dl$, C có phương trình $3y+4x=0, 0\le x\le 1.$

a) I = 5 b) I = 15 c) I = 5/3 d) I = 1

Câu 88. Tính tích phân đường $I=\int_C (2x+3y^2)dl$, với C là đoạn thẳng nối 2 điểm $A(0,0)$ và $B(1,1)$.

a) $I=2$ b) $I=4\sqrt{2}$ c) $I=\sqrt{2}$ d) $I=2\sqrt{2}$

Câu 89. Tính tích phân đường $I=\int_C (26x+8y)dl$, trong đó C là đoạn thẳng có phương trình $3x+4y+1=0$ nối $A\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ và $B(1,-1)$.

a) I = -10 b) I = 8 c) I = 10 d) I = -8

Câu 90. Tính tích phân đường $I=\int_C (x+y)dl$, trong đó C là đoạn thẳng nối $A(0,1)$ và $B(1,2)$.

a) $I=2$ b) $I=-2$ c) $I=-2\sqrt{2}$ d) $I=2\sqrt{2}$

Câu 91. Tính tích phân đường $I=\int_C (x+y)^2 dl$, trong đó C là đoạn thẳng nối $A(2,0)$ và $B(0,2)$.

a) $I=4$ b) $I=8$ c) $I=4\sqrt{2}$ d) $I=8\sqrt{2}$

Câu 92. Tính tích phân đường $I=\int_C (x+2y)^2 dl$, trong đó C là đoạn thẳng nối $O(0,0)$ và $B(2,2)$.

a) $I=24$ b) $I=48$ c) $I=24\sqrt{2}$ d) $I=48\sqrt{2}$

Câu 93. Tính tích phân đường $I=\int_C \frac{8x}{\sqrt{1+4x^2}}dl$, trong đó C: $y=x^2$ nối điểm $A(0,0)$ và $B(1,1)$.

a) $I=2\sqrt{2}$ b) $I=-2\sqrt{2}$ c) $I=4$ d) $I=0$

Câu 94. Tính tích phân đường $I=\int_C xydl$, trong đó C là đường biên của hình vuông $0\le x\le 2, 0\le y\le 2$.

a) I = 8 b) I = 16 c) I = 24 d) I = 36

Câu 95. Tính tích phân đường $I=\int_C (x+y)dl$, trong đó C là đường biên của hình vuông $0\le x\le 2, 0\le y\le 2$.

a) I = 8 b) I = 16 c) I = 24 d) I = 36

Câu 96. Tính tích phân đường $I=\int_C (x+y)dl$, trong đó C là đường biên của tam giác với các đỉnh $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$.

a) $I = 3\sqrt{2}$ b) $I = \sqrt{2}$ c) $I = 1 + \sqrt{2}$ d) $I = 2$

Câu 97. Tính tích phân đường $I = \int_L xydl$, trong đó L là đường biên của hình chữ nhật với các đỉnh $O(0,0), A(2,0), B(2,1), C(0,1)$.

a) $I = 3$ b) $I = 6$ c) $I = \sqrt{2}$ d) $I = 6\sqrt{2}$

Câu 98. Tính tích phân đường $I = \int_C (x^2 + y^2)dl$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$

a) $I = 2\pi R^3$ b) $I = 2\pi R^3 / 3$ c) $I = \pi R^4 / 3$ d) $I = 2\pi R^2$

Câu 99. Tính tích phân đường $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2} dl$, trong đó C là 1/2 đường tròn $x^2 + y^2 = 4, x \geq 0$

a) $I = 4\pi$ b) $I = 8\pi$ c) $I = 16\pi$ d) $I = 32\pi$

Câu 100. Tính tích phân $I = \int_C (x^2 + y^2)dl$, với C là 1/4 đường tròn $x^2 + y^2 = 16, x \geq 0, y \geq 0$.

a) $I = \pi$ b) $I = 8\pi$ c) $I = 16\pi$ d) $I = 32\pi$

Câu 101. Tính tích phân đường $I = \int_C xydl$, với C là cung tròn $x^2 + y^2 = R^2$ ở góc phần tư thứ nhất.

a) I = 0 b) I = R^3 c) I = $R^3/2$ d) $I = \pi R^4 / 2$

Câu 102. Tính tích phân đường $I = \int_C x^2 dl$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$

a) $I = 2\pi$ b) $I = 4\pi$ c) $I = 16\pi$ d) $I = 8\pi$

Câu 103. Tính tích phân đường $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2} dl$, trong đó C là cung tròn $x^2 + y^2 = R^2$ nằm ở góc phần tư thứ nhất.

a) $I = \pi R^2 / 2$ b) $I = 2\pi R^2$ c) $I = \pi R^2$ d) $I = \pi R^3 / 4$.

Câu 104. Tìm độ dài cung tròn $x^2 + y^2 = 1$ nằm ở phần tư thứ nhất

a) $l = \pi/2$ b) $l = \pi/3$ c) $l = \pi/6$ d) $l = \pi/12$

Câu 105. Tìm độ dài cung tròn $x^2 + y^2 = 9$ nằm ở phần tư thứ nhất

a) $l = 4\pi/3$ b) $l = 3\pi/2$ c) $l = \pi/6$ d) $l = \pi/12$

Câu 106. Tìm độ dài cung tròn $x^2 + y^2 = 4$ thỏa điều kiện $y \ge x$

a) $l = 2\pi$ b) $l = 4\pi/3$ c) $l = 4\pi$ d) $l = 6\pi$

Câu 107. Tìm độ dài cung tròn $x^2 + y^2 = 4$ thỏa điều kiện $y \ge x, y \ge -x$

a) $l = \pi$ b) $l = 2\pi$ c) $l = 4\pi$ d) $l = 6\pi$

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2

Câu 108. Cho điểm $A(0,1)$ và $B(1,1)$, tính tích phân $I = \int\limits_{AB} (2xy + 4x^3 + 1)dx - (2xy + 4y^3 - 1)dy$

Lấy theo đường $y = 1$ đi từ điểm A đến B.

a) I = 0 b) I = -4 c) I = 3 d) I = -3

Câu 109. Tính tích phân đường $I = \int\limits_{AB} (2xy + 4x^3 + 1)dx - (2xy + 4y^3 - 1)dy$ lấy theo đường $x = 2$ đi từ điểm $A(2,1)$ đến $B(2,0)$.

a) I = 2 b) I = -2 c) I = 3 d) I = -3

Câu 110. Cho điểm $A(0,1)$ và $B(1,0)$, tính tích phân đường $I = \int\limits_{AB} (y + 2x + 1)dx + (y - 1)dy$ lấy theo đường $y = -x + 1$ đi từ điểm A đến B.

a) I = 4 b) I = 3 c) I = 1 d) I = 2

Câu 111. Cho điểm $A(-1,1)$, tính tích phân đường $I = \int\limits_{OA} 2xydx + x^2dy$ lấy theo đường $x + y = 0$ từ gốc toạ độ O đến A.

a) I = 0 b) I = 1 c) I = 2 d) I = 3

Câu 112. Tính tích phân đường $I = \int_{OA} (xy^2 - 1)dx + (yx^2 + 3)dy$ lấy theo đường $y = 2x^2$ từ gốc toạ độ O đến $A(1,2)$.

a) I = 7 b) I = 9 c) I = 6 d) I = 0

Câu 113. Tính $I = \int_{OA} 3xydx - (3x^2 - 2y)dy$ lấy theo đoạn thẳng nối từ $O(0,0)$ đến $A(-1,-1)$.

a) I = -1 b) I = 1 c) I = -2 d) I = 2

Câu 114. Tính $I = \int_{OA} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$ lấy theo đoạn thẳng nối từ $O(0,0)$ đến $A(3,0)$.

a) I = 9 b) I = 8 c) I = 27 d) I = 18

Câu 115. Tính tích phân đường loại 2: $I = \int_{AB} 2xydx + x^2 dy$ ở đây AB là cung parabol $y = x^2$ từ $A(-1,1)$ đến $B(1,1)$.

a) I = 0 b) I = 2 c) I = 3/4 d) I = -3/4

Câu 116. Tính tích phân đường loại 2: $I = \int_{OA} x(4y+1)dx - 2(x^2+1)dy$ ở đây OA là cung parabol $y = \dfrac{x^2}{4}$ từ $O(0,0)$ đến $A(2,1)$.

a) I = 0 b) I = 1 c) I = -2 d) I = 2

Câu 117. Tính $I = \int_{OA} (y^2 - 2xy)dx + (2xy - x^2)dy$ lấy theo đoạn thẳng nối từ $O(0,0)$ đến $A(1,2)$.

a) I = 0 b) I = 1 c) I = 2 d) I = 3

Câu 118. Tính $I = \int_{OA} 4x(x^2 - y)dx - 2(x^2 - y)dy$ lấy theo đoạn thẳng nối từ $O(0,0)$ đến $A(2,1)$.

a) I = 0 b) I = 3 c) I = 6 d) I = 9

Câu 119. Tính tích phân đường loại 2: $I=\int_{OA} x(4y+1)dx+2(x^2+1)dy$ ở đây OA là cung parabol $y=\dfrac{x^2}{4}$ từ $O(0,0)$ đến $A(2,1)$.

a) I = 0 b) I = 4 c) I = 8 d) I = 12

Câu 120. Tính tích phân đường loại 2: $I=\int_{OA} ydx+(y^3+x)dy$ ở đây OA là cung $y^2=2x$ từ $O(0,0)$ đến $A(2,2)$.

a) I = -4 b) I = 4 c) I = 8 d) I = 0

Câu 121. Tính tích phân đường $I=\int_{AB} 2xydx+(x^2+2y)dy$ lấy theo đường $y=2.\sin\dfrac{\pi x}{4}+1$ từ $A(0,1)$ đến $B(2,3)$.

a) I = 10 b) I = 20 c) I = 5 d) I = 1

Câu 122. Tính tích phân đường $I=\int_{AB} ydx+xdy$ lấy theo đường $y=2x^2+1$ từ $A(0,1)$ đến $B(1,3)$.

a) I = 3 b) I = 4 c) I = 1 d) I = 2

Câu 123. Cho điểm $A(2,2)$, tính tích phân đường

$$I=\int_{OA}(2xy^2+3x+2)dx+(2yx^2+y-2)dy$$

Lấy theo đường $y=\dfrac{x^2}{2}$ từ gốc toạ độ O đến A.

a) I = 0 b) I = 8 c) I = 16 d) I = 24

Câu 124. Tính tích phân đường $I=\int_{AB} ydx+xdy$. AB lấy theo đường $x^2+y^2=1$ nằm ở phần tư thứ nhất theo chiều dương .

a) I = 0 b) I = 4 c) I = 1 d) I = 2

Câu 125. Tính tích phân đường $I = \int_{AB} ydx - xdy$. AB lấy theo đường $x^2 + y^2 = 1$ nằm ở phần tư thứ hai theo chiều dương .

a) $I = -\frac{\pi}{2}$ b) $I = \pi$ c) $l = 7\pi$ d) $l = \pi/2$

Câu 126. Tính tích phân đường $I = \int_{AB} xdy + ydx$. AB lấy theo đường $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ nằm ở phần tư thứ nhất theo chiều dương .

a) I = 0 b) I = 4 c) I = 1 d) I = 2

Câu 127. Tính tích phân đường $I = \int_{AB} xdy - ydx$. AB lấy theo đường $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ nằm ở phần tư thứ hai theo chiều dương.

a) $I = -\frac{\pi}{2}$ b) $I = \pi$ c) $l = 2\pi$ d) $l = \pi/2$

Câu 128. Tính tích phân đường $I = \int_{AB} 2xdx + dy$. AB lấy theo đường $x^2 + y^2 = 1$ nằm ở phần tư thứ nhất theo chiều dương.

a) I = 3/2 b) I = 0 c) I = 1 d) I = 2

Câu 129. Cho C là biên của hình vuông $D = [-1,1] \times [0,2]$. Tính $I = \oint_C y\sin xdx - \cos xdy$

a) I = 0 b) I = 2 c) I = 4 d) I = 1

Câu 130. Cho C là biên của hình chữ nhật $D = [0,1] \times [0,2]$. Tính $I = \oint_C xy^2dx + 3x^2ydy$

a) I = 0 b) I = 2 c) I = 4 d) I = 1

Câu 131. Cho C là đường tròn tâm O bán kính 1. Tính $I = \oint_C (x + y^2 - 3)dx + (2xy + 3x + 2)dy$

a) $I = 2\pi$ b) $I = 3\pi$ c) I = 2 d) I = 3

Câu 132. Cho C là đường tròn tâm O bán kính R. Đặt: $I = \oint_C (x+y+3)dx + (x-3y+5)dy$

Khẳng định nào sau đây đúng?

a) $I = 0$ b) $I = 4$

c) $I = \iint_D (2x-2y+5)dxdy$ d) $I = \iint_D (-4y+2)dxdy$.

Câu 133. Cho C là đường tròn tâm O bán kính R. Tính $I = \oint_C (3x+y^2)dx + 2x(y+1)dy$

a) $I = \pi R^2$ b) $I = 2\pi R^2$ c) I = 0 d) $I = 2\pi R$

Câu 134. Cho $C: x^2 + y^2 = 16$. Tính tích phân đường $I = \oint_C (y+3\sin x)dx + (2x+\cos y)dy$

a) $I = -\pi$ b) $I = \pi$ c) $I = -16\pi$ d) $I = 16\pi$

Câu 135. Cho C là đường tròn $x^2 + y^2 = 9$. Tính tích phân đường loại 2 $I = \oint_C ydx + xdy$

a) $I = 6\pi$ b) $I = 3\pi$ c) $I = 9\pi$ d) $I = 0$

Câu 136. Cho C là elíp $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$. Tính tích phân $I = \oint_C (3y-4\cos x)dx + (4x+5\cos y)dy$

a) $I = 0$ b) $I = \pi$ c) $I = 4\pi$ d) $I = -4\pi$

Câu 137. Cho C: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Tính tích phân $I = \oint_C e^y dx + x(2+e^y)dy$

a) $I = 4\pi$ b) $I = 8\pi$ c) $I = -4\pi$ d) $I = 0$

Câu 138. Cho C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$. Tính tích phân $I = \oint_C (5y-4\cos x)dx + (4y+5\cos y)dy$

a) $I = 0$ b) $I = -4\pi$ c) $I = 10\pi$ d) $I = -20\pi$

Câu 139. Cho C là biên của hình chữ nhật $1 \le x \le 3, 0 \le y \le 3$. Tính tích phân đường loại 2 $I = \oint_C (x+2y)dx + (x-2y)dy$

a) I = -5 b) I = -6 c) I = 6 d) I = 5

Câu 140. Cho C là elíp $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Tính tích phân đường loại 2: $I=\oint_C (2x+y)dx+(3x-2y)dy$

a) $I=-24\pi$ b) $I=-12\pi$ c) $I=12\pi$ d) $I=24\pi$

Câu 141. Cho C là elíp $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a,b>0\right)$. Tính tích phân $I=\oint_C (2x+y)dx+(2x-y)dy$

a) $I=\pi ab$ b) $I=2\pi ab$ c) $I=ab$ d) $I=0$

Câu 142. Cho C là elíp $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Tính tích phân $I=\oint_C y(\sin x+1)dx+(x-\cos x)dy$

a) $I=6\pi$ b) $I=36\pi$ c) $I=0$ d) $I=\pi$

Câu 143. Cho C là nửa đường tròn tâm O bán kính 2 nằm phía trên trục hoành Ox từ $A\left(-2,0\right)$ đến $B\left(2,0\right)$. Tính tích phân đường $I=\int_C x^2dx+y^2dy$

a) $I=13/3$ b) $I=16/3$ c) $I=-4\pi$ d) $I=0$

Câu 144. Tính tích phân đường $I=\int_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx+xdy$

a) I = 2 b) I = 4 c) I = 6 d) I = 8

Câu 145. Tính tích phân đường $I=\int_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx+ydy$

a) I = 12 b) I = -12 c) I = -8 d) I = 8

Câu 146. Tính tích phân $I=\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$

a) I = 2 b) I = -2 c) I = -4 d) I = 4

Câu 147. Cho biết hàm $U=x^3+y^3+2xy+4x+1$ có vi phân toàn phần là

$dU=(3x^2+2y+4)dx+(3y^2+2x)dy$

Tính $I = \int\limits_{(0,1)}^{(1,0)} (3x^2 + 2y + 4)dx + (3y^2 + 2x)dy$

a) I = -3 b) I = 3 c) I = -4 d) I = 4

Câu 148. Cho biết hàm $U = xe^y - ye^x + 2x + 1$ có vi phân toàn phần là $dU = (e^y - ye^x + 2)dx + (xe^y - e^x)dy$, Tính $I = \int\limits_{(1,1)}^{(1,0)} (e^y - ye^x + 2)dx + (xe^y - e^x)dy$

a) I = -1 b) I = 1 c) I = -2 d) I = 2

Câu 149. Tích phân nào sau đây không phụ thuộc vào các đường trơn từng khúc nối hai điểm A và B?

a) $I = \int\limits_{AB} (4xy^3 + 2x)dx + (y^4 + 2y - x)dy$

b) $I = \int\limits_{AB} (4xy^3 + 2x)dx - (y^4 + 2y - x)dy$

c) $I = \int\limits_{AB} (4xy^3 + 2x - 1)dx + (y^4 + 6x^2y^2 - 1)dy$

d) $I = \int\limits_{AB} (4xy^3 + 2x - 1)dx - (y^4 + 6x^2y^2 - 1)dy$

Câu 150. Tích phân nào sau đây không phụ thuộc vào các đường trơn từng khúc nối hai điểm A và B?

a) $I = \int\limits_{AB} x(x^2dx - y^2)dy$ b) $I = \int\limits_{AB} x^2dx + y^2dy$

c) $I = \int\limits_{AB} x^2dy - y^2dx$ d) $I = \int\limits_{AB} x^2dy + y^2dx$

Câu 151. Tích phân nào sau đây không phụ thuộc vào các đường trơn từng khúc nối hai điểm A và B?

a) $I = \int\limits_{AB} (tgy - y^2tg^2x - y^2)dx + (x - xtg^2y - 2ytgx)dy$

b) $I = \int\limits_{AB} (tgy - y^2tg^2x + y^2)dx + (x + xtg^2y - 2ytgx)dy$

c) $I=\int\limits_{AB}(tgy-y^2tg^2x-y^2)dx+(x+xtg^2y+2ytgx)dy$

d) $I=\int\limits_{AB}(tgy-y^2tg^2x-y^2)dx+(x+xtg^2y-2ytgx)dy$

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

Câu 152. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'+\dfrac{y}{x+1}=0$

a) $(x+1)y=C$ b) $(x+1)+y=C$

c) $C_1(x+1)+C_2y=0$ d) $(x+1)^2+y^2=C$

Câu 153. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $\dfrac{dx}{\sin y}+\dfrac{dy}{\cos x}=0$

a) $\sin x+\cos y=C$ b) $\sin x-\cos y=C$

c) $C_1\sin x+C_2\cos y=0$ d) $C_1\cos x+C_2\sin y=0$

Câu 154. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $\dfrac{dx}{1+x^2}+\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$

a) $\arcsin x+\arctan y=C$ b) $\arcsin x-\arctan y=C$

c) $\arctan x+\arcsin y=C$ d) $\arctan x+\ln|y+\sqrt{1-y^2}|=C$

Câu 155. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $2xydx+dy=0$

a) $x^2y+y=C$ b) $xy^2+y=C$

c) $2xy+1=C$ d) $x^2+\ln|y|=C$.

Câu 156. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $(1+y^2)dx+x\ln xdy=0$

a) $(1+y^2)x+x\ln x=C$ b) $\ln|\ln x|+\arcsin y=C$

c) $\ln|\ln x|+\sqrt{1+y^2}=C$ d) $\ln|\ln x|+\arctan y=C$

Câu 157. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân
$\sqrt{(1-y^2)}dx + x\ln x dy = 0$

a) $x\sqrt{1+y^2} + xy\ln x = C$ b) $\ln|\ln x| + \arcsin y = C$

c) $\ln|\ln x| + \sqrt{1-y^2} = C$ d) $\ln|\ln x| + \arctan y = C$

Câu 158. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân
$\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}dx + \sqrt{1+x^2}dy = 0$

a) $\arctan x - \sqrt{1-y^2} = C$ b) $\arctan x - \ln|1-y^2| = C$

c) $\ln|x+\sqrt{1+x^2}| - \sqrt{1-y^2} = C$ d) $\ln|x+\sqrt{1+x^2}| - \ln(1-y^2) = C$

Câu 159. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân
$\sqrt{1+y^2}dx + xy\ln x dy = 0$

a) $x\sqrt{1+y^2} + xy\ln x = C$ b) $\ln|\ln x| + \arcsin y = C$

c) $\ln|\ln x| + \sqrt{1+y^2} = C$ d) $\ln|\ln x| + \arctan y = C$

Câu 160. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân
$x(y^2+1)dx + y(x^2+1)dy = 0$

a) $\arctan(x^2+1) + \arctan(y^2+1) = 0$ b) $\arctan(x+y) = C$

c) $\arctan x + \arctan y = C$ d) $\ln(x^2+1) + \ln(y^2+1) = C$

Câu 161. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $xdy - 2y\ln x dx = 0$

a) $y = \ln^2 x + C$ b) $y = \dfrac{\ln x}{x} + C$

c) $\ln|y| = x(1+\ln x) + C$ d) $\ln|y| = \ln^2 x + C$.

Câu 162. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$

a) $\arctan(x^2-1)+\arctan(y^2-1)=C$ b) $\operatorname{arccot}(x^2-1)+\operatorname{arccot}(y^2-1)=C$

c) $\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=C$ d) $\arctan x+\arctan y=C$

Câu 163. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân
$x\sqrt{y^2+1}dx+y\sqrt{x^2+1}dy=0$

a) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{y^2+1}}=C$ b) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(y+\sqrt{y^2+1})=C$

c) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(y+\sqrt{y^2+1})=C$ d) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=C$

Câu 164. Phương trình vi phân nào sau đây là phương trình đẳng cấp?

a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+3y+5}{x+5}$ b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$

c) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ d) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2y+y^2x}{x^2+y^2}$

Câu 165. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'=\dfrac{y}{x}-\dfrac{y^2}{x^2}$

a) $y=\dfrac{-x}{C+\ln|x|}$ b) $y=\dfrac{x}{C+\ln|x|}$

c) $y=\dfrac{x}{C-\ln|x|}$ d) $y=\dfrac{-x}{C\ln|x|}$.

Câu 166. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $xy'=y+x$

a) $y=x(C+\ln|x|)$ b) $y=x(C-\ln|x|)$

c) $y=x/(C+\ln|x|)$ d) $y=x/(C-\ln|x|)$.

Câu 167. Phương trình vi phân nào sau đây là phương trình vi phân toàn phần?

a) $(ye^x-xe^x)dx+(e^x-y^2\sin y)dy=0$

b) $(ye^x + xe^x)dx + (e^x + x^2 \sin y)dy = 0$

c) $(ye^x + xe^y)dx + (e^x + y^2 \sin y)dy = 0$

d) $(ye^x - xe^y)dx + (e^x - y^2 \sin y)dy = 0$

Câu 168. Phương trình vi phân nào sau đây là phương trình vi phân toàn phần?

a) $(y\sin x - \cos y)dx + (\cos x - x\sin y)dy = 0$

b) $(y\sin x - \cos y)dx - (\cos x - x\sin y)dy = 0$.

c) $(y\sin x + \cos y)dx + (\cos x + x\sin y)dy = 0$.

d) $(y\sin x + \cos y)dx - (\cos x - x\sin y)dy = 0$.

Câu 169. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $ydx + xdy = 0$

a) $xy = C$ b) $y = Cx$ c) $x + y = C$ d) $x - y = C$.

Câu 170. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $(y + e^x)dx + xdy = 0$

a) $xy - e^x = C$ b) $xy + e^x = C$ c) $x + y + e^x = C$ d) $x - y + e^x = C$.

Câu 171. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân:
$(e^y + 1)dx + (xe^y + 1)dy = 0$

a) $xy - xe^y = C$ b) $xy + xe^y = C$ c) $x + y + xe^y = C$ d) $x - y + xe^y = C$.

Câu 172. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân:
$(1 + \cos y)dx - (1 + x\sin y)dy = 0$

a) $xy - x\cos y = C$ b) $xy + x\cos y = C$.

c) $y - x + x\cos y = C$ d) $x - y + x\cos y = C$

Câu 173. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân
$\left(x - \dfrac{x}{y}\right)dy + (y - \ln y)dx = 0$

a) $x\ln y + xy = C$ b) $x\ln y - xy = C$.

c) $y\ln x + xy = C$.　　d) $y\ln x - xy = C$.

Câu 174. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:
$(\cos y - 2y\sin 2x)dx - (x\sin y - \cos 2x)dy = 0$

a) $x\cos y - y\cos 2x = C$.　　b) $x\cos y + y\cos 2x = C$

c) $x\sin y - y\sin 2x = C$　　d) $x\sin y + y\sin 2x = C$.

Câu 175. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' + 2\dfrac{y}{x} = 0$

a) $y = \dfrac{C}{x^2}$.　　b) $y = \dfrac{2C}{x^3}$.　　c) $y = \dfrac{C}{x}$　　d) $y = -\dfrac{C}{x}$.

Câu 176. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $(1+x^2)\arctan x.y' - y = 0$

a) $y(x + x^3/3) - y^2/2 = C$　　b) $y = C.e^{1/\arctan^2 x}$

c) $y = C.\arctan x$　　d) $y = C/\arctan x$.

Câu 177. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'\cos^2 x + y = 0$

a) $y = Ce^{-\tan x}$　　b) $y = Ce^{\tan x}$　　c) $y = C + e^{\tan x}$　　d) $y = e^{C.\tan x}$.

Câu 178. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' - 3y = 0$

a) $y = Ce^{-3x}$　　b) $y = C - e^{3x}$　　c) $y = Ce^{3x}$　　d) $y = C + e^{3x}$.

Câu 179. Phương trình $y' - y\cos x = 0$ có nghiệm tổng quát là:

a) $y = Cxe^{-\cos x}$　　b) $y = Cx + e^{\sin x}$　　c) $y = C + e^{-\sin x}$　　d) $y = C.e^{\sin x}$.

Câu 180. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $(1+\sin x)y' - y\cos x = 0$

a) $y(x + \cos x) - \sin x.y^2/2 = C$　　b) $y = C\ln(1+\sin x)$

c) $y = C.(1+\sin x)$　　d) $y = C/(1+\sin x)$.

Câu 181. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân
$y'(1+\tan x) - (1+\tan^2 x)y = 0$

a) $y(x-\ln|\cos x|)-(\tan x)x.y^2/2=C$ b) $y=C(1+\tan x)$

c) $y=C/(1+\tan x)$ d) $y=C\ln(1+\tan x)$

Câu 182. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'\sin x=4y\cos x$

a) $y=C.\cot x$ b) $y=C+4\tan x$ c) $y=C.\sin^4 x$ d) $y=C+\sin^4 x$

Câu 183. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $(1+\sin x)y'+y\cos x=0$

a) $y(x+\cos x)-\sin x.y^2/2=C$ b) $y=C\ln(1+\sin x)$

c) $y=C.(1+\sin x)$ d) $y=C/(1+\sin x)$.

Câu 184. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'(x^2+x+1)=y(2x+1)$

a) $y=C+(x^2+x+1)$ b) $y=C/(x^2+x+1)$

c) $y=C.(x^2+x+1)$ c) $y=C.(2x+1)$

Câu 185. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'(1-e^x)-e^x y=0$

a) $y(x-e^x)-e^x y^2/2=C$ b) $y=C\ln(1-e^x)$

c) $y=C(1-e^x)$ d) $y=C/(1-e^x)$

Câu 186. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'\sqrt{4+x^2}+y=0$

a) $y=C(x+\sqrt{4+x^2})$ b) $y\arctan(x/2)=C$

c) $y\arcsin(x/2)=C$ d) $y(x+\sqrt{4+x^2})=C$.

Câu 187. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $xy'-y=3x^4$

a) $y=x^4+C/x$ b) $y=x^4+Cx$ c) $y=x^3+C$ d) $y=9x^2+C$

Câu 188. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $xy'-2y=2x^3$

a) $y=x^4+C/x$ b) $y=x^4+Cx$ c) $y=2x^3+Cx^2$ d) $y=-2x^3+Cx^2$

Câu 189. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $xy'+2y=3x$

a) $y=x+C/x^2$ b) $y=x+Cx^2$ c) $y=x^3+Cx^2$ d) $y=x^3+C/x^2$

Câu 190. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $xy'+2y=5x^3$

a) $y=x+C/x^2$ b) $y=x+Cx^2$ c) $y=x^3+Cx^2$ d) $y=x^3+C/x^2$

Câu 191. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'-2y=e^{2x}$

a) $y=(-x+C)e^{2x}$ b) $y=(x+C)e^{2x}$ c) $y=(-x+C)e^{x}$ d) $y=(x+C)e^{x}$

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

Câu 192. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y''+3y'/x=0$

a) $y=C_1x^3+C_2$ b) $y=C_1/x^3+C_2$

c) $y=C_1/x^2+C_2$ d) $y=C_1\ln|x|+C_2$

Câu 193. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y''+y'/x=0$

a) $y=C_1x+C_2$ b) $y=C_1/x+C_2$

c) $y=C_1/x^2+C_2$ d) $y=C_1\ln|x|+C_2$

Câu 194. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y''+4y'/x=0$

a) $y=C_1/x^3+C_2$ b) $y=C_1x^3+C_2$

c) $y=C_1x^2+C_2$ d) $y=C_1/x^2+C_2$

Câu 195. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y''-2y'/x=0$

a) $y=C_1x^2$ b) $y=C_1x^3+C_2$

c) $y=C_1x^3+C_2$ d) $y=C_1x^2+C_2/x$.

Câu 196. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y''=6x$

a) $y = x^2 + C_1x + C_2$ b) $y = x^3 + C_1x + C_2$

c) $y = x^2 + Cx$ d) $y = x^3 + Cx$

Câu 197. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' = \cos x$

a) $y = \sin x + Cx$ b) $y = \cos x + C$

c) $y = -\sin x + C_1x + C_2$ d) $y = -cosx + C_1x + C_2$

Câu 198. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' = e^{-x/2}$

a) $y = 2e^{-x/2} + C$ b) $y = -4e^{-x/2} + C_1x + C_2$

c) $y = 2e^{x/2} + C_1x + C_2$ d) $y = 4e^{-x/2} + C_1x + C_2$

Câu 199. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y''\cos^2 x - 1 = 0$

a) $y = -\ln|\sin x| + C_1x + C_2$ c) $y = \ln|\sin x| + C_1x + C_2$

c) $y = -\ln|\cos x| + C_1x + C_2$ d) $y = \ln|\cos x| + C_1x + C_2$

Câu 200. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $e^{2x}y'' - 4 = 0$

a) $y = 2e^{-2x} + C_1x + C_2$ b) $y = 2e^{2x} + C_1x + C_2$

c) $y = e^{-2x} + C_1x + C_2$ d) $y = e^{2x} + C_1x + C_2$

Câu 201. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - \dfrac{4x}{(4+x^2)^2} = 0$

a) $y = -arctg(x/2) + C_1x + C_2$ b) $y = \ln(x^2 + 4) + C_1x + C_2$

c) $y = \dfrac{1}{4+x^2} + C_1x + C_2$ d) $y = \ln\dfrac{x-2}{x+2} + C_1x + C_2$

Câu 202. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' + \dfrac{1}{\cos^2 x} = 0$

a) $y = \ln|\cos x| + C_1x + C_2$ b) $y = -\ln|\cos x| + C_1x + C_2$

c) $y = \frac{tg^3 x}{3} + C_1 x + C_2$ d) $y = \ln|\sin x| + C_1 x + C_2$

Câu 203. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 2y' + 5y = 0$

a) $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ b) $y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

c) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ d) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$

Câu 204. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' + 4y = 0$

a) $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ b) $y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

c) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ d) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

Câu 205. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 3y' + 2y = 0$

a) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ b) $y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

c) $y = e^{x}(C_1 e^{x} + C_2 e^{2x})$ d) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$

Câu 206. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - y = 0$

a) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$ b) $y = (C_1 x + C_2) e^{x}$

c) $y = C_1 + C_2 e^{x}$ d) $y = C_1 + C_2 \sin x$

Câu 207. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 8y' + 41y = 0$

a) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x}$ b) $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-5x}$

c) $y = e^{4x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$ d) $y = e^{5x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$

Câu 208. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 6y' + 9y = 0$

a) $y = e^{3x}(xC_1 + C_2)$ b) $y = e^{-3x}(xC_1 + C_2)$

c) $y = C_1 e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ d) $y = (C_1 + C_2) e^{3x}$

Câu 209. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $4y'' - 16y = 0$

a) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$ b) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{2x}$

c) $y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$ d) $y = e^{-2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

Câu 210. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 22y' + 121y = 0$

a) $y = e^{11x}(xC_1 + C_2)$ b) $y = e^{-11x}(xC_1 + C_2)$

c) $y = C_1e^{11x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$ d) $y = (C_1 + C_2)e^{11x}$

Câu 211. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' + 4y' + 3y = 0$

a) $y = C_1e^{x} + C_2e^{-3x}$ b) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$

c) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$ d) $y = C_1e^{x} + C_2e^{3x}$

Câu 212. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 2y' + 10y = 0$

a) $y = e^{x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$ b) $y = e^{3x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$

c) $y = e^{-x}(C_1\cos 3x - C_2\sin 3x)$ d) $y = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$

Câu 213. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 3y' + 2y = 0$

a) $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x}$ b) $y = C_1e^{-x} + xC_2e^{-2x}$

c) $y = e^{x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$ d) $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$

Câu 214. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' - 2y' + 2y = 2e^{x}$

a) $y = e^{x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + 2e^{x}$ b) $y = e^{x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + e^{x}$

c) $y = e^{x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + 2e^{-x}$ d) $y = e^{x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) - 2e^{x}$

Câu 215. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' + y' = 2\sin x + 3\cos x$

a) $y = \frac{1}{2}\left(\sin x - 5\cos x\right) - C_1e^{-x} + C_2$

b) $y = \frac{1}{2}(\sin x + 5\cos x) - C_1 e^{-x} + C_2$

c) $y = \frac{1}{2}(\sin x - 5\cos x) - C_1 e^{x} + C_2$

d) $y = \frac{1}{2}(\sin x + 5\cos x) - C_1 e^{x} + C_2$

Câu 216. Phương trình $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(x^3 - 4x + 2)$ có một nghiệm riêng dang:

a) $y = x^2 e^{2x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$

b) $y = x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$

c) $y = e^{2x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$

d) $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Câu 217. Phương trình $y'' + 4y' = 2e^{2x}$ có một nghiệm riêng dạng:

a) $y = (x + A)e^{2x}$ b) $y = Ax + B$ c) $y = Ae^{2x}$ d) $y = Ax$

Câu 218. Phương trình $y'' - 8y' + 12y = e^{2x}(x^2 - 1)$ có một nghiệm riêng dạng:

a) $y = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$ b) $y = x(Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$

c) $y = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$ d) $y = (Ax^2 + B)e^{2x}$

Câu 219. Phương trình $y'' + 3y' + 2y = e^{x}x^2$ có một nghiệm riêng dạng:

a) $y = (e^{-x} + e^{-2x})(Ax^2 + Bx + C)$ b) $y = e^{-2x}(Ax^2 + Bx + C)$

c) $y = e^{x}(Ax^2 + Bx + C)$ d) $y = xe^{x}(Ax^2 + Bx + C)$

Câu 220. Phương trình $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}x^2$ có một nghiệm riêng dạng

a) $y = (e^{-x} + e^{-2x})(Ax^2 + Bx + C)$ b) $y = xe^{-2x} + Ax^2 + Bx + C$

c) $y = xe^{-x}(Ax^2 + Bx + C)$ d) $y = e^{-x}(Ax^2 + Bx + C)$

Câu 221. Phương trình $y''+4y'+4y=\cos x$ có một nghiệm riêng dạng

a) $y=A\sin x$

b) $y=e^{-2x}(A\sin x+B\cos x)$

c) $y=e^{2x}(A\sin x+B\cos x)$

d) $y=A\sin x+B\cos x$

Câu 222. Phương trình $y''-4y'+3y=e^{3x}\sin x$ có một nghiệm riêng dạng:

a) $y=A\sin x+B\cos x+C$

b) $y=e^{3x}(A\sin x+B\cos x)$

c) $y=xe^{3x}(A\sin x+B\cos x)$

d) $y=x(A\sin x+B\cos x)$

Câu 223. Phương trình $y''+6y'+8y=2x\sin x+\cos x$ có một nghiệm riêng dạng:

a) $y=-2x((Ax+B)\sin x-4x(Cx+D)\cos x)$

b) $y=e-2x(Ax+B)\sin x$

c) $y=(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x$

d) $y=e^{-4x}(Ax+B)\cos x$

Câu 224. Phương trình $y''-6y'+10y=xe^{3x}\sin x$ có một nghiệm riêng dạng:

a) $y=xe^{-2x}(Ax+B)\sin x$

b) $y=e^{3x}[(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x)]$

c) $y=xe^{3x}[(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x)]$

d) $y=xe^{3x}(A\sin x+B\cos x)$

Câu 225. Phương trình $y''-6y'+8y=e^{2x}\sin 4x$ có một nghiệm riêng dạng:

a) $y=e^{2x}(A\sin 4x+B\cos 4x)$

b) $y=xe^{2x}(A\sin 4x+B\cos 4x)$

c) $y=x^2e^{2x}(A\sin 4x+B\cos 4x)$

d) $y=A\sin 4x+B\cos 4x+C$.

ĐÁP ÁN

1*C*	2*D*	3*C*	4*D*	5*C*	6*A*	7*B*	8*A*	9*A*	10*B*	11*C*	12*D*	13*A*	14*B*	15*D*
16*C*	17*C*	18*B*	19*D*	20*A*	21*A*	22*D*	23*D*	24*C*	25*B*	26*C*	27*C*	28*B*	29*C*	30*A*
31*D*	32*B*	33*D*	34*C*	35*A*	36*A*	37*C*	38*B*	39*D*	40*C*	41*D*	42*C*	43*C*	44*C*	45*B*
46*C*	47*C*	48*D*	49*B*	50*B*	51*B*	52*B*	53*B*	54*C*	55*B*	56*A*	57*B*	58*C*	59*B*	60*A*
61*B*	62*A*	63*B*	64*A*	65*A*	66*A*	67*A*	68*D*	69*A*	70*A*	71*D*	72*B*	73*D*	74*A*	75*D*
76*A*	77*A*	78*D*	79*C*	80*D*	81*B*	82*C*	83*A*	84*C*	85*A*	86*B*	87*C*	88*D*	89*C*	90*D*
91*D*	92*C*	93*C*	94*A*	95*B*	96*C*	97*A*	98*A*	99*A*	100*D*	101*C*	102*C*	103*A*	104*B*	105*B*
106*A*	107*A*	108*C*	109*A*	110*D*	111*B*	112*A*	113*A*	114*A*	115*A*	116*A*	117*C*	118*D*	119*D*	120*C*
121*B*	122*D*	123*D*	124*A*	125*A*	126*A*	127*B*	128*B*	129*A*	130*C*	131*B*	132*A*	133*B*	134*D*	135*D*
136*C*	137*B*	138*D*	139*B*	140*C*	141*A*	142*C*	143*D*	144*D*	145*A*	146*B*	147*D*	148*B*	149*C*	150*B*
151*D*	152*A*	153*B*	154*C*	155*D*	156*D*	157*B*	158*C*	159*C*	160*D*	161*D*	162*C*	163*D*	164*C*	165*B*
166*A*	167*A*	168*B*	169*A*	170*B*	171*C*	172*D*	173*B*	174*B*	175*A*	176*C*	177*A*	178*C*	179*D*	180*C*
181*B*	182*C*	183*D*	184*C*	185*D*	186*D*	187*B*	188*C*	189*A*	190*D*	191*B*	192*C*	193*D*	194*A*	195*B*
196*B*	197*D*	198*D*	199*C*	200*C*	201*A*	202*A*	203*B*	204*C*	205*D*	206*A*	207*C*	208*A*	209*A*	210*A*
211*B*	212*A*	213*A*	214*A*	215*A*	216*B*	217*C*	218*B*	219*C*	220*C*	221*D*	222*B*	223*C*	224*C*	225*A*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đỗ Công Khanh, *Giải tích hàm nhiều biến*, NXB Đại học quốc gia Tp.HCM.

[2] Nguyễn Đình Trí, *Toán cao cấp (tập 3 (lý thuyết +bài tập))*, NXB giáo dục.

[3] Phan Đình Phùng, Nguyễn Văn Hiếu, Lê Thị Nhẫn, *Giáo trình toán cao cấp*, 2010.

Mục lục