BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
DỰ ÁN ĐÀO TẠO GIÁO VIÊN THCS
LOAN No 1718 - VIE (SF)

VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ biên) - HOÀNG TRỌNG THÁI

HÌNH HỌC CAO CẤP

SP
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ biên) – HOÀNG TRỌNG THÁI

HÌNH HỌC CAO CẤP

Giáo trình Cao đẳng Sư phạm

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc ĐINH NGỌC BẢO
Tổng biên tập LÊ A

Người nhận xét:
GS. TS ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS TẠ MÂN

Biên tập nội dung:
PHẠM NGUYỄN THU TRANG

Trình bày bìa:
PHẠM VIỆT QUANG

Kĩ thuật vi tính:
TRỊNH CAO KHẢI

Mã số: 01.01.123/411.ĐH.2005

HÌNH HỌC CAO CẤP

In 3100 cuốn, khổ 17 × 24cm tại Công ti In Thái Nguyên.
Giấy phép xuất bản số 123-452/XB-QLXB, kí ngày 1/4/2005.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2005.

Mục lục

Lời nói đầu

Môn Hình học cao cấp được trình bày một cách có hệ thống nhằm cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản được rút gọn từ chương trình Hình học cao cấp ĐHSP, bao gồm: Kiến thức mở đầu về Cơ sở hình học (Phương pháp tiên đề), không gian afin, không gian Ơ-clit 2, 3 chiều và không gian xạ ảnh 2 chiều.

Ngoài ra, chú trọng việc vận dụng nội dung và phương pháp của Hình học hiện đại để soi sáng Hình học sơ cấp đã học từ bậc THCS, khái quát hoá các kiến thức về vectơ, toạ độ đã học trong môn Hình giải tích và các kiến thức được trình bày một cách hệ thống dựa trên các cấu trúc đại số đã học như cấu trúc Nhóm và Không gian vectơ trong các môn Đại số đại cương và Đại số tuyến tính.

Qua giáo trình, sinh viên có thể:

- Rèn luyện tư duy lôgic trong Hình học. Phát triển trí tưởng tượng không gian và rèn luyện năng lực mở rộng, khái quát hoá, trừu tượng hoá trong Hình học.
- Rèn luyện các phương pháp giải các bài toán Hình học (phương pháp tổng hợp, phương pháp vectơ–toạ độ, phương pháp biến hình).
- Nắm được ý tưởng cơ bản về quan điểm cấu trúc và vận dụng các kiến thức của Đại số đại cương và Đại số tuyến tính trong Hình học. Phân loại Hình học theo quan điểm nhóm đem lại cho sinh viên một cách nhìn tổng quan về Hình học.
- Sinh viên thấy được sự mở rộng trong toán học là một trong các phương pháp tạo ra những công cụ sắc bén, hiệu quả để nghiên cứu toán học. Phân biệt các bài toán afin, Ơ-clit, xạ ảnh và biết áp dụng phương pháp afin, phương pháp xạ ảnh để giải các bài toán Ơ-clit và ngược lại, qua đó vận dụng trong giảng dạy Hình học ở THCS.

Các tác giả

Chương 1

PHƯƠNG PHÁP TIÊN ĐỀ

§1. VÀI NÉT LỊCH SỬ

1. Hình học trước thời Ơ–clit (Euclid)

Hình học được ra đời như là một khoa học thực nghiệm về đo đạc ruộng đất, độ dài các đường, đo diện tích các mảnh đất, đo thể tích các thùng chứa... Con người thời Cổ đại ở vùng Babilon và Ai Cập đã biết cách tính diện tích tam giác, hình chữ nhật, hình thang, hình tròn, tính thể tích hình hộp chữ nhật, hình chóp...

Từ thế kỉ thứ VI đến thế kỉ III trước Công nguyên, các nhà Hình học ở Hy Lạp đã dần dần làm cho môn Hình học trở thành một môn khoa học suy diễn. Hình học không còn là môn khoa học thực nghiệm. Để xác lập sự đúng đắn của một sự kiện hình học nào đó, thay vì kiểm tra bằng thực nghiệm, người ta đã chứng minh nó bằng một chuỗi lập luận hợp lí.


Ơ-clit

Nhiều tác phẩm Hình học đã xuất hiện vào thời kì này với những tên tuổi lớn như Ac-si-mét (Archimèdes), A-pô-lô-ni-ux (Apôllônius), Ptô–lê–mê (Ptolémée), Pi-ta-go (Pythagore). Tất cả những công trình đó đã được tổng kết lại một cách đầy đủ trong tác phẩm bất hủ của Ơ–clit (Euclid) có tên là "Cơ bản".

Ơ–clit là nhà hình học xuất sắc của Hy Lạp cổ. Ông dạy học và sống ở Alexandrie vào khoảng từ năm 330 đến năm 275 trước Công nguyên (*ảnh trên*).

2. Về tác phẩm "Cơ bản" của Ơ-clit

Tác phẩm "Cơ bản" của Ơ-clit gồm 13 cuốn, bao gồm những kiến thức thuần tuý hình học, hoặc những kiến thức về số học được trình bày dưới dạng hình học. Trong 13 cuốn của "Cơ bản" có 8 cuốn dành cho hình học phẳng và hình học không gian. Kiến thức trong những cuốn sách này bao gồm toàn bộ nội dung môn Hình học sơ cấp, mà một phần của nó được dạy trong các trường phổ thông hiện nay. Chúng ta thấy trong đó có: các tam giác bằng nhau, các hình đồng dạng, định lí Pitago, lí thuyết đo diện tích, đường tròn và các tính chất, đa giác đều và cách dựng, diện tích hình tròn, hình cầu, hình trụ, hình nón, về các khối đa diện và đặc biệt là về năm loại khối đa diện đều...

Về phương pháp, chúng ta thấy Ơ-clit đã cố gắng xây dựng môn Hình học bằng cách thức mà ngày nay chúng ta gọi là phương pháp tiên đề.

Trong cuốn sách đầu tiên, Ơ-clit đã nêu ra 23 định nghĩa của các khái niệm: điểm, đường, đường thẳng, mặt, mặt phẳng, đường thẳng song song... Chẳng hạn, ông đã định nghĩa:

- *Điểm là cái gì không có thành phần.*
- *Đường là cái gì có bề dài mà không có bề rộng.*
- *Mút của đường là điểm.*
- *Đường thẳng là đường mà trên đó các điểm được sắp đặt giống nhau...*

Sau các định nghĩa, Ơ-clit đã trình bày các "định đề" và "tiên đề", là những mệnh đề mà sự đúng đắn của nó được thừa nhận, không chứng minh.

Có năm định đề nói về Hình học. Đó là:

1) *Từ một điểm bất kì này đến một điểm bất kì khác có thể vẽ được một đường thẳng.*
2) *Một đường thẳng có thể kéo dài mãi về cả hai phía.*
3) *Với một điểm bất kì làm tâm và với bán kính tuỳ ý, có thể vẽ được một đường tròn.*
4) *Tất cả các góc vuông đều bằng nhau.*

5) Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng khác tạo thành hai góc trong cùng phía có tổng bé hơn hai vuông thì hai đường thẳng đó cắt nhau về phía có hai góc đó.

Có năm tiên đề, nội dung rộng hơn, dùng cho các suy luận toán học nói chung :

1) Hai cái cùng bằng cái thứ ba thì bằng nhau.

2) Thêm những cái bằng nhau vào những cái bằng nhau thì được những cái bằng nhau.

3) Bớt những cái bằng nhau từ những cái bằng nhau thì được những cái bằng nhau.

4) Các hình chồng khít lên nhau thì bằng nhau.

5) Toàn thể lớn hơn bộ phận.

Sau khi đã có các định nghĩa, các định đề và tiên đề, Ơ–clit đã trình bày các định lí và chứng minh các định lí đó. Các chứng minh này đều cố gắng dựa vào các định lí đã có trước, hoặc các tiên đề và định đề.

3. Các thiếu sót của bộ "Cơ bản"

Có thể nói Ơ–clit là người đầu tiên xây dựng Hình học bằng phương pháp tiên đề. Nhiều chứng minh của ông rất hay, vẫn còn dùng được cho đến ngày nay. Tuy nhiên, dưới cái nhìn hiện đại, tập "Cơ bản" còn mắc phải một số thiếu sót. Cụ thể là:

- Ơ–clit tham vọng định nghĩa tất cả các khái niệm, điều đó là không thể. Mỗi khái niệm đều được định nghĩa dựa vào các khái niệm có trước, bởi vậy chúng ta phải xuất phát từ một số khái niệm không được định nghĩa, ngày nay chúng ta gọi các khái niệm như vậy là *khái niệm cơ bản*. Các khái niệm đó có thể hiểu bằng nhiều cách cụ thể khác nhau, miễn sao chúng thoả mãn các tiên đề.
- Các định đề và tiên đề của Ơ–clit vừa thừa lại vừa thiếu. Định đề "*Tất cả góc vuông đều bằng nhau*" là thừa vì có thể chứng minh được. Ơ–clit lại thiếu quá nhiều định đề và tiên đề nên trong nhiều chứng minh ông phải dựa vào trực giác. Ta lấy ví dụ, khi nêu cách dựng tam giác đều, ông đã làm như sau: "*Lấy hai điểm A và B. Dựng đường tròn tâm A đi qua B và đường tròn tâm B đi qua A. Gọi C là một trong hai giao điểm của hai đường tròn*

đó thì tam giác ABC là tam giác đều". Cách dựng trên là đúng, nếu ta chứng minh được hai đường tròn nói trên cắt nhau. Nhưng bằng hệ thống tiên đề của Ơ–clit điều đó không thể chứng minh được, bởi vậy Ơ–clit đã thừa nhận sự tồn tại của điểm C một cách trực giác.

4. Về định đề 5 của Ơ–clit

Định đề 5 của Ơ–clit đóng vai trò đặc biệt trong lịch sử phát triển Hình học nói riêng và Toán học nói chung. Khi nghiên cứu tập "Cơ bản", các nhà toán học đều băn khoăn: Định đề 5 có thật là một định đề hay không? Hay là nó có thể được chứng minh như là một định lí? Có vẻ như chính Ơ–clit cũng băn khoăn như vậy, bởi vì ông đã cố trì hoãn việc áp dụng định đề đó vào việc chứng minh các định lí. Cho mãi đến định lí thứ 29, khi không thể dừng được, ông mới sử dụng nó vào chứng minh.

Thế là rất nhiều nhà toán học đã cố gắng tìm cách chứng minh định đề 5. Có thể nói, trong lịch sử Toán học chưa bao giờ có một vấn đề được nhiều người nghiên cứu đến thế, và giải quyết nó lại cần nhiều thời gian đến thế (từ thế kỉ II trước Công nguyên cho đến giữa thế kỉ XIX). Hầu hết các nhà toán học đều thất bại. Họ cứ tưởng là mình đã chứng minh được định đề 5, nhưng thực ra thì không phải, vì trong khi chứng minh họ đã sử dụng một điều tương đương với định đề đó. Chẳng hạn, Pro–cluyt (Proclus Diadochus, 410 – 485) trong chứng minh của mình đã sử dụng mệnh đề: "*Nếu hai đường thẳng a và b song song thì khoảng cách từ bất kì điểm nào của đường thẳng a tới đường thẳng b đều bằng nhau*". Mệnh đề này có vẻ hiển nhiên, nhưng để chứng minh nó, ta lại phải dùng định đề 5, vòng luẩn quẩn!

Nhiều nhà toán học đã định chứng minh định đề 5 bằng phương pháp phản chứng. Hãy giả sử định đề 5 không đúng, rồi cố rút ra từ đó những điều vô lí, những mâu thuẫn. Nhưng họ cũng không thành công, vì họ tưởng đã tìm ra cái vô lí, nhưng thực ra lại chẳng vô lí chút nào!

5. Sự ra đời của Hình học phi Ơ–clit

Cuối cùng, vào ngày 6–2–1826 vấn đề đã được giải quyết bởi nhà toán học người Nga, Lô–ba–sep–xki (1792–1856), khi ông trình bày nghiên cứu của mình tại khoa Toán–Lí trường Đại học Ka–zan (Nga).

Lô–ba–sep–xki đã chứng minh rằng: *không thể chứng minh được định đề 5*. Định đề 5 đúng là một định đề chứ không phải là một định lí. Ông đã giữ nguyên các định đề của Ơ–clit và thay định đề 5 bằng một định đề phủ định, và dựa vào đó chứng minh các định lí của hệ thống Hình học mới. Ngày nay chúng ta gọi Hình học mà Lô–ba–sep–xki xây dựng là Hình học phi Ơ–clit hay Hình học Lô–ba–sep–xki. Tất nhiên nhiều kết quả của Hình học Lô–ba–sep–xki hoàn toàn trái ngược với Hình học Ơ–clit. Chẳng hạn trong Hình học của Lô–ba–sep–xki: *tổng các góc của tam giác bé hơn 180^0; có tam giác mà tổng số đo các góc bé tuỳ ý, diện tích tam giác bị chặn trên; quỹ tích những điểm cách đều một đường thẳng không phải là cặp đường thẳng*... Tuy nhiên trong nội bộ của hình học đó không hề có mâu thuẫn nào...

C.F. Gauss
(1777 –1855)

Lô–ba–sep–xki
(1792 – 18[illegible]

Gần như cùng đồng thời với Lô–ba–sep–xki, nhà toán học Hung–ga–ri là Bô–ly–ai (Bolyai Janos, 1802–1860) và nhà toán học Đức Gao–xơ (C.F.Gauss, 1777–1855) cũng đã đạt được những kết quả chủ yếu về Hình học phi Ơ–clit.

§2. PHƯƠNG PHÁP TIÊN ĐỀ

1. Hệ tiên đề của một lí thuyết toán học

Năm 1899, Hin–be (Hilbert) cho ra đời tác phẩm "Cơ sở hình học", trong đó đã xây dựng lại Hình học một cách chính xác bằng phương pháp tiên đề.

Để xây dựng một lí thuyết Toán học nào đó bằng phương pháp tiên đề, chúng ta phải tiến hành theo trình tự sau đây:

a) Nêu ra các "khái niệm cơ bản". Đó là những khái niệm không được định nghĩa, ta có thể hiểu thế nào cũng được, miễn là cách hiểu đó phù hợp với tiên đề mà sau đó sẽ nêu ra. Bởi vậy, các tiên đề về thực chất là các định nghĩa gián tiếp của các khái niệm cơ bản. Các khái niệm khác, không phải là khái niệm cơ bản đều phải định nghĩa thông qua các khái niệm cơ bản. Ví dụ: Khái niệm "đường tròn" được định nghĩa thông qua khái niệm cơ bản là "điểm" và "khoảng cách" giữa hai điểm. Việc lựa chọn khái niệm nào làm khái niệm cơ bản là tuỳ thuộc vào mỗi tác giả.

b) Nêu ra một hệ thống các tiên đề. Đó là những mệnh đề phát biểu về các khái niệm cơ bản, được thừa nhận là đúng mà không chứng minh. Cố nhiên hệ thống các tiên đề phải thỏa mãn một số yêu cầu mà dưới đây chúng ta sẽ đề cập đến.

Các mệnh đề khác không phải là tiên đề đều phải được chứng minh.

Hệ thống các khái niệm cơ bản và các tiên đề về chúng gọi là một hệ tiên đề.

2. Một số ví dụ

2.1. *Ví dụ 1. Hệ tiên đề H bao gồm*

- Khái niệm cơ bản: *Vectơ, sự bằng nhau của hai vectơ (kí hiệu là =) và phép cộng hai vectơ.* Phép cộng hai vectơ: Với hai vectơ A và B bất kì có vectơ duy nhất kí hiệu A + B.
- Các tiên đề:

1) Với mọi hai vectơ A và B ta có: $A + B = B + A$

2) Với mọi ba vectơ A, B, C ta có: $A + (B + C) = (A + B) + C$

3) Có vectơ, gọi là vectơ- không và kí hiệu là 0, sao cho với mọi vectơ A có

$$A = 0 + A$$

4) Với mọi vectơ A có vectơ A' sao cho $A + A' = 0$*, vectơ A' gọi là vectơ đối của vectơ A.*

Từ hệ tiên đề trên, ta có thể chứng minh các định lí sau đây:

Định lí 1: *Vectơ–không là duy nhất.*

Chứng minh: Giả sử có hai vectơ –không là 0 và 0'. Khi đó ta có :

0' = 0 + 0' (vì 0 là vectơ – không)

= 0' + 0 (tiên đề 1) = 0 (vì 0' là vectơ –không).

Vậy: 0' = 0.

Định lí 2: *Vectơ đối của vectơ A là duy nhất.*

Chứng minh: Giả sử vectơ A có hai vectơ đối là A' và A", khi đó :

A' = A' + 0 (tiên đề 3)

= A' + (A + A") (vì A" là vectơ đối của vectơ A)

= (A' + A) + A" (theo tiên đề 2)

= 0 + A" (vì A' là vectơ đối của A) = A" (theo tiên đề 2).

2.2. *Ví dụ 2. Hệ tiên đề K bao gồm*

– ***Khái niệm cơ bản***: *Điểm, đường thẳng, quan hệ liên thuộc giữa điểm và đường thẳng: điểm thuộc đường thẳng,* còn nói *điểm nằm trên đường thẳng, hoặc đường thẳng đi qua điểm.*

Các tiên đề:

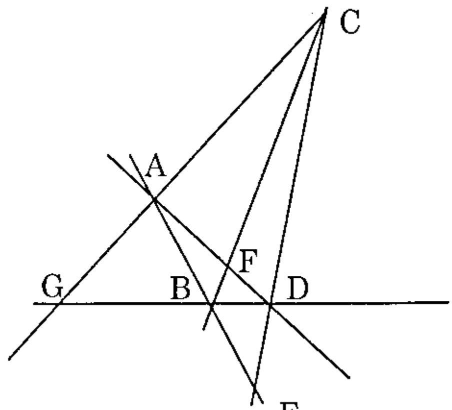
1) *Qua hai điểm phân biệt có một đường thẳng duy nhất.*
2) *Hai đường thẳng phân biệt có một điểm chung duy nhất.*
3) *Có ít nhất bốn điểm trong đó không có ba điểm nào cùng thuộc một đường thẳng.*

Từ hệ tiên đề trên ta có thể chứng minh một số định lí sau đây :

Định lí: *Có ít nhất là 7 điểm và 7 đường thẳng.*

Chứng minh: Để dễ hình dung ta có thể minh hoạ bằng hình vẽ. Tuy nhiên lập luận của ta không dựa vào hình vẽ đó. Theo tiên đề 4 có ít nhất bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng.

Theo tiên đề 1) ta có các đường thẳng AB, CD, AC, BD, AD, CB. Hai đường thẳng AB và CD không trùng nhau vì nếu không thì ba điểm A, B, C thẳng hàng, vậy chúng phân biệt nên theo tiên đề 2, chúng phải có điểm chung mà ta kí hiệu là E.



Hình 1

Tương tự hai đường thẳng AC và BD có điểm chung G, hai đường thẳng AD và CB có điểm chung F. Ta dễ thấy rằng ba điểm E, G, F đôi một phân biệt. Thật vậy nếu E trùng với F thì hai đường thẳng AB và AD cùng đi qua điểm E và điểm A nên trùng nhau, vậy ba điểm A, B, D thẳng hàng, vô lí.

Vậy ta có ít nhất là 7 điểm : A, B, C, D, E, F, G.

Chú ý rằng có thể ba điểm E, F, G nằm trên một đường thẳng (ta không đủ lí do để bác bỏ điều đó), nên ta có ít nhất 7 đường thẳng: AB, CD, AC, BD, AD, CB và EF.

3. Mô hình của hệ tiên đề

Giả sử H là hệ tiên đề của một lí thuyết toán học T. Như đã biết, các khái niệm cơ bản của H không được định nghĩa. Bây giờ ta hãy gán cho các khái niệm cơ bản một nội dung cụ thể nào đó, sao cho các tiên đề của H đều thoả mãn. Khi đó ta nói rằng ta có một mô hình của hệ tiên đề H.

3.1. *Mô hình của hệ tiên đề H* (trong ví dụ 2.1)

Xây dựng các mô hình của H như sau:

Mô hình 1: Mỗi vectơ được hiểu là một số thực, cộng hai vectơ được hiểu là cộng hai số thực. *Ta cũng có thể lấy vectơ là phần tử của một nhóm cộng giao hoán bất kì.*

Mô hình 2: Trong mặt phẳng lấy đường thẳng cố định d. Các vectơ hiểu là phép biến hình đồng nhất I của mặt phẳng, và một phép đối xứng Đ của mặt phẳng qua đường thẳng d. Vậy trong mô hình này chỉ có hai vectơ. Phép cộng hai vectơ được hiểu là thực hiện liên tiếp hai phép biến hình của mặt phẳng.

Trong mô hình này ta có: I + I = I ; Đ + Đ = I ; Đ + I = I + Đ = Đ.

Vectơ – không chính là I, vectơ đối của I là I và của Đ là Đ.

Chúng ta có thể dễ tìm thêm nhiều mô hình khác nữa của H.

3.2. *Mô hình của hệ tiên đề K* (trong ví dụ 2.2)

Xét tập hợp $\{0;\ 1\}$ gồm hai số 0 và 1 với phép cộng xác định như sau:

$$0 + 0 = 0,\ 1 + 1 = 0,\ 1 + 0 = 0 + 1 = 1$$

Bây giờ ta gọi *điểm* là một trong các bộ số sau đây :

(1; 0; 0) ; (0; 1; 0) ; (0; 0; 1), (1; 1; 0) ; (1; 0; 1) ; (0; 1; 1) ; (1; 1; 1)

Gọi *đường thẳng* là một trong các phương trình sau đây :

$$x_1 = 0\ ;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0\ ;\ x_1 + x_2 = 0;$$

$$x_1 + x_3 = 0;\ x_2 + x_3 = 0;\ x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Một điểm (tức là một bộ số) *gọi là thuộc một đường thẳng* (tức là một phương trình) nếu bộ số đó thoả mãn phương trình. Chẳng hạn, điểm (1; 1; 0) thuộc đường thẳng $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ vì 1 + 1 + 0 = 0 (theo định nghĩa phép cộng trong tập hợp đang xét), điểm đó còn thuộc đường thẳng $x_1 + x_2 = 0$ và đường thẳng $x_3 = 0$.

Chúng ta dễ dàng thấy rằng mọi tiên đề của K đều thoả mãn. Đặc biệt ta có thể chỉ ra bốn điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, ví dụ bốn điểm sau đây (1; 0; 0), (0; 1; 0), (1 ;1 ; 0) và (1; 1; 1).

4. Các yêu cầu của một hệ tiên đề

Bất kì một hệ tiên đề nào cũng phải thoả mãn một yêu cầu cơ bản là không mâu thuẫn. Ngoài ra còn có yêu cầu về tính độc lập và tính đầy đủ.

4.1. *Sự phi mâu thuẫn của một hệ tiên đề*

Một hệ tiên đề gọi là *phi mâu thuẫn* nếu từ các tiên đề của nó không thể chứng minh được hai định lí phủ định nhau (mâu thuẫn nhau). Để chứng minh sự phi mâu thuẫn của một hệ tiên đề ta dùng phương pháp xây dựng mô hình. Nếu ta đã xây dựng được một mô hình của hệ tiên đề H bằng những khái niệm của một lí thuyết toán học có sẵn L, thì mỗi định lí suy ra từ H sẽ trở thành một định lí trong L. Như vậy nếu lí thuyết L phi mâu thuẫn thì hệ tiên đề H cũng phi mâu thuẫn.

Tóm lại: Hệ tiên đề H phi mâu thuẫn nếu có thể tìm thấy mô hình của H trong một lí thuyết toán học đã biết là phi mâu thuẫn.

4.2. *Sự độc lập của hệ tiên đề*

Tiên đề A của hệ tiên đề phi mâu thuẫn H gọi là *độc lập* đối với H nếu A không thể chứng minh được từ những tiên đề còn lại của H. Hệ tiên đề H gọi là độc lập nếu mọi tiên đề của H đều độc lập đối với H.

Nếu A là một tiên đề của H, ta thành lập hệ tiên đề mới H' gồm các tiên đề của H nhưng thay tiên đề A bằng tiên đề A' phủ định của tiên đề A. Rõ ràng là: tiên đề A độc lập đối với H khi và chỉ khi hệ tiên đề H' phi mâu thuẫn.

Ví dụ: Nếu hình học Lô-ba-sep-xki phi mâu thuẫn thì định đề 5 không chứng minh được từ các tiên đề còn lại của Hình học Ơ-clit.

Tất nhiên nếu tiên đề A không độc lập đối với hệ tiên đề H thì nó thừa, và có thể loại bỏ nó trong danh sách các tiên đề.

4.3. *Sự đầy đủ của hệ tiên đề*

Một hệ tiên đề phi mâu thuẫn H gọi là *đầy đủ* nếu một mệnh đề A nào đó nói về các khái niệm của H đều có thể chứng minh được hoặc bác bỏ được. Nói khác đi, từ hệ tiên đề H có thể chứng minh được mệnh đề A hay chứng minh được mệnh đề A' phủ định của A.

Nếu hệ tiên đề H không đầy đủ, nghĩa là có mệnh đề A và mệnh đề A' phủ định nó đều không chứng minh được từ H, thì khi thêm tiên đề A hoặc A' vào H ta được cả hai hệ tiên đề phi mâu thuẫn.

Giả sử hệ tiên đề phi mâu thuẫn H có hai mô hình M_1 và M_2. Mô hình đó gọi là đẳng cấu với nhau nếu có một sự tương ứng 1–1 giữa các khái niệm cơ bản của M_1 với các khái niệm cơ bản của M_2 sao cho nếu các khái niệm cơ bản nào đó của M_1 thoả mãn một tiên đề của H thì các khái niệm cơ bản tương ứng của M_2 cũng thoả mãn tiên đề đó. Người ta chứng minh được rằng: một hệ tiên đề phi mâu thuẫn H là đầy đủ khi và chỉ khi mọi mô hình của nó đều đẳng cấu với nhau.

§3. CÁC HỆ TIÊN ĐỀ CỦA HÌNH HỌC Ơ-CLIT 3 CHIỀU

1. Hệ tiên đề của Hin–be (Hilbert)

Trong tác phẩm "Cơ sở hình học" của mình, lần đầu tiên nhà toán học Đức Hin–be (Hilbert, 1862–1943) đã đưa ra một hệ tiên đề của Hình học Ơ–clit và ông chứng minh sự phi mâu thuẫn và đầy đủ của nó. Ngoài ra, ông còn chứng minh sự độc lập của một số tiên đề quan trọng.

1.1. Hệ tiên đề Hin–be

Khái niệm cơ bản của hệ tiên đề Hinbe là: *Điểm, đường thẳng, mặt phẳng*; *Các quan hệ "thuộc"* (*điểm thuộc* đường thẳng, điểm *thuộc* mặt phẳng), *quan hệ "điểm ở giữa hai điểm"*, *và quan hệ "bằng nhau" của hai đoạn thẳng.*

Các tiên đề: Các tiên đề được chia thành năm nhóm.

Nhóm I: Các tiên đề về thuộc

I.1. *Bất kì hai điểm phân biệt nào cũng thuộc một và chỉ một đường thẳng.*

I.2. *Mỗi đường thẳng thuộc ít nhất hai điểm. Có ít nhất là ba điểm không cùng thuộc một đường thẳng.*

I.3. *Bất kì ba điểm nào, nếu không cùng thuộc một đường thẳng, đều thuộc một và chỉ một mặt phẳng.*

I.4. *Nếu hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng a và mặt* *phẳng P thì mọi điểm thuộc đường thẳng a đều thuộc mặt phẳng P.*

Nhóm II: Các tiên đề về thứ tự

II.1. *Nếu điểm B ở giữa điểm A và điểm C thì A, B, C là ba điểm khác nhau cùng thuộc một đường thẳng và điểm B cũng ở giữa điểm C và điểm A.*

II.2. *Cho bất kì hai điểm phân biệt A, C nào, bao giờ cũng có ít nhất một điểm B sao cho C ở giữa A và B.*

II.3. *Trong bất kì ba điểm phân biệt nào cùng thuộc một đường thẳng, có không quá một điểm ở giữa hai điểm kia.*

II.4. *Tiên đề Pát (Pasch): Trên mặt phẳng cho đường thẳng a và ba điểm A, B, C không thuộc a. Nếu đường thẳng a có một điểm ở giữa A và B thì nó cũng có một điểm ở giữa A và C hoặc ở giữa B và C.*

(Moritz Pasch, 1843–1930, là nhà toán học Ba Lan).

Nhóm III: Các tiên đề về bằng nhau

III.1. Nếu đã cho đoạn thẳng AB thì từ trên nửa đường thẳng có gốc A' bao giờ cũng có điểm B', sao cho đoạn thẳng AB bằng đoạn thẳng A'B', kí hiệu là AB = A'B'. Đối với mọi đoạn thẳng AB ta đều có: AB = BA.

III.2. Nếu AB = A'B' và A'B' = A"B" thì AB = A"B"

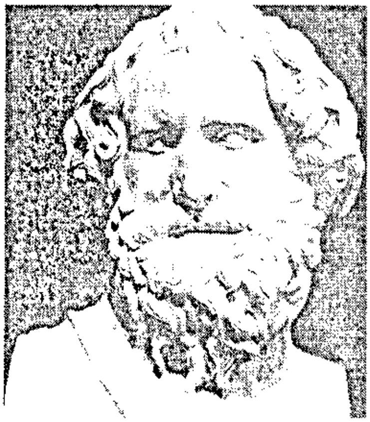
III.3. Cho điểm B ở giữa hai điểm A và C, cho điểm B' ở giữa hai điểm A' và C', Nếu AB = A'B' và BC = B'C' thì AC = A'C'.

III.4. Cho góc xOy, cho tia O'x' và một nửa mặt phẳng xác định bởi đường thẳng chứa tia O'x'. Khi đó trên nửa mặt phẳng ấy có duy nhất tia O'y' sao cho góc xOy bằng góc x'O'y' : $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$. *Đối với mọi góc xOy ta đều có* $\widehat{xOy} = \widehat{yOx}$.

III.5. Cho hai tam giác ABC và A'B'C'. Nếu AB = A'B', AC = A'C' và $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ *thì* BC = B'C' *và* $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ *và* $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$. *Trong trường hợp đó ta nói hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau và viết* $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Nhóm IV. Các tiên đề về liên tục

IV.1. Tiên đề Ac–si–mét (Archimedes). Cho hai đoạn thẳng AB và CD bất kì. Khi đó có một số hữu hạn các điểm A_1, A_2, A_3..., A_n thuộc nửa đường thẳng AB sao cho điểm A_1 ở giữa A và A_2 ; A_2 ở giữa A_1 và A_3 ;... ; A_{n-1} ở giữa A_{n-2} và A_n ; còn điểm B ở giữa A_{n-1} và A_n hoặc trùng với A_n và các đoạn thẳng A A_1, A_1A_2, ... $A_{n-1}A_n$ đều bằng đoạn thẳng CD.



(Nhà toán học Archimedes, 287–212 trước Công nguyên, ở Syracuse, Sicily, Italia).

IV.2. Tiên đề Căng–to (Cantor)

Trên đường thẳng a cho một dãy vô hạn các đoạn thẳng A_1B_1, A_2B_2, ... , A_nB_n, ... sao cho:

- *Đoạn thẳng A_nB_n nằm trong đoạn thẳng $A_{n-1}B_{n-1}$*
- *Cho bất kì đoạn thẳng CD nào, bao giờ cũng có số tự nhiên n để đoạn thẳng A_nB_n bé hơn đoạn thẳng CD.*

Khi đó có một điểm I duy nhất thuộc mọi đoạn thẳng A_nB_n.

(Nhà toán học Cantor, 1845–1918, sinh tại St Petersburg, Nga, làm việc tại Đức).

Nhóm V: Tiên đề Ơ–clit về đường song song

Trong mặt phẳng cho đường thẳng a và điểm A không thuộc a thì trong mặt phẳng đó có không quá một đường thẳng b đi qua A và không có điểm chung với a (đường thẳng b như thế gọi là song song với đường thẳng a).

1.2. Mô hình số học của hệ tiên đề Hin–be

Ta có thể chứng minh rằng hệ tiên đề Hin–be phi mâu thuẫn nếu lí thuyết số học phi mâu thuẫn. Muốn vậy ta xây dựng một mô hình của hệ tiên đề đó bằng các khái niệm của số học.

Mô hình đó như sau.

- Điểm là bất kì bộ ba số thực có thứ tự (x; y; z).
- Mặt phẳng là bất kì một phương trình bậc nhất dạng $ax + by + cz + d = 0$ với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Hai phương trình tương đương được xem là hai mặt phẳng trùng nhau.
- Đường thẳng d là bất kì hệ hai phương trình bậc nhất dạng:

$$\begin{cases} ax + by + xz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, $a'^2 + b'^2 + c'^2 \neq 0$, và $a : b : c \neq a' : b' : c'$

Hai hệ phương trình như thế xem là hai đường thẳng trùng nhau khi và chỉ khi chúng là hai hệ phương trình tương đương.

- Điểm $(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng $ax + by + cz + d = 0$ nếu $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$
- Điểm $(x_0; y_0; z_0)$ thuộc đường thẳng d nếu $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ (*)
- Điểm $(x_2; y_2; z_2)$ ở giữa điểm $(x_1; y_1; z_1)$ và điểm $(x_3; y_3; z_3)$ nếu chúng cùng thuộc một đường thẳng và có một trong các điều kiện sau đây :

$$x_1 < x_2 < x_3 \text{ hoặc } y_1 < y_2 < y_3 \text{ hoặc } z_1 < z_2 < z_3$$

- Khái niệm bằng nhau của hai đoạn thẳng được xây dựng thông qua khái niệm độ dài của đoạn thẳng: nếu hai mút là $(x_0; y_0; z_0)$ và $(x_1; y_1; z_1)$ thì độ dài của nó được định nghĩa là:

$$d = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}$$

Hai đoạn thẳng được xem là bằng nhau nếu chúng có độ dài bằng nhau.

- Khái niệm bằng nhau của góc được xây dựng thông qua khái niệm số đo góc. Giả sử có góc với đỉnh O và hai cạnh của góc lần lượt đi qua hai điểm A và B. Số đo φ của góc đó được xác định như sau:

Nếu O, A, B thẳng hàng và O ở giữa A và B thì $\varphi = \pi$.

Nếu O, A, B thẳng hàng và O không ở giữa A và B thì $\varphi = 0$.

Nếu O, A, B không thẳng hàng thì số φ được cho bởi công thức:

$$2OA.OB\cos\varphi = OA^2 + OB^2 - AB^2,$$

$$0 < \varphi < \pi$$

Hai góc được xem là bằng nhau nếu số đo của chúng bằng nhau.

Sau đó ta phải chứng minh rằng với cách hiểu các khái niệm cơ bản trên đây, mọi tiên đề của hệ tiên đề Hin–be đều đúng.

Nhà toán học Đức: Hin – be (David Hilbert, 1862–1943)

1.3. *Sự đầy đủ của hệ tiên đề Hin–be*

Hệ tiên đề Hin–be đầy đủ vì ta có thể chứng minh rằng mọi mô hình của hệ đó đều đẳng cấu với mô hình số học và do đó đẳng cấu với nhau.

Thật vậy, nếu M là một mô hình nào đó của hệ tiên đề Hin–be thì bằng cách chọn một hệ tọa độ Đề–các vuông góc như trong Hình học giải tích, ta chứng minh được M đẳng cấu với mô hình số học.

1.4. *Sự độc lập của các tiên đề trong hệ tiên đề Hin–be*

Như đã nói ở trên, tiên đề 5 Ơ–clit về đường song song là tiên đề độc lập, bởi vì nếu thay tiên đề đó bằng tiên đề phủ định thì ta có Hình học Lôbasepki, là hệ tiên đề phi mâu thuẫn.

Người ta cũng đã xây dựng được Hình học phi Ac–si–mét, là hình học trong đó tiên đề Ac–si–mét không đúng. Hình học phi Ac–si–mét là phi mâu thuẫn nên tiên đề Ac–si–mét là độc lập.

2. Hệ tiên đề hình học trong trường phổ thông

2.1. *Giới thiệu một hệ tiên đề hình học trong trường phổ thông*

Hệ tiên đề của Hin-be không dùng được trong trường phổ thông vì không thích hợp về mặt sư phạm. Trong các sách giáo khoa cho học sinh phổ thông, người ta cố gắng đưa ra một hệ tiên đề ngắn gọn và dễ hiểu hơn. Ở nước ta trước khi cải cách giáo dục 1981, Hình học được trình bày theo kiểu cũ, không phân biệt rõ ràng giữa tiên đề và định lí. Trong cải cách giáo dục năm 1981, hình học được viết lại theo hướng tiên đề hoá, tuy nhiên từ "tiên đề" được thay bằng từ "tính chất cơ bản". Sau đây chúng tôi giới thiệu hệ tiên đề của Hình học phẳng trong cuốn "Tài liệu bồi dưỡng Hình học 6" (tác giả Văn Như Cương, Vũ Hữu Bình NXB GD, 1984), và hệ tiên đề của Hình học không gian trong "Hình học 11" (tác giả: Văn Như Cương, Phan Văn Viện, NXB GD, 1991).

a. *Hệ tiên đề của hình học Ơ-clit trên mặt phẳng*

Khái niệm cơ bản: *Điểm, đường thẳng* (đường thẳng được hiểu là một tập hợp điểm, nên có thể nói về điểm thuộc đường thẳng hay không thuộc đường thẳng, đường thẳng đi qua hay không đi qua điểm), *quan hệ điểm ở giữa hai điểm, độ dài đoạn thẳng, số đo góc.*

Các tiên đề:

Tiên đề 1: *Đường thẳng là một tập hợp chứa nhiều điểm. Có nhiều đường thẳng.*

Tiên đề 2: *Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.*

Tiên đề 3: *Trong ba điểm thẳng hàng (nghĩa là cùng nằm trên một đường thẳng) và phân biệt, có một và chỉ một điểm ở giữa hai điểm còn lại.*

Tiên đề 4: *Mỗi điểm O của một đường thẳng chia các điểm còn lại của đường thẳng thành hai tập hợp điểm không rỗng, không giao nhau, sao cho:*

- Hai điểm phân biệt thuộc cùng một tập hợp khi và chỉ khi điểm O không nằm giữa chúng.
- Hai điểm thuộc hai tập hợp khác nhau khi và chỉ khi điểm O nằm giữa chúng.

Định nghĩa: *Điểm O cùng với một trong hai tập hợp nói trên được gọi là tia, điểm O gọi là gốc của tia. Tia có gốc O và chứa điểm A, kí hiệu là tia OA.*

Định nghĩa: *Tập hợp gồm hai điểm phân biệt A, B và những điểm ở giữa chúng gọi là đoạn thẳng AB hoặc BA. Hai điểm A, B gọi là hai đầu mút của đoạn thẳng AB.*

Tiên đề 5 *Mỗi đường thẳng a chia các điểm không thuộc nó thành hai tập hợp không rỗng, không giao nhau, sao cho: Hai điểm A, B phân biệt thuộc cùng một tập hợp khi và chỉ khi đoạn thẳng AB và đường thẳng a không có điểm chung.*

Định nghĩa: *Hình gồm một trong hai tập hợp nói trên và đường thẳng a được gọi là nửa mặt phẳng. Đường thẳng a gọi là bờ của nửa mặt phẳng.*

Tiên đề 6 *Mỗi đoạn thẳng có một độ dài xác định là một số dương.*

Kí hiệu: Độ dài đoạn thẳng AB cũng được kí hiệu là AB.

Tiên đề 7 *Nếu điểm M ở giữa hai điểm A và B thì độ dài đoạn thẳng AB bằng tổng độ dài hai đoạn thẳng AM và MB, tức là: AB = AM + MB.*

Tiên đề 8 *Trên một tia Ox cho trước, với một số dương bất kì m, bao giờ cũng có duy nhất một điểm M sao cho OM = m.*

Định nghĩa: *Hình gồm hai tia Ox và Oy có góc O chung gọi là góc.*

Điểm O gọi là đỉnh của góc. Hai tia Ox, Oy gọi là hai cạnh của góc. Góc có hai cạnh trùng nhau gọi là góc – không. Góc có hai cạnh hợp thành một đường thẳng gọi là góc bẹt.

Định nghĩa: *Cho góc xOy khác góc không và khác góc bẹt. Một tia Ot gọi là nằm trong góc xOy nếu có ba điểm A, B, C lần lượt nằm trên ba tia Ox, Oy, Ot sao cho điểm C nằm giữa hai điểm A và B.*

Tiên đề 9 *Mỗi góc đều có một số đo xác định, tính bằng độ. Góc–không có số đo bé nhất và bằng 0^0, góc bẹt có số đo lớn nhất và bằng 180^0.*

Kí hiệu: Số đo của góc xOy được kí hiệu là $\widehat{xOy}$

Tiên đề 10 *Nếu tia Ot nằm trong góc xOy thì số đo góc xOy bằng tổng số đo của hai góc xOt và tOy:*

$$\widehat{xOy} = \widehat{xOt} + \widehat{tOy}$$

Tiên đề 11 *Cho tia Ox nằm trên bờ của một nửa mặt phẳng xác định. Khi đó với bất kì số m sao cho $0^0 < m < 180^0$, trong nửa mặt phẳng đó bao giờ cũng có duy nhất tia Oy sao cho $\widehat{xOy} = m$.*

Định nghĩa: Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C. Hình gồm ba đoạn thẳng AB, BC, CA gọi là tam giác ABC. Các điểm A, B, C gọi là các đỉnh của tam giác, các đoạn thẳng AB, BC, CA gọi là các cạnh của tam giác, các góc BAC, ABC, BCA gọi là các góc của tam giác ABC và số đo của chúng lần lượt kí hiệu là $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

Định nghĩa: Hai tam giác ABC và A'B'C'được gọi là bằng nhau nếu AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A' và $\hat{A} = \widehat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{C} = \hat{C'}$

Tiên đề 12 *Hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau nếu AB = A'B', AC = A'C' và $\hat{A} = \hat{A}'$.*

Định nghĩa: Hai đường thẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Tiên đề 13 *Nếu điểm A không thuộc đường thẳng b thì qua A có không quá một đường thẳng song song với đường thẳng b.*

b. Hệ tiên đề của hình học Ơ–clit trong không gian

Hệ tiên đề hình học Ơ–clit trong không gian bao gồm các tiên đề của Hình học phẳng và bổ sung thêm một khái niệm cơ bản là "mặt phẳng" và 6 tiên đề sau đây:

Tiên đề 14	*Có ít nhất bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.*
Tiên đề 15	*Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.*
Tiên đề 16	*Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.*
Tiên đề 17	*Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng cùng có một điểm chung khác nữa.*
Tiên đề 18	*Trên mỗi mặt phẳng các tiên đề của Hình học phẳng đều đúng.*
Tiên đề 19	*Mỗi đoạn thẳng trong không gian đều có một độ dài xác định.*

2.2. *Sự tương đương giữa hai hệ tiên đề*

Định nghĩa: *Hai hệ tiên đề H và H' gọi là tương đương nếu mọi định lí của H đều là định lí của H' và ngược lại.*

Muốn như vậy chỉ cần đòi hỏi: Mỗi tiên đề của H là một tiên đề hoặc là một định lí của H' và ngược lại, mỗi tiên đề của H' là một tiên đề hoặc là một định lí của H.

Ta có thể chứng minh rằng hệ tiên đề Hin–be tương đương với hệ tiên đề ở phổ thông. Sau đây là chứng minh của một vài tiên đề của Hin–be như là định lí của hệ tiên đề ở phổ thông.

Tiên đề Pat (Pasch): *Trong mặt phẳng (P) cho đường thẳng a và ba điểm A, B, C không thuộc a. Nếu đường thẳng a cắt đoạn thẳng AB thì nó cắt đoạn thẳng AC hoặc cắt đoạn thẳng BC.*

Chứng minh: Theo tiên đề 5, đường thẳng a chia mặt phẳng (P) thành hai nửa mặt phẳng, một chứa điểm A, một chứa điểm B (vì đoạn thẳng AB cắt đường thẳng a). Điểm C phải thuộc một trong hai nửa mặt phẳng đó nên đường thẳng a phải cắt một trong hai đoạn thẳng AC hoặc BC.

Tiên đề Ac–si–mét: *Cho hai đoạn thẳng bất kì AB và CD. Khi đó* *trên tia AB có một số hữu hạn điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ thuộc nửa đường thẳng AB sao cho điểm A ở giữa A_1 và A_2 ; A_2 ở giữa A_1 và A_3 ;... ; A_{n-1} ở giữa A_{n-2} và A_n ; còn điểm B ở giữa A_{n-1} và A_n hoặc trùng với A_n và các đoạn thẳng AA_1, A_1A_2..., $A_{n-1}A_n$ bằng đoạn CD.*

Chứng minh: Gọi độ dài đoạn thẳng AB là a và độ dài đoạn thẳng CD là d. Ta có thể tìm được một số nguyên dương n sao cho: $(n - 1)d < a \leq nd$. Theo tiên đề 7, trên tia AB ta có thể xác định các điểm A_k, k = 1, 2, .., n sao cho $AA_k = kd$. Khi đó dễ thấy các điểm A_k thoả mãn các điều kiện của tiên đề Ac-si-mét.

3. Hệ tiên đề của Vây (Weyl)

Không gian Ơ-clit 2 và 3 chiều chỉ là trường hợp riêng của không gian Ơ-clit n chiều ($n \in N$).

Để xây dựng không gian n-chiều tốt nhất là dùng hệ tiên đề do Hermann Weyl đề nghị năm 1918, được trình bày dưới đây (H. Weyl 1885-1955, nhà toán học người Đức). Cho không gian vectơ n-chiều V (xem giáo trình Đại số tuyến tính).

***Không gian afin n-chiều**: Giả sử ta có một tập hợp **A** không rỗng mà mỗi phần tử của nó được gọi là điểm (khái niệm cơ bản). Tập **A** được gọi là không gian afin n-chiều liên kết với không gian vectơ n-chiều V nếu các tiên đề sau đây được thỏa mãn:*

***Tiên đề 1**: Với bất kì cặp điểm có thứ tự A, B của **A** có thể xác định được một vectơ của V, mà ta sẽ kí hiệu là vectơ $\overrightarrow{AB}$.*

***Tiên đề 2**: Với mỗi điểm A cho trước của **A** và mỗi vectơ $\vec{u}$ cho trước của V, có duy nhất một điểm B của **A** sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$*

Tiên đề 3. Với bất kì ba điểm A, B, C của **A** ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

Không gian afin 2-chiều được gọi là *mặt phẳng afin.*

Không gian vectơ Ơ–clit: *Không gian vectơ n–chiều V, trên đó có xác định phép toán tích vô hướng: với hai vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *bất kì của V ta cho tương ứng với một số thực, kí hiệu là* $\vec{a}.\vec{b}$, *sao cho các tiên đề dưới đây được thoả mãn, được gọi là không gian vectơ Ơ–clit n–chiều; Các tiên đề đó là:*

1. *Với mọi vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *của V, có:* $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$
2. *Với mọi vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *của V và một số thực tuỳ ý k, có:* $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$
3. *Với mọi vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *của V, có:* $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$
4. *Với mọi vectơ* $\vec{a}$ *khác* $\vec{0}$ *của V, có:* $\vec{a}.\vec{a} > 0$

Với vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý, tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$, chú ý rằng $\vec{a}^2 \geq 0$, $\sqrt{\vec{a}^2}$ được gọi là độ dài của vectơ $\vec{a}$ và kí hiệu là $|\vec{a}|$, tức $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Không gian Ơ–clit n–chiều: *Nếu V là một không gian vectơ Ơ–clit n–chiều (xem định nghĩa ở trên) thì không gian afin* ***A*** *liên kết với V gọi là không gian Ơ–clit n chiều.*

Không gian Ơ–clit thường được kí hiệu là ***E****.*

Không gian Ơ–clit 2 chiều được gọi là mặt phẳng Ơ–clit.

Trong hệ tiên đề Weyl, "điểm" là khái niệm cơ bản, còn các khái niệm khác như: *đường thẳng, mặt phẳng, ở giữa, độ dài đoạn thẳng, số đo góc*... đều được định nghĩa.

Định nghĩa: *Giả sử* ***A*** *là không gian afin liên kết với không gian vectơ V. Cho điểm A thuộc* ***A*** *và vectơ* $\vec{u}$ *khác vectơ-không của V. Tập hợp các điểm M của* ***A*** *sao cho* $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$, *với mọi số thực k, gọi là một đường thẳng.*

Điểm B gọi là nằm giữa hai điểm A và C nếu có số k < 0 sao cho $\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC}$.

*Độ dài đoạn thẳng AB trong không gian Ơ-clit **E** là độ dài của vectơ* $\overrightarrow{AB}$.

Số đo góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ *và* $\vec{v}$ *là số thực* φ *được xác định bởi biểu thức.*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

Từ đó, ta có thể định nghĩa góc giữa hai đường thẳng và sự vuông góc giữa hai đường thẳng.

Trong trường hợp n = 3, ta chứng minh được hệ tiên đề Weyl của không gian Ơ-clit 3 chiều tương đương với hệ tiên đề Hin-be và tương đương với hệ tiên đề ở phổ thông nói trên.

Chương 2

CÁC PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

§1. CÁC PHÉP BIẾN HÌNH AFIN TRONG MẶT PHẲNG

1. Phép biến hình afin

1.1. Đại cương về phép biến hình trong mặt phẳng

Cho mặt phẳng **P**, ta cũng kí hiệu **P** là tập hợp các điểm của mặt phẳng **P**.

Mỗi tập hợp con của **P** được gọi là *một hình* của mặt phẳng **P**.

Định nghĩa: *Phép biến hình* f của mặt phẳng **P** là một song ánh của **P** lên chính nó. Kí hiệu f: **P** → **P**.

Với mỗi điểm M của **P**, điểm M' = f(M) gọi là *ảnh* của điểm M qua phép biến hình f, còn điểm M gọi là *tạo ảnh* của điểm M'. Ta cũng nói: *phép biến hình f biến điểm* M *thành điểm* M'.

Cho H là một hình nào đó, tập hợp H' = f(H) gồm ảnh của tất cả các điểm của H gọi là *ảnh* của hình H. Ta cũng nói: *phép biến hình f biến hình H thành hình H'*.

Ví dụ: Ở phổ thông chúng ta đã biết các phép biến hình của mặt phẳng như: phép tịnh tiến, phép đối xứng tâm, phép đối xứng qua một đường thẳng, phép vị tự.

Phép *đồng nhất* là một phép biến hình đặc biệt, nó biến mọi điểm M thành chính điểm M. Phép đồng nhất thường kí hiệu là e. Với mọi điểm M thuộc mặt phẳng **P**, e(M) = M.

Ta đã biết, tích của hai song ánh là một song ánh, nên tích hai phép biến hình của mặt phẳng **P** là một phép biến hình của mặt phẳng **P**; Mỗi phép biến hình f của **P** là song ánh của **P**, có phép đảo ngược f^{-1} cũng là một song ánh của **P**, ta gọi f^{-1} là phép *biến hình đảo ngược* của phép biến hình f và có: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$.

Ta có: *Tập hợp tất cả các phép biến hình của mặt phẳng **P** với phép toán tích hai phép biến hình làm thành một nhóm.*

1.2. Tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng

***Định nghĩa**: Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và đôi một phân biệt. Khi đó ta có* $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$ *với k là một số thực (k ≠ 1) và số k được gọi là tỉ số đơn của ba điểm A, B, C và kí hiệu là: (A, B, C) theo đúng thứ tự đã xác định.*

Ta có: *C là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi:*

$$(A, B, C) = -1$$

Chú ý: Gọi $\vec{e}$ là *véc tơ đơn vị* chỉ phương của đường thẳng AB, ta có $\overrightarrow{CA} = \lambda\vec{e}$ và $\overrightarrow{CB} = \mu\vec{e}$, trong đó λ, μ là các *số thực*. Để tiện dùng về sau, ta kí hiệu $\lambda = \overline{CA}$, $\mu = \overline{CB}$, từ $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$ ta có $\overline{CA}\,\vec{e} = k\overline{CB}\,\vec{e}$. Vậy $k = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$, tức là ta có tỉ số đơn $(A, B, C) = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$. Lưu ý rằng ở đây, ta xét trên mặt phẳng afin, nên kí hiệu $\overline{CA}$ và $\overline{CB}$ để chỉ các số thực λ và μ sao cho $\overrightarrow{CA} = \lambda\vec{e}$ và $\overrightarrow{CB} = \mu\vec{e}$, mà không phải là độ dài đại số của đoạn thẳng.

Ví dụ: Dùng tỉ số đơn, định lí Ta-let được phát biểu như sau:

Cho tam giác ABC, một đường thẳng d cắt AB, AC tại D, E tương ứng. Khi đó: d // BC khi và chỉ khi (D, B, A) = (E, C, A).

Chứng minh: *Điều kiện cần.*

Giả sử d//BC tức ED//BC suy ra:

$\overrightarrow{DE} = t\overrightarrow{BC}$

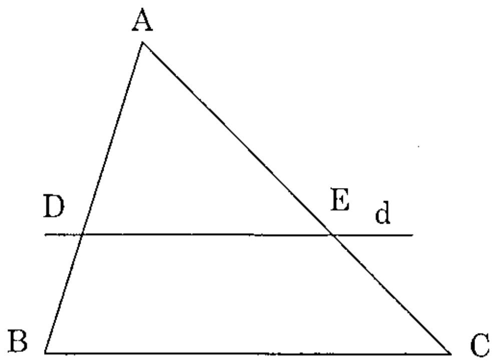
$\overrightarrow{AD} = t_1\overrightarrow{AB}$, tức $t_1 = (D, B, A)$;

$\overrightarrow{AE} = t_2\overrightarrow{AC}$, tức $t_2 = (E, C, A)$.

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$ do đó: $t\overrightarrow{BC} = t_2\overrightarrow{AC} - t_1\overrightarrow{AB}$

và vì $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ nên $t(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = t_2\overrightarrow{AC} - t_1\overrightarrow{AB}$

suy ra: $(t - t_2)\overrightarrow{AC} = (t - t_1)\overrightarrow{AB}$



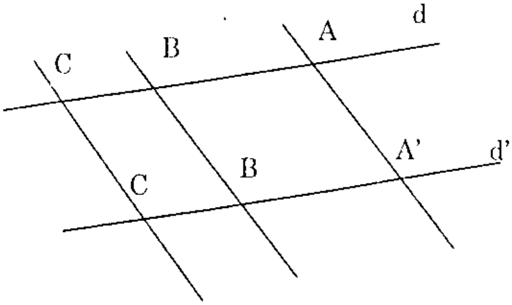
Hình 2

Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là hai vectơ độc lập tuyến tính nên $t - t_2 = t - t_1$, nghĩa là $t_2 = t_1$.

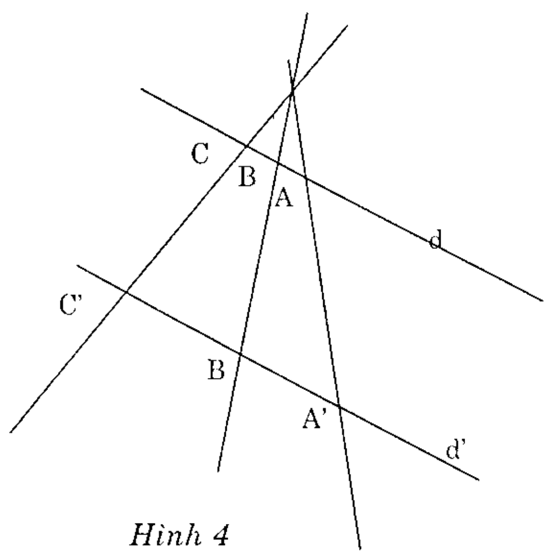
Vậy: (D, B, A) = (E, C, A). (Theo chú ý trên ta có thể viết $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$).

Điều kiện đủ. Giả sử có: (D, B, A) = (E, C, A), ta chứng minh DE // BC.

Lấy điểm D' $\in$ AB sao cho ED' // BC. Theo điều kiện cần ta có: (D', B, A) = (E, C, A). Suy ra: (D', B, A) = (D, B, A) nên D' trùng với D. Vậy DE //BC.



Hình 3

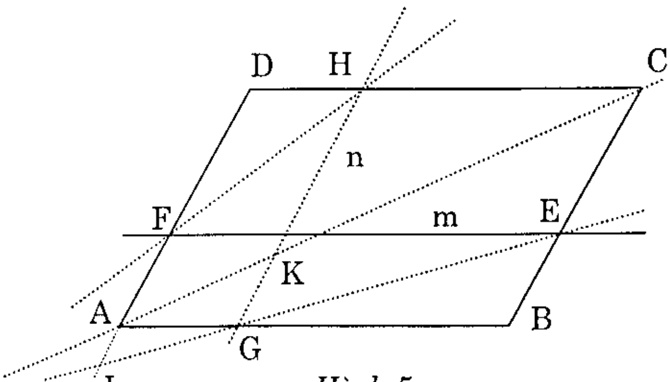


Hình 4

Tương tự ta chứng minh được định lí:

Cho hai đường thẳng d và d' song song, ba điểm A, B, C nằm trên đường thẳng d và ba điểm A', B', C' nằm trên đường thẳng d'. Khi đó ba đường thẳng AA', BB', CC' song song hoặc đồng quy khi và chỉ khi (A, B, C) = (A', B', C').

Áp dụng: Cho hình bình hành ABCD trên mặt phẳng afin. Đường thẳng m song song với AB cắt BC tại E cắt DA tại F và đường thẳng n song song với AD cắt AB tại G, cắt DC tại H. Chứng minh các đường thẳng AC, EG và FH đồng quy hoặc song song.



Hình 5

Bài giải:

Gọi I = DA $\cap$ EG, K = AC $\cap$ n.

Xét hai tam giác KHC và KGA: vì HC song song với AG nên theo định lí Ta–lét, ta có: $\dfrac{\overline{KG}}{\overline{KH}} = \dfrac{\overline{AG}}{\overline{CH}}$. Tương tự xét hai tam giác IAG và EBG, ta có: $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = \dfrac{\overline{AI}}{\overline{BE}}$

Mặt khác: $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{CH}} = \dfrac{\overline{DH}}{\overline{CH}} = \dfrac{\overline{AG}}{\overline{BG}}$

Do đó $\dfrac{\overline{KG}}{\overline{KH}} = \dfrac{\overline{AI}}{\overline{BE}}$, hay $\dfrac{\overline{KG}}{\overline{KH}} = \dfrac{\overline{AI}}{\overline{AF}}$

Ta có AD//GH, nên theo ví dụ 2, các đường thẳng AC, EG và FH định ra trên hai đường thẳng song song những đoạn thẳng tỉ lệ, vậy chúng đồng quy hoặc song song.

1.3. Phép biến hình afin

Định nghĩa: *Phép biến hình f: **P→ P** được gọi là phép biến hình afin (hoặc phép afin) nếu f biến ba điểm thẳng hàng bất kì thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi tỉ số đơn của ba điểm đó.*

Có nghĩa là, qua phép afin, bất kì ba điểm A, B, C thẳng hàng thì ảnh của chúng A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C) cũng thẳng hàng và tỉ số đơn được bảo toàn: (A', B', C') = (A, B, C).

Ví dụ: Các phép đồng nhất, phép tịnh tiến, phép vị tự là các phép afin của *mặt phẳng afin.*

1.4. Các tính chất của phép afin

a. Phép biến hình afin biến đường thẳng thành đường thẳng

Thật vậy, giả sử f: P → P là phép afin và d là một đường thẳng nào đó. Lấy trên d hai điểm phân biệt A, B và d' là đường thẳng đi qua hai điểm A' = f(A), B' = f(B). Mỗi điểm C của d khác với A, B sẽ có ảnh C' = f(C) nằm trên d'. Ngược lại, dễ dàng chứng minh được rằng mỗi điểm C' trên d' sẽ có tạo ảnh là điểm C trên d. Vậy f(d) = d'.

b. Phép afin biến hai đường thẳng cắt nhau thành hai đường thẳng cắt nhau, biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song

Thật vậy, giả sử hai đường thẳng a và b có ảnh lần lượt là a' và b'.

- Nếu a và b cắt nhau ở điểm M thì ảnh M' của M phải nằm trên a' và cả trên b', nên a' và b' cắt nhau tại M'.
- Nếu a // b thì a'// b', vì nếu a' và b' cắt nhau tại M' thì a và b phải cắt nhau tại tạo ảnh M của điểm M'.

c. Phép afin biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

Cho đoạn thẳng AB, A' = f(A), B' = f(B). Khi đó, điểm M bất kì của đoạn thẳng AB có ảnh M' thuộc đoạn thẳng A'B' vì f bảo toàn tỉ số đơn: (A', B', M') = (A, B, M).

Tương tự ta có: *Phép biến hình afin biến tia thành tia, biến nửa mặt phẳng thành nửa mặt phẳng, biến tam giác thành tam giác, biến miền tam giác thành miền tam giác.*

d. *Giả sử phép afin f biến bốn điểm A, B, C, D lần lượt thành bốn điểm A', B', C', D'. Khi đó nếu* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *thì* $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Thật vậy, xét hai trường hợp:

- Trường hợp A, B, C, D không nằm trên một đường thẳng.

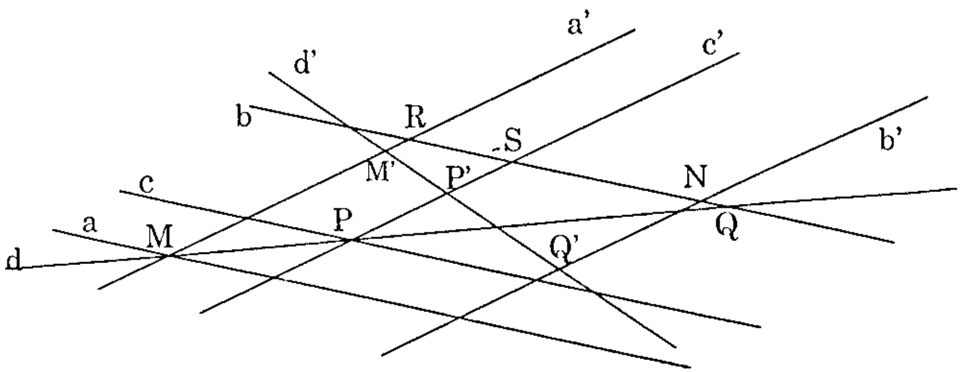
Từ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ suy ra ABDC là một hình bình hành, do đó A'B'D'C' cũng là hình bình hành (do tính chất b nêu trên) tức là $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

- Trường hợp A, B, C, D nằm trên cùng một đường thẳng.

Khi đó ta lấy hai điểm E, F không nằm trên đường thẳng đó sao cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$. Gọi E', F' là ảnh qua f của E, F thì trở lại trường hợp trên ta có $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{E'F'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Hệ quả: Qua một phép afin, ảnh của một hình bình hành là một hình bình hành, ảnh của một hình thang là một hình thang, ảnh của trung điểm một đoạn thẳng là trung điểm của đoạn thẳng ảnh, ảnh của trọng tâm tam giác là trọng tâm của tam giác...

Ví dụ: Trên mặt phẳng afin, qua phép afin f, ảnh của ba đường thẳng song song a, b, c là ba đường thẳng a', b', c'. Chứng minh các giao điểm của các cặp cạnh tương ứng M = a ∩ a', N = b ∩ b', P = c ∩ c' thẳng hàng.



Hình 6

Bài giải: Do f là một phép afin nên ảnh của các đường thẳng song song a, b, c là các đường thẳng song song a', b', c'. Giả sử đường thẳng MP cắt đường thẳng b tại Q.

Ảnh của M, P, Q là ba điểm M', P', Q' thẳng hàng lần lượt thuộc a', c', b'. Do f bảo toàn tỉ số đơn nên (M, P, Q) = (M', P', Q'). Mặt khác, do a' // b' // c' nên (M', P', Q') = (R, S, N) (*hình 6*). Do đó, (M, P, Q) = (R, S, N), suy ra N trùng với Q. Vậy M, N, P thẳng hàng.

1.5. *Phép biến đổi tuyến tính liên kết với phép afin*

Ta kí hiệu $\vec{\mathbf{P}}$ là tập hợp tất cả các vectơ nằm trong mặt phẳng afin **P**, tức $\vec{\mathbf{P}}$ là không gian vectơ hai chiều trên trường số thực liên kết với mặt phẳng afin **P**.

Cho f: **P** → **P** là một phép afin. Ta xây dựng phép ánh xạ $\vec{f}: \vec{\mathbf{P}} \to \vec{\mathbf{P}}$ như sau:

Với mỗi vectơ bất kì $\vec{u} \in \vec{\mathbf{P}}$, ta có thể chọn hai điểm M, N trên mặt phẳng **P** sao cho $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$. Gọi M' = f(M), N' = f(N) và $\vec{u}' = \overrightarrow{M'N'}$. Theo tính chất **d)** nêu trên, vectơ $\vec{u}'$ được xác định duy nhất bởi vectơ $\vec{u} \in \vec{P}$, và không phụ thuộc vào việc chọn hai điểm M, N. Vậy, tương ứng $\vec{u} \to \vec{u}'$ là một ánh xạ, kí hiệu là $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}'$ và dễ thấy rằng $\vec{f}$ là một song ánh.

Sau đây ta chứng minh rằng: $\vec{f}$ là một phép biến đổi tuyến tính của $\vec{P}$.

- Trước hết ta chứng minh với mọi số thực k, ta có: $\vec{f}(k\vec{u}) = k\vec{f}(\vec{u})$.

Dễ thấy điều đó đúng với k = 0, k = 1, hay $\vec{u} = \vec{0}$.

Xét trường hợp $\vec{u} \neq \vec{0}$, $k \neq 0$, $k \neq 1$:

Giả sử $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{AC} = k\vec{u}$. Khi đó, ba điểm A, B, C thẳng hàng, có ảnh qua phép afin f lần lượt là A', B', C' cũng thẳng hàng và tỉ số đơn được bảo toàn:

$$(C', B', A') = (C, B, A) = k, \text{ tức là: } \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$$

Do đó, ta có:

$$\overrightarrow{A'C'} = \vec{f}(\overrightarrow{AC}) = \vec{f}(k\vec{u}) \quad \text{và} \quad \overrightarrow{A'B'} = \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \vec{f}(\vec{u})$$

Vậy $\vec{f}(k\vec{u}) = k\vec{f}(\vec{u})$.

• Bây giờ chứng minh với $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thuộc $\vec{P}$: $\vec{f}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v})$.

Ta lấy ba điểm A, B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, thì $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$. Gọi A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C) ta có:

$$\overrightarrow{A'B'} = \vec{f}(\vec{u}), \overrightarrow{B'C'} = \vec{f}(\vec{v}), \overrightarrow{A'C'} = \vec{f}(\overrightarrow{AC}) = \vec{f}(\vec{u} + \vec{v}).$$

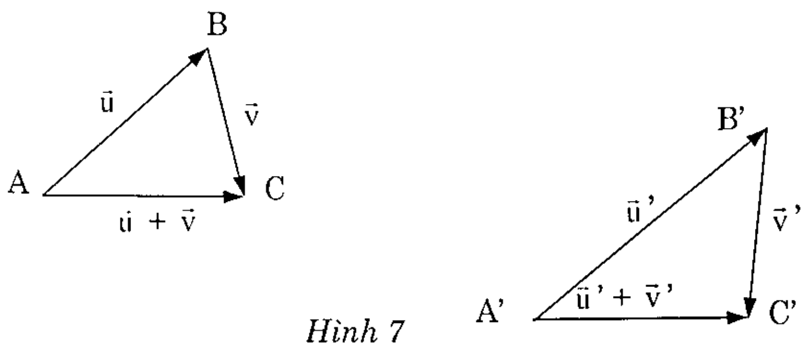
Từ $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$ ta suy ra $\vec{f}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v})$.

Vậy $\vec{f}$ là một phép biến đổi tuyến tính của $\vec{\mathbf{P}}$.

Phép biến đổi tuyến tính $\vec{f}$ được gọi là phép biến đổi tuyến tính *liên kết* với phép afin f và ngược lại f được gọi là phép afin *liên kết* với phép biến đổi tuyến tính $\vec{f}$.

Ta đi đến định nghĩa.

Định nghĩa. Cho f: **P** → **P** là một phép afin. Gọi M' = f(M), N' = f(N), $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{M'N'} = \vec{u}'$. Phép biến đổi tuyến tính $\vec{f}: \vec{\mathbf{P}} \to \vec{\mathbf{P}}$ sao cho $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}'$, được gọi là phép biến đổi tuyến tính *liên kết* với phép afin f và ngược lại f được gọi là phép afin *liên kết* với phép biến đổi tuyến tính $\vec{f}$.



Hình 7

Ví dụ 1: Phép đồng nhất e: **P** → **P** có phép biến đổi tuyến tính liên kết là phép biến đổi tuyến tính đồng nhất $\vec{e}: \vec{\mathbf{P}} \to \vec{\mathbf{P}}$. Thực vậy,

$M' = f(M) = M$, $N' = f(N) = N$, $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{M'N'} = \vec{u}$, nên $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$, do đó $\vec{f}$ là phép đồng nhất $\vec{e}: \vec{P} \to \vec{P}$.

Ví dụ 2: Phép tịnh tiến $\mathcal{T}$ theo vectơ $\vec{a}$ có phép biến đổi tuyến tính liên kết là phép biến đổi tuyến tính đồng nhất $\vec{e}: \vec{P} \to \vec{P}$. Thực vậy:

Nếu $M' = \mathcal{T}(M) = M$, $N' = \mathcal{T}(N) = N$, thì $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{a}$, do đó $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, suy ra:

$\vec{\mathcal{T}}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{MN}$, vậy $\vec{\mathcal{T}}$ *là phép đồng nhất* $\vec{e}: \vec{P} \to \vec{P}$.

Ví dụ 3: Phép vị tự $\mathcal{V}$ tâm I, tỉ số k, có phép biến đổi tuyến tính liên kết là phép vị tự tuyến tính $\vec{\mathcal{V}}: \vec{P} \to \vec{P}$. Thật vậy:

Nếu $M' = \mathcal{V}(M) = M$, $N' = \mathcal{V}(N)$ và đặt $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ thì $\overrightarrow{M'N'} = k.\vec{u}$ và $\vec{\mathcal{V}}(\vec{u}) = k\vec{u}$, vậy ta có $\vec{\mathcal{V}}$ là phép vị tự tuyến tính của $\vec{P}$.

1.6. Xác định phép afin

Định lí: Cho hai điểm I và I' của mặt phẳng afin **P** và cho phép biến đổi tuyến tính $\vec{f}: \vec{P} \to \vec{P}$. Khi đó tồn tại phép hình afin duy nhất f liên kết với $\vec{f}$ và $f(I) = I'$.

Chứng minh: Xét ánh xạ f: **P**→ **P** biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\vec{f}\left(\overrightarrow{IM}\right) = \overrightarrow{I'M'}$. Ta chứng minh rằng f là phép afin.

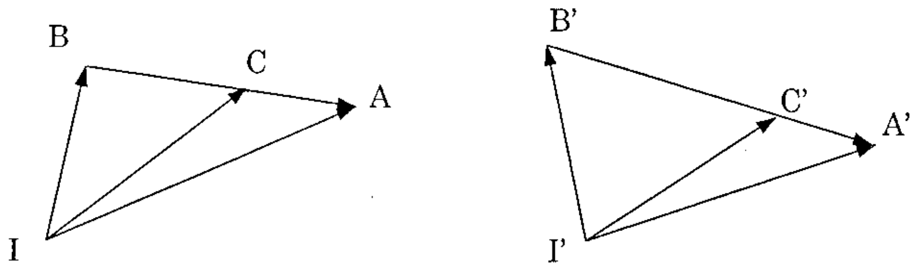
Thật vậy, với ba điểm bất kì A, B, C thẳng hàng và (A, B, C) = k.

Ta có $\overrightarrow{IC} = \dfrac{\overrightarrow{IA} - k\overrightarrow{IB}}{1 - k}$.

Khi đó, gọi $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, có:

$$\vec{f}\left(\overrightarrow{IA}\right) = \overrightarrow{I'A'}; \vec{f}\left(\overrightarrow{IB}\right) = \overrightarrow{I'B'}; \vec{f}\left(\overrightarrow{IC}\right) = \overrightarrow{I'C'}.$$

Do $\vec{f}$ *là phép biến đổi tuyến tính nên* $\overrightarrow{I'C'} = \dfrac{\overrightarrow{I'A'} - k\overrightarrow{I'B'}}{1 - k}$. Điều đó chứng tỏ rằng A', B', C' thẳng hàng và (A', B', C') = k.



Hình 8

Vậy f là phép afin và rõ ràng f(I) = I'.

Với hai điểm bất kì M, N của **P** và M', N' là ảnh của chúng qua f ta có: $\vec{f}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \vec{f}\left(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM}\right) = \overrightarrow{I'N'} - \overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{M'N'}$. Vậy f là phép afin của **P** liên kết với phép biến đổi tuyến tính $\vec{f}$ đã cho.

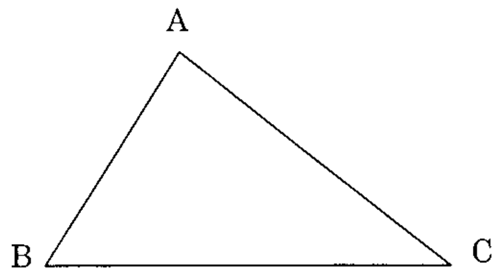
Phép afin f như trên là duy nhất. Tức là, giả sử có phép afin f' của **P**, f'(I) = I' cũng liên kết với phép biến đổi tuyến tính $\vec{f}$ đã cho, thì f' trùng với f. Thực vậy, với điểm M bất kì của **P**, gọi M' = f(M) và M" = f'(M). Khi đó, vì f và f' cùng liên kết với phép biến đổi tuyến tính $\vec{f}$ nên: $\vec{f}\left(\overrightarrow{IM}\right) = \overrightarrow{I'M'}$; $\vec{f}\left(\overrightarrow{IM}\right) = \overrightarrow{I'M''}$, suy ra M" = M', vậy f' = f.

Hệ quả:

*Cho hai tam giác bất kì ABC và A'B'C' thì bao giờ cũng tồn tại một phép afin duy nhất f của **P** biến A thành A', biến B thành B', biến C thành C'.*

Thật vậy, vì A, B, C không thẳng hàng nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ là độc lập tuyến tính. Cũng vậy, hai vectơ $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$ là độc lập tuyến tính. Ta có *duy nhất* phép biến đổi tuyến tính $\vec{f}: \vec{\mathbf{P}} \to \vec{\mathbf{P}}$ sao cho $\vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'}$ và $\vec{f}\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{A'C'}$. Theo định lí trên, ta có *duy nhất* phép afin f liên kết với $\vec{f}$ và f(A) = A'. Rõ ràng: f(B) = B', f(C) = C'.

Ví dụ: Trong mặt phẳng afin, cho tam giác ABC. Tìm số các phép afin biến tam giác ABC thành chính nó.



Hình 9

Bài giải:

Mỗi hoán vị của ba điểm A, B, C được lấy làm các ảnh của A, B, C và do đó xác định một phép afin biến tam giác ABC thành chính nó. Số các hoán vị như vậy bằng số các phép afin biến tam giác ABC thành chính nó.

1.7. Biểu thức tọa độ của phép biến hình afin.

Cho phép afin f: **P** → **P**, liên kết với phép biến đổi tuyến tính $\vec{f}: \vec{\mathbf{P}} \to \vec{\mathbf{P}}$.

Ta chọn một mục tiêu afin $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ nào đó của mặt phẳng **P**. Gọi O' = f(O), và các vectơ $\vec{i}' = \vec{f}\left(\vec{i}\right)$, $\vec{j}' = \vec{f}(\vec{j})$ có tọa độ là: O' = (p;q), $\vec{i}' = (a;b), \vec{j}' = (c;d)$.

Tức là: $\overrightarrow{OO'} = p\vec{i} + q\vec{j};\ \vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j};\ \vec{j}' = c\vec{i} + d\vec{j}$.

Bây giờ ta giả sử đối với mục tiêu đã chọn, một điểm M bất kì có toạ độ và ảnh của nó M' = f(M) có tọa độ (x'; y'). Ta hãy tìm sự liên hệ giữa (x; y) và (x'; y').

Ta có: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ và $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i}' + y\vec{j}'$

Suy ra:

$$\overrightarrow{O'M'} = \vec{f}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \vec{f}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) = x\vec{i}' + y\vec{j}' = x\left(a\vec{i} + b\vec{j}\right) + y\left(c\vec{i} + d\vec{j}\right).$$

Vậy: $\overrightarrow{O'M'} = (ax + cy)\vec{i} + (bx + dy)\vec{j}$ (*)

Mặt khác $\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OO'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} - (p\vec{i} + q\vec{j})$, nên:

$$\overrightarrow{O'M'} = (x' - p)\vec{i} + (y' - q)\vec{j} \qquad (**)$$

So sánh (*) và (**) ta suy ra:

$$\begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = bx + dy + q \end{cases}$$

Biểu thức nói trên gọi là *biểu thức toạ độ của phép afin f đối với mục tiêu* $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Chú ý rằng hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ không cộng tuyến nên ma trận $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ có định thức khác 0, tức là $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

Ma trận $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ gọi là ma trận của phép afin f đối với mục tiêu đã chọn.

Biểu thức tọa độ của phép afin f có thể viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

hay
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Ví dụ:

– *Phép đồng nhất của mặt phẳng afin.* Mọi điểm M của mặt phẳng afin có ảnh M' = f(M) = M.

Biểu thức toạ độ là: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

Ma trận của phép đồng nhất: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

– *Phép tịnh tiến của mặt phẳng afin.* Cho phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(a, b)$.

Gọi M'(x', y') là ảnh của M(x, y), thì $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}(a,b)$. Từ đó suy ra có biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến là: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$. Ma trận của phép tịnh tiến: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

– *Phép vị tự.* Cho phép vị tự tâm $I(x_0, y_0)$, tỉ số k ($k \neq 0$).

Gọi M'(x', y') là ảnh của M(x, y), thì $\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$, suy ra phép vị tự có biểu thức toạ độ

$$\begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$$

Ta có ma trận của phép vị tự ($k \neq 0$): $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

1.8. Phép thấu xạ afin

1.8.1. Điểm bất động

Điểm M được gọi là ***điểm bất động*** của phép afin f: P → P nếu f(M) = M.

Theo hệ quả của định lí về sự xác định phép afin ta suy ra: Phép afin là phép đồng nhất khi và chỉ khi nó có ba điểm bất động không thẳng hàng.

Ta thấy rằng:

– *Nếu phép afin f có hai điểm bất động phân biệt A, B thì mọi điểm nằm trên đường thẳng AB đều là điểm bất động.*

1.8.2. Định nghĩa

Phép afin f được gọi là ***phép thấu xạ afin*** nếu có đường thẳng d sao *cho mọi điểm của d đều là điểm bất động. Đường thẳng d gọi là trục của phép thấu xạ f.*

Phép thấu xạ f được xác định nếu biết trục d của nó và biết hai điểm tương ứng A và A' = f(A), trong đó A không nằm trên d (do đó A' cũng không nằm trên d và nếu A và A' trùng nhau, phép thấu xạ là phép đồng nhất).

1.8.3. Biểu thức tọa độ của phép thấu xạ

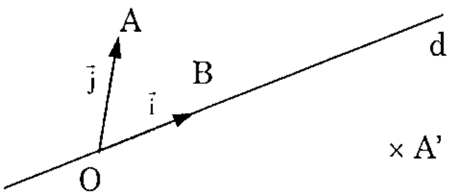
Giả sử cho phép thấu xạ f có trục là đường thẳng d và hai điểm tương ứng là A và A' = f(A), (A không thuộc d). Chọn trên d hai điểm phân biệt O và B, đặt $\vec{j} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{i} = \overrightarrow{OB}$, ta được mục tiêu afin$\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Giả sử đối với mục tiêu đó vectơ $\overrightarrow{OA'}$ có tọa độ $\overrightarrow{OA'}$ = (a, b), B(1, 0), A(0, 1), B' = B(1, 0), A'(a, b).

Khi đó: f(O) = O = (0, 0),

$$\vec{i}' = \vec{f}\left(\vec{i}\right) = \overrightarrow{OB'} = \left(1, 0\right), \vec{j}' = \vec{f}\left(\vec{j}\right) = \overrightarrow{OA'} = \left(a, b\right)$$

Vậy đối với mục tiêu đó, phép thấu xạ afin có biểu thức tọa độ như sau:
$$\begin{cases} x' = x + ay \\ y' = by \end{cases}$$



Hình 10

Chú ý rằng b ≠ 0, vì A' không thuộc d.

Nếu a = 0, b = 1, phép thấu xạ là phép đồng nhất.

1.8.4. Tính chất của phép thấu xạ

Giả sử cho *phép thấu xạ* afin f không phải là phép đồng nhất.

a. *Phương thấu xạ*

Nếu điểm M và ảnh M' = f(M) không trùng nhau thì đường thẳng MM' luôn có phương cố định.

Phương của các đường thẳng đó gọi là *phương thấu xạ.*

Thật vậy, giả sử M = (x, y), thì M' = (x + ay, by).

Khi đó $\overrightarrow{MM'} = \left(ay, (b-1)y\right) = y\left(a, b-1\right)$. Vậy, MM' có phương xác định bởi vectơ $\vec{u}$(a; b − 1).

b. Trục thấu xạ

Hai đường thẳng tương ứng m và m' = f(m) hoặc cùng song song với phương thấu xạ, hoặc cắt nhau tại một điểm nằm trên trục thấu xạ d.

Thật vậy: Trường hợp đường thẳng m song song với trục thấu xạ d thì ảnh m' song song với d', vì d' trùng với d, nên m' cũng song song với d.

Trường hợp đường thẳng m cắt trục thấu xạ d tại điểm I thì m' cắt d' (tức d) tại I' = f(I) = I. Vậy m và m' cắt nhau tại điểm I trên trục thấu xạ d.

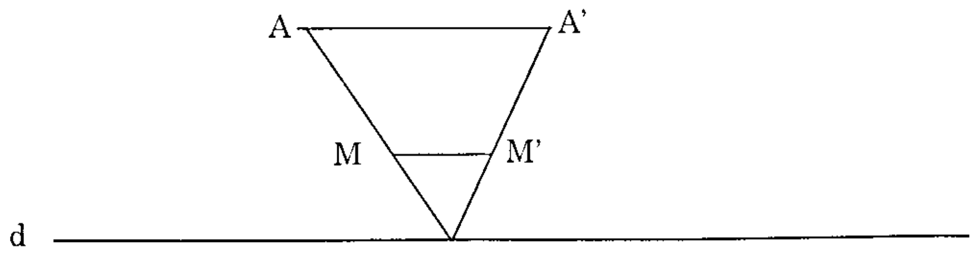
c. Tỉ số thấu xạ

Nếu M *không phải là điểm bất động* và đường thẳng MM' cắt d tại điểm M_0 thì $(M', M, M_0) = k$, trong đó k là một số *không đổi khác 0 và không phụ thuộc* M. Số k gọi là *tỉ số thấu xạ*.

Chứng minh:

Nếu $M = (x, y)$ thì chọn mục tiêu afin như mục 3) ở trên ta có $M' = (x + ay, by)$. Điểm M_0 nằm trên d nên $M_0 = (x_0, 0)$. Ta có M, M', M_0 thẳng hàng và $(M', M, M_0) = k$, tức $\overline{M_0M'} = k\overline{M_0M}$, hay ta có : $x + ay - x_0 = k(x - x_0)$ và $by = ky$. Vì M không thuộc d nên $y \neq 0$ và do đó $k = b$ không phụ thuộc vào điểm M.

d. Phép thấu xạ trượt



Hình 11

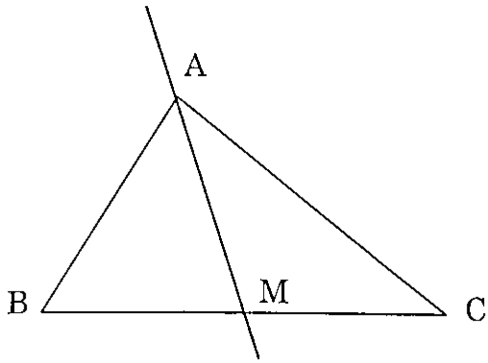
Định nghĩa: *Nếu tồn tại điểm A có ảnh A' = f(A) sao cho đường thẳng AA' song song với trục thấu xạ d, thì phép thấu xạ f được gọi là phép thấu xạ trượt.*

Khi đó, với mọi điểm M và ảnh M' = f(M), ta có MM' song song với trục thấu xạ d.

Ví dụ 1: Trên mặt phẳng afin cho tam giác ABC. Xác định phép afin f và tìm điểm bất động của f nếu biết f(A) = A, f(B) = C, f(C) = B.

Bài giải:

Theo trên, biết ảnh của ba điểm không thẳng hàng A, B, C là A, C, B nên phép afin f được xác định duy nhất.



Hình 12

Trung điểm M của BC là một điểm bất động của f. Thật vậy, nếu M' = f(M) thì do f bảo toàn tỉ số đơn: (BCM) = (CBM') = –1, nên M' cũng là trung điểm của BC, vậy f(M) = M.

Đường trung tuyến AM có A, M là hai điểm bất động nên là đường thẳng gồm toàn các điểm bất động, do đó f là một *phép thấu xạ afin,* trục thấu xạ là trung tuyến AM, phương thấu xạ là BC, tỉ số thấu xạ k = – 1.

Ví dụ 2: Phép co về một đường thẳng.

Định nghĩa: *Trong mặt phẳng afin, cho đường thẳng d và vectơ $\vec{v}$ không song song với d và một số thực k, (k ≠ 0). Ánh xạ f được gọi là phép co về đường thẳng d theo vectơ $\vec{v}$ và tỉ số k nếu* $\overrightarrow{M_0M'} = k.\overrightarrow{M_0M}$ *(*), trong đó M_0 là giao điểm của đường thẳng d và đường thẳng m đi qua điểm M, có vectơ chỉ phương $\vec{v}$.*

Mỗi phép co f về đường thẳng d theo vectơ $\vec{v}$ và tỉ số k, (k ≠ 0), là một phép thấu xạ afin. Thực vậy, đẳng thức (*) chứng tỏ f là một song ánh. Ta chọn hệ toạ độ afin xOy, có trục hoành Ox trùng với d, trục Oy có vetơ chỉ phương $\vec{v}$.

Toạ độ của các điểm M = (x, y), M' = (x', y'), M_0 = (x, 0), do đó từ đẳng thức (*) ta có:

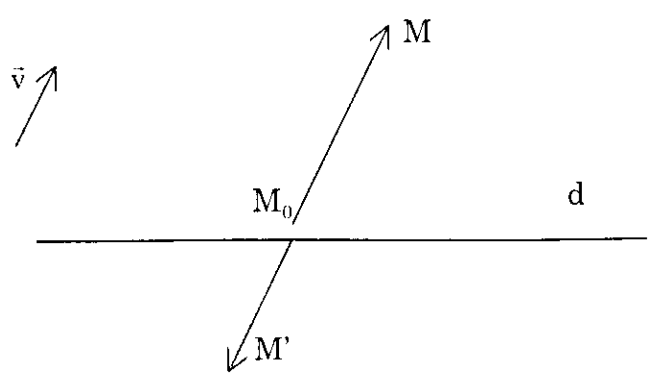
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$$

với ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ không suy biến vì $k \neq 0$ nên đó là biểu thức toạ độ của một phép afin. Hơn nữa, đường thẳng d gồm toàn các điểm bất động và phép co là một phép thấu xạ afin trục d, tỉ số k.

Đặc biệt:

Nếu k = 1, ta có phép đồng nhất của mặt phẳng afin.

Nếu k = –1 thì f được gọi là một *phép đối xứng xiên,* trục là d và theo phương của vectơ $\vec{v}$.



Hình 13

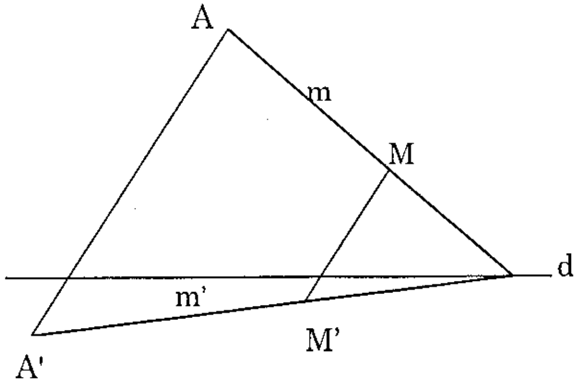
1.9. Cách dựng ảnh của một điểm qua phép thấu xạ

Từ các tính chất của phép thấu xạ ta suy ra cách dựng ảnh của một điểm bất kì.

Giả sử cho phép thấu xạ f có trục d và hai điểm tương ứng A và A' = f(A). Khi đó ảnh M' của điểm M dựng như sau:

1. Khi AA' không song song với d.

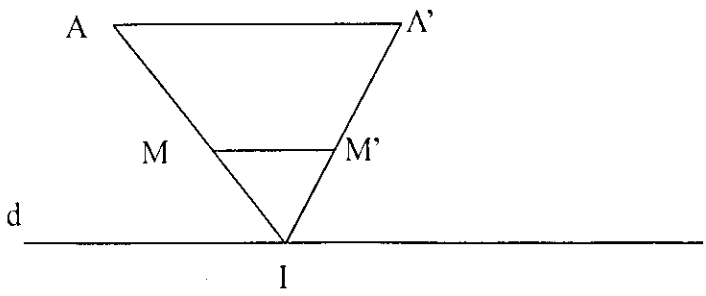
Nếu M không nằm trên AA' thì qua A' dựng đường thẳng m' ảnh của đường thẳng m = AM, (m', d và m đồng quy hoặc song song). Giao điểm của m' với đường thẳng qua M và song song với AA' chính là ảnh M' của M cần dựng (*Hình 14*).



Hình 14

Còn nếu M nằm trên AA', thì ta dựng ảnh N' của điểm N không nằm trên AA' theo cách trên, rồi dựng ảnh M' của điểm M (thay hai điểm A và A' bằng hai điểm tương ứng N và N').

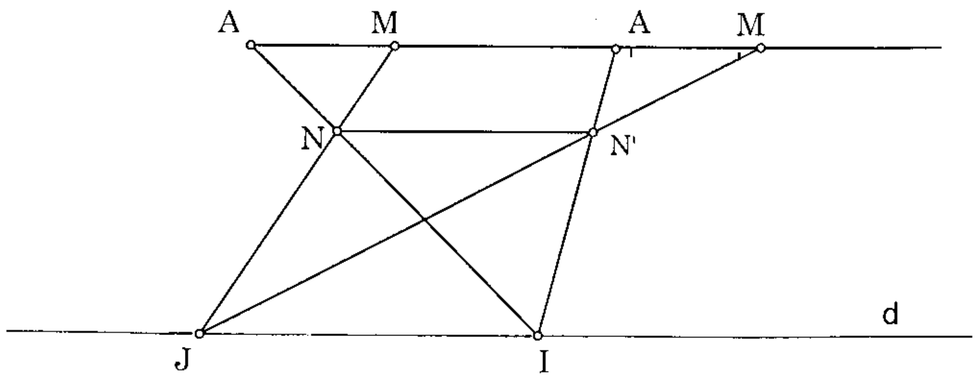
2. Khi AA' // d (tức f là thấu xạ trượt).



Hình 15a

– Nếu M không nằm trên AA', gọi I là giao điểm của trục d với đường thẳng AM, thì ảnh M' của M chính là giao điểm của đường thẳng IA' với đường thẳng qua M và song song với AA', (*Hình 15a*).

- Nếu M nằm trên AA' thì dễ thấy rằng M' là điểm sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$ (*Hình 15b*).



Hình 15b

1.10. Phân tích một phép afin thành tích của các phép thấu xạ

Định lí: *Mọi phép afin trên mặt phẳng **P** đều có thể phân tích được thành tích của không quá ba phép thấu xạ. Nói khác đi, mọi phép afin được xem là tích của nhiều nhất ba phép thấu xạ afin.*

Chứng minh: Giả sử phép afin f được xác định bởi ba điểm không thẳng hàng A, B, C và ảnh của chúng A', B', C'.

Lấy đường thẳng d_1 nào đó không đi qua A và A'. Gọi f_1 là phép thấu xạ có trục là d_1 biến A thành A', kí hiệu $B_1 = f_1(B)$, $C_1 = f_1(C)$. (Nếu A trùng A' thì ta bỏ qua phép f_1).

Lấy đường thẳng d_2 nào đó đi qua A' và không đi qua cả B_1 và B'. Gọi f_2 là phép thấu xạ có trục là d_2 biến B_1 thành B'. Kí hiệu $C_2 = f_2(C_1)$ (Nếu B_1 trùng B thì ta bỏ qua phép f_2).

Gọi d_3 là đường thẳng đi qua A' và B' và f_3 là phép thấu xạ có trục là d_3 và biến C_2 thành C' (dễ thấy C_2 không nằm trên d_3; nếu C_2 trùng C' thì ta bỏ qua phép f_3). Như vậy tích $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ là phép afin biến A, B, C lần lượt thành A', B', C' và do đó $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

Như vậy, một phép afin đã cho được phân tích thành tích của không quá ba phép thấu xạ afin, hay nói khác đi, được xem là tích của nhiều nhất ba phép thấu xạ afin.

2. Nhóm afin và hình học afin

2.1. *Nhóm afin*

Ta xét tập Af(**P**) gồm các phép biến hình afin của mặt phẳng **P**. Khi đó Af(**P**) làm thành *một nhóm* đối với phép lấy tích hai phép afin, vì:

i) Tích của hai phép afin là một phép afin

ii) Đảo ngược của một phép afin cũng là một phép afin.

iii) Phép đồng nhất e là phép afin.

2.2. *Tương đương afin*

Định nghĩa: *Hình* H *gọi là tương đương afin với hình* H', *nếu có một phép afin f biến hình* H *thành hình* H', *tức là* f(H) = H'.

Khi đó ta kí hiệu H ~ H'.

Từ định nghĩa, suy ra các tính chất của quan hệ tương đương afin:

a) Mỗi hình H đều tương đương afin với chính nó: H ~ H (*suy từ tính chất* iii))

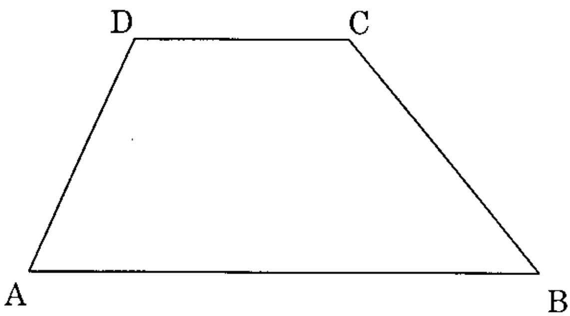
b) Nếu H ~ H' thì H' ~ H (*suy từ* ii)).

Bởi vậy ta có thể nói : *Nếu* H' ~ H *thì hai hình* H và H' *là tương đương afin với nhau.*

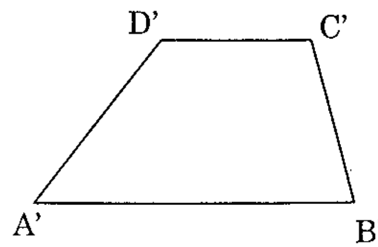
c) Nếu H ~ H' và H' ~ H" thì H ~ H" (*suy từ điều kiện* i)).

Ví dụ:

- *Hai tam giác bất kì đều tương đương afin (với nhau).*
- *Hai hình bình hành bất kì đều tương đương afin (với nhau).*
- *Hình thang ABCD (với hai cạnh đáy AB và CD) và hình thang* A'B'C'D' *(với hai cạnh đáy* A'B' *và* C'D'*) là tương đương afin khi và chỉ khi* $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.
- *Hai elip bất kì đều tương đương afin.*



Hình 16a



Hình 16b

Thật vậy, giả sử ta cho hai elip E_1 và E_2. Chọn mục tiêu afin $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ sao cho đối với nó phương trình của E_1 có dạng chính tắc $x^2 + y^2 = 1$. Chọn mục tiêu afin $\left(O', \vec{i}', \vec{j}'\right)$ sao cho đối với nó phương trình của E_2 có dạng chính tắc: $x'^2 + y'^2 = 1$. Gọi f là phép afin biến mục tiêu $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ thành mục tiêu $\left(O',\vec{i}',\vec{j}'\right)$. Khi đó nếu điểm M có tọa độ (x;y) đối với mục tiêu $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ thì điểm M' = f(M) có toạ độ (x', y') đối với mục tiêu $\left(O',\vec{i}',\vec{j}'\right)$ mà x' = x; y' = y.

Như vậy, nếu M(x;y) thuộc elíp (E_1) tức $x^2 + y^2 = 1$ thì ảnh f(M) = M'(x'; y') đối với mục tiêu $\left(O',\vec{i}',\vec{j}'\right)$ thoả mãn $x'^2 + y'^2 = 1$, do đó M' thuộc elíp $E_2 = f(E_1)$, tức phép afin f biến elíp E_1 thành elíp E_2.

Vậy E_1 và E_2 tương đương afin với nhau.

– Tương tự ta có: *Hai hypebol bất kì đều tương đương afin, hai parabol bất kì đều tương đương afin.*

2.3. Bất biến afin

2.3.1. Tính chất afin

Định nghĩa: *Một tính chất nào đó của hình H gọi là tính chất afin nếu mỗi hình H' tương đương afin với H đều có tính chất đó. Nói khác đi, tính chất afin của một hình được bảo toàn qua một phép afin bất kì.*

Ví dụ:

- Tính chất *thẳng hàng* của 3 điểm, tính chất *song song, đồng quy* của các đường thẳng là các tính chất afin.
- Tính chất "*là đường bậc hai có tâm*", "*là đường thẳng tiếp xúc với đường bậc hai*" là những tính chất afin.

2.3.2. Khái niệm afin

Định nghĩa: *Một khái niệm được gọi là khái niệm afin nếu nó không bị thay đổi qua bất kì phép afin nào.*

Ví dụ: Các khái niệm afin: *điểm, đường thẳng, tia, đoạn thẳng, góc, nửa mặt phẳng, tam giác, miền tam giác, trung điểm, đường trung bình của tam giác, đường trung tuyến, trọng tâm tam giác, tứ giác, hình bình hành, hình thang, tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng, elip, hypebol, parabol, đường bậc hai.*

• Mặt phẳng Ơ–clit cũng là mặt phẳng afin, nên ta cũng xét các phép biến hình afin trên mặt phẳng Ơ–clit. Khi đó, có những tính chất của hình không phải là tính chất afin và có những khái niệm không phải là khái niệm afin.

– Các tính chất không phải là tính chất afin.

Ví dụ: Tính chất "*vuông góc của hai đường thẳng*", các tính chất "*cân*", "*đều*", "*vuông*" của tam giác; Các tính chất "*là đường cao của tam giác*", "*là trung trực của một đoạn thẳng*", "*là phân giác của một góc*"... không phải là các tính chất afin.

– Các khái niệm không phải là khái niệm afin.

Ví dụ: Các khái niệm: *độ dài đoạn thẳng, độ lớn của góc, tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông; đường cao, đường phân giác, đường trung trực, trực tâm của tam giác, trực tâm tam giác, tâm đường tròn nội (ngoại) tiếp tam giác; hình vuông, hình thoi, hình thang cân, diện tích các hình, đường tròn, ...*

2.3.3. Bất biến afin

Định nghĩa: *Các tính chất afin và các khái niệm afin được gọi chung là những bất biến afin của mặt phẳng.*

2.4. Hình học afin trên mặt phẳng

Hình học afin của mặt phẳng afin là môn học nghiên cứu các bất biến afin của mặt phẳng afin, ta còn nói: Tập hợp tất cả bất biến afin của mặt phẳng P *được gọi là Hình học afin của mặt phẳng afin.* Như vậy, Hình học afin chỉ nghiên cứu những khái niệm afin và những tính chất afin, tức Hình học afin không nghiên cứu các khái niệm và tính chất *không phải* là các khái niệm afin và tính chất afin.

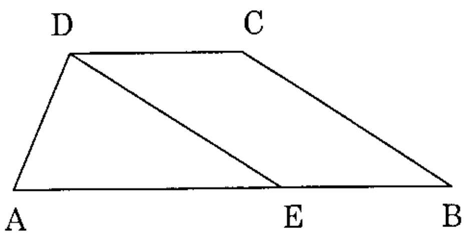
Chẳng hạn định lí: "*Ba đường trung tuyến trong mọi tam giác đồng quy*" là một định lí của Hình học afin, còn định lí "*ba đường cao trong mọi tam giác đồng quy*" không phải là định lí của Hình học afin vì khái niệm đường cao không phải là một khái niệm afin.

2.5. Áp dụng

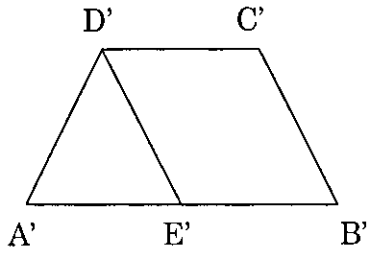
Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Ơ-clit, cho hình thang ABCD, hai đáy AB và CD (AB ≠ CD). Tìm một hình thang cân A'B'C'D' tương đương afin với ABCD.

Bài giải:

Qua D kẻ đường thẳng song song với cạnh BC cắt AB tại E. Ta lấy tam giác cân A'D'E', (D'A' = D'E'). Khi đó, tồn tại một phép afin f biến tam giác ADE thành tam giác A'D'E'. Lấy B', C' lần lượt là các ảnh của B, C qua f. Do phép afin bảo toàn tính chất thẳng hàng của ba điểm và bảo toàn tính chất song song của hai đường thẳng, nên f biến ba điểm thẳng hàng A, E, B thành ba điểm thẳng hàng A', E', B', và f biến hai đường thẳng song song CB và DE thành hai đường thẳng song song B'C' và E'D'.



Hình 17a

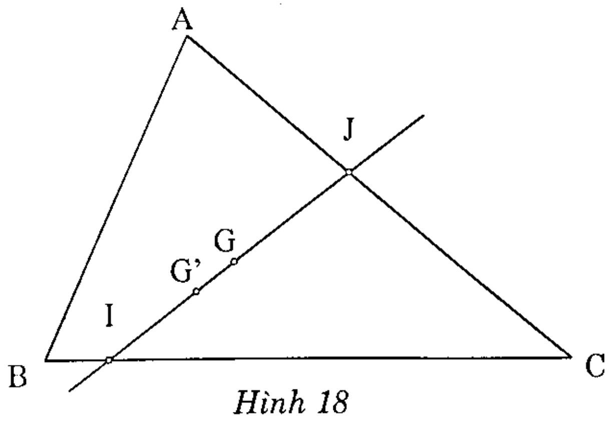


Hình 17b

Do đó D'E' = C'B' và theo trên ta có D'A' = D'E', vậy hình thang A'B'C'D' là hình thang cân *tương đương afin* với hình thang đã cho ABCD.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng afin cho tam giác ABC. Tìm điểm bất động của phép afin f biến các điểm A, B, C lần lượt thành B, C, A.

Bài giải: Do A, B, C không thẳng hàng nên có duy nhất một phép afin biến các A, B, C lần lượt thành các điểm B, C, A. Trọng tâm G của tam giác ABC cũng là trọng tâm của tam giác BCA, nên G là điểm bất bất động của f. Điểm bất động G của f là duy nhất. Thực vậy, giả sử có điểm G' khác G cũng là điểm bất động của f thì GG' là đường thẳng gồm toàn điểm bất động của f. Mặt khác giả sử GG' giao với đường thẳng BC tại I (nếu không thì GG' giao với cạnh AB hoặc với cạnh AC), khi đó ảnh của I là giao điểm I' của GG' với đường thẳng CA (I có thể trùng với B hoặc với C) rõ ràng là I' khác I, tức I không phải là điểm bất động, ta đi đến mâu thuẫn.



Hình 18

§2. PHÉP ĐẲNG CỰ CỦA MẶT PHẲNG Ơ-CLIT

Trong mục này chúng ta xét các phép biến hình của mặt phẳng Ơ–clit, chú ý rằng mặt phẳng Ơ–clit cũng là mặt phẳng afin.

1. Định nghĩa và tính chất của phép đẳng cự của mặt phẳng Ơ–clit

1.1. Định nghĩa

Định nghĩa: *Phép biến hình $f: P \to P$ của mặt phẳng Ơ–clit P được gọi là phép đẳng cự nếu nó không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì của mặt phẳng Ơ–clit P. Điều đó có nghĩa là: với hai điểm M, N tuỳ ý và ảnh của chúng $M' = f(N)$, $N' = f(N)$, thì $MN = M'N'$.*

Ví dụ: Các phép đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng tâm của mặt phẳng Ơ–clit là các phép đẳng cự.

Trong chương trình Trung học phổ thông, các phép đẳng cự được gọi là các phép *dời hình.*

1.2. Tính chất của phép đẳng cự

Định lí: *Phép đẳng cự là phép afin.*

Chứng minh: Giả sử f là phép đẳng cự, và A, B, C là ba điểm phân biệt thẳng hàng, trong đó điểm B ở giữa A và C. Ta chứng minh ba điểm $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ thẳng hàng và $(A, B, C) = (A', B', C')$.

Theo định nghĩa của phép đẳng cự ta có $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$. Vì B ở giữa A và C nên $AB + BC = AC$, do đó $A'B' + B'C' = A'C'$. Suy ra ba điểm A', B', C' thẳng hàng, B' ở giữa A' và C', $(A, B, C) = (A', B', C')$.

Theo định lí, ta thấy phép đẳng cự có mọi tính chất của phép afin. Ngoài ra nó còn có những tính chất riêng sau:

- *Phép đẳng cự biến một tam giác thành một tam giác bằng nó.*

Thật vậy nếu phép đẳng cự biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì do $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$ nên hai tam giác đó bằng nhau.

- *Phép đẳng cự không làm thay đổi độ lớn của góc.*

Thật vậy, giả sử phép đẳng cự f biến góc xOy thành góc x'O'y'. Trên hai tia Ox và Oy lần lượt lấy hai điểm A và B khác với O. Gọi A' = f(A), B' = f(B) thì A' và B' lần lượt nằm trên O'x' và O'y'. Vì O' = f(O) nên hai tam giác AOB và A'O'B' bằng nhau, do đó hai góc xOy và x'O'y' bằng nhau.

- *Một phép afin f là đẳng cự khi và chỉ khi phép biến đổi tuyến tính $\vec{f}$ liên kết với f là biến đổi tuyến tính trực giao.*

Giả sử f là phép đẳng cự. Theo trên, f cũng là một phép afin, và ta gọi phép biến đổi tuyến tính liên kết của f là $\vec{f}$. Cho hai vectơ tùy ý $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, và A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C). Thế thì

$$\vec{u}' = \overrightarrow{A'B'} = \vec{f}(\vec{u}),\ \vec{v}' = \overrightarrow{A'C'} = \vec{f}(\vec{v})$$

Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ không cùng phương thì hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$ hay $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}'.\vec{v}'$.

Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương thì các bộ ba điểm A, B, C và A', B', C' thẳng hàng và có cùng thứ tự nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$ và do đó $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}'.\vec{v}'$.

Như vậy, phép biến đổi tuyến tính $\vec{f}$ bảo toàn tích vô hướng của hai vectơ bất kì, nên $\vec{f}$ là phép *biến đổi tuyến tính trực giao.*

Ngược lại, nếu $\vec{f}$ là phép biến đổi tuyến tính trực giao thì với hai điểm bất kì A, B và A' = f(A), B' = f(B) ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \vec{f}(\overrightarrow{AB}).\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'B'}.$$

Như vậy AB = A'B', nên f là một phép *đẳng cự.*

- *Tập hợp Đc(**P**) tất cả các phép đẳng cự trong mặt phẳng **P** làm thành một nhóm (đó là một nhóm con của nhóm afin Af(**P**)).*

Thực vậy, do tích của hai phép đẳng cự là phép đẳng cự và đảo ngược của phép đẳng cự là phép đẳng cự, suy ra tập hợp Đc(**P**) các phép đẳng cự trong mặt phẳng P làm thành một nhóm con của nhóm afin Af(**P**).

2. Xác định phép đẳng cự

Định lí: *Nếu hai tam giác* OAB và O'A'B' *bằng nhau* (OA = O'A', OB = O'B', AB = A'B') *thì có phép đẳng cự duy nhất biến* O, A, B *thành* O', A' B'.

Chứng minh: Ta biết rằng có phép afin *duy nhất* biến O, A, B thành O', A', B'.

Ta chứng minh rằng f là phép đẳng cự.

Thật vậy, ta đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{O'A'} = \vec{i}'$, $\overrightarrow{O'B'} = \vec{j}'$ ta được hai *mục tiêu afin* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ và $(O', \vec{i}', \vec{j}')$. Ta biết rằng tọa độ của một điểm nào đó đối với mục tiêu thứ nhất $(O, \vec{i}, \vec{j})$ cũng là tọa độ ảnh của nó đối với mục tiêu thứ hai $(O', \vec{i}', \vec{j}')$. Bây giờ, lấy hai điểm bất kì M, N và ảnh của chúng M', N'. Giả sử đối với mục tiêu $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ta có M = (x, y), N = (x', y'); Đối với mục tiêu $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ có: M' = (x, y) và N' = (x', y').

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MN} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j}$. Do đó:

$$\overrightarrow{MN}^2 = (x' - x)\vec{i}^2 + (y' - y)\vec{j}^2 + 2(x' - x)(y' - y)\vec{i}.\vec{j}$$

Tương tự $\overrightarrow{M'N'} = (x' - x)\vec{i}' + (y' - y)\vec{j}'$. Do đó:

$$\overrightarrow{M'N'}^2 = (x' - x)\vec{i}'^2 + (y' - y)\vec{j}'^2 + 2(x' - x)(y' - y)\vec{i}'.\vec{j}'.$$

Vì hai tam giác OAB và O'A'B' bằng nhau nên

$$\vec{i}^2 = \vec{i}'^2,\ \vec{j}^2 = \vec{j}'^2,\ \vec{i}.\vec{j} = \vec{i}'.\vec{j}'.$$

Do đó ta có MN = M'N', vậy f là một phép đẳng cự.

Ta cũng nói: *Một phép đẳng cự được hoàn toàn xác định khi và chỉ khi cho biết ảnh của ba điểm không thẳng hàng.*

3. Biểu thức tọa độ của phép đẳng cự

3.1. Biểu thức tọa độ của phép đẳng cự

Trong mặt phẳng với mục tiêu trực chuẩn $(O, \vec{i}, \vec{j})$ cho phép đẳng cự f. Vì f cũng là phép afin nên đối với mục tiêu đó, biểu thức tọa độ của f có dạng:

$$\begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = bx + dy + q \end{cases}$$

trong đó $\vec{i}' = \vec{f}(\vec{i}) = (a, b), \vec{j}' = \vec{f}(\vec{j}) = (c, d)$, O' = f(O) = (p, q). Nhưng f là đẳng cự nên $\vec{f}$ là biến đổi tuyến tính trực giao, do đó $|\vec{i}'| = |\vec{j}'| = 1, \quad \vec{i}'.\vec{j}' = 0$.

Từ đó suy ra $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$.

3.2. Ma trận của phép đẳng cự

Ma trận $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ của phép biến đổi tuyến tính kiên kết $\vec{f}$ được gọi là ma trận của biến hình f đối với mục tiêu đã cho. Từ các điều kiện $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$ của a, b, c, d ta suy ra A là ma trận trực giao, tức là $A^t. A = A. A^t = I_2$ với

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra det A = 1 hoặc det A = –1.

Định lí: *Nếu đối với một mục tiêu trực chuẩn nào đó, ma trận của phép đẳng cự f có định thức bằng 1 (hoặc –1) thì đối với mọi mục tiêu trực chuẩn khác ma trận của phép đẳng cự f cũng có định thức bằng 1 (hoặc –1).*

Chứng minh: Giả sử đối với các mục tiêu $(O, \vec{i}, \vec{j})$ và $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ ma trận của f lần lượt là A và A'. Gọi ma trận chuyển mục tiêu là C thì ta có: $A' = C^{-1}AC$. Mà ma trận C là ma trận chuyển mục tiêu trực chuẩn nên có $\det C = \det C^{-1} = \pm 1$, vậy detA = detA'.

4. Phép dời hình và phép phản chiếu

4.1. Định nghĩa

Cho phép đẳng cự f có ma trận A đối với mục tiêu trực chuẩn $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *nào đó*

Nếu det A = 1 thì phép đẳng cự f gọi là phép dời hình

Nếu det A = –1 thì phép đẳng cự f gọi là phép phản chiếu.

4.2. Biểu thức tọa độ của phép dời hình và phép phản chiếu

Theo trên, biểu thức tọa độ của f có dạng:

$$\begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = bx + dy + q \end{cases}$$

trong đó

$$\vec{i}' = \vec{f}(\vec{i}) = (a, b),\ \vec{j}' = \vec{f}(\vec{j}) = (c, d),$$

$$O' = f(O) = (p, q),$$

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1,\ ac + bd = 0$$

với ma trận $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ là ma trận trực giao.

Vậy: *Biểu thức tọa độ của phép dời hình đối với mục tiêu trực chuẩn có dạng:*

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + p \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + q \end{cases},\ A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},\ \textit{det}\ A = 1$$

Biểu thức toạ độ của phép phản chiếu đối với mục tiêu trực chuẩn có dạng:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + p \\ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + q \end{cases},\ A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix},\ \textit{det}A = -1$$

4.3. Tích của các phép dời hình và các phép phản chiếu

Định lí: *Tích của hai phép dời hình hoặc tích hai phép phản chiếu là một phép dời hình. Tích của một phép dời hình và một phép phản chiếu là một phép phản chiếu.*

Chứng minh: Định lí được suy ra dễ dàng do tích ma trận của tích hai phép biến hình bằng tích các ma trận và det(AB) = detA.detB ≠ 0 vì detA ≠ 0, detB ≠ 0.

Hệ quả: Tập hợp các phép dời hình lập thành một nhóm, gọi là nhóm dời hình của mặt phẳng Ơ–clit.

Chú ý: Tập hợp các phép phản chiếu không đóng kín đối với phép lấy tích nên không lập thành một nhóm.

5. Phép đối xứng trục

5.1. *Định nghĩa*

Trong mặt phẳng Ơ–clit **P** *cho đường thẳng d.*

Ánh xạ f: **P** → **P** biến mỗi điểm M thành M' được gọi là phép đối xứng trục với trục là đường thẳng d, nếu:

- *Điểm M thuộc d thì M' trùng với M*
- *Điểm M không thuộc d thì đường thẳng d là trung trực của đoạn thẳng MM'.*

Từ định nghĩa ta thấy phép đối xứng trục có *tính chất đối hợp*, tức là tích của một phép đối xứng trục với chính nó là phép đồng nhất của mặt phẳng *Ơ–clit* **P**:

$$Đ \circ Đ = Đ^2 = e$$

5.2. *Biểu thức toạ độ của phép đối xứng trục*

Chọn mục tiêu trực chuẩn xOy, với trục Ox trùng với trục đối xứng d, biểu thức toạ độ của phép đối xứng trục f là:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

Ta có det A = –1, vậy phép đối xứng trục là một *phép phản chiếu.*

5.3. *Phân tích một phép đẳng cự thành tích các phép đối xứng trục*

Định lí: Mọi phép đẳng cự đều có thể phân tích được thành tích của không quá ba phép đối xứng trục. Nói khác đi, mọi phép đẳng cự được xem là tích của nhiều nhất ba phép đối xứng trục.

Chứng minh: Cho phép đẳng cự f xác định bởi ảnh A', B', C' của ba điểm không thẳng hàng A, B, C, khi đó ΔABC = ΔA'B'C'. Giả sử A' không trùng với A, ta gọi d_1 trung trực của đoạn thẳng AA' và

D_1 là phép đối xứng trục với trục là d_1. Gọi ảnh của A, B, C lần lượt là A', B_1, C_1. Nếu B' không trùng B_1 thì ta gọi d_2 là trung trực của B_1B' và D_2 là phép đối xứng có trục d_2. Điểm A' thuộc d_2 vì từ $A'B_1 = AB$ (qua phép đối xứng D_1) và $AB = A'B'$ (qua phép đẳng cự f) có $A'B_1 = A'B'$. Phép đối xứng trục D_2 biến C_1 thành C_2, nên biến tam giác $A'B_1C_1$ thành $A'B'C_2$. Ta xét phép đối xứng trục D_3 có trục là trung trực d_3 của đoạn thẳng C_2C'. Lập luận tương tự như trên ta thấy A', B' thuộc d_3, do đó phép đối xứng trục D_3 biến C_2 thành C' và biến tam giác $A'B'C_2$ thành A'B'C'. Vậy, tích các phép đối xứng trục $D_3 \circ D_2 \circ D_1$ cũng là một phép đẳng cự, được xác định bởi ảnh A', B', C' của ba điểm không thẳng hàng A, B, C, nên đó chính là phép đẳng cự f đã cho:

$$f = D_3 \circ D_2 \circ D_1.$$

Trong các lập luận ở trên, nếu A' = A, hoặc $B' = B_1$, hoặc $C' = C_2$ thì có thể bỏ qua các phép đối xứng tương ứng D_1 hoặc D_2 hoặc D_3.

Như vậy, ta có thể xem một phép đẳng cự f là tích nhiều nhất của ba phép đối xứng trục. Định lí được chứng minh.

Ta biết phép đối xứng trục là một phép phản chiếu và từ định lí trên ta suy ra:

Hệ quả: *Mọi phép dời hình đều là phép đồng nhất hoặc là tích của <u>hai</u> phép đối xứng trục. Mọi phép phản chiếu đều là một phép đối trục hoặc là tích của <u>ba</u> phép đối xứng trục.*

6. Dạng chính tắc của phép dời hình của mặt phẳng Ơ-clit

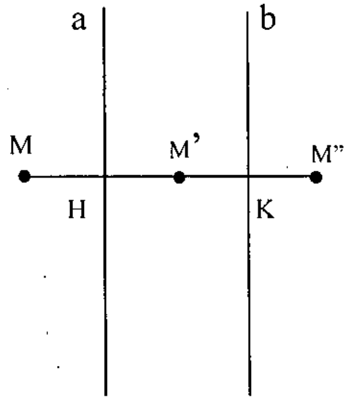
6.1. Phép tịnh tiến

Định nghĩa: Phép biến hình f: $P \to P$ gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, nếu với mọi điểm M và M' = f(M) ta có: $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Phép tịnh tiến của mặt phẳng Ơ-clit là một phép đẳng cự.

Phân tích một phép tịnh tiến thành tích của các phép đối xứng trục.

Định lí: *Tích hai phép đối xứng trục có các trục song song là một phép tịnh tiến. Ngược lại mọi phép tịnh tiến đều có thể phân tích thành tích của hai phép đối xứng trục có các trục song song.*



Hình 19

Chứng minh: Giả sử cho các phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ có trục lần lượt là các đường thẳng a và b mà a//b. Với điểm M bất kì, gọi M' = $Đ_a$(M), M" = $Đ_b$(M') = $Đ_b \circ Đ_a$(M). Khi đó, nếu H là trung điểm của MM' và K là trung điểm của M'M" thì:

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\left(\overrightarrow{HM'} + \overrightarrow{M'K}\right) = 2\overrightarrow{HK}$$

Dễ dàng thấy rằng $2\overrightarrow{HK} = \vec{v}$ không phụ thuộc vào điểm M, vậy tích $Đ_b.Đ_a$ là phép tịnh tiến theo vectơ $2\vec{v}$.

Ngược lại giả sử $t_{\vec{v}} : P \to P$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Lấy đường thẳng a vuông góc với $\vec{v}$ và b là ảnh của a qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{\vec{v}}{2}$ thì theo chứng minh trên ta có $t_{\vec{v}} = Đ_b \circ Đ_a$.

***Hệ quả:** Mọi phép tịnh tiến của mặt phẳng Ơ-clit đều là phép dời hình.*

6.2. *Phép quay*

***Định nghĩa:** Cho điểm O cố định và một góc lượng giác φ.*

Ánh xạ f: P → P được gọi là phép quay tâm O với góc quay φ nếu f biến điểm M thành M' sao cho

i) *OM = OM'*

ii) *(OM, OM') = φ, với (OM, OM') là kí hiệu chỉ góc lượng giác có tia đầu là OM, tia cuối là OM'.*

Kí hiệu: Phép quay tâm O với góc quay φ là **Q**(O, φ)

Chú ý: Tâm O của phép quay Q(O, φ) là một điểm bất động của nó.

Phép quay tâm O có góc quay 0^o là một phép đồng nhất

Phép quay tâm O có góc quay 180^0 là một phép đối xứng tâm O.

6.3. Phân tích một phép quay thành tích của các phép đối xứng trục

Định lí: *Tích hai phép đối xứng trục có hai trục cắt nhau là một phép quay.*

Ngược lại mỗi phép quay đều có thể bằng nhiều cách phân tích thành tích của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau.

Chứng minh: Giả sử $Đ_a$ và $Đ_b$ là hai phép đối xứng trục có trục là a và b cắt nhau tại O. Với điểm M bất kì không trùng với điểm O, M' = $Đ_a$(M), M" = $Đ_b$(M') = $Đ_b \circ Đ_a$(M). Khi đó OM = OM". Mặt khác, gọi H, K lần lượt là trung điểm của MM' và M'M", ta có:

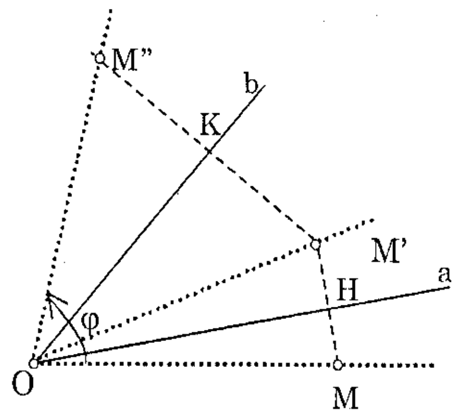
$$
\begin{aligned}
(OM, OM") &= (OM, OM') + (OM', OM") \\
&= 2[(OH, OM') + (OM', OK)] \\
&= 2(OH, OK) = \varphi
\end{aligned}
$$

Rõ ràng là góc lượng giác (OH, OK) chỉ phụ thuộc hai đường thẳng a và b đã cho và không phụ thuộc vào điểm M, do đó góc lượng giác φ không đổi khi điểm M lấy tuỳ ý trên mặt phẳng Ơ–clit.

Ngoài ra $Đ_b o Đ_a$(O) = O.

Vậy $Đ_b o Đ_a$ là phép quay tâm O và góc quay φ.

Ngược lại, giả sử Q là phép quay tâm O, với góc quay φ. Lấy hai đường thẳng a, b đi qua O sao cho góc (a, b) $= \frac{\varphi}{2}$, và gọi $Đ_a$ và $Đ_b$ là các phép đối xứng có trục lần lượt là a và b, theo chứng minh trên ta có $Q = Đ_b \circ Đ_a$. Định lí được chứng minh.



Hình 20

***Hệ quả**: Mọi phép quay đều là phép dời hình.*

6.4. Dạng chính tắc của phép dời hình

Chú ý rằng phép đồng nhất được xem là một phép tịnh tiến với vectơ tịnh tiến $\vec{v} = \vec{0}$ hoặc xem là một phép quay với góc quay bằng không. Hơn nữa, theo trên, mọi phép dời hình đều là phép đồng nhất hoặc là tích của hai phép đối xứng trục, nên ta có định lí sau:

***Định lí**: Mọi phép dời hình đều là một phép tịnh tiến hoặc là một phép quay.*

Như vậy mọi phép dời hình của mặt phẳng Ơ–clit đều đưa về một phép tịnh tiến, hoặc một phép quay (hoặc phép đồng nhất), nên phép tịnh tiến và phép quay được gọi là *các dạng chính tắc của phép dời hình.*

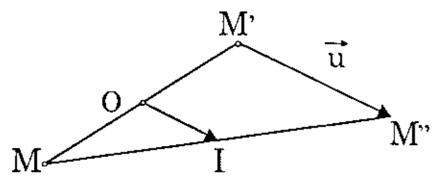
Ví dụ: Tìm dạng chính tắc của tích một phép đối xứng tâm với một phép tịnh tiến.

Phép đối xứng tâm và phép tịnh tiến của mặt phẳng Ơ–clit đều là các phép dời hình, nên tích của một phép đối xứng tâm với một phép tịnh tiến là một phép dời hình.

Ta tìm dạng chính tắc của phép dời hình này, kí hiệu là f.

Giả sử cho phép đối xứng tâm O và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$:

$$t_{\vec{u}}: \mathbf{P} \to \mathbf{P}$$



Hình 21

Ảnh của điểm M bất kì qua phép đối xứng tâm O là M'; ảnh của M' qua phép tịnh tiến $t_{\vec{u}}$ là M''. Gọi I là trung điểm của MM'', ta có:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM''}}{2} = \frac{\overrightarrow{OM} + (\overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M''})}{2} = \frac{\overrightarrow{M'M''}}{2} = \frac{\vec{u}}{2}$$

nên điểm I cố định không phụ thuộc vào điểm M đã chọn. Dạng chính tắc của phép dời hình f đã cho là một phép quay có góc quay 180^0, (tức là một phép đối xứng tâm I).

6.5. *Phép đối xứng trượt của mặt phẳng Ơ – clit*

Định nghĩa

Tích của một phép đối xứng có trục d và một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ song song với trục d được gọi là phép đối xứng trượt của mặt phẳng Ơ–clit.

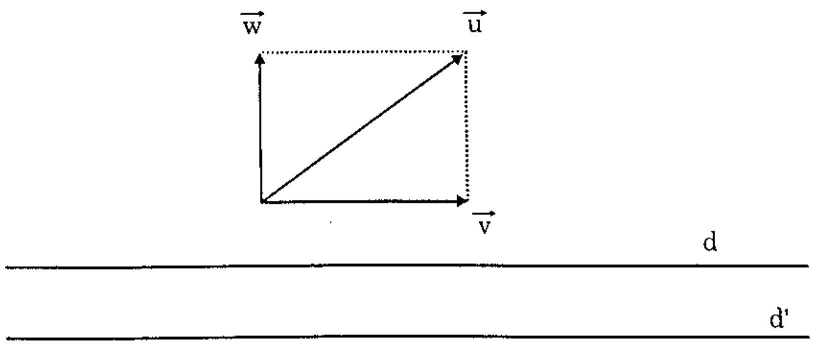
Giả sử Đ là phép đối xứng trục có trục là d và T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, $\vec{v}$ song song với d. Ta dễ thấy: $T \circ Đ = Đ \circ T$.

Đường thẳng d gọi là trục của phép đối xứng trượt, vectơ $\vec{v}$ gọi là vectơ trượt.

Định lí: *Tích của một phép đối xứng trục và một phép tịnh tiến (hoặc một phép tịnh tiến và một phép đối xứng trục) là phép đối xứng trượt.*

Chứng minh: Giả sử f = ToĐ, trong đó T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ bất kì và Đ là phép đối xứng có trục d. Lấy hai vectơ $\vec{v}$ và $\vec{w}$ sao cho $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, với $\vec{v}$ // d và $\vec{w} \perp$ d. Nếu gọi T' và T" là các phép tịnh tiến lần lượt theo vectơ $\vec{v}$ và $\vec{w}$ thì ta có:

$$T = T'oT''$$



Hình 23

Phân tích phép tịnh tiến T" thành tích của các phép đối xứng trục: T" = Đ'oĐ, trong đó Đ' là phép đối xứng có trục là đường thẳng d', với d' // d.

Vậy, do tính chất kết hợp của tích các ánh xạ và tính đối hợp của phép đối xứng trục, ta có:

$$f = T \circ Đ = (T' \circ T'') \circ Đ = T' \circ (Đ' \circ Đ) \circ Đ = (T' \circ Đ') \circ (Đ \circ Đ) = T' \circ Đ',$$

đó là một phép đối xứng trượt trục d', vectơ trượt $\vec{v}$ song song với d'.

Cũng vậy, tích của một phép đối xứng trục với một phép tịnh tiến là một phép đối xứng trượt. Tương tự ta được:

Định lí

Tích của một phép đối xứng trục và một phép quay (hoặc một phép quay một và phép đối xứng trục) là phép đối xứng trượt.

Chứng minh: Ta đã biết có thể phân tích được phép quay Q thành tích của hai phép đối xứng trục $Đ_1$, $Đ_2$, lần lượt có các trục d_1, d_2 cắt nhau tại I và chọn $Đ_1$ có trục d_1 song song với trục d của phép đối xứng Đ. Do đó, f là tích của ba phép đối xứng trục, trong đó có hai trục song song, tức f là tích của một phép tịnh tiến và một phép đối xứng trục: $f = Đ \circ (Đ_1 \circ Đ_2) = (Đ \circ Đ_1) \circ Đ_2 = T \circ Đ_2$. Vậy theo trên, f là một phép đối xứng trượt.

6.6. *Dạng chính tắc của phép phản chiếu*

Định lí: *Mọi phép phản chiếu đều là phép đối xứng trượt.*

Chứng minh: Ta đã biết, mọi phép phản chiếu của mặt phẳng Ơ–clit là một phép đối xứng trục hoặc là tích của ba phép đối xứng trục.

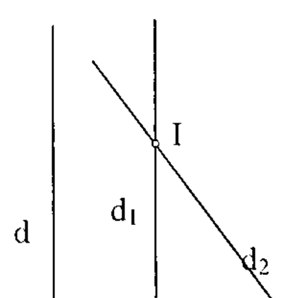
Trường hợp phép phản chiếu là một phép đối xứng trục, thì được xem là một phép đối xứng trượt với vectơ trượt là vectơ không.

Xét trường hợp phép phản chiếu f là tích của ba phép đối xứng trục.

a. Nếu trong đó có hai phép đối xứng trục có trục song song: khi đó f là tích của một phép đối xứng trục với một phép tịnh tiến, theo trên f là một phép đối xứng trượt.

b. Nếu cả ba trục của chúng đều cắt nhau đôi một: khi đó f là tích của một phép quay Q với một phép đối xứng trục Đ, nên f là một phép đối xứng trượt.

Như vậy, mọi phép phản chiếu của mặt phẳng Ơ–clit đều đưa về một phép đối xứng trượt, được gọi là *dạng chính tắc của phép phản chiếu.*



Hình 24

7. Nhóm đẳng cự và hình học Ơ-clit

7.1. Nhóm đẳng cự

Ta đã biết rằng, tập hợp các phép đẳng cự trong mặt phẳng làm thành một nhóm, gọi là nhóm đẳng cự trong mặt phẳng, kí hiệu là Đc(**P**).

7.2. Hai hình bằng nhau

Định nghĩa: *Hình H được gọi là tương đương đẳng* cự (hay vắn tắt là *đẳng cự*) *với hình H' nếu có phép đẳng cự biến H thành H'.*

Hình H tương đương đẳng cự với hình H' còn được gọi là hình H *bằng* hình H' và kí hiệu: H = H'.

Vì Đc(**P**) là một nhóm nên dễ dàng suy ra:

i) Mọi hình H đều *bằng* chính nó: H = H.

ii) Nếu H = H' thì H' = H (bởi vậy ta còn nói hai hình H và H' *bằng nhau*).

iii) Nếu H = H' và H' = H" thì H = H".

7.3. Hình học Ơ-clit

Định nghĩa:

- Một tính chất nào đó của hình H gọi là *tính chất đẳng cự* hay *tính chất Ơ-clit* nếu mọi hình H' *bằng* H đều có tính chất đó.
- Một khái niệm được gọi là *khái niệm đẳng cự* hay *khái niệm Ơ-clit* nếu nó được *bảo toàn* qua bất kì phép đẳng cự nào.
- Các tính chất đẳng cự và các khái niệm đẳng cự gọi là các *bất biến đẳng cự* hay *bất biến Ơ-clit.*

Môn học nghiên cứu các bất biến đẳng cự (hay tập hợp các bất biến đẳng cự) của mặt phẳng gọi là *Hình học của nhóm đẳng cự* hay gọi là *Hình học Ơ-clit.*

Hình học Ơ-clit phong phú hơn Hình học afin: Mọi bất biến của nhóm afin đều là các bất biến của nhóm đẳng cự, nhưng ngược lại có các bất biến của nhóm đẳng cự nói chung *không phải* là các bất biến của nhóm afin. Hình học Ơ-clit không chỉ nghiên cứu các tính chất afin của các hình, sự tương đương afin của các hình... mà còn nghiên cứu cả các tính chất đẳng cự của các hình, sự bằng nhau của các hình...

Ví dụ: Các khái niệm song song, hình thang, hình bình hành, tỉ số đơn của ba điểm hẳng hàng... là các khái niệm afin.

Độ dài, số đo góc, hình vuông, hình thoi,... là các khái niệm Ơ–clit;

Các tính chất của các phân giác, đường cao, trung trực của tam giác là các tính chất Ơ–clit của tam giác; Định lí Ta–lét và định lí Py–ta–go đều là các định lí của hình học Ơ–clit;

Tuy nhiên, định lí Ta–lét cũng là định lí của Hình học afin, còn định lí Py–ta–go thì không phải là định lí của Hình học afin.

7.4. Áp dụng

Trong mặt phẳng Ơ–clit, để chứng minh một bài toán afin hay một định lí của Hình học afin cố nhiên ta có thể chỉ dùng các kiến thức của Hình học afin (gọi là phương pháp afin), nhưng cũng có thể dùng các kiến thức của cả Hình học afin và cả của hình học Ơ–clit để chứng minh một bài toán afin. Ở bậc phổ thông, ta thường dùng các kiến thức của Hình học Ơ–clit trong chứng minh bài toán afin, cụ thể là sử dụng các thể hiện Ơ–clit của các khái niệm afin, sau đó dùng các định lí của Hình học Ơ–clit để giải.

Chẳng hạn, ta có tỉ số đơn (ABC) = $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ là một khái niệm afin. Nếu ta xét trong Hình học afin trên *mặt phẳng*, kí hiệu $\overline{CA}$ và $\overline{CB}$ ở đây để chỉ các số thực *λ và μ sao cho* $\vec{CA} = \lambda\vec{e}$ và $\vec{CB} = \mu\vec{e}$, mà ***không*** phải là *độ dài* đại số của đoạn thẳng CA, CB, nhưng trong hình học Ơ–clit trên mặt phẳng, $\overline{CA}$ và $\overline{CB}$ chính là các *độ dài đại số* của các đoạn thẳng CA và CB, và tỉ số đơn (A, B, C) có *thể hiện Ơ–clit là tỉ số của các độ dài đại số* của hai đoạn thẳng CA và CB trên cùng một trục số với vectơ đơn vị $\vec{e}$. Xét các ví dụ sau.

Ví dụ 1: *Trên mặt phẳng Ơclit, quỹ tích trung điểm các dây cung song song với nhau của một đường elip là một dây cung đi qua tâm của elip.*

Cách chứng minh 1: (Chỉ dùng kiến thức Hình học afin). Trên mặt phẳng Ơ–clit, cho elip E có phương trình chính tắc $x^2 + y^2 = 1$ đối với một mục tiêu afin nào đó. Gọi MN là dây cung thay đổi của E, luôn luôn song song với nhau, nói cách khác: đường thẳng MN có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a, b)$ cố định. Gọi trung điểm của MN là $I(x_0, y_0)$.

Khi đó nếu $\overrightarrow{IM} = t\vec{u}$ thì $\overrightarrow{IN} = -t\vec{u}$ hay $M(x_0 + at,\ y_0 + bt)$ và $N(x_0 - at,\ y_0 - bt)$. Vì M và N nằm trên E nên: $(x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2 = (x_0 - at)^2 + (y_0 - bt)^2 = 1$.

Suy ra: $4(ax_0 + by_0)t = 0$, vì $t \neq 0$ nên ta có: $ax_0 + by_0 = 0$. Như vậy điểm I nằm trên đường thẳng có phương trình $ax + by = 0$ đi qua tâm của elip. Tuy nhiên I phải nằm trong hoặc trên elip nên quỹ tích I là một đường kính của elip.

Cách chứng minh 2: (Dùng cả kiến thức của Hình học Ơclit). Dùng phép biến hình afin f biến elip E thành đường tròn C, ta chỉ cần chứng minh định lí trên đối với đường tròn: Gọi O là tâm của đường tròn và I là trung điểm của dây cung MN thì $OI \perp MN$, nên quỹ tích I là đường kính của đường tròn (vuông góc với MN).

***Ví dụ 2*:** Định lí Mê–nê–la–uyt.

Cho tam giác ABC, các điểm P, Q, R (không trùng với A, B, C) lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh:

P, Q, R thẳng hàng khi và chỉ khi tích các tỉ số đơn (B, A, R). (C, B, P). (A, C, Q) = 1.

Nói khác đi, chứng minh:

P, Q, R thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \cdot \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \cdot \dfrac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = 1$ (*)

* *Cách chứng minh 1*: (Chỉ dùng kiến thức Hình học afin).

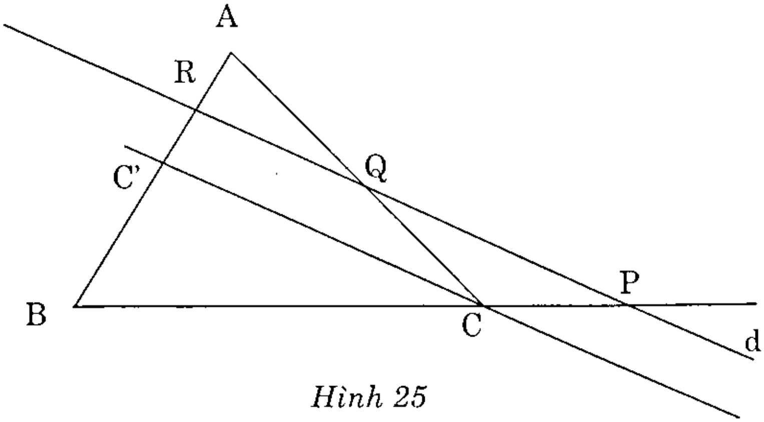
Chứng minh điều kiện cần:

Giả sử P, Q, R thẳng hàng, tức cùng thuộc một đường thẳng d.

Ta chứng minh:

$$(B, A, R).(C, B, P).(A, C, Q) = 1$$

Ta có: $(B, A, R) = \dfrac{\overline{RB}}{\overline{RA}}$.



Hình 25

Kẻ đường thẳng d' qua A và song song với d cắt AB tại điểm C'.

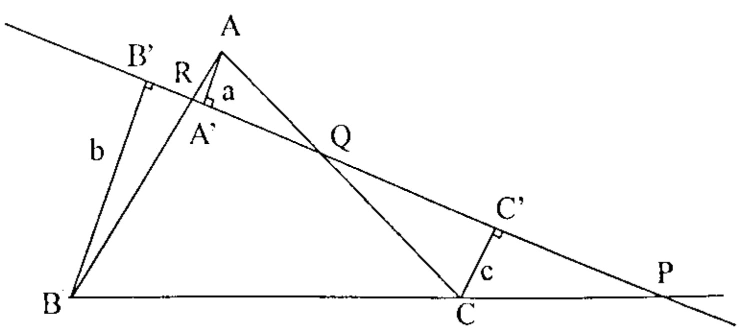
Theo định lí Ta lét áp dụng cho tam giác RBP (có CC''//PR) và tam giác CAC' (có QR // CC'), ta có:

$(C, B, P) = (C', B, R) = \dfrac{\overline{RC'}}{\overline{RB}}$; $(A, C, Q) = (A, C', R) = \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RC'}}$.

Vậy: $(B, A, R)(C, B, P).(A, C, Q) = \dfrac{\overline{RC'}}{\overline{RB}} \cdot \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RC'}} \cdot \dfrac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = 1$

**Cách chứng minh 2:* (Dùng các kiến thức hình học Ơclit)

Chứng minh điều kiện cần:



Hình 26

Các điểm P, Q, R thẳng hàng. Hạ từ A, B, C các đường vuông góc xuống đường thẳng d đi qua P, Q. Gọi a, b, c là *khoảng cách* từ A, B, C đến đường thẳng d. Từ các cặp tam giác vuông đồng dạng: PBB' và PCC"; QBB' và QAA'; QAA" và QCC', ta tính được các tỉ số đơn:

$$(C, B, P) = \frac{c}{b}$$

$$(A, C, Q) = -\frac{a}{c}$$

$$(B, A, R) = -\frac{b}{a}$$

Nhân vế với vế các đẳng thức trên ta được

(B, A, R).(C, B, P).(A, C, Q) = 1

Ý nghĩa của phương pháp này là đưa thêm công cụ mới – công cụ của Hình học Ơ–clit, để giải quyết các bài toán afin (được xét trong mặt phẳng Ơ–clit).

Chứng minh điều kiện đủ:

Giả sử (B, A, R).(C, B, P).(A, C, Q) = 1 (*), ta chứng minh P, Q, R thẳng hàng. Thực vậy, gọi R' là giao điểm của đường thẳng PQ với đường thẳng AB. Từ P, Q, R' thẳng hàng và theo điều kiện cần ta có: (B, A, R').(C, B, P).(A, C, Q) = 1 (**).

Từ hai đẳng thức (*) và (**) ta suy ra (B, A, R) = (B, A, R'), nên R' trùng với R. Vậy P, Q, R thẳng hàng.

Ta biết rằng hai hình tương đương afin thì có các tính chất afin như nhau, chẳng hạn ta đã biết, trong mặt phẳng afin, hai tam giác bất kì là tương đương afin nên chúng có các tính chất afin như nhau.

Trong thực hành giải toán, khi xét trong mặt phẳng Ơ–clit, điều đó vẫn còn đúng vì mặt phẳng Ơ–clit cũng là mặt phẳng afin, do đó một tam giác đều (hay một tam giác vuông, ...) là tương đương afin với một tam giác thường bất kì nên chúng có các tính chất afin như nhau (còn các tính chất không phải là tính chất afin thì khác nhau). Vì vậy, ta có thể xem xét một bài toán về tam giác đều có các tính chất afin nào đó và suy ra tam giác bất kì cũng có các tính chất afin như thế, điều cần thiết là phải biết rõ đó có đúng là tính chất afin hay không. Xét ví dụ sau:

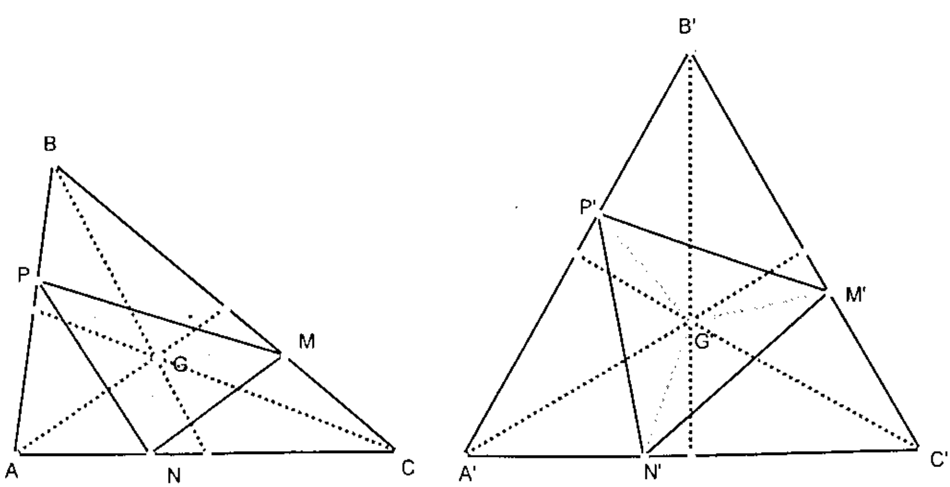
Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Ơ-clit, cho tam giác bất kì ABC và các điểm M, N và P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA và AB sao cho các tỉ số đơn sau bằng nhau:

$$(B, C, M) = (C, A, N) = (A, B, P)$$

Chứng minh trọng tâm của các tam giác ABC và MNP trùng nhau.

Bài giải:

Theo lập luận trên, ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp tam giác ABC là tam giác đều vì các khái niệm tỉ số đơn, trọng tâm của tam giác nêu trong bài toán là các khái niệm afin. Ta dùng các kiến thức của Hình học Ơ-clit để giải bài toán này. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Xét phép quay Q tâm G, góc quay 120^0. Q biến A, B, C lần lượt thành B, C, A. Do (B, C, M) = (C, A, N) = (A, B, P) nên phép quay Q biến M, N, P thành N, P, M. Suy ra tam giác MNP là tam giác đều và nhận tâm quay G là trọng tâm. Đó là điều phải chứng minh.



Hình 27

(Mỗi tam giác bất kì đều tương đương afin với một tam giác đều)

Chú ý 1: Ta thấy, trong cách chứng minh trên ở ví dụ 3, ta đã chứng minh bài toán *đúng trong trường hợp riêng* (xét tam giác đều), rồi suy ra bài toán *vẫn đúng trong trường hợp tổng quát* (đối với mọi tam giác bất kì). Cách chứng minh đó nói chung là trái với cách suy luận thông thường, nhưng ở đây cách đó lại là đúng vì ta đã chứng tỏ được mỗi tam giác thường bất kì ABC và tam giác đều A'B'C' là hai hình *tương đương afin* và tính chất cần chứng minh tương ứng trong mỗi hình *là tính chất afin.*

Chú ý 2: Ta có thể chứng minh bài toán trên bằng phương pháp afin, tức là chỉ dùng các kiến thức của Hình học afin. Chẳng hạn, dùng *phương pháp toạ độ afin* hoặc dùng *biến hình afin* (xem ví dụ 2, mục 2.6: Ta đã biết điểm bất động của phép afin là duy nhất; Hãy chứng minh phép afin f biến các điểm A, B, C lần lượt thành B, C, A có điểm bất động là trọng tâm G và f cũng biến các điểm M, N, P lần lượt thành N, P, M, suy ra trọng tâm G'của tam giác MNP cũng là điểm bất động của f).

§3. CÁC PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa và tính chất của phép đồng dạng

1.1. Phép vị tự

Định nghĩa: *Cho số* $k \neq 0$ *không đổi, và cho điểm* O *cố định của mặt phẳng* P. *Ánh xạ* f: $\mathbf{P} \to \mathbf{P}$ *gọi là phép vị tự tâm* O, *tỉ số* k *nếu nó biến điểm* M *bất kì thành điểm* M' = f(M) *sao cho*

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$

Ta có: Phép vị tự tâm O tỉ số k = 1 là phép đồng nhất.

Phép vị tự tâm O tỉ số k = –1 là phép đối xứng tâm, tâm là O.

1.2. Phép đồng dạng

Định nghĩa: *Cho số* $k > 0$. *Ánh xạ* f: $\mathbf{P} \to \mathbf{P}$ *được gọi là phép đồng dạng tỉ số k nếu nó biến hai điểm M và N tuỳ ý thành hai điểm* $M' = f(M)$ *và* $N' = f(N)$ *sao cho khoảng cách của chúng thỏa mãn hệ* *thức: M'N' = k.MN.*

Theo định nghĩa, phép đẳng cự là phép đồng dạng tỉ số $k = 1$, còn phép vị tự tâm O tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

Dễ dàng thấy rằng:

- Tích hai phép đồng dạng với tỉ số k và k' là phép đồng dạng với tỉ số k.k'.
- Đảo ngược của phép đồng dạng tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $\frac{1}{k}$.
- Tập hợp các phép đồng dạng của **P** là thành một nhóm, gọi là nhóm đồng dạng của **P**, kí hiệu là Đd(**P**).

1.3. Phân tích một phép đồng dạng

Định lí: *Mọi phép đồng dạng đều phân tích được thành tích của một phép vị tự và một phép đẳng cự (hoặc tích của một phép đẳng cự và một phép vị tự).*

Chứng minh: Giả sử f: $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ là phép đồng dạng tỉ số $k > 0$.

- Ta lấy một điểm O nào đó và gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số k.

Phép đảo ngược V^{-1} của V là một phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{1}{k}$.

Khi đó tích $Đ = f \circ V^{-1}$ là phép đồng dạng tỉ số 1 nên là phép đẳng cự.

Vậy $f \circ V^{-1} = Đ$, hay $f = Đ \circ V$. Vậy f là tích của phép vị tự V và phép đẳng cự Đ.

– Tương tự, tích $Đ' = V^{-1} \circ f$ là một phép đẳng cự nên $f = V \circ Đ'$.

1.4. Tính chất của phép đồng dạng

Từ các tính chất đã biết của các phép vị tự, đẳng cự và từ định lí trên ta suy ra:

Định lí: *Phép đồng dạng là một phép afin.*

Qua một phép đồng dạng ảnh của đường thẳng là đường thẳng, ảnh của tia là tia, ảnh của đoạn thẳng là đoạn thẳng, ảnh của một góc là góc có cùng số đo, ảnh của một tam giác là tam giác đồng dạng với nó, ảnh của đường tròn là đường tròn...

2. Biểu thức toạ độ của phép đồng dạng

2.1. Biểu thức toạ độ

Trong mặt phẳng Ơ–clit **P** đã cho mục tiêu trực chuẩn $(O,\vec{i},\vec{j})$ xét phép đồng dạng f: **P** → **P** với tỉ số k > 0, k ≠ 1. Ta đã biết: f = Đ ∘ V, trong đó V là phép vị tự tâm O tỉ số k, còn Đ là phép đẳng cự.

Nếu qua phép vị tự V ảnh của điểm M(x, y) là điểm $M_1(x_1, y_1)$ thì:

$$\begin{cases} x_1 = kx \\ y_1 = ky \end{cases}$$

Nếu qua phép đẳng cự Đ ảnh của điểm $M_1(x_1, y_1)$ là điểm M'(x', y') thì:

$$\begin{cases} x' = ax_1 + cy_1 + p \\ y' = bx_1 + dy_1 + q \end{cases}$$

trong đó ma trận $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ là ma trận trực giao, tức là $A^t.A = I_2$. Hơn nữa det A = ±1.

Như vậy, *biểu thức toạ độ của phép đồng dạng* f đối với mục tiêu đã cho là:

$$\begin{cases} x' = kax + kcy + p \\ y' = kbx + kdy + q \end{cases}$$

và ma trận của phép đồng dạng f có dạng k.A, trong đó k là số thực và A là ma trận trực giao.

2.2. Phép đồng dạng thuận, phép đồng dạng nghịch

Ma trận của phép đồng dạng f có dạng k.A, trong đó k là số thực và A là ma trận trực giao, det (kA) = k^2 hoặc det (kA) = $-k^2$ (k > 0).

Chú ý rằng khi đổi mục tiêu trực chuẩn, biểu thức toạ độ của phép đồng dạng sẽ thay đổi, tức là ma trận của nó cũng thay đổi. Tuy nhiên định thức của ma trận *của phép đồng dạng* không đổi, luôn luôn bằng k^2 hoặc $-k^2$, (k > 0).

Định nghĩa: Phép đồng dạng gọi là đồng dạng thuận nếu ma trận của nó (đối với mục tiêu trực chuẩn) có định thức dương: det (kA) = k^2 và được gọi là phép *đồng dạng nghịch* nếu ma trận có định thức âm: det (kA) = $-k^2$, (k > 0).

Chú ý: *Theo các kết quả trên, ta có: Phép đồng dạng thuận là tích của một phép vị tự và một phép dời hình (hoặc tích của một phép dời hình và một phép vị tự). Phép đồng dạng nghịch là tích của một phép vị tự và một phép phản chiếu (hoặc tích của một phép phản chiếu và một phép vị tự).*

3. Dạng chính tắc của phép đồng dạng

3.1. Điểm bất động

Định lí: Mọi phép đồng dạng với tỉ số k ≠ 1 luôn có một điểm bất động duy nhất.

Chứng minh: Giả sử đối với một mục tiêu trực chuẩn nào đó, phép đồng dạng f có biểu thức toạ độ:

$$\begin{cases} x' = kax + kcy + p \\ y' = kbx + kdy + q \end{cases}$$

Điểm M(x, y) là điểm bất động khi và chỉ khi toạ độ (x, y) của nó là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x = kax + kcy + p \\ y = kbx + kdy + q \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} (ka-1)x + kcy + p = 0 \\ kbx + (kd-1)y + q = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có định thức:

D = (ka −1)(kd − 1) − kc.kb = k^2(ad − bc) + 1 − k(a + d).

Hai trường hợp có thể xảy ra:

+ Nếu f là phép đồng dạng thuận thì $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ là ma trận trực giao của phép dời hình, nên A là ma trận trực giao:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \text{ ta có } ad - bc = 1 \text{ và } a = d = \cos\varphi.$$

Khi đó $D = k^2 + 1 - 2k\cos\varphi$. Vì $k > 0$ và $k \neq 1$ nên $k^2 + 1 > 2k$ do đó $D > 2k(1 - \cos\varphi)$ hay $D > 0$.

Chú ý: với $k > 0$ và $k \neq 1$, xét dấu tam thức bậc hai

$$D = k^2 - 2k\cos\varphi + 1 \text{ ta cũng có } D > 0.$$

\+ Nếu f là đồng dạng nghịch: cũng như trên $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ là ma trận của một phép phản chiếu nên ta có $ad - bc = -1$ và $a = -d = \cos\varphi$. Khi đó $D = -k^2 + 1$ và vì $k \neq 1$ nên $D \neq 0$.

Trong cả hai trường hợp: $D \neq 0$, nên hệ phương trình trên luôn có nghiệm duy nhất, vậy mọi phép đồng dạng đều có điểm bất động duy nhất.

3.2. *Phân tích một phép đồng dạng*

Định lí: *Mọi phép đồng dạng thuận f, với tỉ số $k > 0$, $k \neq 1$, (tức f không phải là một phép dời hình), đều phân tích được thành tích của một phép vị tự tâm O tỉ số k và một phép quay có tâm quay trùng với tâm O của phép vị tự (hoặc tích của một phép quay có tâm quay O và một phép vị tự tỉ số k, tâm trùng với tâm O của phép quay). Tích hai phép đó được gọi là dạng chính tắc của phép đồng dạng thuận f.*

Ta nói đưa một phép đồng dạng thuận f về *dạng chính tắc* có nghĩa là phân tích f thành tích của một phép vị tự tâm O tỉ số k và một phép quay có tâm quay trùng với tâm O của phép vị tự.

Chứng minh: Giả sử f là phép đồng dạng thuận, tỉ số $k > 0$, $k \neq 1$. Gọi O là điểm bất động của f: $f(O) = O$. Ta có thể phân tích $f = D \circ V$, trong đó V là phép vị tự tâm O tỉ số k còn D là phép dời. Vì $V(O) = O$ nên $D(O) = O$, vậy phép dời D có điểm bất động O nên nó là phép quay tâm O. Hiển nhiên trong trường hợp này $D \circ V = V \circ D$.

Định lí: *Mọi phép đồng dạng nghịch với tỉ số $k>0$, $k \neq 1$, (tức f không phải là một phép phản chiếu), đều phân tích được thành tích* *của một phép vị tự tâm O tỉ số k và một phép đối xứng trục có trục d là đường thẳng đi qua tâm O của phép vị tự (hoặc tích của một phép đối xứng trục d và một phép vị tự tâm O tỉ số k, có tâm O nằm trên trục d của phép đối xứng). Tích hai phép đó được gọi là dạng chính tắc của phép đồng dạng nghịch (với $k > 0$, $k \neq 1$).*

Ta nói đưa một phép đồng dạng nghịch f về *dạng chính tắc* có nghĩa là phân tích f thành tích của một phép vị tự tâm O tỉ số k *(với $k > 0$, $k \neq 1$)* và một phép đối xứng có trục là đường thẳng đi qua tâm O của phép vị tự (hoặc tích của một phép đối xứng trục d và một phép vị tự tâm O tỉ số k, có tâm O nằm trên trục d của phép đối xứng).

Chứng minh: Giả sử là f phép đồng dạng nghịch tỉ số $k \neq 1$. Gọi O là điểm bất động của f: $f(O) = O$. Ta có thể phân tích $f = Đ \circ V$, trong đó V là phép vị tự tâm O tỉ số k, còn Đ là phép phản chiếu. Vì $V(O) = O$ nên O cũng là điểm bất động của phép phản chiếu Đ. Suy ra Đ là phép đối xứng trục có trục đi qua O. Hiển nhiên $Đ \circ V = V \circ Đ$.

4. Nhóm đồng dạng và hình học của nhóm đồng dạng

4.1. Hai hình đồng dạng

Ta đã biết tập hợp Đd(**P**) của các phép đồng dạng làm thành một nhóm. Nó là nhóm con của nhóm afin Af(**P**) còn nhóm đẳng cự Đc(**P**) lại là nhóm con của nhóm Đd(**P**).

Định nghĩa: Hình H gọi là *tương đương đồng dạng* hay *đồng dạng* với hình H' nếu tồn tại một phép đồng dạng f biến H thành H'.

Vì Đd (**P**) là một nhóm nên:

i) Mọi hình H đều đồng dạng với chính nó.

ii) Nếu hình H đồng dạng với hình H' thì hình H' đồng dạng với hình H.

iii) Hai hình cùng đồng dạng với hình thứ ba thì đồng dạng với nhau.

4.2. Bất biến đồng dạng

Định nghĩa:

- *Một tính chất của hình H được gọi là tính chất đồng dạng nếu mọi hình đồng dạng với H đều có tính chất đó.*
- *Một khái niệm được gọi là khái niệm đồng dạng nếu nó không thay đổi qua bất kì phép đồng dạng nào.*
- *Các tính chất đồng dạng và các khái niệm đồng dạng được gọi chung là các bất biến của nhóm đồng dạng hay bất biến đồng dạng.*

4.3. Hình học của nhóm đồng dạng

Định nghĩa: *Môn học nghiên cứu các bất biến đồng dạng gọi là hình học của nhóm đồng dạng (hay hình học đồng dạng). Ta cũng gọi tập hợp tất cả các bất biến đồng dạng là hình học đồng dạng.*

Ta đã biết, nhóm đẳng cự Đc(**P**) là một nhóm con của nhóm đồng dạng Đd(**P**), nhóm đồng dạng Đd(**P**) lại là một nhóm con của nhóm afin Af(**P**), nên: *Hình học của nhóm đồng dạng phong phú hơn hình học của nhóm afin nhưng không phong phú bằng hình học của nhóm đẳng cự.* Các tính chất, khái niệm của Hình học *Ơ–clit* mà không phải là khái niệm afin được gọi là *các tính chất Ơ–clit, các khái niệm Ơ–clit.*

Ví dụ: Độ dài của đoạn thẳng, các tính chất góc nội tiếp của đường tròn là các khái niệm *Ơ–clit* và tính chất *Ơ–clit*. Hình ảnh trực quan là các phép đồng dạng bảo toàn hình dạng của hình (tuy làm cho kích thước của hình có thể thay đổi), còn các phép afin thì không bảo toàn hình dạng của hình, mà ảnh của một hình chỉ còn giống na ná hình đó (afin theo ý nghĩa của từ gốc là *giống nhau về bên ngoài*).

Chương 3

HÌNH HỌC XẠ ẢNH

§1. MẶT PHẲNG XẠ ẢNH

1. Mở đầu

1.1. Điểm vô tận

Trong Hình học afin và Hình học Ơ–clit trên mặt phẳng, khái niệm song song của hai đường thẳng đóng vai trò quan trọng. Ta có định nghĩa: Hai đường thẳng a và b (trên mặt phẳng) gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

Nhiều khi thay vì nói: "Hai đường thẳng a và b song song", người ta còn nói: "Hai đường thẳng a và b cắt nhau ở điểm vô tận (hoặc là ở điểm xa vô tận)".

Khái niệm *điểm vô tận* chỉ là một cách nói quy ước, nó không có thật trong mặt phẳng Ơ–clit. Điều đó tương tự như trong tập hợp các số thực, không có số i nào mà bình phương của nó bằng –1 (tức là $i^2 = -1$), bởi vậy ta gọi nó là *số ảo*. Tuy nhiên sau khi đã mở rộng trường số thực $\mathbb{R}$ thành trường số phức $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$) thì mọi số thuộc $\mathbb{C}$ đều có dạng $a + ib$ (*với* $a, b \in \mathbb{R}$), và gọi là một số phức. Như vậy số i cũng là một số phức ($a = 0, b = 1$) và i bình đẳng như mọi số phức khác của $\mathbb{C}$, như vậy đối với $\mathbb{C}$ nó không còn là "*số ảo*" nữa.

1.2. Mặt phẳng afin mở rộng

Gọi **A** là mặt phẳng afin (tức là mặt phẳng, trên đó có Hình học afin hay Hình học Ơ–clit). Trên mỗi đường thẳng afin thông thường a ta bổ sung thêm một "điểm vô tận" duy nhất mà ta kí hiệu là a_∞, xem điểm đó nằm trên a. Ngoài ra ta quy ước như sau:

+ Nếu hai đường thẳng a, b song song với nhau thì hai điểm vô tận a_∞ và b_∞ của chúng trùng nhau.

+ Tập hợp các điểm vô tận gọi là "*đường thẳng vô tận*", kí hiệu là Δ.

Mặt phẳng **A** sau khi đã bổ sung thêm các điểm vô tận được kí hiệu là $\overline{\mathbf{A}}$, và gọi là *mặt phẳng afin mở rộng.*

Bằng cách như vậy, hai đường thẳng *a, b* phân biệt đều có điểm chung, điểm đó là điểm thông thường của **A** nếu *a* và *b* không song song, và là điểm vô tận nếu *a* và *b* song song. Ngoài ra đường thẳng *a* và đường thẳng Δ cũng có điểm chung duy nhất đó là điểm a_∞. Như vậy ta có mệnh đề "*Hai đường thẳng phân biệt trong* $\overline{\mathrm{P}}$ *luôn luôn cắt nhau tại một điểm duy nhất*"

1.3. Mặt phẳng xạ ảnh

Bây giờ nếu chúng ta quy ước gọi các phần tử của tập hợp $\overline{\mathbf{A}}$ là *điểm* (tức là không phân biệt các điểm thông thường và các điểm vô tận) thì tập hợp $\overline{\mathbf{A}}$ trở thành *mặt phẳng xạ ảnh.* Trong mặt phẳng xạ ảnh $\overline{\mathbf{A}}$ ta có ngay hai mệnh đề đầu tiên sau đây:

1. Luôn luôn có một *đường thẳng* đi qua hai *điểm* phân biệt cho trước.
2. Hai *đường thẳng* phân biệt luôn luôn có một *điểm* chung duy nhất.

Mệnh đề 1) bao gồm những mệnh đề sau đây của mặt phẳng afin mở rộng:

+ Qua hai điểm phân biệt thông thường có một đường thẳng duy nhất.
+ Qua điểm thông thường A và điểm vô tận b_∞ (của đường thẳng *b*) có một đường thẳng duy nhất. Đó chính là đường thẳng đi qua A và song song với *b*.
+ Qua hai điểm vô tận phân biệt có duy nhất một đường thẳng. Đó là đường thẳng vô tận Δ, theo quy ước.

Mệnh đề 2) bao gồm các mệnh đề sau đây của mặt phẳng afin mở rộng:

+ Hai đường thẳng phân biệt và không song song thì có điểm chung duy nhất.

+ Hai đường thẳng song song thì có chung điểm vô tận duy nhất.

+ Một đường thẳng thông thường a và đường thẳng vô tận Δ có điểm chung vô tận duy nhất là điểm a_∞.

Như vậy, trong mặt phẳng xạ ảnh không có khái niệm song song vì mọi cặp đường thẳng đều có điểm chung. Bởi vậy hiển nhiên cũng không có khái niệm *hình thang, hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông*.

3. Sau này ta sẽ thấy, trong hình học xạ ảnh cũng không có các khái niệm: *đường tròn, khoảng cách, góc, đường trung tuyến của tam giác*... và vì vậy có vẻ như nội dung của hình học xạ ảnh khá nghèo nàn. Nhưng thực ra hình học xạ ảnh chứa đựng những mệnh đề rất đẹp đẽ, rất phong phú và phức tạp, những mệnh đề mà O–clit đã bỏ qua không chú ý tới, vì có lẽ hướng chú ý của ông tập trung vào những vấn đề có liên quan đến mêtric (tức là độ đo). Một số định lí "không mêtric" đã được Pappus d'Alexandri tìm ra vào thế kỉ IV trước Công nguyên. Về sau hai nhà toán học Pháp là G. Desargue (1593–1661) và B. Pascal (1623–1662) đã tìm ra nhiều định lí khác. Trước đó một số nhà hội hoạ, đặc biệt là Leonardo da Vinci đã xét vấn đề theo quan điểm của phép chiếu xuyên tâm.

Nhà toán học J. Kepler là người đầu tiên đưa ra khái niệm điểm vô tận và xem mặt phẳng xạ ảnh như là mặt phẳng afin bổ sung thêm đường thẳng vô tận. Hai nhà toán học V. Poncelet và Von Staudt lần đầu tiên xây dựng hình học xạ ảnh như một môn học độc lập, và từ đó có thể xem mặt phẳng afin như là mặt phẳng xạ ảnh bỏ đi một đường thẳng nào đó. Cuối cùng vào năm 1899, M. Pieri đã xây dựng hình học xạ ảnh bằng phương pháp tiên đề. Các nhà toán học tiếp theo đã đề nghị các hệ tiên đề có khác đôi chút với hệ tiên đề của M. Pieri.

2. Mặt phẳng xạ ảnh

Mặt phẳng xạ ảnh là một trường hợp của không gian xạ ảnh n chiều (khi n = 2). Để xây dựng không gian xạ ảnh tổng quát, phương pháp tiện lợi là dùng không gian vectơ. Dưới đây ta sẽ trình bày cách xây dựng đó, và các tính chất định lí của hình học xạ ảnh đều được chứng minh dựa vào các kết quả đã biết về không gian vectơ.

2.1. Định nghĩa mặt phẳng xạ ảnh

Các kí hiệu:

Cho $\mathbf{V}^{n+1}$ (**R**) là không gian vectơ n + 1 chiều trên trường số thực **R**; nếu không sợ bị nhầm lẫn, ta sẽ dùng kí hiệu $\mathbf{V}^{n+1}$. Với $n \geq 0$, ta kí hiệu $[\mathbf{V}^{n+1}]$ là tập hợp các không gian vectơ con 1 chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$. Như vậy các phần tử của $[\mathbf{V}^{n+1}]$ là các không gian vectơ con $\mathbf{V}^1$, trong khi đó các phần tử của $\mathbf{V}^1$ là các vectơ cùng phương với một vectơ $\bar{a} \neq \bar{0}$ bất kì của nó, tức là $\mathbf{V}^1 = k\{\bar{a}$ với mọi $k \in \mathbf{R}\}$.

Định nghĩa: *Một tập hợp **P** được gọi không gian xạ ảnh n chiều nếu có một song ánh p : $[V^{n+1}] \rightarrow$ **P**.*

Không gian xạ ảnh 2 chiều còn gọi là mặt phẳng xạ ảnh.

Từ nay về sau, ta chỉ nói đến mặt phẳng xạ ảnh. Như vậy: *mặt phẳng xạ ảnh là tập hợp* **P** *với song ánh* p: $[\mathbf{V}^3] \rightarrow$ **P**.

Vì định nghĩa mặt phẳng xạ ảnh **P** không tách rời song ánh p và không gian $\mathbf{V}^3$, nên ta còn kí hiệu đầy đủ mặt phẳng xạ ảnh **P** là bộ ba (**P**, p, $\mathbf{V}^3$), $\mathbf{V}^3$ được gọi là *không gian vectơ liên kết* với mặt phẳng xạ ảnh **P** bởi song ánh p.

Theo định nghĩa trên, hiển nhiên chính $[\mathbf{V}^3]$ là một mặt phẳng xạ ảnh (lấy p là ánh xạ đồng nhất), và các song ánh p chuyển "cấu trúc" mặt phẳng xạ ảnh của $[\mathbf{V}^3]$ lên các tập hợp **P** khác.

Vì $\mathbf{V}^3$ ở đây là không gian vectơ trên trường số thực $\mathrm{V}^3(\mathbf{R})$, nên mặt phẳng xạ ảnh định nghĩa như trên cũng gọi là *mặt phẳng xạ ảnh thực*, kí hiệu là **P(R)** khi cần phân biệt.

2.2. Điểm và đường thẳng của mặt phẳng xạ ảnh

a. Điểm của mặt phẳng xạ ảnh

Các phần tử của mặt phẳng xạ ảnh **P** gọi là *điểm*. Các điểm của **P** được kí hiệu là A, B, C, M, N...

Qua song ánh p: $[\mathbf{V}^3] \rightarrow$ **P**, mỗi điểm A của **P** có một không gian vectơ con $\mathbf{V}^1$ của $\mathbf{V}^3$ mà p $(\mathbf{V}^1)$ = A. Khi đó vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ bất kì của không gian con $\mathbf{V}^1$ được gọi là *vectơ đại diện cho điểm* A. Như vậy, hai vectơ

$\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ của V^3 đại diện cho cùng một điểm của **P** khi và chỉ khi chúng cùng thuộc một không gian con V^1, tức là tìm được k khác 0, để $\vec{a} = k\vec{b}$, tức $\vec{a}, \vec{b}$ phụ thuộc tuyến tính. Ngược lại hai điểm phân biệt của **P** được đại diện bởi hai vectơ độc lập tuyến tính của V^3.

b. Đường thẳng trong mặt phẳng xạ ảnh

Xét mặt phẳng xạ ảnh **P** liên kết với không gian vectơ V^3 bởi song ánh p. Nếu V^2 là một không gian vectơ con hai chiều của V^3 thì p ($[V^2]$) được gọi là *một đường thẳng* của **P**, và được kí hiệu là *a, b, d, m, n*... Giả sử $a = p([V^2])$, thế thì, theo định nghĩa chung của không gian xạ ảnh, song ánh $p\big|_{[V^2]} : [V^2] \to a$ sẽ làm cho a trở thành một không gian xạ ảnh 1 chiều.

Như vậy, điểm và đường thẳng trong mặt phẳng xạ ảnh được xem là các không gian xạ ảnh con 0–chiều và một chiều của không gian xạ ảnh hai chiều.

Cũng với lí do trên, các đường thẳng của mặt phẳng xạ ảnh còn gọi là các đường thẳng xạ ảnh, không gian vectơ V^2 chính là không gian vectơ liên kết với đường thẳng xạ ảnh $p([V^2])$.

2.3. Tính chất của đường thẳng trong mặt phẳng xạ ảnh

Định nghĩa: Trong mặt phẳng xạ ảnh (**P**, p, V^3) cho điểm A có đại diện là vectơ $\vec{a}$ và cho đường thẳng *m* liên kết với không gian vectơ con hai chiều V^2. Khi đó nếu $\vec{a}$ thuộc V^2 thì ta nói rằng *điểm* A *thuộc đường thẳng m*, hoặc *điểm* A *nằm trên đường thẳng m,* hoặc *đường thẳng m đi qua điểm* A, *hoặc đường thẳng m chứa điểm* A...

Từ các định lí của không gian vectơ, ta có ngay các kết quả sau của mặt phẳng xạ ảnh :

Định lí 1: *Qua hai điểm phân biệt* A, B *có một và chỉ một đường thẳng, kí hiệu là* AB.

Thật vậy, hai vectơ độc lập tuyến tính $\vec{a}, \vec{b}$ đại diện cho hai điểm phân biệt A, B xác định một và chỉ một không gian vectơ con V^2, (cặp vectơ $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ chính là một cơ sở của không gian $\mathbf{V}^2$ đó). Khi đó $m = p([\mathbb{V}^2])$ là đường thẳng duy nhất đi qua A và B.

***Định lí 2**: Trên mỗi đường thẳng có vô số điểm.*

Đó là do trong mọi $\mathbf{V}^2$ có vô số vectơ khác $\vec{0}$ đôi một độc lập tuyến tính.

Nếu $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ là một cơ sở của $\mathbf{V}^2$, thì các điểm M của đường thẳng $d = p([\mathbf{V}^2]$ có đại diện là các vectơ $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ với $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

***Định lí 3**: Hai đường thẳng phân biệt luôn có một và chỉ một điểm chung* (khi đó, ta nói chúng cắt nhau tại điểm chung đó).

Đó là do: Hai không gian vectơ con phân biệt $\mathbf{V}^2$ và $\mathbf{U}^2$ của không gian vectơ $\mathbf{V}^3$ luôn có giao là một không gian vectơ con một chiều.

2.4. Định lí Đơ–dác (Desargues)

Các định nghĩa:

- Các đường thẳng cùng đi qua một điểm gọi là *các đường thẳng đồng quy.*
- Các điểm cùng nằm trên một đường thẳng gọi là *các điểm thẳng hàng.*
- Tập hợp gồm ba điểm A, B, C không thẳng hàng và ba đường thẳng AB, BC, CA nối chúng gọi là một *tam giác*, kí hiệu là tam giác ABC, các điểm A, B, C gọi là các *đỉnh*, các đường thẳng AB, BC, CA gọi là các *cạnh* của tam giác.

***Định lí Đơ–dác:** Cho hai tam tam giác* ABC, A'B'C' *có các cặp đỉnh tương ứng phân biệt và các cạnh tương ứng phân biệt. Khi đó nếu các đường thẳng* AA', BB', CC' *nối các đỉnh tương ứng đồng quy, thì giao điểm của các cặp cạnh tương ứng* BC *và* B'C', CA *và* C'A', AB *và* A'B' *thẳng hàng và ngược lại.*

***Chứng minh**: Phần thuận* (h.28). Giả sử ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại điểm S. Ta giả sử S có vectơ đại diện là $\vec{s}$, và các điểm A, B, C, A', B', C' có các vectơ đại diện lần lượt là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$.

Vì S thuộc cả ba đường thẳng AA', BB', CC'nên ta có :

$$\vec{s} = \alpha\vec{a} + \alpha'\vec{a}' = \beta\vec{b} + \beta'\vec{b}' = \gamma\vec{c} + \gamma'\vec{c}'.$$

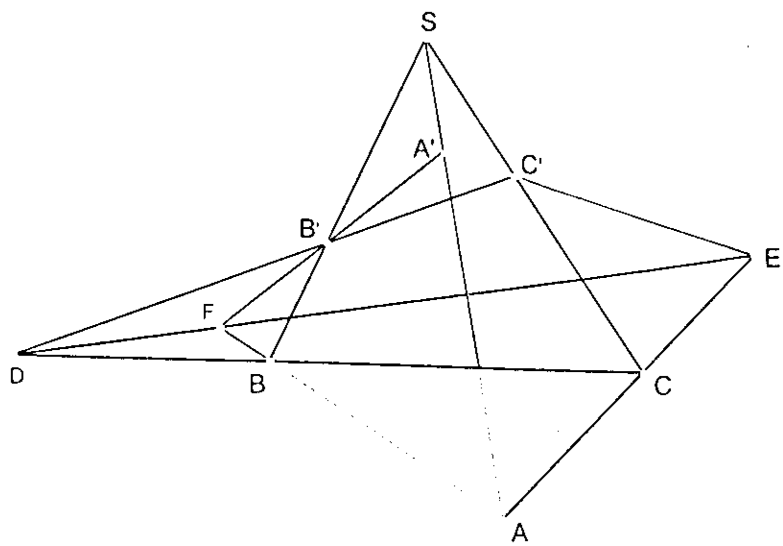
Từ đó suy ra $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b} = \beta'\vec{b}' - \alpha'\vec{a}'$ và nếu ta đặt

$$\alpha\vec{a} - \beta\vec{b} = \beta'\vec{b}' - \alpha'\vec{a}' = \vec{f}$$

thì $\vec{f}$ đại diện cho giao điểm F của hai đường thẳng AB và A'B'.

Tương tự như thế ta có: vectơ $\beta\vec{b} - \gamma\vec{c} = \gamma'\vec{c}' - \beta'\vec{b}' = \vec{d}$ là đại diện cho giao điểm D của hai đường thẳng BC và B'C', vectơ $\gamma\vec{c} - \alpha\vec{a} = \alpha'\vec{a}' - \gamma'\vec{c}' = \vec{e}$ là đại diện cho giao điểm E của hai đường thẳng AC và A'C'.

Vì $\vec{e} + \vec{d} + \vec{f} = \vec{0}$ nên ba vectơ đó cùng thuộc một không gian vectơ V^2 và do đó ba điểm D, E, F thẳng hàng.



Hình 28

Phần đảo. Để chứng minh phần đảo, ta gọi S = BB'∩CC' và áp dụng kết quả phần thuận cho hai tam giác FBB', ECC' thì suy ra S, A, A' chính là các giao điểm của các cặp cạnh tương ứng của hai tam giác đó. Vì vậy, các điểm S, A, A' phải thẳng hàng, tức là các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại S.

3. Các mô hình của mặt phẳng xạ ảnh

3.1. *Mô hình vectơ*

Như đã nêu ở mục 2. §2, lấy p là ánh xạ đồng nhất của $[V^3]$ vào chính nó thì $[V^3]$ là một mô hình của mặt phẳng xạ ảnh. Khi đó, mỗi không gian vectơ con một chiều V^1 của V^3 là một điểm và mỗi tập hợp $[V^2]$ của một không gian vectơ con V^2 của V^3 là một đường thẳng. Tập hợp $[V^3]$ gọi là *mô hình vectơ* của mặt phẳng xạ ảnh.

3.2. *Mô hình số thực*

Ta xét các bộ gồm ba số thực $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ không đồng thời bằng 0. Với mỗi bộ ba số thực như thế ta kí hiệu $(a_1 : a_2 : a_3)$ là lớp tất cả các bộ ba $(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$ với $k \neq 0$. Ta kí hiệu $\mathfrak{R}$ là tập hợp tất cả các lớp nói trên và xây dựng một ánh xạ p: $[V^3] \to \mathfrak{R}$ như sau:

Trong V^3 chọn một cơ sở nào đó. Nếu V^1 là không gian con một chiều sinh ra bởi vectơ $\vec{a}$ (khác $\vec{0}$) và $\vec{a}$ có toạ độ $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ thì ta đặt $p(V^1) = (a_1 : a_2 : a_3)$ (đối với cơ sở đã chọn).

Dễ thấy rằng p là một song ánh, và vì vậy $\mathfrak{R}$ là một mặt phẳng xạ ảnh liên kết với V^3 bởi song ánh p.

Ta dễ thấy rằng trong không gian V^3 với cơ sở đã chọn, mỗi không gian vectơ con 2 chiều V^2 là tập hợp các vectơ có toạ độ thoả mãn phương trình tuyến tính thuần nhất dạng $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, trong đó các hệ số u_1, u_2, u_3 không đồng thời bằng 0 (cố nhiên hai phương trình tương đương cùng xác định một V^2). Từ đó ta suy ra: Trong mô hình $\mathfrak{R}$ mỗi đường thẳng là một phương trình nói trên, và ngoài ra, điểm $(a_1 : a_2 : a_3)$ thuộc đường thẳng $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ khi và chỉ khi $u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 = 0$.

3.3. *Mô hình bó*

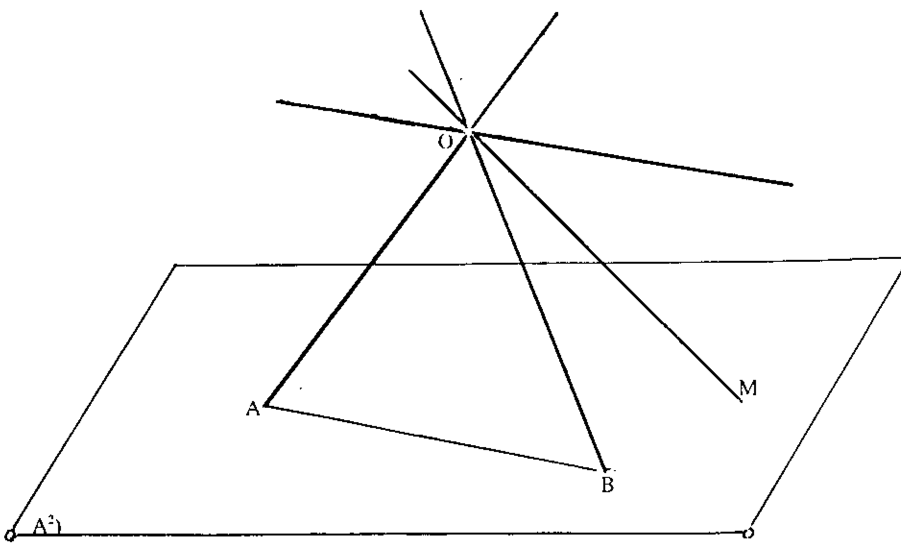
Xét không gian afin ba chiều A^3 liên kết với không gian vectơ

V^3. Gọi O là một điểm tuỳ chọn của A^3, và xét tập hợp **B** gồm tất cả các đường thẳng của A^3 cùng đi qua điểm O (h. 29). **B** được gọi là *bó đường thẳng tâm O* của A^3.

Ta thiết lập ánh xạ p: $[V^3] \to \mathbf{B}$ như sau:

Với mỗi không gian con V^1 của $[V^3]$, ta cho ứng với đường thẳng của **B** có phương là không gian V^1 đó.

Ta thấy ngay p là một song ánh, và do đó **B** là một mặt phẳng xạ ảnh, gọi là *mô hình bó* của mặt phẳng xạ ảnh. Trong mô hình đó, mỗi đường thẳng qua O là một "điểm" và tập hợp các đường thẳng qua O nằm trên cùng một mặt phẳng là một "đường thẳng".



Hình 29

3.4. Mô hình afin

Trong không gian afin A^3 liên kết với không gian vectơ V^3, ta lấy một mặt phẳng afin A^2, và xét tập hợp $\overline{A} = A^2 \cup [V^2]$, với V^2 là phương của A^2 đó (h.30). Nhớ rằng, $[V^2]$ là tập hợp các không gian con một chiều V^1 của không gian V^2.

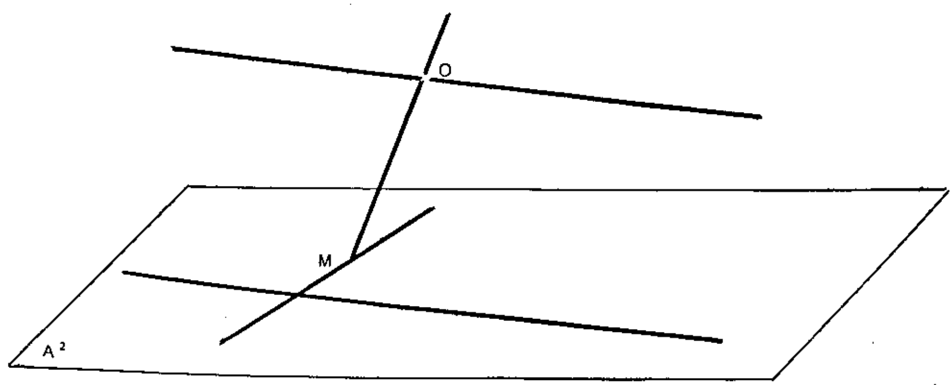
Ta thiết lập song ánh $p[V^3] \to \overline{A}$ như sau:

Lấy một điểm O nằm ngoài A^2; nếu V^1 (của $[V^3]$) không thuộc

$[V^2]$ thì ta cho ứng với điểm M của $\mathbf{A}^2$ mà $\overline{OM} \in \mathbf{V}^1$ (dĩ nhiên điểm M tồn tại duy nhất), còn nếu $\mathbf{V}^1 \in [\mathbf{V}^2]$ thì cho ứng với chính nó. Vì p là một song ánh nên $\overline{\mathbf{A}}$ trở thành một mặt phẳng xạ ảnh, và được gọi là *mô hình afin* của mặt phẳng xạ ảnh.

Trong mô hình đó:

- Mỗi "điểm" được thể hiện: *hoặc* bởi một điểm thông thường của $\mathbf{A}^2$; *hoặc* một phần tử $\mathbf{V}^1$ của $[\mathbf{V}^2]$, với $\mathbf{V}^2$ là phương của $\mathbf{A}^2$.
- Mỗi "đường thẳng" được thể hiện: *hoặc* bởi một đường thẳng afin *a* của $\mathbf{A}^2$ sau khi bổ sung thêm cho nó một "điểm đặc biệt" $\mathbf{V}^1$, với V^1 là phương của đường thẳng *a* đó; *hoặc* bởi ảnh $p[\mathbf{V}^2]$, với V^2 là phương của $\mathbf{A}^2$.



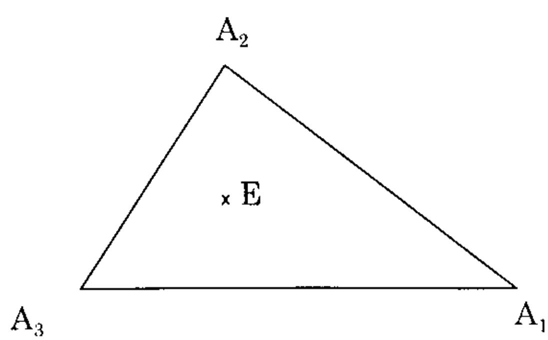
Hình 30

Giả sử cho hai đường thẳng song song a, b của mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ có cùng phương là $\mathbf{V}^1$. Sau khi bổ sung thêm "điểm đặc biệt" $\mathbf{V}^1$ chúng trở thành các đường thẳng xạ ảnh $\overline{a}$, $\overline{b}$ trong mặt phẳng xạ ảnh $\overline{\mathbf{A}}$. Như thế, hai đường thẳng xạ ảnh đó có một điểm chung duy nhất, được gọi là các *điểm vô tận;* Tập hợp $[\mathbf{V}^2]$ gồm toàn các điểm đặc biệt trong mô hình $\overline{\mathbf{A}}$ của mặt phẳng xạ ảnh, được gọi là *đường thẳng vô tận*. Vì thế, mô hình $\overline{\mathbf{A}}$ của mặt phẳng xạ ảnh còn được gọi là *mô hình afin bổ sung phần tử vô tận của mặt phẳng xạ ảnh.*

4. Toạ độ xạ ảnh

4.1. *Mục tiêu xạ ảnh*

Cho mặt phẳng xạ ảnh **P** liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^3$. Một tập hợp gồm bốn điểm có thứ tự A_1, A_2, A_3, E, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, được gọi là *mục tiêu xạ ảnh của mặt phẳng xạ ảnh* **P**, còn gọi tắt là *mục tiêu*, và được kí hiệu là $\{A_1, A_2, A_3; E\}$, hoặc $\{A_i ; E\}$ (h.4). Các điểm A_i, i = 1, 2, 3, được gọi là *đỉnh*, và điểm E được gọi là *điểm đơn vị* của mục tiêu đó; các đường thẳng A_iA_j, i, j = 1, 2, 3, $i \neq j$, được gọi là các *trục toạ độ*, hay các *trục*. Rõ ràng có vô số mục tiêu xạ ảnh.



Hình 31a

4.2. *Cơ sở đại diện của mục tiêu xạ ảnh*

Định nghĩa: Cho mặt phẳng xạ ảnh (**P**, p, $\mathbf{V}^3$). Cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ của $\mathbf{V}^3$, kí hiệu tắt là $\{\vec{e}_i\}$, gọi là *cơ sở đại diện cho mục tiêu xạ ảnh* $\{A_i ; E\}$ của **P** khi và chỉ khi các vectơ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ theo thứ tự đại diện cho các đỉnh A_1, A_2, A_3 và vectơ $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ đại diện cho điểm đơn vị E.

Định lí: Mỗi mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ trong **P** có nhiều cơ sở đại diện trong $\mathbf{V}^3$, các cơ sở này chỉ khác nhau bởi một phép vị tự tuyến tính của $\mathbf{V}^3$.

Chứng minh: Giả sử $\{A_i; E\}$ là một mục tiêu xạ ảnh của **P**. Gọi

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ là các vectơ đại diện của A_1, A_2, A_3, vì ba điểm đó không thẳng hàng nên $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ độc lập tuyến tính. Gọi $\vec{e}$ là vectơ đại diện cho điểm E thì ta có $\vec{e} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3$. Rõ ràng là các k_i đều khác 0 (vì chẳng hạn nếu $k_1 = 0$ thì ba vectơ $\vec{e}$, $\overrightarrow{a_2}$;$\overrightarrow{a_3}$ phụ thuộc tuyến tính, nên ba điểm E, A_2, A_3 thẳng hàng, trái với định nghĩa của mục tiêu). Ta đặt $\vec{e}_i = k_i\vec{a}_i$, $i = 1, 2, 3$ thì $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ và $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ trở thành một cơ sở đại diện của mục tiêu $\{A_i ; E\}$.

Rõ ràng cơ sở $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ với $\vec{e}_i' = \lambda\vec{e}_i$ với $\lambda \neq 0$ cũng là cơ sở đại diện của mục tiêu xạ ảnh $\{A_i, E\}$.

Bây giờ, giả sử $\left\{\vec{e}_1'\right\}$ là một cơ sở đại diện khác của $\{A_i ; E\}$ thì vì $\vec{e}_i'$ đại diện cho A_i, nên $\vec{e}_1' = \lambda_i\ \vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Ngoài ra $\vec{e}_1' + \vec{e}_2' + \vec{e}_3'$ cũng đại diện cho điểm E, nên

$$\vec{e}_1' + \vec{e}_2' + \vec{e}_3' = k\vec{e} \Rightarrow \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\ \vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = k(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$$
$$\Rightarrow \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\ \vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = k\vec{e}_1 + k\vec{e}_2 + k\vec{e}_3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = k$$

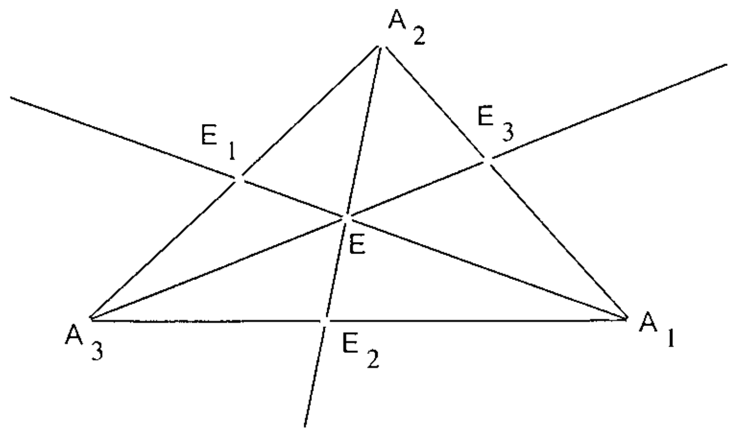
(do các vectơ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ độc lập tuyến tính). Vậy $\vec{e}'_i = \lambda\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, chứng tỏ cơ sở $\left\{\vec{e}_i'\right\}$ vị tự với cơ sở $\left\{\vec{e}_i\right\}$.

4.3. Toạ độ xạ ảnh của một điểm

Định nghĩa: Cho mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ với cơ sở đại diện $\{\vec{e}_i\}$. Khi đó, mỗi điểm A thuộc mặt phẳng xạ ảnh **P** có đại diện là vectơ $\vec{a}$ $(\neq \vec{0})$ của $\mathbf{V}^3$. Nếu đối với cơ sở $\{\vec{e}_i\}$, vectơ $\vec{a}$ ta có toạ độ là $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ thì ta nói rằng điểm A có *toạ độ xạ ảnh là* $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ *đối với mục tiêu* $\{A_i ; E\}$.

Hiển nhiên nếu $(a_1;a_2;a_3)$ là toạ độ của điểm A thì $(ka_1; ka_2; ka_3)$ với $k \neq 0$, cũng là toạ độ của A. Vì lí do đó ta sẽ kí hiệu toạ độ của điểm A là: $A = (a_1 : a_2 : a_3)$, hoặc $A(a_1 : a_2 : a_3)$.

– **Toạ độ của các điểm đặc biệt.**



Hình 31b

Dễ thấy toạ độ của các điểm của mục tiêu $\{A_i; E\}$ là:

$A_1 = (1 : 0 : 0)$, $A_2 = (0 : 1 : 0)$; $A_3 = (0, 0, 1)$; $E = (1 : 1 : 1)$

Gọi $E_1 = A_1E \cap A_2A_3$, $E_2 = A_2E \cap A_3A_1$, $E_3 = A_3E \cap A_1A_2$. Ta hãy tìm toạ độ của các điểm E_i. Từ $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ ta suy ra $\vec{e} - \vec{e}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ là vectơ đại diện cho giao điểm E_1 của A_1E và A_2A_3. Nhưng $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ có toạ độ (0, 1, 1).

Vậy toạ độ của E_1 là (0:1:1). Tương tự, ta có: $E_2 = (1:0:1)$ và $E_3 = (1:1:0)$

Bây giờ giả sử cho điểm M và các giao điểm

$M_1 = A_1M \cap A_2A_3$, $M_2 = A_2M \cap A_3A_1$ và $M_3 = A_3M \cap A_1A_2$.

Khi đó nếu $M = (x_1 : x_2 : x_3)$ thì ta dễ dàng tính được :

$M_1 = (0 : x_2 : x_3)$; $M_2 = (x_1 : 0 : x_3)$ và $M_3 = (x_1 : x_2 : 0)$.

4.4. Đổi mục tiêu xạ ảnh

Cho hai mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ và $\{A'_i; E'\}$ với cơ sở đại diện lần lượt là $\{\vec{e}_i\}$ và $\{\vec{e}'_i\}$. Gọi $(x_1 : x_2 : x_3)$ và $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ theo thứ tự là toạ độ của cùng một điểm X đối với các mục tiêu $\{A_i ; E\}$ và $\{A'_i ; E'\}$. Ta hãy tìm liên hệ giữa các x_i và x'_i khi biết các toạ độ của $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, $\vec{e}'_3$ đối với cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ là

$$\vec{e}'_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}) ; \vec{e}'_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}); \vec{e}'_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}) \quad (1)$$

Do (1) ta có $\vec{e}'_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\vec{e}_i$

Theo định nghĩa, vectơ $\vec{x} = \sum_{j=1}^{3} x'_j \vec{e}'_j$ là một vectơ đại diện cho điểm X. Từ đó suy ra $\vec{x} = \sum_{j=1}^{3} x_j'(\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\vec{e}_i) \Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^{3}(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j')\vec{e}_i$. Điều đó chứng tỏ rằng vectơ $\vec{x}$ có toạ độ đối với cơ sở $\{\vec{e}_i'\}$ là bộ ba số $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j'$, với i = 1, 2, 3. Vậy toạ độ $(x_1 : x_2 : x_3)$ của X đối với mục tiêu$\{A_i, E\}$ sẽ tỉ lệ với ba số đó, tức là :

$$\begin{cases} kx_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 \\ kx_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 \\ kx_3 = a_{13}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 \end{cases} \qquad (2)$$

Ma trận $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ với i là chỉ số hàng, j là chỉ số cột, chính là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\vec{e}_i'\}$ sang cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ và được gọi là *ma trận chuyển từ* mục tiêu $\{A_i'; E'\}$ sang mục tiêu $\{A_i; E\}$. Vì các vectơ $\vec{e}_i'$ độc lập tuyến tính nên ma trận *A* có định thức khác 0: $\det A \neq 0$.

Hệ phương trình *(2)* gọi là công thức đổi mục tiêu xạ ảnh.

Ta dùng kí hiệu: $(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $(X') = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ là các ma trận một cột ba dòng, gọi là các *ma trận cột toạ độ của điểm* X lần lượt đối với hai mục tiêu $\{A_i; E\}$ và $\{A'_i; E'\}$.

Khi đó, công thức đổi mục tiêu xạ ảnh (2) có thể viết dưới dạng ma trận:

$$k(X) = A(X')$$

5. Đường thẳng trong mặt phẳng xạ ảnh

5.1. Phương trình tham số của đường thẳng

Giả sử trong mặt phẳng xạ ảnh **P** liên kết với không gian vectơ V^3 đã chọn một mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ có đại diện là cơ cở $\{\vec{e}_i\}$ của V^3. Cho đường thẳng u đi qua hai điểm phân biệt $A(a_1 : a_2 : a_3)$ và $B(b_1 : b_2 : b_3)$.

Ta hãy tìm điều kiện cần và đủ để điểm $X(x_1 : x_2 : x_3)$ thuộc một đường thẳng u của mặt phẳng đó.

Gọi $\vec{x}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ lần lượt là các vectơ đại diện cho các điểm X, A, B. Điểm X thuộc đường thẳng u khi và chỉ khi các vectơ $\vec{x}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng thuộc không gian con V^2 liên kết với đường thẳng u, hay $\vec{x}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ phụ thuộc tuyến tính, nhưng $\vec{a}$, $\vec{b}$ độc lập tuyến tính (do $A \neq B$), nên ta có: $\vec{x} = s\vec{a} + t\vec{b}$, tức là:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 s + b_1 t \\ x_2 = a_2 s + b_2 t \\ x_3 = a_3 s + b_3 t \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó các tham số s và t không đồng thời bằng 0.

Vì hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ độc lập tuyến tính nên các bộ số (a_i), (b_i) không tỉ lệ, tức là:

Hạng của ma trận $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ bằng 2. (*)

Ngược lại, dễ thấy rằng mọi điểm M có toạ độ (x_1, x_2, x_3) thoả mãn hệ (1) với điều kiện (*) đều nằm trên đường thẳng u đi qua hai điểm A, B: $A = (a_1; a_2: a_3)$, $B = (b_1: b_2: b_3)$.

Hệ (1) với điều kiện (*) gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng *u*.

Hệ (1) có thể viết dưới dạng ma trận:

$$(X) = s(A) + t(B),\ s^2 + t^2 \neq 0 \qquad (3)$$

Trong đó (X), (A), và (B) theo thứ tự là các ma trận cột toạ độ của điểm X, A, B:

$$(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ (A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ (B) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

5.2. *Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng*

Điều kiện phụ thuộc tuyến tính của các vectơ đại diện $\vec{x}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ tương ứng của ba điểm $X(x_1:x_2:x_3)$, $A(a_1:a_2:a_3)$ và $B(b_1:b_2:b_3)$ có thể viết dưới dạng:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Từ đó, ta suy ra điều kiện cần và đủ để ba điểm $A(a_1:a_2:a_3)$, $B(b_1: b_2: b_3)$ và $C(c_1:c_2:c_3)$ thẳng hàng là:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

5.3. *Phương trình tổng quát của đường thẳng*

Khai triển định thức (4) theo hàng thứ ba, ta được:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3 = 0 \qquad (6)$$

Kí hiệu các định thức hệ số của x_1, x_2, x_3 theo thứ tự là:

$$u_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\quad u_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\quad u_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Phương trình (6) thành:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (7)$$

Do điều kiện (*), các định thức cấp 2 tạo từ ma trận có hạng bằng 2, phải có ít nhất một định thức khác 0, nên ba số u_1, u_2, u_3 không đồng thời bằng 0,

Phương trình (7) được gọi là *phương trình tổng quát của đường thẳng u.*

Bộ ba số không đồng thời bằng không (u_1, u_2, u_3) xác định một đường thẳng duy nhất *u* gồm tất cả những điểm có toạ độ (x_1: x_2: x_3) thoả mãn phương trình (7), ta gọi bộ ba số đó là *toạ độ* của đường thẳng *u*.

Rõ ràng tọa độ của đường thẳng có các tính chất sau đây :

- Ba số u_1, u_2, u_3 không đồng thời bằng không

$$(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$$

- Nếu (u_1, u_2, u_3) là toạ độ của đường thẳng *u* thì (ku_1, ku_2, ku_3) với $k \neq 0$ cũng là toạ độ của đường thẳng đó. Vì thế, toạ độ của đường thẳng u được kí hiệu là (u_1: u_2: u_3).

Ma trận $(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ gọi là *ma trận cột toạ độ của đường thẳng u.*

Phương trình (7) có thể viết dưới dạng

$$(u)^t(X) = 0 \qquad (8)$$

trong đó $(u)^t$ là ma trận chuyển vị của ma trận (u).

Ngược lại, có thể chứng minh rằng mọi phương trình dạng (7) với $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$ là phương trình tổng quát của một đường thẳng xác định.

Thật vậy, giả sử $u_1 \neq 0$, thế thì

$$(7) \Leftrightarrow x_1 = -\frac{u_2}{u_1}x_2 - \frac{u_3}{u_1}x_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = sa_1 + tb_1 \\ x_2 = s.1 + t.0 \\ x_3 = s.0 + t.1 \end{cases} \qquad (a_1 = -\frac{u_2}{u_1},\ b_1 = -\frac{u_3}{u_1})$$

Đó là phương trình tham số của một đường thẳng đi qua hai điểm $A(a_1:1:0)$, $B(b_1:0:1)$ khác nhau, (vì ma trận hàng toạ độ của A, B có hạng 2, nên $A \neq B$).

Khử s, t từ hệ phương trình trên ta được phương trình tổng quát của đường thẳng AB, chính lại là phương trình (7).

5.4. *Điều kiện đồng quy của ba đường thẳng*

Cho ba đường thẳng lần lượt có toạ độ $(u_1:u_2:u_3)$, $(v_1:v_2:v_3)$, $(w_1:w_2:w_3)$.

Ba đường thẳng đó đồng quy khi và chỉ khi tồn tại một điểm $X(x_1: x_2 : x_3)$ thuộc cả ba đường thẳng đó, tức là hệ phương trình tuyến tính sau phải có nghiệm không tầm thường $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$:

$$\begin{cases} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0 \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

Như vậy, điều cần và đủ để ba đường thẳng nói trên đồng quy là:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

5.5. *Phương trình của các đường thẳng đặc biệt trong mục tiêu xạ ảnh*

• **Trục toạ độ A_2A_3** : Vì $A_2 = (0: 1: 0)$ và $A_3 = (0: 0: 1)$ nên trục toạ độ A_2A_3 có phương trình tổng quát :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

hay $x_1 = 0$.

Tương tự, trục $A_3 A_1$ có phương trình $x_2 = 0$ và trục A_1A_2 có phương trình $x_3 = 0$.

• **Đường thẳng A_1E** : Vì $A_1 = (1: 0 : 0)$ và $E = (1: 1: 1)$ nên đường thẳng A_1E có phương trình tổng quát

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

hay $x_2 - x_3 = 0$.

Tương tự, đường thẳng A_2E có phương trình: $x_1 - x_3 = 0$

đường thẳng A_3E có phương trình: $x_1 - x_2 = 0$

6. Tỉ số kép

6.1. *Tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng*

1) Cho bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng và đôi một phân biệt, có các vectơ đại diện là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Vì A, B phân biệt nên $\vec{a}$, $\vec{b}$ độc lập tuyến tính, và vì bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng nên $\vec{c}, \vec{d}$ đều biểu thị tuyến tính qua $\vec{a}$, $\vec{b}$, tức là: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ và $\vec{d} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}$. Khi đó ta định nghĩa:

Định nghĩa:

Tỉ số $\dfrac{\beta}{\alpha} : \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ *gọi là tỉ số kép của bốn điểm A, B, C, D.*

Kí hiệu: (A, B, C, D).

Như vậy ta có $(A, B, C, D) = \dfrac{\beta}{\alpha} : \dfrac{\beta'}{\alpha'}$

Ta dễ dàng chứng minh rằng định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn vectơ đại diện cho các điểm A, B, C, D.

6.2. *Các tính chất của tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng*

Dựa vào định nghĩa tỉ số kép (A, B, C, D), ta dễ dàng chứng minh được các tính chất sau:

a) (A, B, C, D) = (C, D, A, B).

b) (A, B, C, D).(A, B, D, C) = 1 và (A, B, C, D).(B, A, C, D) = 1.

c) (A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1 và (A, B, C, D) + (D, B, C, A) = 1.

d) Đối với 5 điểm A, B, C, D, E thẳng hàng và đôi một phân biệt ta luôn luôn có (A, B, C, D).(A, B, D, E) = (A, B, C, E).

Các trường hợp đặc biệt: Chúng ta sẽ định nghĩa tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng trong các trường hợp có các điểm trùng nhau :

- Nếu C và D trùng nhau, ta vẫn có thể dùng định nghĩa như trên và được (A, B, C, D) = 1.
- Nếu C và A trùng nhau, ta vẫn có thể dùng định nghĩa như trên và được:

$$(A, B, C, D) = 0.$$

- Nếu C trùng B hoặc D trùng A ta quy ước tỉ số kép bằng ∞. Tức là:

$$(ABBD) = \infty \text{ và } (A.B.C.A) = \infty.$$

- Nếu D trùng B ta quy ước tỉ số kép bằng 0, tức là:

$$(A, B, C, B) = 0.$$

- Nếu A trùng B, ta quy ước tỉ số kép bằng 1, tức là:

$$(A, A, C, D) = 1.$$

Với sự mở rộng định nghĩa như vậy của tỉ số kép, ta nhận thấy các tính chất đã nêu vẫn đúng nếu ta có các quy ước sau đây:

$$k \pm \infty = \infty,\ k \times \infty = \infty (k \neq 0),\ \frac{k}{\infty} = 0,\ \frac{k}{0} = \infty (k \neq 0) \ldots$$

(với k là số thực).

6.3. *Tỉ số kép và toạ độ*

Trong mặt phẳng xạ ảnh với một mục tiêu $\{A_i; E\}$ cho trước, xét bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D có các ma trận cột toạ độ lần lượt là (A), (B), (C), (D). Vì C và D nằm trên đường thẳng AB nên có các số s, t, s' và t' sao cho: (C) = s(A) + t(B) và (D) = s'(A) + t'(B). Khi đó nếu gọi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ lần lượt là các vectơ đại diện của A, B, C, và D thì: $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ và $\vec{d} = s'\vec{a} + t'\vec{b}$. Bởi vậy ta có:

$$(A, B, C, D) = \frac{t}{s} : \frac{t'}{s'}$$

6.4. *Ý nghĩa hình học của toạ độ xạ ảnh*

Xét mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$; gọi E_i là giao điểm của đường thẳng A_iE với đường thẳng A_jA_k (i, j, k = 1, 2, 3 và i, j, k khác nhau đôi một); tương tự, gọi M_i là giao điểm của đường thẳng A_iM với đường thẳng $A_j A_k$, trong đó $M(x_1: x_2: x_3)$ là một điểm bất kì khác với A_i (h.32). Thế thì, ta đã biết:

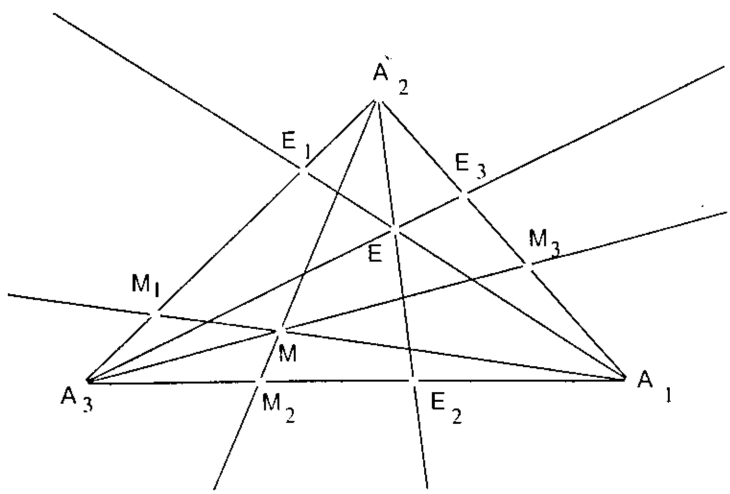
$A_1(1: 0: 0)$, $A_2(0: 1: 0)$, $A_3(0: 0: 1)$, $E_1(0: 1: 1)$, $E_2(1: 0: 1)$, $E_3(1: 1: 0)$

$M_1(0: x_2: x_3)$, $M_2(x_1: 0: x_3)$, $M_3(x_1: x_2: 0)$.

Gọi các ma trận cột toạ độ của các điểm A_i, E_i, M_i (i = 1, 2, 3) lần lượt là (A_i), (E_i), (M_i), ta có ngay:

$$(E_2) = (A_1) + (A_3) \text{ và } (M_2) = x_1(A_1) + x_3(A_3)$$

Do đó: $(A_1, A_3, E_2, M_2) = \dfrac{1}{1} : \dfrac{x_3}{x_1}$, hay $(A_1, A_3, E_2, M_2) = \dfrac{x_1}{x_3}$.



Hình 32

Tương tự ta cũng có: $(A_2, A_3, E_1, M_1) = \dfrac{x_2}{x_3}$ và $(A_1, A_2, E_3, M_3) = \dfrac{x_1}{x_2}$.

Như vậy, toạ độ xạ ảnh của một điểm đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ có thể hiểu như là một bộ ba số $(x_1: x_2: x_3)$ không đồng thời bằng 0, sao cho $\dfrac{x_1}{x_3}$, $\dfrac{x_2}{x_3}$, $\dfrac{x_1}{x_2}$ lần lượt là các giá trị của các tỉ số kép nói trên.

6.5. Hàng điểm điều hoà và hình bốn cạnh toàn phần

Định nghĩa

Cho bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D. Nếu tỉ số kép (A, B, C, D) = –1 thì ta nói cặp điểm C, D chia điều hoà cặp điểm A, B.

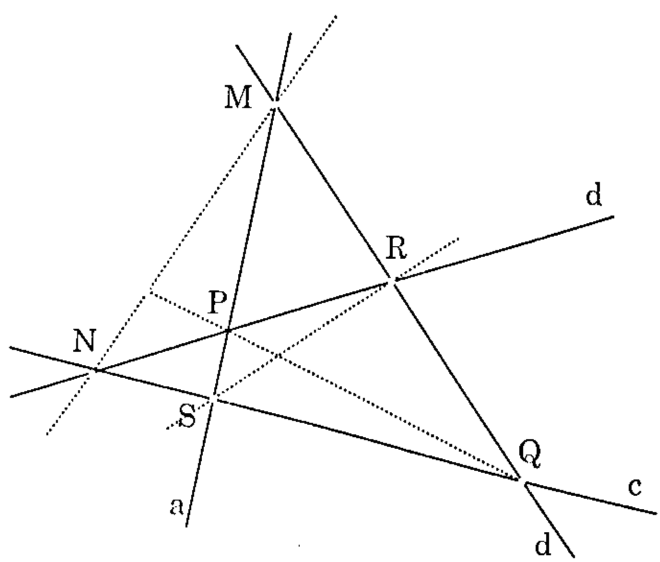
Khi đó: $$(A, B, D, C) = \frac{1}{(A, B, C, D)} = \frac{1}{-1} = -1;$$

$$(B,A,C,D) = \frac{1}{(A,B,C,D)} = \frac{1}{-1} = -1$$

và (C, D, A, B) = (A, B, C, D) = –1 nên ta cũng có : D, C chia điều hoà A, B; C, D chia điều hoà B, A và A, B chia điều hoà C, D.

Như vậy, quan hệ "*chia điều hoà*" giữa hai cặp điểm là một quan hệ đối xứng giữa các cặp điểm và giữa các điểm trong mỗi cặp. Chính vì vậy, khi đó ta còn nói là: *bốn điểm (thẳng hàng) A, B, C, D đó làm thành một hàng điểm điều hoà, hay cặp điểm A, B và cặp điểm C, D liên hợp điều hoà với nhau.*

Hình bốn cạnh toàn phần



Hình 33

Tập hợp gồm bốn đường thẳng, trong đó không có ba đường thẳng nào đồng quy gọi là một *hình bốn cạnh toàn phần* (*h.33*). Khi đó, mỗi đường thẳng gọi là *cạnh*, giao điểm của hai cạnh gọi là *đỉnh*, hai đỉnh không thuộc một cạnh gọi là hai *đỉnh đối diện*, đường thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là *đường chéo*.

Như vậy, hình bốn cạnh toàn phần có bốn cạnh, sáu đỉnh, ba đường chéo. Trên hình vẽ 33, hình bốn cạnh toàn phần có bốn cạnh là a, b, c, d. Sáu đỉnh là M, N, P, Q, R, S. Ba đường chéo là MN, PQ, RS. Ta chứng minh tính chất cơ bản sau đây của hình bốn cạnh toàn phần.

Định lí

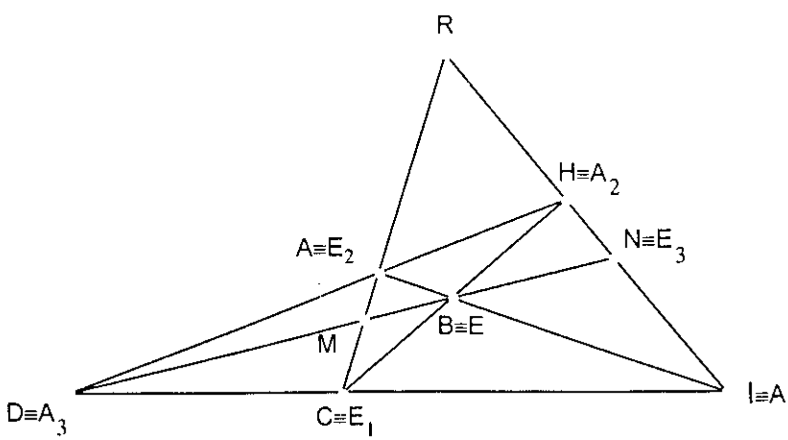
Trên mỗi đường chéo của hình bốn cạnh toàn phần, hai đỉnh đối diện chia điều hoà giao điểm của đường chéo đó với hai đường chéo còn lại.

Chứng minh:

Cho hình bốn cạnh toàn phần ABCDHI (kí hiệu theo các đỉnh) với các đường chéo AC, BD, HI. Gọi M, N lần lượt là các giao điểm của BD với AC và HI. *(hình 34)*

Ta cần chứng minh (M, N, B, D) = –1. Chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3 ; E\}$ sao cho A_1, A_2, A_3, E theo thứ tự trùng với I, H, D, B; Khi đó C trùng E_1, A trùng E_2, N trùng E_3. Ta có phương trình đường thẳng BD là $x_1 - x_2 = 0$ và phương trình đường thẳng AC là:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 0$$



Hình 34

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

ta được: $\begin{cases} x_2 = x_1 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = 2x_1 \end{cases}$

Vậy, điểm M có toạ độ là (1: 1: 2). Vì B = E(1: 1: 1); D = A_3 (0: 0: 1); M (1: 1: 2) và N = E_3 (1: 1: 0), ta suy ra: (M) = (B) + (D) và

(N) = (B) – (D)

Do đó: $(B, D, M, N) = \frac{1}{1} : \frac{-1}{1} = -1$.

Vậy (M, N, B, D) = (B, D, M, N) = –1.

6.6. Chùm đường thẳng

Định nghĩa

Tập hợp các đường thẳng cùng đi qua một điểm S gọi là một *chùm đường thẳng;* điểm S gọi là *tâm của chùm.* Chùm đường thẳng có tâm S được gọi tắt là *chùm tâm* S và kí hiệu là {S}.

Phương trình của chùm đường thẳng

Một chùm đường thẳng có thể được xác định bởi hai đường thẳng phân biệt của nó. Tâm của chùm chính là giao điểm của hai đường thẳng đó. Ta giả sử hai đường thẳng a và b của chùm tâm S lần lượt có phương trình :

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \text{ và } v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$$

Khi đó đường thẳng c có phương trình $w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = 0$ thuộc chùm tâm S khi và chỉ khi ba đường thẳng a, b, c đồng quy, hay là :

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

Vì hai đường thẳng a, b phân biệt nên ma trận gồm hai hàng đầu của định thức trên có hạng 2, bởi vậy từ điều kiện (1) ta suy ra hàng thứ ba biểu thị tuyến tính qua hai hàng đầu:

$$\begin{cases} w_1 = \lambda u_1 + \mu v_1 \\ w_2 = \lambda u_2 + \mu v_2 \\ w_3 = \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$ trong đó λ; μ không đồng thời bằng 0. (2)

Vậy phương trình đường thẳng *c* là :

$(\lambda u_1 + \mu v_1)x_1 + (\lambda u_2 + \mu v_2)x_2 + (\lambda u_3 + \mu v_3)x_3 = 0$, hay là:

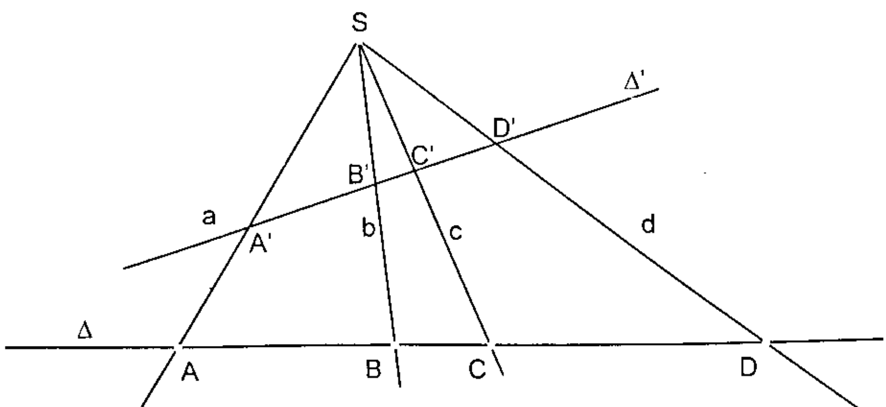
$$\lambda(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) + \mu(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3) = 0 \qquad (3)$$

Phương trình (3), với λ, μ không đồng thời bằng 0, gọi là phương trình của chùm tâm S.

Nếu ta kí hiệu (a) và (b) lần lượt là ma trận cột toạ độ của hai đường thẳng *a* và *b* thì theo (2) mọi đường thẳng của chùm tâm S đều có ma trận cột toạ độ là λ(a) + μ(b), trong đó λ, μ không đồng thời bằng 0.

6.7. *Tỉ số kép của bốn đường thẳng đồng quy*

Định lí: *Cho bốn đường thẳng* a, b, c, d *đồng quy tại điểm* S. *Gọi* Δ *là một đường thẳng bất kì không đi qua* S *lần lượt cắt* a, b, c, d *tại* A, B, C, D. *Khi đó tỉ số kép của bốn điểm* A, B, C, D *không phụ thuộc vào đường thẳng* Δ, *và được gọi là tỉ số kép của bốn đường thẳng* a, b, c, d *và kí hiệu là* (a, b, c, d).



Hình 35

Chứng minh: Giả sử một đường một đường thẳng Δ' khác Δ cắt các đường thẳng a, b, c, d lần lượt tại A', B', C', D' (*h. 35*).

Ta phải chứng minh: (A, B, C, D) = (A', B', C', D')

Gọi $\vec{s}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{a'}$, $\vec{b'}$ lần lượt là các vectơ đại diện cho các điểm S, A, B, C, D, A', B'. Vì A, B, C, D thẳng hàng nên ta có: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ và $\vec{d} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}$. Như vậy, theo định nghĩa ta có: (A, B, C, D) = $\dfrac{\beta}{\alpha} : \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

Mặt khác vì A', B' lần lượt nằm trên các đường thẳng SA. SB, nên: $\vec{a'} = \vec{a} + m\vec{s}$ và $\vec{b'} = \vec{b} + n\vec{s}$. Từ đó suy ra $\alpha\vec{a'} + \beta\vec{b'} = \vec{c} + (m\alpha + n\beta)\vec{s}$. Vế thứ nhất của đẳng thức này là vectơ đại diện cho một điểm nằm trên đường thẳng A'B' và vế thứ hai là một vectơ đại diện cho một điểm trên SC, vậy cả hai vectơ đó đại diện cho giao điểm của AB và SC, tức là đại diện cho điểm C'. Suy ra có thể chọn vectơ $\vec{c'}$ đại diện cho điểm C' là $\vec{c'} = \alpha\vec{a'} + \beta\vec{b'}$. Tương tự, có thể chọn vectơ $\vec{d'}$ đại diện cho điểm D' là $\vec{d'} = \alpha'\vec{a'} + \beta'\vec{b'}$. Từ đó ta có:

$$(A', B', C', D') = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = (A, B, C, D).$$

6.8. *Tỉ số kép của bốn đường thẳng đồng quy tính theo toạ độ*

Cho bốn đường thẳng *a, b, c, d* đồng quy tại điểm S và đôi một phân biệt. Chọn một mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ và kí hiệu (a), (b), (c), (d) là lượt là các ma trận cột toạ độ của các đường thẳng *a, b, c, d*. Ta xem hai đường thẳng *c* và *d* thuộc chùm tâm S xác định bởi hai đường thẳng *a* và *b*. Khi đó có các số λ, μ, λ', μ' sao cho: $(c) = \lambda(a) + \mu(b)$; $(d) = \lambda'(a) + \mu'(b)$.

Định lí: Tỉ số kép của bốn đường thẳng a, b, c, d nói trên được tính theo công thức (a, b, c, d) = $\dfrac{\mu}{\lambda} : \dfrac{\mu'}{\lambda'}$.

Chứng minh: Điểm S không thể đồng thời nằm trên cả ba trục toạ độ, ta giả sử nó không nằm trên trục A_2A_3, có phương trình $x_3 = 0$. Ta chọn Δ là đường thẳng A_2A_3 và gọi A, B, C, D lần lượt là giao điểm của a, b, c, d với Δ. Theo định nghĩa của tỉ số kép của bốn dường thẳng đồng quy ta có (a, b, c, d) = (A, B, C, D).

Giả sử dường thẳng a có phương trình: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, đường thẳng b có phương trình: $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$

Toạ độ của điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \text{ và } x_3 = 0$$

Vậy $A = (-a_2 : a_1 : 0)$.

Tương tự ta có $(B) = (-b_2 : b_1 : 0)$ và $(C) = \lambda(A) + \mu(B)$,

$$(D) = \lambda'(A) + \mu'(B).$$

Vậy $(A, B, C, D) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}$. Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

6.9. Chùm điều hoà

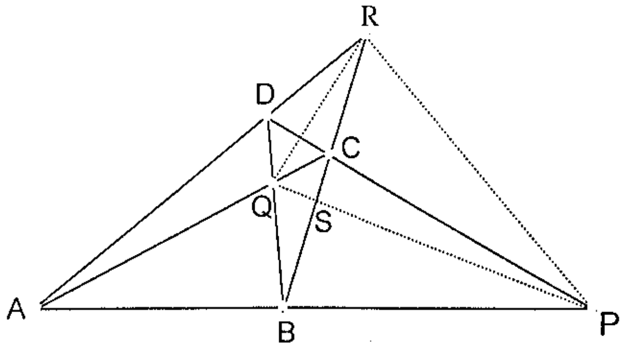
Nếu bốn đường thẳng a, b, c, d đồng quy và (a, b, c, d) = –1 thì ta nói rằng bốn đường thẳng a, b, c, d là một chùm điều hoà, cũng còn nói: cặp đường thẳng a, b chia điều hoà cặp đường thẳng c, d và ngược lại, hoặc cặp a, b và cặp c, d liên hợp điều hoà với nhau.

Hình bốn đỉnh toàn phần. Tập hợp gồm bốn điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng gọi là một *hình bốn đỉnh toàn phần*. Khi đó, mỗi điểm gọi là một *đỉnh*, đường thẳng đi qua hai đỉnh gọi là một *cạnh*, hai cạnh không cùng đi qua một đỉnh gọi là hai *cạnh đối diện*, giao điểm hai cạnh đối diện gọi là *điểm chéo*.

Như vậy, hình bốn đỉnh toàn phần có bốn đỉnh, sáu cạnh, ba điểm chéo.

Định lí: *Hai cạnh đi qua một điểm chéo chia điều hoà hai đường thẳng nối điểm chéo đó với hai điểm chéo còn lại.*

Chứng minh: Giả sử ABCD là bốn đỉnh của hình bốn đỉnh toàn phần. Gọi các điểm chéo là: $P = AB \cap CD$, $Q = AC \cap BD$, $R = AD \cap BC$. Ta cần chứng minh, chẳng hạn: (PB, PC, PQ, PR) = –1. Ta xét hình bốn cạnh toàn phần tạo bởi bốn đường thẳng PB, PC, QB, QC, ba đường chéo của nó là AC, PQ, AD (*h.36*).



Hình 36

Gọi S = PQ $\cap$ BC, theo tính chất của hình bốn cạnh toàn phần ta có: (B, C, S, R) = –1. Bởi vậy, theo định lí trên ta suy ra điều phải chứng minh.

7. Nguyên tắc đối ngẫu

7.1. *Phép đối xạ*

Cho mặt phẳng xạ ảnh **P**. Ta kí hiệu **P*** là tập hợp các điểm và các đường thẳng của **P**. Ta chọn một mục tiêu xạ ảnh và xét một phép ánh xạ π **: P*** $\rightarrow$ **P*** như sau :

- Với mỗi điểm X có toạ độ $(x_1:x_2:x_3)$ ta lấy π(X) là đường thẳng u có toạ độ $(u_1:u_2:u_3)$ trong đó: $u_i = x_i$, $i = 1, 2, 3$.
- Với mỗi dường thẳng u có toạ độ $(u_1:u_2:u_3)$ ta lấy π(u) là một điểm có toạ độ $(x_1:x_2:x_3)$ trong đó $x_i = u_i$, i = 1, 2, 3.

Rõ ràng π là một song ánh từ **P*** lên chính nó. Song ánh đó được gọi là *phép đối xạ* của mặt phẳng **P**.

7.2. *Các tính chất của phép đối xạ*

Quy ước

Khi điểm A thuộc đường thẳng *u*, ta có nhiều cách nói: điểm A nằm trên đường thẳng *u*, đường thẳng *u* đi qua điểm A, đường thẳng *u* chứa điểm A. Bây giờ ta còn quy ước một cách nói nữa: *đường thẳng u thuộc điểm* A. Bằng cách như vậy quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng trở thành một quan hệ đối xứng: *Điểm A thuộc đường thẳng u thì đường thẳng u cũng thuộc điểm A.*

Định lí

Phép đối xạ bảo tồn quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng: Nếu điểm A thuộc đường thẳng u thì đường thẳng π(A) thuộc điểm π(u).

Chứng minh: Cho điểm A có toạ độ A = $(a_1:a_2:a_3)$ và đường thẳng *u* có toạ độ *u* = $(u_1:u_2:u_3)$. Khi đó đường thẳng $\pi(A)$ có toạ độ $\pi(A)$ = $(a_1:a_2:a_3)$ và điểm $\pi(u)$ có toạ độ $\pi(u) = (u_1:u_2:u_3)$.

Nếu điểm A thuộc đường thẳng *u* thì ta có: $u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 = 0$. Nhưng đẳng thức này cũng chứng tỏ rằng đường thẳng $\pi(A)$ thuộc điểm $\pi(u)$.

Định lí

Phép đối xạ biến bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D thành bốn đường thẳng đồng quy a, b, c, d và (a, b, c, d) = (A, B, C, D).

Chứng minh: Bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một dường thẳng *u* nên phép đối xạ biến chúng thành bốn đường thẳng *a, b, c, d* cùng thuộc điểm $\pi(u)$, và toạ độ của bốn đường thẳng *a, b, c, d* lần lượt bằng toạ độ bốn điểm A, B, C, D nên hiển nhiên *(a, b, c, d)* = (A, B, C, D).

7.3. *Nguyên tắc đối ngẫu*

a. *Ta hãy xét mệnh đề M sau đây:*

"*Qua hai điểm phân biệt có một và chỉ một đường thẳng*".

Mệnh dề dó có thể phát biểu một cách khác, nếu sử dụng từ "*thuộc*":

"*Có một và chỉ một <u>đường thẳng</u> thuộc hai <u>điểm</u> phân biệt cho trước*".

Bây giờ nếu trong mệnh đề trên, ta thay từ *đường thẳng* bằng từ *điểm* và ngược lại, còn các từ khác giữ nguyên, thì ta được mệnh đề M':

"*Có một và chỉ một <u>điểm</u> thuộc hai <u>đường thẳng</u> phân biệt cho trước*".

Hai mệnh đề M và M' gọi là hai mệnh đề *đối ngẫu* với nhau. Một cách khái quát ta có định nghĩa sau dây:

Định nghĩa: *Cho mệnh đề M nói về các điểm, các đường thẳng cùng với quan hệ thuộc và tỉ số kép giữa chúng. Nếu trong mệnh đề M, các từ điểm được thay bằng từ đường thẳng và ngược lại, còn các từ khác được giữ nguyên thì ta nhận được một mệnh đề M'. Hai mệnh đề M và M' gọi là đối ngẫu với nhau.*

b. *Dùng phép đối xạ của mặt phẳng xạ ảnh* **P**, *ta thấy ngay nguyên tắc sau đây gọi là* nguyên tắc đối ngẫu trong mặt phẳng xạ ảnh*:*

Nguyên tắc đối ngẫu: *Hai mệnh đề đối ngẫu với nhau thì cùng đúng hoặc cùng sai.*

Nguyên tắc này giúp chúng ta "nhân đôi" những kết quả thu được trong mặt phẳng xạ ảnh: Nếu ta đã chứng minh một mệnh đề nào đó là đúng thì đồng thời ta có ngay mệnh đề đối ngẫu cũng đúng mà không cần chứng minh nữa.

Hiển nhiên trong Hình học afin hoặc Hình học Ơ–clit trên mặt phẳng, nguyên tắc đối ngẫu không đúng. Hãy trở lại mục a) ta thấy trong mặt phẳng afin mệnh đề M là đúng nhưng đối ngẫu với nó là mệnh đề M' lại không đúng vì trong mặt phẳng afin hai đường thẳng phân biệt có thể không cùng thuộc một điểm (khi chúng song song với nhau).

c. *Khái niệm đối ngẫu*

Mỗi khái niệm K của hình học xạ ảnh trên mặt phẳng cũng có khái niệm đối ngẫu K* có được bằng cách thay từ *điểm* bởi từ *đường thẳng* và ngược lại. Một số ví dụ:

Khái niệm "*Tập hợp các điểm cùng thuộc một đường thẳng*" (gọi là hàng điểm) có đối ngẫu là "*Tập hợp các đường thẳng cùng đi qua một điểm*" (gọi là chùm đường thẳng).

"*Hàng điểm điều hoà*" đối ngẫu với: "*Chùm đường thẳng điều hoà*".

"*Hình bốn đỉnh toàn phần*" đối ngẫu với "*hình bốn cạnh toàn phần*".

8. Mô hình xạ ảnh của mặt phẳng afin

8.1. Xây dựng mô hình

Chúng ta đã đã xuất phát từ mặt phẳng afin **A** để xây dựng một mô hình của không gian xạ ảnh, bằng cách bổ sung vào **A** các "*điểm* *vô tận*". Sau đây ta sẽ làm ngược lại : xuất phát từ mặt phẳng xạ ảnh **P** ta sẽ xây dựng một mô hình của mặt phẳng afin.

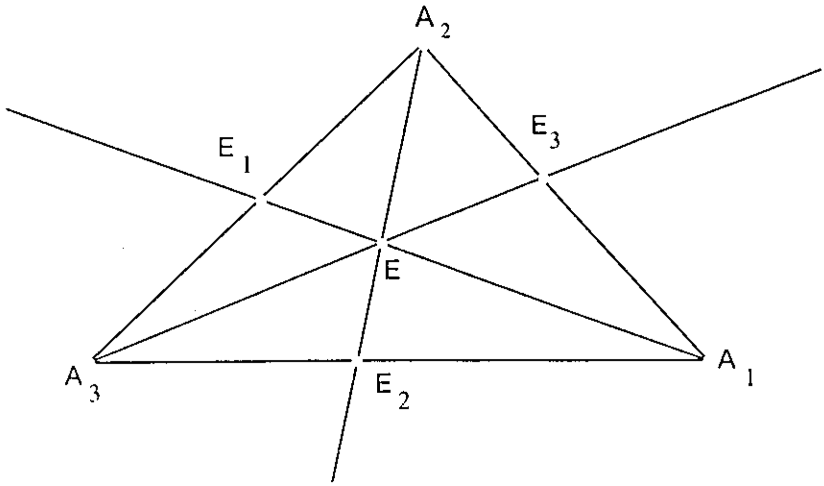
Lấy trong mặt phẳng xạ ảnh **P** một đường thẳng Δ và xét tập hợp $\mathbf{A} = \mathbf{P} \setminus \Delta$. Ta xây dựng **A** thành mô hình của mặt phẳng afin như sau.

Chọn một mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ sao cho hai điểm A_1 và A_2 nằm trên Δ. Khi đó đường thẳng Δ có phương trình $x_3 = 0$, do đó các điểm thuộc **A** đều có toạ độ $(x_1{:}x_2{:}x_3)$ với $x_3 \neq 0$. Vì lẽ đó ta có thể luôn luôn cho $x_3 = 1$ (bằng cách chia cả ba toạ độ cho x_3), như vậy mỗi điểm $X \in \mathbf{A}$ được hoàn toàn xác định bởi bộ ba số $(x_1; x_2; 1)$. Vì toạ độ thứ ba luôn luôn bằng 1 nên không cần để ý đến toạ độ đó, tức là mỗi điểm $X \in \mathbf{A}$ được hoàn toàn xác định bởi cặp số $(x_1; x_2)$, gọi là *toạ độ không thuần nhất* của X, $X = (x_1; x_2)$ hay $X(x_1; x_2)$. Bây giờ với hai điểm $X(x_1; x_2)$ và $Y(y_1; y_2)$ thuộc **A** ta cho ứng với vectơ $\overrightarrow{XY} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2)$ của không gian vectơ $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ thì tương ứng đó thoả mãn các tiên đề của không gian afin. Vậy **A** trở thành một mô hình (gọi là *mô hình xạ ảnh*) của mặt phẳng afin.

8.2. Toạ độ afin

a. Trong mặt phẳng xạ ảnh **P** xét mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2 A_3; E\}$ như đã nói ở 8.1, gọi $E_1 = A_3A_2 \cap A_1E$ và $E_2 = A_3A_1 \cap A_2E$. Khi đó ta có $A_3 = (0{:}0{:}1)$, $E_1 = (0{:}1{:}1)$ và $E_2 = (1{:}0{:}1)$, do đó toạ độ không thuần nhất của chúng là: $A_3 = (0; 0)$, $E_1 = (0; 1)$, $E_2 = (1; 0)$.

Trong mô hình $\mathbf{A} = \mathbf{P} \setminus \Delta$ của mặt phẳng afin ta có các vectơ $\vec{e_1} = \overrightarrow{A_3E_2} = (1; 0)$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{A_3E_1} = (0 : 1)$. Vậy ta có mục tiêu afin $\{A_3; \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, ta sẽ gọi đó là *mục tiêu afin sinh ra bởi mục tiêu xạ ảnh* $\{A_i; E\}$ đang xét. Trong mô hình $\mathbf{A} = \mathbf{P} \setminus \Delta$ lấy điểm X có toạ độ không thuần nhất $(x_1; x_2)$, tức là có toạ độ xạ ảnh $(x_1{:}x_2{:}1)$. Khi đó ta có $\overrightarrow{A_3X} = (x_1; x_2)$ tức là $\overrightarrow{A_3X} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$. Vậy $(x_1; x_2)$ chính là toạ độ afin của điểm X đối với mục tiêu afin $\{A_3; \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$.



Hình 37

b. Trong mặt phẳng xạ ảnh **P** xét đường thẳng xạ ảnh u không trùng với Δ. Giả sử u có phương trình: $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ (trong đó u_1, u_2 không đồng thời bằng 0 do u khác Δ). Ta kí hiệu $u' = u \cap \mathbf{A} = u \setminus \Delta$ thì mỗi điểm nằm trên u' đều có toạ độ không thuần nhất $(x_1; x_2)$ tức là có toạ độ xạ ảnh $(x_1:x_2:1)$. Vậy ta có:

$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$, trong đó u_1, u_2 không đồng thời bằng 0.

Điều đó chứng tỏ u' là một đường thẳng trong mặt phẳng afin **A**. Phương trình đường thẳng u' trong mục tiêu $\{A_3; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *được suy ra từ phương trình của đường thẳng u trong mục tiêu xạ ảnh $(A_i; E)$ bằng cách cho* $x_3 = 1$.

c. Bây giờ cho hai đường thẳng xạ ảnh u và v phân biệt và không trùng với Δ, có phương trình lần lượt là: $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ và $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$. Chúng xác định hai đường thẳng afin $u' = u \setminus \Delta$ và $v' = v \setminus \Delta$ lần lượt có phương trình: $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$ và $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3 = 0$.

Ta hãy xét trường hợp u và v cắt nhau tại một điểm nằm trên Δ, tức là ba đường thẳng u, v, Δ đồng quy. Khi đó:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ hay } \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}.$$

Vậy suy ra hai đường thẳng afin *u*' và *v*' song song.

Nếu ta gọi I là giao điểm của *u* và *v* thì vì I nằm trên Δ nên I không thuộc **A**, tức là hai đường thẳng afin *u*' và *v*' không có điểm chung. Bởi vậy người ta còn nói I là "*điểm vô tận*" của đường thẳng *u*' và *v*', và đường thẳng Δ mặc dù không nằm trên **A**, vẫn quy ước gọi là "*đường thẳng vô tận*" của mặt phẳng afin **A**.

Như vậy nếu trên mặt phẳng xạ ảnh **P** ta bỏ đi một đường thẳng Δ nào đó thì phần còn lại là một mặt phẳng afin mà Δ là đường thẳng vô tận.

8.3. Tỉ số đơn trên mô hình

Trong mặt phẳng P ta xét bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D trong đó chỉ có điểm D nằm trên Δ. Khi đó ta có ba điểm thẳng hàng A, B, C trong mặt phẳng afin **A** = **P**\Δ. Ta nhớ lại định nghĩa tỉ số đơn của ba điểm A, B, C được định nghĩa là một số k sao cho $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$, và kí hiệu (A, B, C) = k.

Nếu ta gọi toạ độ afin của A, B và C là A = $(a_1; a_2)$, B = $(b_1; b_2)$ và C = $(c_1; c_2)$ thì $c_1 = \dfrac{a_1 - kb_1}{1-k}$ và $c_2 = \dfrac{a_2 - kb_2}{1-k}$. Khi đó toạ độ xạ ảnh tương ứng của A, B, C sẽ là :

$A = (a_1 : a_2 : 1)$,

$B = (b_1 : b_2 : 1)$,

$$C = \left(\frac{a_1 - kb_1}{1-k} : \frac{a_2 - kb_2}{1-k} : 1\right) = (a_1 - kb_1 : a_2 - kb_2 : 1-k).$$

Vậy, kí hiệu (A), (B), (C) là các ma trận cột toạ độ của các điểm A, B, C thì ta có :

$$(C) = (A) - k(B) \qquad (1)$$

Bây giờ ta hãy tìm ma trận cột toạ độ của điểm D. Vì D nằm trên đường thẳng AB nên ta có: (D) = λ(A) + μ(B), ngoài ra vì D nằm trên Δ nên toạ độ thứ ba của nó bằng 0, tức là: $\lambda + \mu = 0$, vậy ta có thể chọn $\lambda = 1$, $\mu = -1$ hay:

$$(D) = (A) - (B) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $(A, B, C, D) = \frac{-k}{1} : \frac{-1}{1} = k = (A, B, C)$.

Vậy ta có kết luận: *Tỉ số đơn (A, B, C) của ba điểm thẳng hàng A, B, C trong mặt phẳng afin **A** bằng tỉ số kép (A, B, C, D) của bốn điểm A, B, C, D trong mặt phẳng xạ ảnh **P**, với D là điểm vô tận của đường thẳng đi qua A, B, C.*

Đặc biệt: Khi C là trung điểm AB trong mặt phẳng afin **A** thì $(A, B, C) = -1$ và do đó $(A, B, C, D) = -1$, hay A, B, C, D là hàng điểm điều hoà trong mặt phẳng xạ ảnh **P**.

Như vậy:

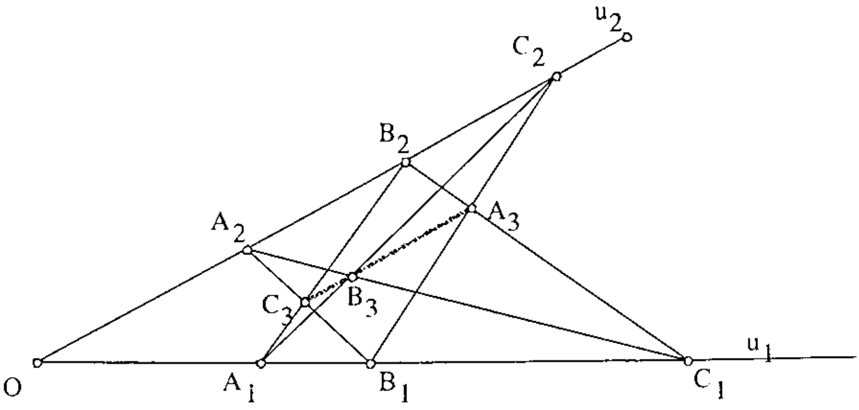
Trung điểm C của đoạn thẳng AB cùng với điểm vô tận D của đường thẳng AB là cặp điểm chia điều hòa cặp điểm A, B.

8.4. Áp dụng

1) Từ định lí của mặt phẳng xạ ảnh có thể suy ra các định lí của mặt phẳng afin.

Giả sử M là một định lí của mặt phẳng xạ ảnh **P** (nói về điểm, đường thẳng, quan hệ liên thuộc, tỉ số kép). Nếu ta chọn một đường thẳng Δ của **P** và xét mặt phẳng afin $\mathbf{A} = \mathbf{P} \setminus \Delta$, thì định lí M sẽ trở thành mệnh đề M' của mặt phẳng afin và hiển nhiên M' là mệnh đề đúng không cần chứng minh. Vì có nhiều cách chọn Δ khác nhau nên ta cũng có nhiều định lí afin khác nhau. Để lấy làm ví dụ, ta xét định lí Pap-puýt sau đây của mặt phẳng xạ ảnh:

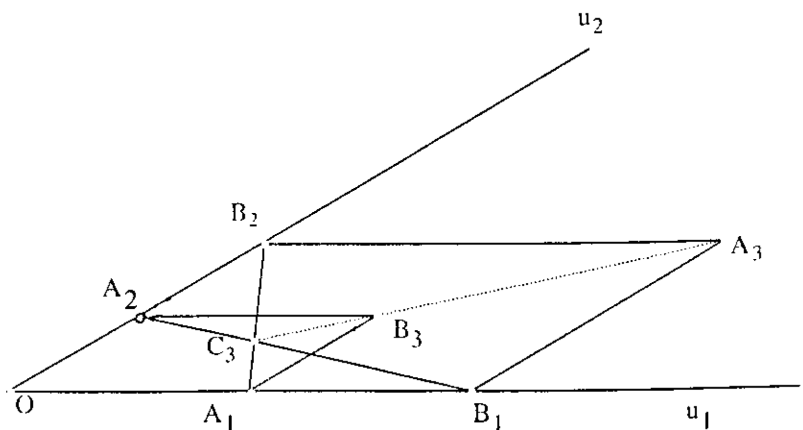
Định lí Pap-puýt: Cho hai đường thẳng u_1 và u_2 cắt nhau ở O. Trên u_1 lấy ba điểm hàng A_1, B_1, C_1 phân biệt và khác O, trên u_2 lấy ba điểm A_2, B_2, C_2 phân biệt và khác O. Gọi $A_3 = B_1C_2 \cap B_2C_1$, $B_3 = C_1A_2 \cap C_2A_1$, $C_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1$. Khi đó ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng (h. 38).



Hình 38

Chúng ta không trình bày cách chứng minh định lí đó. Mục đích của chúng ta là xem thử từ định lí đó ta có thể suy ra những kết quả nào của hình học afin.

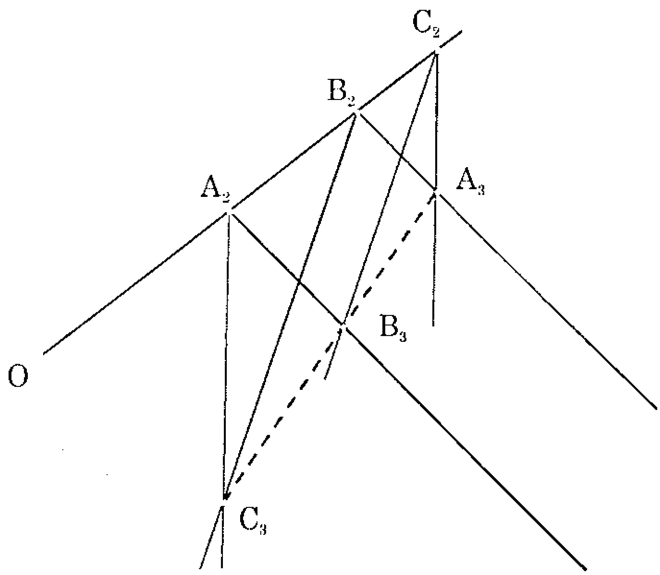
a) Ta hãy chọn đường thẳng Δ đi qua hai điểm C_1 và C_2 làm đường thẳng vô tận của mặt phẳng afin $\mathbf{A} = \mathbf{P} \setminus \Delta$, (*h.39*), do đó hai tứ giác $OA_1B_3A_2$ và $OB_1A_3B_2$ trở thành những hình bình hành. Vậy ta có kết quả sau đây của hình học afin:



Hình 39

Mệnh đề 1: Cho hai hình bình hành $OA_1B_3A_2$ và $OB_1A_3B_2$, trong đó O, A_1, B_1 thẳng hàng và O, A_2, B_2 thẳng hàng. Khi đó nếu gọi $C_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1$ thì ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

b. Ta hãy chọn đường thẳng u_1 làm đường thẳng vô tận của mặt phẳng afin thì ta được mệnh đề sau đây của hình học afin (*h.40*):



Hình 40

Mệnh đề 2: Cho ba điểm A_2, B_2, C_2 thẳng hàng và các điểm A_3, B_3, C_3 sao cho: $A_3B_2 // C_3A_1$, $A_3A_2 // B_3A_1$, $C_3A_2 // B_3B_2$. Khi đó ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

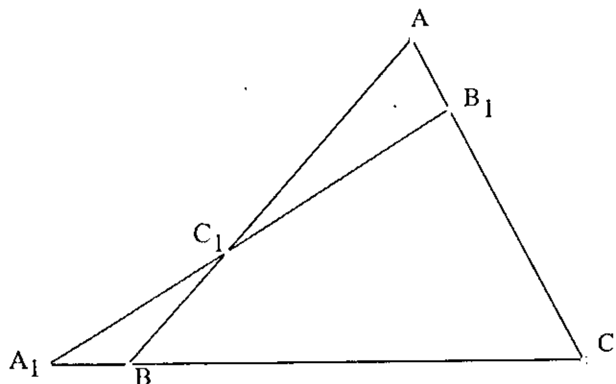
c) Cố nhiên có thể có nhiều cách chọn đường thẳng vô tận khác nữa. Đặc biệt nếu ta chọn đường thẳng vô tận không đi qua điểm nào trong các điểm O, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 thì ta được nguyên định lí Pap–puýt tổng quát trong mặt phẳng afin (với điều kiện có các giao điểm A_3, B_3, C_3).

2) Từ một định lí của hình học afin suy ra một định lí của hình học xạ ảnh.

Giả sử ta có M' là một định lí đã được chứng minh của mặt phẳng afin **A**. Ta bổ sung vào **A** đường thẳng vô tận thì được một mặt phẳng xạ ảnh **P** và mệnh đề M' trở thành mệnh đề M của của hình học xạ ảnh. Ta lấy ví dụ định lí Mê–nê–la–uýt sau đây của hình học afin:

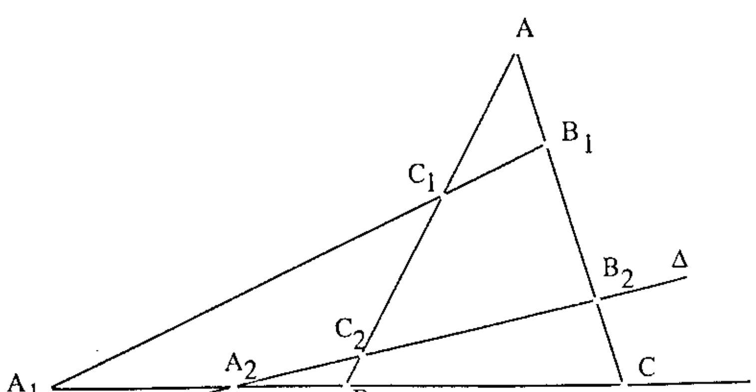
Định lí Mê–nê–la–uýt: Trong mặt phẳng afin cho tam giác ABC, trên ba cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm C_1, A_1, B_1 không trùng với các đỉnh của tam giác. Khi đó điều kiện cần và đủ để ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng là:

$$(A, B, C_1).(B, C, A_1).(C, A, B_1) = 1.$$



Hình 41a

Ta bổ sung vào mặt phẳng afin đường thẳng vô tận Δ để được mặt phẳng xạ ảnh (*h.41b*). Kí hiệu A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm vô tận của các đường thẳng BC, CA, AB chúng đều nằm trên đường thẳng Δ.



Hình 41b

Khi đó ta có $(A, B, C_1, C_2) = (A, B, C_1)$; $(B, C, A_1, A_2) = (B, C, A_1)$;

$(C, A, B_1, B_2) = (C, A, B_1)$. Từ đó ta suy ra định lí sau đây trong mặt phẳng xạ ảnh.

Định lí: *Trong mặt phẳng xạ ảnh, cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C và một đường thẳng Δ không đi qua chúng. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm của BC, CA, AB với Δ. Lấy các điểm C_1, A_1, B_1 lần lượt nằm trên AB, BC, CA. Khi đó điều kiện cần và đủ để ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng là: $(A, B, C_1, C_2).(B, C, A_1, A_2).(C, A, B_1, B_2) = 1$.*

§2. CÁC PHÉP BIẾN HÌNH XẠ ẢNH

1. Các phép biến hình xạ ảnh của mặt phẳng xạ ảnh

1.1. Các định nghĩa

Định nghĩa: *Cho mặt phẳng xạ ảnh **P** liên kết với không gian vectơ V^3 bởi song ánh p. Một ánh xạ f: $\mathbf{P} \to \mathbf{P}$ được gọi là phép biến hình xạ ảnh của **P** nếu có một phép biến đổi tuyến tính $\varphi: V^3 \to V^3$ sao cho nếu điểm $X \in \mathbf{P}$ có đại diện là vectơ $\vec{x} \in V^3$ thì điểm $X' = f(X)$ có vectơ đại diện là $\vec{x'} = \varphi(\vec{x})$. Phép biến đổi tuyến tính φ được gọi là đại diện của biến hình xạ ảnh f.*

Một ví dụ đơn giản của biến hình xạ ảnh là phép đồng nhất e: $\mathbf{P} \to \mathbf{P}$, biến mọi điểm $M \in \mathbf{P}$ thành chính nó.

Khi đó dễ thấy rằng phép đồng nhất e có đại diện là các phép vị tự $\varepsilon: V^3 \to V^3$,

$$\varepsilon(\vec{x}) = k\vec{x} \text{ (} k \text{ là số cố định khác 0).}$$

Dựa vào định nghĩa trên ta dễ dàng suy ra:

a) Các phép biến hình xạ ảnh là những song ánh.

*b) Mỗi phép biến đổi tuyến tính φ của V^3 là đại diện cho một phép biến hình xạ ảnh f duy nhất của **P**. Hai phép biến đổi tuyến tính*

φ và φ' cùng đại diện cho một phép biến hình xạ ảnh f khi và chỉ khi có số k sao cho $\varphi = k\varphi'$.

Thật vậy, nếu đã cho biến đổi tuyến tính φ: $\mathbf{V}^3 \to \mathbf{V}^3$ thì biến đổi xạ ảnh f: $\mathbf{P} \to \mathbf{P}$ được xác định một cách duy nhất như sau: Nếu điểm $M \in \mathbf{P}$ có đại diện là vectơ $\vec{x} \in \mathbf{V}^3$ thì điểm M' = f(M) có đại diện là vectơ $\vec{x'} = \varphi(\vec{x})$. Nếu φ': $\mathbf{V}^3 \to \mathbf{V}^3$ cũng đại diện cho f thì với mọi vectơ $\vec{x} \in \mathbf{V}^3$, các vectơ $\varphi(\vec{x})$ và $\varphi'(\vec{x})$ cùng đại diện cho điểm M' = f(M) nên:

$\varphi(\vec{x}) = k_{\vec{x}}\, \varphi'(\vec{x})$. Vì φ và φ' đều là biến đổi tuyến tính nên dễ chứng minh được $k_{\vec{x}}$ không phụ thuộc vào x, tức là $\varphi = k\varphi'$.

c) Tích hai phép biến hình xạ ảnh là một phép biến hình xạ ảnh và đảo ngược của một phép biến hình xạ ảnh là một phép biến hình xạ ảnh.

*Vậy tập hợp các phép biến hình xạ ảnh của **P** làm thành một nhóm, gọi là nhóm xạ ảnh của **P**.*

d) Phép biến hình xạ ảnh biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, biến ba điểm không thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng. Từ đó suy ra: Phép biến hình xạ ảnh biến đường thẳng thành đường thẳng.

Tính chất đó suy ra từ chỗ: phép biến đổi tuyến tính bảo tồn sự độc lập tuyến tính hoặc phụ thuộc tuyến tính của ba vectơ.

e) Phép biến hình xạ ảnh không làm thay đổi tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng.

Thật vậy giả sử phép biến hình xạ ảnh f biến bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D thành bốn điểm thẳng hàng A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D). Lại gọi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ lần lượt là các vectơ đại diện cho A, B, C, D và φ : $\mathbf{V}^3 \to \mathbf{V}^3$ là đại diện cho f. Khi đó $\vec{a'} = \varphi(\vec{a})$, $\vec{b'} = \varphi(\vec{b})$, $\vec{c'} = \varphi(\vec{c})$, $\vec{d'} = \varphi(\vec{d})$ là các vectơ đại diện cho A', B', C', D'. Vì các điểm A, B, C, D thẳng hàng nên: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ và $\vec{d} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}$. Khi đó theo định nghĩa của tỉ số kép : (A, B, C, D) = $\dfrac{\beta}{\alpha} : \dfrac{\beta'}{\alpha'}$. Mặt khác ta có:

$\vec{c'} = \varphi(\vec{c}) = \varphi(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\varphi(\vec{a}) + \beta\varphi(\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{c'} = \alpha\vec{a'} + \beta\vec{b'}$.

$\vec{d'} = \varphi(\vec{d}) = \varphi(\alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}) = \alpha'\varphi(\vec{a}) + \beta'\varphi(\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{c'} = \alpha'\vec{a'} + \beta'\vec{b'}$.

Từ đó suy ra (A', B', C', D') = $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$ = (A, B, C, D).

1.2. Biểu thức tọa độ của phép biến hình xạ ảnh

Định lí (về sự xác định phép biến hình xạ ảnh)

*Trong mặt phẳng xạ ảnh **P** cho hai mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ và* $\{A'_1, A'_2, A'_3 ; E'\}$. Khi đó có một phép biến hình xạ ảnh duy nhất f sao cho $f(A_i) = A'_i$ và f(E) = E'.

Chứng minh. Gọi $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ và $\{\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \vec{e'_3}\}$ là các cơ sở của $\mathbf{V}^3$ lần lượt đại diện cho hai mục tiêu xạ ảnh đã cho. Khi đó có một phép biến đổi tuyến tính duy nhất φ: $\mathbf{V}^3 \to \mathbf{V}^3$ sao cho $\varphi(\vec{e_i}) = \vec{e'_i}$. Nếu gọi f: $\mathbf{P} \to \mathbf{P}$ là biến hình xạ ảnh có đại diện là φ thì hiển nhiên $f(A_i) = A'_i$ và vì $\varphi(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}) = \vec{e'_1} + \vec{e'_2} + \vec{e'_3}$ nên f(E) = E'.

Biểu thức toạ độ

Cho f: $\mathbf{P} \to \mathbf{P}$ là một phép biến đổi xạ ảnh. Chọn một mục tiêu xạ ảnh nào đó $\{A_1, A_2, A_3 : E\}$. Gọi $(x_1:x_2:x_3)$ là toạ độ của điểm X và $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ là toạ độ của X' = f(X) đối với mục tiêu đó. Ta hãy tìm sự liên hệ giữa x_i và x'_i.

Gọi $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ là cơ sở của $\mathbf{V}^3$ đại diện cho mục tiêu xạ ảnh đã chọn, còn φ là biến đổi tuyến tính đại diện cho f. Giả sử đối với cơ sở đó φ có biểu thức toạ độ :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Để ý tới quan hệ giữa toạ độ xạ ảnh của một điểm với vectơ đại diện của nó ta suy ra biểu thức liên hệ giữa toạ độ của X và X' là :

$$\begin{cases} kx'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ kx'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ kx'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \quad (1)$$

Ma trận $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ có hạng bằng 3 tức là $\det A \neq 0$.

Ma trận A gọi là *ma trận của phép biến hình xạ ảnh f đối với mục tiêu xạ ảnh đã chọn*. Nếu ta kí hiệu (X) và (X') lần lượt là ma trận cột toạ độ của điểm X và X' thì biểu thức (1) có thể viết dưới dạng ma trận: $k(X') = A.(X)$.

Chú ý rằng nếu f có biểu thức toạ độ (1) thì điểm $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$ lần lượt biến thành các điểm $f(A_1) = (a_{11}: a_{21}: a_{31})$, $f(A_2) = (a_{12}:a_{22}:a_{32})$ *và* $f(A_3) = (a_{31}:a_{32}:a_{33})$, còn điểm E(1:1:1) biến thành điểm $f(E) = (e_1:e_2:e_3)$ với $e_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13}$, $e_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23}$, $e_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33}$. Bởi vậy ta có thể tìm được ma trận của phép biến hình xạ ảnh f nếu biết toạ độ của các điểm $f(A_i)$ và f(E).

1.3. Các phép thấu xạ của mặt phẳng xạ ảnh

Định nghĩa

Phép biến hình xạ ảnh f của mặt phẳng xạ ảnh **P** gọi là *phép thấu xạ* nếu có một đường thẳng s gồm toàn điểm bất động (có nghĩa là mỗi điểm X của s đều biến thành chính nó). Đường thẳng s gọi là *trục thấu xạ.*

Theo định nghĩa đó, phép đồng nhất e là một phép thấu xạ, trục thấu xạ là bất kì đường thẳng nào.

Định lí

Nếu f là phép thấu xạ khác phép đồng nhất thì có một điểm bất động duy nhất S sao cho mọi đường thẳng a đi qua S đều biến thành chính nó: f(a) = a.

Điểm S như thế gọi là tâm thấu xạ.

Chứng minh: Giả sử f là phép thấu xạ có trục thấu xạ s. Ta chọn một mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3 ; E\}$ của **P** sao cho A_1 và A_2 nằm trên s. Biểu thức toạ độ của f đối với mục tiêu đó có dạng:

$$\begin{cases} kx'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ kx'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ kx'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \quad (1)$$

Vì các điểm $A_1(1:0:0)$ và $A_2(0:1:0)$ và $E_3(1:1:0)$ đều nằm trên s nên đều biến thành chính nó.

Suy ra : $\begin{cases} k = a_{11} \\ 0 = a_{21} \\ 0 = a_{31} \end{cases} \begin{cases} 0 = a_{12} \\ k = a_{22} \\ 0 = a_{32} \end{cases} \begin{cases} k = a_{11} + a_{12} \\ k = a_{21} + a_{22} \\ 0 = a_{31} + a_{32} \end{cases}$

Từ đó ta có $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$.

Vậy (1) trở thành: $\begin{cases} kx'_1 = a_{11}x_1 + a_{13}x_3 \\ kx'_2 = a_{11}x_2 + a_{23}x_3 \\ kx'_3 = a_{33}x_3 \end{cases}$

Ma trận của phép biến đổi f là $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$. Vì $\det A \neq 0$ nên $a_{11} . a_{33} \neq 0$.

Phép biến đổi xạ ảnh f có thể viết dưới dạng ma trận:

$$k(X') = A(X) \quad (2)$$

Điểm bất động của f có ma trận cột toạ độ (X) thoả mãn điều kiện $k(X) = A(X)$, hay $A(X)-k(X) = 0$ hay $(A-kI_3)(X) = 0$, phương trình này có nghiệm không tầm thường khi $\det(A-k I_3) = 0$ hay $(a_{11} - k)^2(a_{33} -k) = 0$, ($I_3$ là ma trận đơn vị cấp 3).

Khi $k = a_{11}$, ta có điểm bất động có toạ độ $(x_1: x_2: 0)$, tức là những điểm nằm trên trục thấu xạ s.

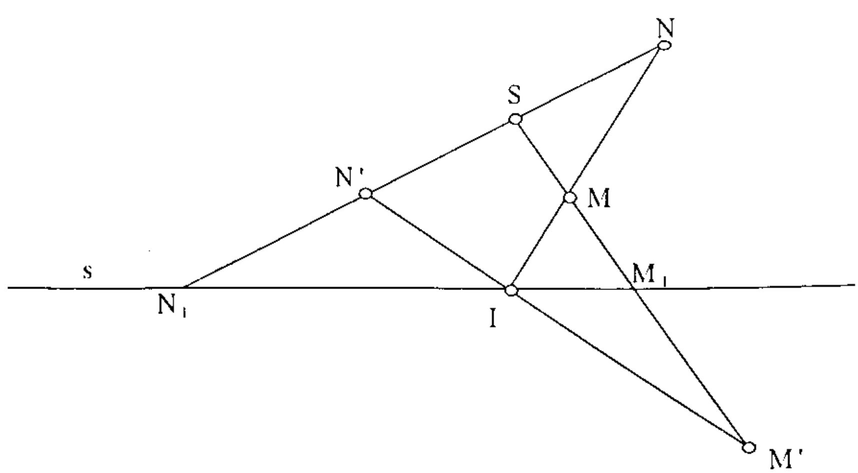
Khi $k = a_{33}$, ta tìm thấy điểm bất động là $S(a_{13} : a_{23} : a_{33}- a_{11})$. Ta chứng minh rằng điểm S là tâm thấu xạ. Thật vậy, nếu kí hiệu (S) là ma trận cột toạ độ của điểm S thì biểu thức (2) có thể viết dưới dạng: $k(X') = a_{11}.(X) + x_3.(S)$ (*), trong đó (X) và (X') lần lượt là ma trận cột toạ độ của điểm X và X' = f(X). Khi đó đẳng thức (*) chứng tỏ rằng nếu X không trùng S thì điểm X' nằm trên đường thẳng SX, và vì S là điểm bất động nên đường thẳng SX biến thành đường thẳng SX' trùng với SX, vậy SX biến thành chính nó.

Hai loại thấu xạ – Cách dựng ảnh của một điểm qua phép thấu xạ.

Phép thấu xạ f được gọi là *phép thấu xạ loại 1* nếu tâm thấu xạ không nằm trên trục thấu xạ và được gọi là *phép thấu xạ loại 2* nếu tâm thấu xạ nằm trên trục thấu xạ.

Sau đây ta chứng tỏ rằng một phép thấu xạ f được xác định nếu cho biết trục thấu xạ s, tâm thấu xạ S và biết một cặp điểm M, M' = f(M), với M không trùng S và không nằm trên s (cố nhiên ba điểm S, M, M' phải thẳng hàng). Thật vậy, khi đã biết như thế thì ta có thể xác định ảnh N' của một điểm N bất kì như sau:

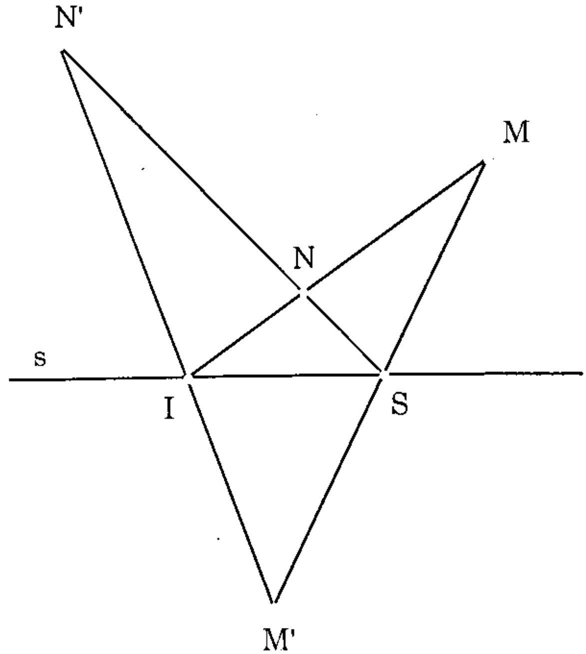
- Nếu f là phép thấu xạ loại 1: Gọi I là giao điểm của đường thẳng MN với trục s (*h.42*). Khi đó đường thẳng MN biến thành đường thẳng IM' còn đường thẳng SN biến thành chính nó. Suy ra



Hình 42

điểm N’ chính là giao điểm của hai đường thẳng IM’ và SN. (Cố nhiên có thể làm như vậy khi N không nằm trên SM, còn trong trường hợp N nằm trên SM thì ta lấy điểm P không nằm trên SM và dựng ảnh P’ của nó, sau đó dùng cặp điểm P, P’ thay cho cặp điểm M, M’ để dựng ảnh N’ của N).

– Nếu f là phép thấu xạ loại 2, ta cũng làm tương tự (*h.43*).



Hình 43

Tỉ số thấu xạ của phép thấu xạ loại 1

Cho f là phép thấu xạ loại 1 có trục thấu xạ s và tâm thấu xạ S. Với điểm M không nằm trên s và không trùng với S và M’ = f(M), ta kí hiệu $M_1 = SM \cap s$.

Định lí: *Với các kí hiệu như trên thì tỉ số kép (S, M_1, M, M’) không phụ thuộc vào việc chọn điểm M. Tỉ số đó gọi là tỉ số thấu xạ của phép thấu xạ f.*

Thật vậy, trên hình vẽ 43, ta thấy tỉ số (S, M_1, M, M’) và (S, N_1, N, N’) bằng nhau vì cùng bằng tỉ số kép (IS, s, IM, IM’).

***Hệ quả**: Phép thấu xạ loại 1 (không phải phép đồng nhất) được xác định duy nhất khi cho biết tâm thấu xạ S, trục thấu xạ s và tỉ số thấu xạ λ ($\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$).*

1.4. Liên hệ giữa biến hình xạ ảnh và biến hình afin

a. Trên mặt phẳng xạ ảnh **P** cho đường thẳng Δ. Gọi f: $\mathbf{P} \to \mathbf{P}$ là một phép biến hình xạ ảnh bảo tồn đường thẳng Δ, tức là biến Δ thành chính nó. Khi đó $\mathbf{A} = \mathbf{P} \setminus \Delta$ là một mô hình của mặt phẳng afin, và f(**A**) = **A**, vậy nếu gọi f' là hạn chế của f trên **A** ($f' = f|_{\mathbf{A}}$) thì ta có ánh xạ f': $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$. Dưới đây ta chứng minh rằng f' là một phép biến hình afin của mặt phẳng afin **A**, và ta nói rằng *phép biến hình xạ ảnh f sinh ra phép biến hình afin f'*.

Trên **P** chọn một mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ sao cho $A_1, A_2 \in \Delta$. Giả sử đối với mục tiêu đó f có biểu thức toạ độ:

$$\begin{cases} kx'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ kx'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ kx'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Vì phương trình Δ là $x_3 = 0$, nên điều kiện "f biến Δ thành chính nó" có nghĩa là: nếu $x_3 = 0$ thì $x'_3 = 0$. Tức là phương trình thứ ba của hệ phương trình trên trở thành: $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 0$, với mọi x_1, x_2 không đồng thời bằng 0. Suy ra: $a_{31} = 0$, $a_{32} = 0$.

Vậy, biểu thức toạ độ của f là:

$$\begin{cases} kx'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ kx'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ kx'_3 = a_{33}x_3 \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó $a_{33} \neq 0$, vì ma trận của phép biến hình f phải có hạng 3.

Biểu thức toạ độ của f' cũng là (1) nhưng có thêm điều kiện $x_3 \neq 0$ và $x'_3 \neq 0$ (vì các điểm thuộc A phải có toạ độ $x_3 \neq 0$). Do đó ta có thể xem $x_3 = x'_3 = 1$. Cũng vì $a_{33} \neq 0$ nên ta cũng có thể xem $a_{33} = 1$ (bằng cách chia các a_{ij} cho a_{33}), khi đó k = 1. Vậy biểu thức toạ độ của f' là:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} \end{cases} \text{ với } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2)$$

Nếu xem **A** = **P**\Δlà mặt phẳng afin thì đối với mục tiêu afin sinh ra bởi mục tiêu xạ ảnh đã chọn, các điểm X, X' = f'(X) có các toạ độ afin là X = (x_1; x_2) và X' = (x'_1; x'_2) thoả mãn biểu thức (2), chứng tỏ rằng f' là một phép biến hình afin.

Tóm lại ta đã chứng minh rằng: mỗi phép biến hình xạ ảnh f của mặt phẳng **P**, bảo tồn đường thẳng Δ, sinh ra một phép biến hình afin của mặt phẳng afin **A** = **P**\ Δ.

Ngược lại cũng đúng: mọi phép biến hình afin f' của **A** đều sinh ra bởi một phép biến hình xạ ảnh của **P**, bảo tồn đường thẳng Δ.

Thật vậy, nếu phép biến đổi afin f' có biểu thức toạ độ (2) thì phép biến đổi xạ ảnh f sinh ra nó có biểu thức tọa độ là :

$$\begin{cases} kx'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ kx'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ kx'_3 = x_3 \end{cases}$$

b. Các phép biến hình afin sinh ra bởi các phép thấu xạ

Để minh hoạ cho những điều nói trên ta hãy xét xem nếu f là phép thấu xạ của mặt phẳng xạ ảnh **P** thì nó sinh ra những phép biến hình afin nào?

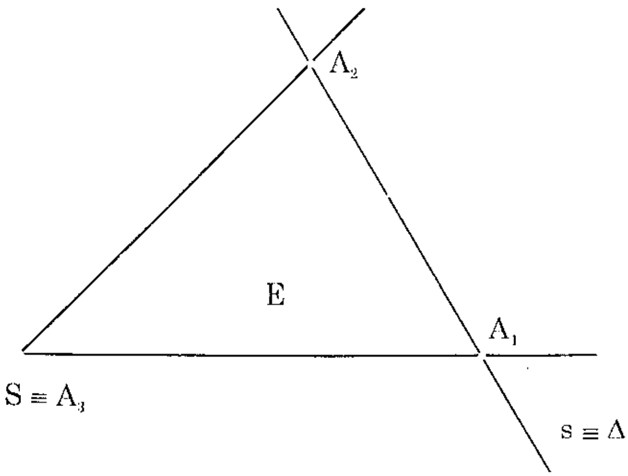
Trường hợp 1. Nếu f là phép thấu xạ có trục thấu xạ s trùng với đường thẳng Δ và có tâm thấu xạ S ∉ Δ (khi đó f biến Δ thành chính nó) *(h.44)*.

Ta chọn mục tiêu xạ ảnh {A_1, A_2, A_3; E} sao cho A_1, A_2 nằm trên Δ, A_3 trùng với S thì dễ thấy rằng biểu thức toạ độ của f đối với mục tiêu đó có dạng:

$$\begin{cases} kx'_1 = ax_1 \\ kx'_2 = ax_2 \\ kx'_3 = bx_3 \end{cases}$$

Bằng cách cho $x_3 = x'_3 = b = 1$ thì $k = 1$, ta được biểu thức toạ độ của f' là:

$$\begin{cases} x'_1 = ax_1 \\ x'_2 = ax_2 \end{cases}$$



Hình 44

Vậy f' là phép vị tự tâm A_3 (tức là tâm S) với tỉ số vị tự là a.

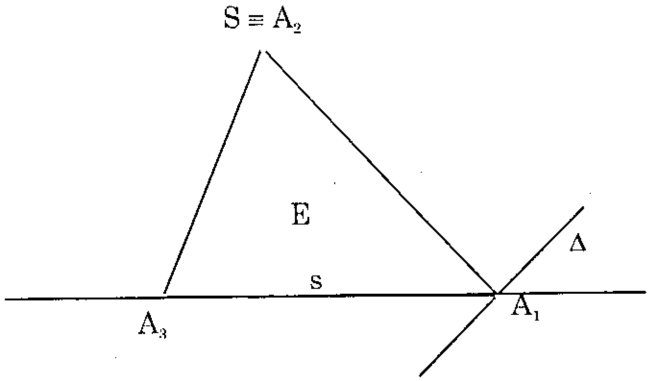
Trường hợp 2. Nếu f là phép thấu xạ có trục thấu xạ s không trùng Δ và có tâm thấu xạ S nằm trên Δ nhưng không nằm trên s (khi đó f biến Δ thành chính nó) (h.45)

Ta chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3 ; E\}$ sao cho A_1 là giao điểm của s và Δ, A_2 trùng với S và A_3 nằm trên s. Khi đó S biến thành chính nó và mọi điểm của s biến thành chính nó, nên dễ dàng tìm thấy biểu thức tọa độ của f là :

$$\begin{cases} kx'_1 = ax_1 \\ kx'_2 = bx_2 \\ kx'_3 = ax_3 \end{cases}$$

Bằng cách xem $x_3 = x'_3 = a = 1$ thì $k = 1$ và ta được biểu thức toạ độ của f' là:

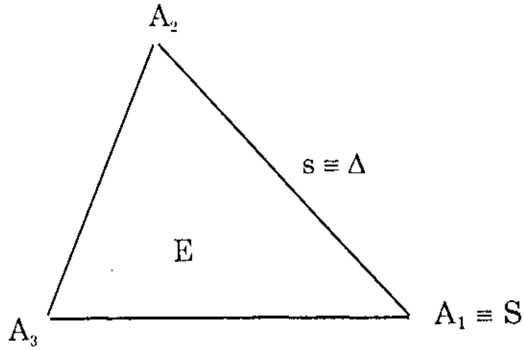
$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = bx_2 \end{cases}$$



Hình 45

Vậy f' là phép thấu xạ afin có trục thấu xạ là s, phương thấu xạ là vectơ $\vec{u}(0; 1)$ và tỉ số thấu xạ là b.

Trường hợp 3. Nếu f là phép thấu xạ có trục thấu xạ s trùng Δ và có tâm thấu xạ S nằm trên s (khi đó f biến Δ thành chính nó) (*h.46*).



Hình 46

Ta chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3 ; E\}$ sao cho A_1 trùng với S và A_2 nằm trên s. Khi đó biểu thức tọa độ của f là :

$$\begin{cases} kx_1' = a_{11}x_1 + a_{13}x_3 \\ kx_2' = a_{11}x_2 + a_{23}x_3 \\ kx_3' = a_{33}x_3 \end{cases}$$

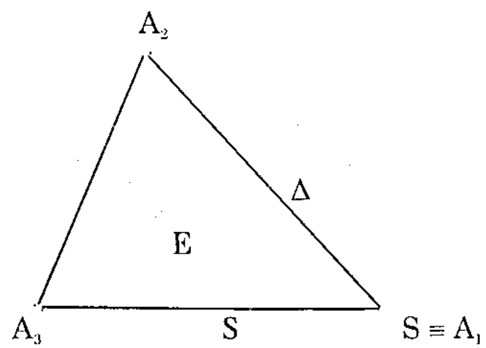
và tâm thấu xạ là $S = (a_{13} : a_{23} : a_{33} - a_{11})$.

Nhưng vì S trùng với $A_1 = (1 : 0 : 0)$ nên phải có $a_{23} = 0$ và $a_{33} = a_{11}$

Bằng cách cho $x_3 = x'_3 = a_{33} = 1$ thì $k = 1$ và ta được biểu thức toạ độ của f' là :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + a_{13} \\ x'_2 = x_2 \end{cases}$$

Vậy f' là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (a_{13} ; 0)$.



Hình 47

Trường hợp 4. Nếu f là phép thấu xạ có trục thấu xạ s không trùng với Δ và có tâm thấu xạ S là giao điểm của s và Δ (khi đó f biến Δ thành chính nó) *(h.47)*.

Ta chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3 ; E\}$ sao cho A_1 trùng với S, A_2 nằm trên Δ và A_3 nằm trên s. Khi đó dễ thấy biểu thức toạ độ của f là :

$$\begin{cases} kx'_1 = ax_1 + bx_2 \\ kx'_2 = \qquad cx_2 \\ kx'_3 = \qquad ax_3 \end{cases}$$

Bằng cách cho $x_3 = x'_3 = a = 1$ thì $k = 1$ và ta được biểu thức toạ độ của f' là :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + bx_2 \\ x'_2 = \qquad x_2 \end{cases}$$

Vậy f' là một phép thấu xạ trượt có trục s.

2. Hình học xạ ảnh

2.1. *Nhóm xạ ảnh, tương dương xạ ảnh*

Ta biết rằng tập hợp các biến hình xạ ảnh của mặt phẳng xạ ảnh **P** làm thành một nhóm được gọi là nhóm xạ ảnh của **P** và kí hiệu X(**P**). Mỗi tập hợp con của **P** được gọi là một hình.

Định nghĩa: *Hình H gọi là tương đương xạ ảnh với hình H' nếu có một phép biến hình xạ ảnh biến H thành H'.* Khi đó ta kí hiệu : $H \approx H'$

Từ định nghĩa trên và do X(**P**) là một nhóm ta suy ra :

a. Với bất kì hình H nào ta cũng có : $H \approx H$

b. Nếu $H \approx H'$ thì $H' \approx H$

c. Nếu $H \approx H'$ và $H' \approx H''$ thì $H \approx H''$

Ví dụ:

1. Hai hình bốn đỉnh toàn phần bất kì đều tương đương xạ ảnh.

Thật vậy, hình bốn dỉnh toàn phần gồm có bốn điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng nên có thể lấy làm một mục tiêu xạ ảnh, ba trong bốn điểm đó lấy làm ba đỉnh của mục tiêu, điểm còn lại lấy làm điểm đơn vị của mục tiêu. Như vậy hai hình bốn điểm toàn phần là hai mục tiêu xạ ảnh, và do đó, theo định lí về sự xác định của phép biến hình xạ ảnh, ta luôn có phép biến hình xạ ảnh biến mục tiêu này thành mục tiêu kia, tức là biến hình bốn đỉnh toàn phần này thành hình bốn đỉnh toàn phần kia.

2. Mọi hình gồm ba điểm thẳng hàng luôn luôn tương đương xạ ảnh.

Thật vậy, giả sử hình H gồm ba điểm thẳng hàng A, B, C và hình H' gồm ba điểm thẳng hàng A', B', C'. Ta lấy điểm D không nằm trên đường thẳng AB và điểm E nằm trên đường thẳng DC (nhưng khác với D và C). Ta được một hình bốn đỉnh toàn phần ABDE, mà $C = AB \cap DE$. Tương tự ta ta cũng có hình bốn dỉnh toàn phần A'B'D'E' mà $C' = A'B' \cap D'E'$. Theo 1) có phép biến hình xạ ảnh f biến A, B, D, E lần lượt thành A', B', C', D'. Hiển nhiên khi đó f biến C thành C', vậy H tương đương xạ ảnh với H'.

3. Hai hình gồm bốn điểm thẳng hàng là tương đương xạ ảnh khi và chỉ khi tỉ số kép của các hình đó bằng nhau.

Thật vậy giả sử hình H gồm bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D và hình H' gồm bốn điểm thẳng hàng A', B', C', D'. Theo trên có phép biến hình xạ ảnh f biến A, B, C lần lượt thành A', B', C'. Vì f bảo tồn tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng nên f biến D thành D' khi và chỉ khi (A, B, C, D) = (A', B', C', D')

Tương tự ta có :

4. Mọi hình bốn cạnh toàn phần đều tường đương xạ ảnh với nhau.

5. Mọi hình gồm ba đường thẳng đồng quy đều tương đương xạ ảnh với nhau.

6. Hai hình gồm bốn đường thẳng đồng quy tương đương xạ ảnh khi và chỉ khi tỉ số kép của các hình đó bằng nhau.

2.2. Bất biến xạ ảnh

Định nghĩa: *Một tính chất nào đó, hoặc một khái niệm nào đó của mặt phẳng xạ ảnh **P** được gọi là một bất biến xạ ảnh nếu nó được bảo tồn qua bất kì một phép biến hình xạ ảnh nào.*

Ví dụ:

1) Các tính chất sau dây đều là các bất biến xạ ảnh: *Tính chất thẳng hàng (hoặc không thẳng hàng) của ba điểm; Tính chất đồng quy (hoặc không đồng quy) của ba đường thẳng ; Tính chất "là một hàng điểm điều hoà"; Tính chất "là một chùm điều hoà"; Khái niệm về hình bốn đỉnh toàn phần; Khái niệm về hình bốn cạnh toàn phần. Khái niệm về hàng điểm và chùm đường thẳng; Khái niệm về phép biến hình xạ ảnh và các phép thấu xạ...*

2) Ta lấy mặt phẳng afin **A** rồi bổ sung đường thẳng vô tận để được mặt phẳng xạ ảnh $\overline{A}$. Trên tập **A** ta có những bất biến afin mà không phải là bất biến xạ ảnh, chẳng hạn các bất biến afin sau đây: *tính chất song song của hai đường thẳng; khái niệm trung điểm của đoạn thẳng; khái niệm về hình bình hành, hình thang...*

2.3. *Hình học xạ ảnh trên mặt phẳng*

Định nghĩa: *Tập hợp tất cả các bất biến xạ ảnh của mặt phẳng xạ ảnh **P** gọi là Hình học xạ ảnh trên mặt phẳng xạ ảnh **P**, còn gọi là hình học của nhóm X(**P**).*

2.4. *Quan hệ giữa hình học afin và hình học xạ ảnh*

Chúng ta đã biết rằng tập hợp các phép biến hình afin của mặt phẳng afin **A** làm thành một nhóm gọi là nhóm afin của **A**, kí hiệu là Af(**A**). Ta cũng đã định nghĩa hình học afin trên mặt phẳng là tập hợp tất cả các bất biến; Hình học afin còn được gọi là hình học của nhóm Af(**A**) gồm các phép afin của **A**.

Trên mặt phẳng xạ ảnh **P** lấy một đường thẳng Δ, và kí hiệu X_Δ(**P**) gồm các phép biến hình xạ ảnh f của P sao cho f(Δ) = (Δ) (tứclà f biến Δ thành chính nó). Hiển nhiên X_Δ(**P**) làm thành một nhóm và là nhóm con của nhóm X(**P**) gồm tất cả các phép biến hình xạ ảnh của **P**. Như đã biết tập hợp **A** = **P** \ Δ là một mặt phẳng afin và ta gọi Af(**A**) là nhóm afin của **A**. Ta lại biết rằng nếu f ∈ X_Δ(**P**) thì $f' = f|_A$ là một phép afin của **A**, tức là f'∈ Af(**A**) và ngược lại nếu f' ∈ Af(**A**) thì có duy nhất một f ∈ X_Δ(**P**) sao cho $f' = f|_A$. Như vậy nhóm Af(**A**) đẳng cấu với nhóm X_Δ (**P**). Bởi vậy ta có thể xem nhóm afin Af(**A**) của **A** là nhóm con của nhóm xạ ảnh X(**P**) của **P**.

Từ đó ta suy ra mọi bất biến xạ ảnh đều là bất biến afin. Thật vậy, vì bất biến xạ ảnh là tính chất hoặc khái niệm không thay đổi qua bất kì phép biến hình nào của nhóm X(**P**) nên nó cũng không thay đổi qua bất kì phép biến hình nào của nhóm con Af(**A**), nên đó cũng là bất biến afin của **A**.

Ngược lại có những bất biến afin không phải là bất biến xạ ảnh. Chẳng hạn khái niệm về hai đường thẳng song song là bất biến afin mà không phải là bất biến xạ ảnh. Thật vậy hai đường thẳng afin a, b gọi là song song nếu chúng nếu chúng có điểm chung I nằm trên đường thẳng vô tận Δ. Vì phép biến hình afin biến đường thẳng Δ thành chính nó nên nó biến điểm I thành điểm I' nằm trên Δ. Vậy hai đường thẳng a, b lần lượt biến thành hai đường thẳng a', b' đi qua I' và do đó a' và b' cũng song song. Nếu ta lấy một phép biến hình xạ ảnh bất kì thì nó có thể biến điểm I thành điểm I' không nằm trên Δ và do đó a, b biến thành a', b' cắt nhau tại I' nên không song song.

Như vậy tập hợp các bất biến xạ ảnh là tập hợp con của tập hợp các bất biến afin. Nói cách khác Hình học xạ ảnh là một bộ phận của Hình học afin.

3. Ánh xạ xạ ảnh giữa các hàng điểm và ánh xạ xạ ảnh giữa các chùm đường thẳng

3.1. Ánh xạ xạ ảnh giữa các hàng điểm

Ta thấy rằng tập hợp các điểm nằm trên một đường thẳng s được gọi là một *hàng điểm*, hàng điểm đó cũng được kí hiệu là s.

Định nghĩa: *Cho hai hàng điểm s và s' của mặt phẳng xạ ảnh P. Một song ánh f: s → s' được gọi là ánh xạ xạ ảnh từ hàng điểm s lên hàng điểm s' nếu nó không làm thay đổi tỉ số kép của bốn điểm bất kì trên s. Nói rõ ra : nếu A, B, C, D là bốn điểm nằm trên s và A', B', C', D' lần lượt là ảnh của chúng qua f thì (A, B, C, D) = (A', B', C', D').*

Định lí: Cho ba điểm phân biệt A, B, C thuộc hàng điểm s và ba điểm phân biệt A', B', C' thuộc hàng điểm s'. Khi đó có ánh xạ xạ ảnh duy nhất f : s → s' sao cho f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'.

Chứng minh: Ta gọi $\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a'}$, $\vec{b'}$, $\vec{c'}$ lần lượt là các vectơ đại diện cho các điểm A, B, C, A', B', C'. Vì ba điểm A, B, C thẳng hàng và ba điểm A', B', C' thẳng hàng nên có thể chọn các vectơ đó sao cho $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c'} = \vec{a'} + \vec{b'}$.

Ta xác định ánh xạ f: s → s' như sau:

Nếu M nằm trên đường thẳng s thì M được đại diện bởi vectơ $\vec{m}$, nhưng M nằm trên đường thẳng AB nên $\vec{m}$ biểu thị tuyến tính qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, tức là: $\vec{m} = m_1\vec{a} + m_2\vec{b}$. Khi đó ta lấy M' = f(M) là điểm có đại diện là vectơ: $\vec{m'} = m_1\vec{a'} + m_2\vec{b'}$. Rõ ràng với cách xác định đó ta có f(A) = A', f(B) = B' và f(C) = C'. Ta còn phải chứng minh f bảo tồn tỉ số kép của bốn điểm bất kì thuộc hàng điểm s.

Giả sử M, N, P, Q là bốn điểm nằm trên đường thẳng s có các vectơ đại diện lần lượt là: $\vec{m} = m_1\vec{a} + m_2\vec{b}$, $\vec{n} = n_1\vec{a} + n_2\vec{b}$, $\vec{p} = p_1\vec{a} + p_2\vec{b}$, $\vec{q} = q_1\vec{a} + q_2\vec{b}$. Từ hai đẳng thức đầu ta suy ra: $\vec{a} = \dfrac{n_2\vec{m} - m_2\vec{n}}{m_1n_2 - m_2n_1}$, $\vec{b} = \dfrac{n_1\vec{m} - m_1\vec{n}}{m_1n_2 - m_2n_1}$. Thay các giá trị này vào hai đẳng thức sau ta có :

$$\vec{p} = \frac{1}{m_1n_2 - m_2n_1}\left[(p_1n_2 - p_2n_1)\vec{m} + (p_1m_2 - p_2m_1)\vec{n}\right]$$

$$\vec{q} = \frac{1}{m_1n_2 - m_2n_1}\left[(q_1n_2 - q_2n_1)\vec{m} + (q_1m_2 - q_2m_1)\vec{n}\right].$$

Từ đó theo định nghĩa của tỉ số kép ta có:

$$(M, N, P, Q) = \frac{p_1m_2 - p_2m_1}{p_1n_2 - p_2n_1} : \frac{q_1m_2 - q_2m_1}{q_1n_2 - q_1n_2}$$

Theo định nghĩa của f thì các điểm M' = f(M), N' = f(N), p' = f(P), Q' = f(Q) có các vectơ đại diện là, $\vec{m'} = m_1\vec{a'} + m_2\vec{b'}$, $\vec{n'} = n_1\vec{a'} + n_2\vec{b'}$, $\vec{p}' = p_1\vec{a'} + p_2\vec{b'}$, $\vec{m'} = q_1\vec{a'} + q_2\vec{b'}$. Bởi vậy tính toán tương tự ta có

$$(M', N', P', Q') = \frac{p_1m_2 - p_2m_1}{p_1n_2 - p_2n_1} : \frac{q_1m_2 - q_2m_1}{q_1n_2 - q_1n_2}$$

và do đó ta có (M, N, P, Q) = (M', N', P', Q').

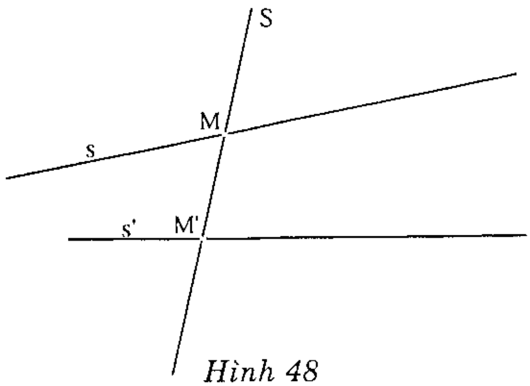
Ta chứng minh tính duy nhất của ánh xạ xạ ảnh f biến A, B, C thành A', B', C'. Giả sử có ánh xạ xạ ảnh g cũng biến các điểm A, B, C thuộc s thành các điểm A', B', C' thuộc s'. Lấy điểm bất kì M, có ảnh M' = f(M) và M" = g(M). Do f và g cùng là các ánh xạ xạ ảnh nên ta có: (A, B, C, M) = (A', B', C', M') và (A, B, C, M) = (A', B', C', M"). Suy ra M" = g(M) trùng với M' = f(M) với M bất kì.

Vậy g trùng với f.

3.2. Phép chiếu xuyên tâm

a. *Định nghĩa*

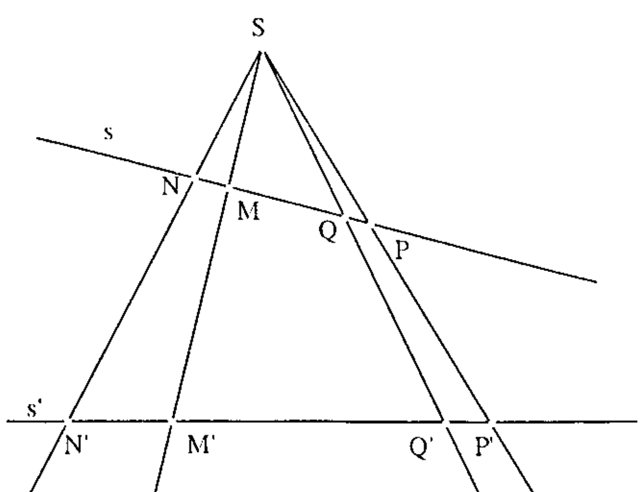
Cho hai đường thẳng phân biệt s, s' và một điểm S nằm ngoài hai đường thẳng đó. Ánh xạ g: s → s biến mỗi điểm M ∈ s thành điểm M' ∈ s' gọi là phép chiếu xuyên tâm nếu ba điểm M, M' và S thẳng hàng (h.48). Điểm S gọi là tâm của phép chiếu xuyên tâm g.



Hình 48

Định lí: *Phép chiếu xuyên tâm là một ánh xạ xạ ảnh*

Chứng minh: Thật vậy, với bốn điểm M, N, P, Q bất kì thuộc s và ảnh M', N', P', Q' của chúng, ta có: (M', N', P', Q') = (M, N, P, Q) vì cùng bằng tỉ số kép (SM, SN, SP, SQ) của bốn đường thẳng SM, SN, SP, SQ (*h.49*).



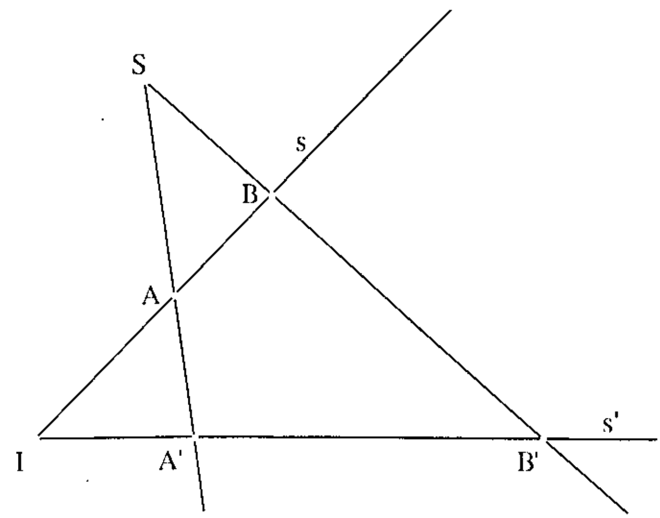
Hình 49

Chú ý rằng qua ánh xạ đó, giao điểm I của s và s' biến thành chính nó và được gọi là *điểm tự ứng*. Ta có định lí sau:

Định lí: *Điều kiện cần và đủ để ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm phân biệt trở thành một phép chiếu xuyên tâm là giao điểm I của chúng tự ứng.*

Điều kiện cần đã được nêu ở trên. Ta chứng minh điều kiện đủ.

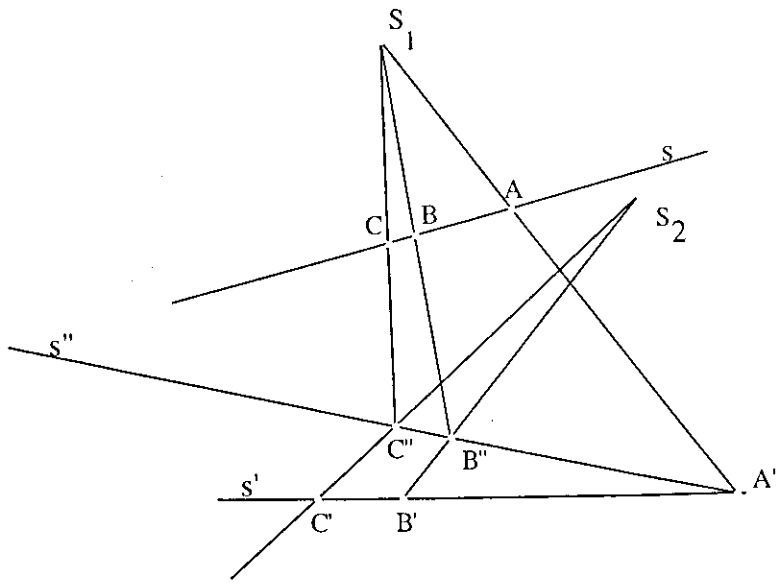
Gọi g: s $\rightarrow$ s là ánh xạ xạ ảnh mà g(I) = I, trong đó I là giao điểm của s và s'. Lấy hai điểm phân biệt A, B thuộc s, không trùng với I và A', B' là ảnh của chúng (h50). Gọi S = AB $\cap$ A'B' thì phép chiếu xuyên tâm f với tâm S cũng biến I, A, B thành I, A', B' như g. Do đó, theo sự xác định duy nhất của ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm, ta suy ra ánh xạ g cũng chính là phép chiếu xuyên tâm f.



Hình 50

b. Nếu ánh xạ xạ ảnh không phải là phép chiếu xuyên tâm thì có thể phân tích nó thành tích của các phép chiếu xuyên tâm. Cụ thể là ta có:

Định lí: *Mọi ánh xạ xạ ảnh g: s $\rightarrow$ s' giữa hai hàng điểm phân biệt s và s' là một phép chiếu xuyên tâm hoặc là tích của hai phép chiếu xuyên tâm.*



Hình 51

Chứng minh: *(h.51)*

Giả sử ánh xạ xạ ảnh g: s $\rightarrow$ s' không phải là phép chiếu xuyên tâm được xác định bởi ba điểm A, B, C thuộc s và ảnh A', B', C' của chúng. Lấy một đường thẳng s" qua A' nhưng không trùng với s', và một điểm S_1 trên đường thẳng AA' nhưng không nằm trên s và s'.

Gọi g_1: s $\rightarrow$ s" là phép chiếu xuyên tâm từ s lên s" có tâm là S_1. Gọi B", C" là ảnh của B, C qua g_1, ngoài ra hiển nhiên $g_1(A)$ = A'. Vì g_1^{-1} và g là các ánh xạ xạ ảnh nên đặt $g_2 = g \circ g_1^{-1}$: s" $\rightarrow$ s' cũng là ánh xạ xạ ảnh, và g_2 biến A' thành chính nó nên g_2 là một phép chiếu xuyên tâm, biến A", B", C" thành A', B', C'. Vì $g_2 = g \circ g_1^{-1}$ nên $g = g_2 \circ g_1$, tức g là tích của hai phép chiếu xuyên tâm.

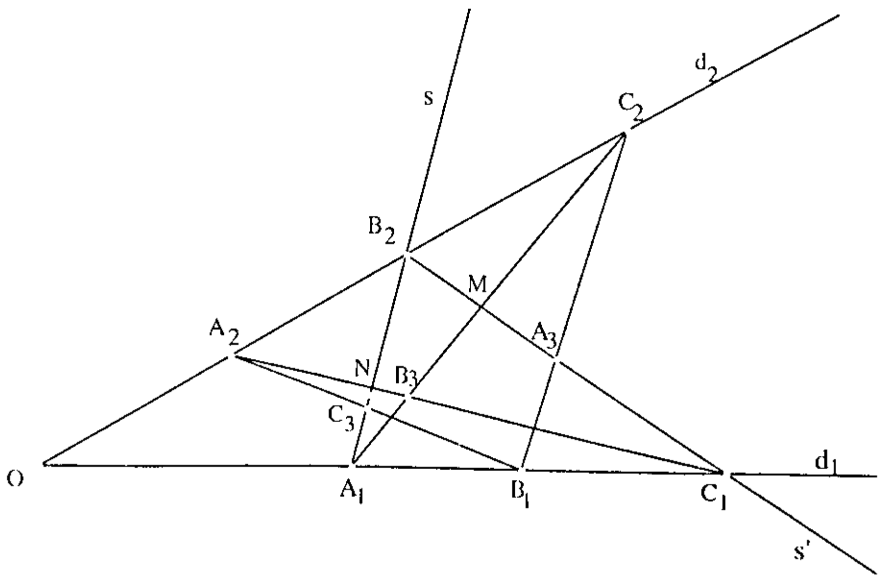
c) Sau đây là ví dụ về định lí Pap-puýt mà chứng minh nó có thể dùng các tính chất của phép chiếu xuyên tâm.

Định lí Pap-puýt: *Cho hai đường thẳng phân biệt d_1 và d_2 cắt nhau tại O. Trên d_1 cho ba điểm phân biệt A_1, B_1, C_1 khác O, trên d_2 cho ba điểm phân biệt A_2, B_2, C_2 khác O. Gọi A_3 là giao điểm của B_1C_2*

và B_2C_1, B_3 là giao điểm của C_1A_2 và C_2A_1, C_3 là giao điểm của A_1B_2 và A_2B_1. Khi đó, ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

Chứng minh: Gọi s là đường thẳng A_1B_2 và s' là đường thẳng C_1B_2. Gọi M là giao điểm của A_1C_2 và B_2C_1; N là giao điểm của A_1B_2 và A_2C_1. Xét các phép chiếu xuyên tâm h: $s \to d_1$ với tâm A_2, và g: $d_1 \to s'$, với tâm C_2. Đặt $f = g \circ h: s \to s'$.

Khi đó, dễ thấy rằng f biến B_2 thành B_2, nên ánh xạ xạ ảnh f là một phép chiếu xuyên tâm từ hàng điểm s đến hàng điểm s'. Ngoài cũng dễ thấy rằng f lần lượt biến ba điểm A_1, C_3, N lần lượt thành các điểm M, A_3, C_1. Vì vậy ba đường thẳng A_1M (cũng là C_2A_1), C_3A_3 và NC_1 (cũng là C_1A_2) và C_3A_3 đồng quy tại tâm của f. Vì C_2A_1 và C_1A_2 cắt nhau tại B_3 nên ta suy ra A_3, B_3, C_3 thẳng hàng (*h.52*).



Hình 52

3.3. *Ánh xạ xạ ảnh giữa các chùm đường thẳng*

Ta biết rằng tập hợp các đường thẳng đi qua một điểm S gọi là *chùm đường thẳng tâm* S, nó sẽ được kí hiệu là {S}. Đó là khái niệm đối ngẫu của khái niệm hàng điểm. Khái niệm sau đây là đối ngẫu của khái niệm *ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm*.

***Định nghĩa**: Một song ánh F : {S} → {S'} giữa hai chùm {S} và {S'} gọi là ánh xạ xạ ảnh nếu nó bảo tồn tỉ số kép của bốn đường thẳng của chùm tâm* (S). Nói rõ hơn: giả sử a, b, c, d là bốn đường thẳng của {S} và a', b', c', d' là ảnh của chúng thì (a, b, c, d) = (a', b', c', d').

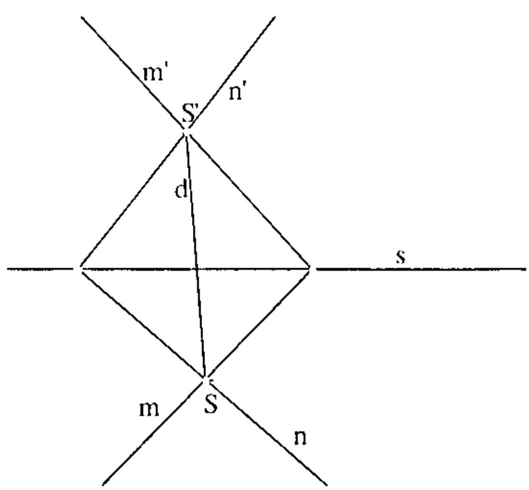
Từ nguyên tắc đối ngẫu ta có:

***Định lí:** Cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c thuộc chùm đường thẳng {S} và ba đường thẳng a', b', c' thuộc chùm đường thẳng {S'}. Khi đó có ánh xạ xạ ảnh duy nhất F: {S} → {S'} sao cho F(a) = a', F(b) = b', F(c) = c'.*

3.4. Phép chiếu xuyên trục

***Định nghĩa:** Cho hai chùm đường thẳng phân biệt {S} và {S'} và một đường thẳng s không đi qua S và S'. Ánh xạ F: {S} → {S'} biến mỗi đường thẳng m ∈ {S} thành đường thẳng m' ∈ {S'} gọi là phép chiếu xuyên trục với trục là s nếu m và m' cắt nhau tại một điểm nằm trên s. (h.53)*

Khái niệm phép chiếu xuyên trục là đối ngẫu của khái niệm phép chiếu xuyên tâm.



Hình 53

Dùng nguyên tắc đối ngẫu ta có các kết quả sau đây:

Định lí: *Điều kiện cần và đủ để ánh xạ xạ ảnh giữa hai chùm đường thẳng phân biệt {S}, {S'} trở ta thành một phép chiếu xuyên trục là đường thẳng SS' nối tâm hai chùm đó tự ứng (tức là SS' biến thành chính nó).*

Mọi ánh xạ xạ ảnh giữa hai chùm đường thẳng phân biệt là một phép chiếu xuyên trục hoặc là tích của hai phép chiếu xuyên trục.