BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP THỰC PHẨM

BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP 1

GIẢNG VIÊN: NGUYỄN QUỐC TIẾN

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
THÁNG 10/2011

CHƯƠNG 1. GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC

1.1 Giới hạn dãy số

1.1.1 Dãy số

Một dãy số thực là một ánh xạ x từ tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ đến tập các số thực R.

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto x(n) := x_n$$

$x(n)$ thường được ký hiệu là x_n gọi là số hạng thứ n của dãy. Một dãy số với các số hạng là x_n thường được viết gọn là (x_n).

Ví dụ 1): (x_n) với $x_n = \dfrac{1}{n}$. Khi đó: $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{1}{2},\ x_3 = \dfrac{1}{3} \ldots,\ x_n = \dfrac{1}{n}, \ldots$

2): (x_n) với $x_n = (-1)^n$. Khi đó: $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1 \ldots,\ x_n = (-1)^n, \ldots$

1.1.2 Giới hạn của dãy số

Dãy (x_n) được gọi có giới hạn là a nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : \forall n \ge n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Khi đó ta cũng nói dãy (x_n) hội tụ về a. Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ hoặc $x_n \to a$, $n \to \infty$. Nếu dãy (x_n) không hội tụ thì ta nói dãy (x_n) phân kỳ.

Ví dụ Cho dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{n}{n+1}$. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

Ta có

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$$

do đó khi muốn x_n gần 1 bao nhiêu cũng được ta đặt:

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

hay

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Chọn $n_0 > \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$ (phần nguyên của $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1$). Khi đó $\forall n \ge n_0$ thì x_n gần 1 bao nhiêu cũng được.

Hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

1.1.3 Định lí. Nếu dãy (x_n) hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất

Chứng minh. Giả sử $x_n \to a$ và $x_n \to b,\ a \neq b$ khi $n \to \infty$, chọn $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2} > 0$ theo định nghĩa về giới hạn của dãy tồn tại $n_{01}, n_{02} \in N$ sao cho:

$$\forall n \geq n_{01} \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ và } \forall n \geq n_{02} \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Đặt $n_0 = \max(n_{01}, n_{02})$. Khi đó với $n \geq n_0$ ta có:

$$|a-b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$$

suy ra $|a-b| < \dfrac{|a-b|}{2}$. Điều này vô lí. Vậy $a = b$.

1.1.4 Định lí . Cho ba dãy $(x_n), (y_n), (z_n)$. Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in N$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Chứng minh. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ nên $\exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0 \Rightarrow (|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |z_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$ do đó

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |y_n - a| \leq |x_n - a| + |z_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Cho $x_0 \in R$, ε-lân cận của x_0 là khoảng số thực có dạng $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha), \alpha > 0$.

1.2 Giới hạn của hàm số

1.2.1 Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận của x_0 (có thể trừ tại x_0). Số L được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x dần đến x_0 nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

và được kí hiệu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \text{ hay } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0.$$

Giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x dần đến x_0 còn có thể định nghĩa thông qua giới hạn của dãy số như sau:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n) : x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to L$$

1.2.2 Giới hạn một phía

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(\alpha, x_0]$ (có thể trừ tại x_0). Số L_1 được gọi là *giới hạn trái* của hàm số $f(x)$ khi x dần đến x_0 ($x \in (\alpha, x_0]$)nếu:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (\alpha, x_0] : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon)$. Kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$ hay $f(x) \to L_1$ khi $x \to x_0^-$.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $[x_0, \beta)$ (có thể trừ tại x_0). Số L_2 được gọi là *giới hạn phải* của hàm số $f(x)$ khi x dần đến x_0 ($x \in [x_0, \beta)$) nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [x_0, \beta) : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon).$$

Kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$ hay $f(x) \to L_2$ khi $x \to x_0^+$.

1.2.3 Định lí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Ví dụ Chứng minh $\lim\limits_{x \to 1}(2x+3) = 5$

Ta có $\forall \varepsilon > 0$, $|f(x) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x + 3 - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ khi đó $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0 : |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{x \to 1}(2x+3) = 5$

Ví dụ Chứng minh $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 - 16}{x - 2} = 16$

Ta có

$$\left|\frac{4x^2 - 16}{x - 2} - 16\right| = \left|\frac{4(x^2 - 4)}{x - 2} - 16\right| = |4(x+2) - 16| = 4|x - 2| \ \forall \varepsilon > 0, 4|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (x \neq 2)$$

Vậy $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{4} > 0, x \neq 2, |x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \left|\dfrac{4x^2 - 16}{x - 2} - 16\right| < \varepsilon$

1.2.4 Giới hạn vô tận- Giới hạn ở vô cực

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận của x_0 trừ tại x_0. Hàm số $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi x dần đến x_0 nếu với mọi $M > 0$ lớn tùy ý tồn tại

$\delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi x dần đến x_0 nếu với mọi $M > 0$ lớn tùy ý tồn tại

$\delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$. Kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Hàm số $f(x)$ được gọi là có giới hạn L khi x dần đến $+\infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tùy ý tồn tại

$M > 0: \forall x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Kí hiệu $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là có giới hạn L khi x dần đến $-\infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tùy ý tồn tại $M > 0: \forall x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Kí hiệu $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

Ví dụ Chứng minh $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

Ta có $\left|1+\frac{1}{x}-1\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} = M$

Khi $x \to +\infty \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$. Chọn $M = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x > M \Rightarrow \left|1+\frac{1}{x}-1\right| < \varepsilon$

Khi $x \to -\infty \Rightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon}$. Chọn $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow x < -M \Rightarrow \left|1+\frac{1}{x}-1\right| < \varepsilon$

1.2.5 Định lí

Cho $f(x)$, $u(x)$, $v(x)$ xác định trong một lân cận của x_0 có thể trừ tại x_0.

Nếu $u(x) \le f(x) \le v(x)$ với mọi x thuộc lân cận đó và $\lim_{x\to x_0} u(x) = \lim_{x\to x_0} v(x) = L$ thì

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

Vidụ Chứng minh $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Thật vậy $\forall x: 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ ta có bất đẳng thức $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, mà $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ suy ra $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

1.2.6 Một số tính chất của giới hạn hàm số

i) Nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ thì giới hạn đó là duy nhất

ii) $\lim_{x\to x_0} C = C$ (C : hằng số)

iii) Nếu $f(x) \le g(x), \forall x$ thuộc một lân cận nào đó của x_0 hoặc ở vô cực thì

$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$ (nếu các giới hạn này tồn tại).

iv) Nếu $f(x) \le g(x) \le h(x), \forall x$ thuộc một lân cận nào đó của x_0 hoặc ở vô cực và

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L = \lim_{x\to x_0} h(x)$ thì $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$

v) Giả sử các hàm số $f(x), g(x)$ có giới hạn khi $x \to x_0$ khi đó ta có các kết quả sau :

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_o} kf(x) = k\lim_{x\to x_o} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_o} f(x).g(x) = \lim_{x\to x_o} f(x).\lim_{x\to x_o} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}, \left(\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0\right)$$

1.3 Vô cùng bé-vô cùng lớn

Giả sử ta xét các hàm trong cùng một quá trình, chẳng hạn khi $x \to x_o$. (Những kết quả đạt được vẫn đúng trong một quá trình khác)

1.3.1 Vô cùng bé.

Hàm $\alpha(x)$ được gọi là một vô cùng bé (VCB) trong quá trình $x \to x_o$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$

Ví dụ $\sin x,\ tgx,\ 1-\cos x$ là những VCB khi $x \to 0$, còn $\dfrac{x+1}{x^2+2}$ là VCB khi $x \to \infty$

1.3.2 So sánh hai VCB

Cho $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB trong một quá trình nào đó (chẳng hạn khi $x \to x_o$). Khi đó tốc độ tiến về 0 của chúng đôi khi có ý nghĩa quan trọng. Cụ thể ta có các định nghĩa:

Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn VCB $\beta(x)$ trong quá trình đó ($\alpha(x)$ dần tới 0 nhanh hơn $\beta(x)$ khi $x \to x_o$)

Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = L \neq 0$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB ngang cấp trong quá trình đó ($\alpha(x)$ và $\beta(x)$ dần tới 0 ngang nhau khi $x \to x_o$.

Đặc biệt khi $L = 1$ ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương, kí hiệu là $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Ví dụ Một số VCB tương đương cơ bản khi $x \to 0$

$\sin x \sim x$; $tgx \sim x$; $\arcsin x \sim x$; $arctgx \sim x$; $1-\cos ax \sim \dfrac{(ax)^2}{2}$ $\log_a(1+x) \sim \dfrac{1}{\ln a}x$;

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$; $\ln(1+x) \sim x$; $a^x - 1 \sim x\ln a$; $e^x - 1 \sim x$;

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_p x^p \sim a_p x^p$, $(n \geq p, a_p \neq 0)$

Sinh viên có thể tự kiểm tra các tương đương này (xem như bài tập)

Ví dụ So sánh cấp của các VCB:

$\alpha(x) = \sin x - tgx;\ \beta(x) = 1-\cos x$, khi $x \to 0$

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-tgx}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1-\dfrac{1}{\cos x}\right)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=0$$

Do đó, $\alpha(x)$ là VCB cấp cao hơn $\beta(x)$

Ví dụ So sánh cấp của các VCB: $\alpha(x)=1-\cos x,\ \beta(x)=x^2,\ x\to 0$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\neq 0$

Do đó, $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng cấp.

1.3.3 Quy tắc ngắt bỏ VCB cấp cao

i) Nếu $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ và $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ trong cùng một quá trình thì trong quá trình ấy

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

ii) Cho $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB trong một quá trình và $\alpha(x)$ có cấp cao hơn $\beta(x)$. Khi đó $\alpha(x)+\beta(x)\sim\beta(x)$.

Từ hai kết quả trên ta suy ra quy tắc ngắt bỏ VCB cấp cao:

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB trong một quá trình nào đó. $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ đều là tổng của nhiều VCB . Khi đó giới hạn của tỉ số $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ bằng giới hạn của tỉ số hai VCB cấp thấp nhất trong $\alpha(x)$ và $\beta(x)$.

Ví dụ Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3\sin^2 x+4\sin^3 x}{5x+x^3+x^8}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3\sin^2 x+4\sin^3 x}{5x+x^3+x^8}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{5x}=\dfrac{1}{5}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

Khi $x\to 0$ ta có $\sqrt{1+x}-1=(1+x)^{\frac{1}{2}}-1\sim\dfrac{1}{2}x$; $\sqrt[3]{1+x}-1=(1+x)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}x$

Suy ra $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\sim\dfrac{3}{2}$. Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\dfrac{3}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx+\sin x}{x}$

Khi $x\to 0$, ta có:

$\frac{tgx+\sin x}{x} \sim \frac{x+x}{x} \to 2$ khi $x \to 0$. Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx+\sin x}{x} = 2$

4) Tính $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x+\sin^3 x}{x^3}$.

Ta có

$$tgx-\sin x = \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x} \sim \frac{x.\frac{1}{2}x^2}{1} \sim \frac{1}{2}x^3 \text{ khi } x\to 0$$

Do đó $tgx-\sin x+\sin^3 x \sim \frac{1}{2}x^3 + x^3 \sim \frac{3}{2}x^3$ khi $x \to 0$

Suy ra $\frac{tgx-\sin x+\sin^3 x}{x^3} \sim \frac{\frac{3}{2}x^3}{x^3} \to \frac{3}{2}$ khi $x\to 0$

Vậy $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{tgx-\sin x+\sin^3 x}{x^3} = \frac{3}{2}$

1.3.4 Vô cùng lớn.

Hàm $f(x)$ được gọi là một vô cùng lớn (VCL) trong một quá trình nào đó nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

Ví dụ $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sin x}$, $\cot gx$ là những VCL khi $x\to 0$ còn x^2, $2x+1$ là những VCL khi $x\to\infty$

1.3.5 So sánh hai VCL

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL trong một quá trình nào đó (chẳng hạn khi $x\to x_o$). Khi đó

nếu $\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì ta nói $f(x)$ là VCL cấp (bậc) cao hơn $g(x)$ (theo nghĩa $f(x)$ tiến tới ∞ nhanh hơn $g(x)$). Nếu $\lim\frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL ngang cấp trong quá trình đó ($\alpha(x)$ và $\beta(x)$ dần tới ∞ ngang nhau). Đặc biệt khi $L=1$ ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCL tương đương, kí hiệu là $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Ví dụ

1) So sánh cấp của các VCL $f(x)=x^3+2,\ g(x)=\sqrt{x};\ x\to+\infty$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+2}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$

Do đó $f(x)$ là một VCL có cấp cao hơn $g(x)$

2) So sánh cấp của các VCL: $f(x)=\sqrt[3]{x^6+2x+1}$ và $g(x)=\sqrt[4]{2x^8+4x^2-2x+1}$ khi $x\to+\infty$

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6+2x+1}}{\sqrt[4]{2x^8+4x^2-2x+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^6}}}{\sqrt[4]{2+\frac{4}{x^6}-\frac{2}{x^7}+\frac{1}{x^8}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Do đó, $f(x)=\sqrt[3]{x^6+2x+1}$ và $g(x)=\sqrt[4]{2x^8+4x^2-2x+1}$ là hai VCL cùng cấp

1.3.6 Qui tắc ngắt bỏ VCL cấp thấp

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL trong một quá trình nào đó, (chẳng hạn $x\to\infty$) và $f(x)\sim f_1(x)$, $g(x)\sim g_1(x)$. Khi đó trong cùng một quá trình ấy

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Từ đó ta rút ra quy tắc sau:

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL trong quá trình nào đó. $f(x)$ và $g(x)$ đều là tổng của nhiều VCL. Khi đó giới hạn của tỉ số $\frac{f(x)}{g(x)}$ bằng giới hạn của tỉ số hai VCL cấp cao nhất trong $f(x)$ và $g(x)$.

Ví dụ $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-x^3+4x-1}{2x^4-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{2x^4}=\frac{3}{2}$

1.4 Hàm số liên tục

1.4.1 Các định nghĩa

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục tại $x_o\in D$ nếu $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Khi đó x_0 gọi là điểm liên tục của hàm $f(x)$.

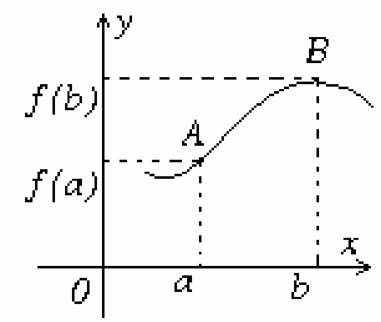
Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên (a,b) nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc (a,b)

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục bên trái (bên phải) $x_0\in D$ nếu

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)\ \left(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)\right).$$

Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục trên $[a,b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên (a,b) và liên tục bên phải tại a, bên trái tại b.

Nhận xét: $f(x)$ liên tục tại $x_0 \in D$ khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục bên phải và bên trái tại x_0. Nếu hàm số sơ cấp $f(x)$ có miền xác định là D thì $f(x)$ liên tục trên D. Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì đồ thị của nó là một đường nối liền từ điểm $A(a, f(a))$ đến điểm $B(b, f(b))$.



1.4.2 Tính chất của hàm số liên tục

Giả sử $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên $[a,b]$. Khi đó:

i) $f(x)+g(x)$ và $f(x)g(x)$ liên tục trên $[a,b]$, nếu $g(x)\neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trên $[a,b]$.

ii) $|f(x)|$ liên tục trên $[a,b]$.

iii) Nếu $u(x)$ liên tục tại x_0 và $f(u)$ liên tục tại $u_0 = u(x_0)$ thì hàm $f_0u(x)$ liên tục tại x_0.

iv) $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì đạt giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất trên đoạn đó.

1.4.3 Điểm gián đoạn

Nếu $f(x)$ không liên tục tại $x_0 \in D$ thì ta nói $f(x)$ gián đoạn tại x_0 và điểm x_0 gọi là điểm gián đoạn.

Hàm $f(x)$ gián đoạn tai x_0 nhưng tồn tại giới hạn của $f(x)$ tại x_0^-, x_0^+ thì x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 1. Các điểm gián đoạn khác gọi là điểm gián đoạn loại 2.

Ví dụ Xét tính liên tục của hàm

(1) $$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \dfrac{\sin 2x}{2}, & x\neq 0\end{cases}$$

Ta có

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2 \neq f(0) = 1.$$

Vậy $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$,và $x=0$ là điểm gián đoạn loại 1

(2) $$f(x)=\begin{cases}1+x, & x\succ 0\\ -1+x, & x\prec 0\end{cases}$$

Hàm số gián đoạn tại $x = 0$ và

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

nên $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1

(3) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$, có điểm gián đoạn tại $x_0 = 2$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

Suy ra $x_0 = 2$ là điểm gián đoạn loại 2.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

Hàm số

Câu 1. Tìm miền xác định của hàm số

a) $y = \ln\sqrt{1-x^2}$; ds $(-1;1)$

b) $y = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; ds $(1;+\infty)$

c) $\dfrac{1-x}{x^2+x+1}$; ds $(-\infty;+\infty)$

d) e^{x^2-x+1}; ds $(-\infty;+\infty)$

c) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$; ds $(-3;1)$

Câu 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = |x|$

b) $y = \sqrt{x^2+4x+4}$

c) $y = |x| + |x-2|$

d) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

e) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Giới hạn hàm số

Câu 1. Tính giới hạn của các dãy số sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2-n} - \sqrt{n})$; ds $\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n}}{1+n^2}$;ds 1

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n+4^n}{2^n+7^n}$;ds 0

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n.(n+1)}\right)$

Câu 2. Tính giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sqrt{x}+2x+1}{2x^2\sqrt{x}+3}$;ds $1/2$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$;ds -1

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$;ds 1/6

e) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x^3-a^3}$;ds $\dfrac{4}{3}a$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2-2x})$; ds : không tồn tại giới hạn

g) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x - \sqrt{x^2-2x})$;ds ∞

Câu 3. Tính giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{x\sin x\tan^2 x}$; ds 1/4

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$; ds 1

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(2x+1)}$; ds 3/2

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$; ds 1/2

Câu 4. Tính giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\cot x}$; ds e

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$; ds 0

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x$; ds 0

d) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{2(x-1)}}$; ds $\sqrt{e}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin^3 x+\tan^5 x}{3x+x^2+9x^6}$;ds 1/3

Hàm số liên tục

Câu 1. Tìm a để các hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng.

a) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$; ds 2

b) $y=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & (x\neq 0)\\ \dfrac{a}{2}+2x^2 & (x=0)\end{cases}$; ds 1

c) $y=\begin{cases}x\ln x^2 & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$

Câu 2. Tìm các điểm gián đoạn của hàm số và chúng thuộc loại nào

a) $y=\dfrac{x-1}{2x+5}$

b) $y=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

c) $y=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$

$y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$

CHƯƠNG 2. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

2.1 Đạo hàm

2.1.1 Đạo hàm tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định tại x_0 và tại lân cận x_0. Khi đó nếu tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ có giới hạn khi $x \to x_0$ thì ta nói $f(x)$ khả vi tại x_0 hay $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại x_0. Ký hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$. Vậy

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Nếu đặt

$$\Delta x = x - x_0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \Delta x \\ x \to x_0 \Rightarrow \Delta x \to 0 \end{cases}$$

Lúc đó

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng (a,b) nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm $x_0 \in (a,b)$. Khi đó đạo hàm của hàm số $f(x)$ là một hàm số xác định trên (a,b). Cho nên ký hiệu của đạo hàm của $y = f(x)$ trên (a,b) là $f'(x)$ hoặc y'

Vậy $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Ví dụ Xét hàm số $y = f(x) = x^2$

Ta có miền xác định của hàm số là R. Đạo hàm của hàm số trên tập xác định là

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x - x)(x + \Delta x + x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Do đó $y' = f'(x) = (x^2)' = 2x$

2.1.2 Đạo hàm trái, đạo hàm phải

Đạo hàm trái của $f(x)$ tại x_0 là: $f'(x_0^-) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Đạo hàm phải của $f(x)$ tại x_0 là $f'(x_0^+) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Nhận xét:

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$. Khi đó $f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$. Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.

Ví dụ Xét tính liên tục và tính có đạo hàm của hàm số $f(x) = |x|$ tại $x_0 = 0$

Xét tính liên tục:

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} |x| = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = 0 = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x) = 0 = f(0) \end{cases}$

Suy ra $f(x)$ liên tục bên trái và liên tục bên phải tại $x_0 = 0$. Do đó $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Xét sự tồn tại $f'(0)$:

Ta có:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} -\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = -1 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1 = f'(0^+) \end{cases}$$

Do đó $f(x)$ không có đạo hàm tại $x_0 = 0$

Vậy hàm số $f(x) = |x|$ liên tục nhưng không có đạo hàm tại $x_0 = 0$

2.1.3 Ý nghĩa hình học của đạo hàm tại một điểm

Cho đường cong $(C): y = f(x)$. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0, y_0) \in (C)$ bằng đạo hàm của $f(x)$ tại điểm x_0 và phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại $M(x_0, y_0)$ là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Minh họa hình 2.1

Sau đây là bảng các đạo hàm cơ bản

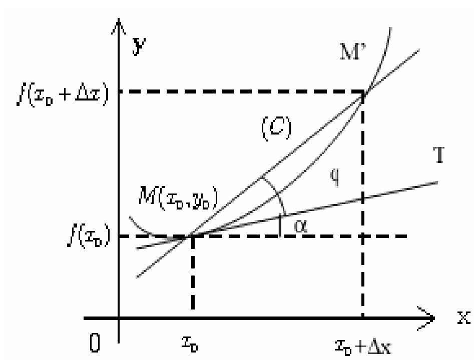
$C' = 0$ $\quad$ $(C = const)$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in R \Rightarrow \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$

$(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

$(e)' = e^x$



Hình 2.1

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$

$(\cot gx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2 x)$

2.1.4 Các quy tắc tính đạo hàm

Nếu hai hàm $u(x)$ và $v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thì tổng, hiệu, tích, thương của chúng cũng có đạo hàm tại điểm x và:

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku', \forall k \in R$

$(u.v)' = u'v + uv'$

$(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$

2.1.5 Đạo hàm của hàm hợp

Xét hàm hợp $y = y\left[u(x)\right]$ nếu hàm $y = y(u)$ có đạo hàm đối với u và $u = u(x)$ có đạo hàm đối với x thì $y = y\left[u(x)\right]$ có đạo hàm đối với x và $y'(x) = y'(u).u'(x)$

Ví dụ Xét hàm số $y = (1+x^3)^{10}$

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= 10(1+x^3)^9(1+x^3)' \\ &= 10(1+x^3)^9 3x^2 = 30x^2(1+x^3)^9 \end{aligned}$$

Ví dụ Giả sử $\varphi(x)$, $\psi(x)$ có đạo hàm với mọi $x \in R$. Tính đạo hàm của hàm $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$

Đặt $u = \varphi^2(x) + \psi^2(x)$ khi đó $y = \sqrt{u}$

Ta có

$$\begin{aligned} y'(x) = y'(u).u'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{u}}\left(2\varphi(x)\varphi'(x) + 2\psi(x)\psi'(x)\right) \\ &= \frac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}} \end{aligned}$$

Ví dụ Tính các đạo hàm của hàm số sau: $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

Ta có $\ln y = x\ln(1 + \dfrac{1}{x})$

Lấy đạo hàm hai vế ta được: $\dfrac{y'}{y} = \ln(1 + \dfrac{1}{x}) - \dfrac{1}{x+1}$

Suy ra $y' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right]$

2.1.6 Đạo hàm của hàm ngược

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có hàm ngược là $x = f^{-1}(y)$, nếu y có đạo hàm tại x_0 và $y'(x_0) \neq 0$ thì hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ có đạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ và $x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}$

Ví dụ Tính đạo hàm của $y = f(x) = arctgx$

Ta có $y = arctgx \Rightarrow x = tgy \Rightarrow x'(y) = 1 + tg^2 y$.

Do đó: $y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

Tương tự ta tính được đạo hàm của các hàm số ngược:

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$; $(arc\cot gx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

2.1.7 Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $f'(x)$ được gọi là đạo hàm cấp một của $f(x)$. Nếu $f'(x)$ khả vi thì đạo hàm của $f'(x)$ được gọi là đạo hàm cấp hai của $f(x)$ và ký hiệu là $f''(x)$. Vậy $f''(x) = \left[f'(x)\right]'$

Tổng quát, đạo hàm của đạo hàm cấp $n-1$ của $f(x)$ được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$ ký hiệu $f^{(n)}(x)$ vậy $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$

Ví dụ Tìm đạo hàm cấp n của $y = f(x) = xe^x$

Ta có

$y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$y'' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$

...

Chứng minh bằng quy nạp ta đi đến kết quả sau $y^{(n)} = (n+x)e^x$

2.2 Vi phân

2.2.1 Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên (a,b) và $x \in (a,b)$, nếu hàm số $y = f(x)$ khả vi tại điểm x thì số gia của hàm số tại x có thể viết được dưới dạng

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

với $o(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$.

Biểu thức $f'(x).\Delta x$ được gọi là vi phân của $f(x)$ tại x. Ký hiệu: $df(x)$ hoặc $dy(x)$ tức là

$$df(x) = f'(x).\Delta x$$

Xét hàm $y = f(x) = x$ ta có $f'(x) = 1$ nên $df(x) = dx = 1.\Delta x = \Delta x$ từ đó ta có

$df(x) = f'(x).\Delta x = f'(x).dx$. Để ngắn gọn ta viết $df = f'(x).dx$

Giả sử $y = f(x), x = \varphi(t)$ là các hàm số khả vi, khi đó vi phân hàm $y = f\left[\varphi(t)\right]$ là

$df = (f\left[\varphi(t)\right])'dt = f'(x)x'(t)dt = f'(x)dx$. Vậy dạng vi phân của hàm $y = f(x)$ không thay đổi dù x là biến độc lập hay là x là hàm khả vi theo biến t. Tính chất này gọi là tính bất biến của dạng vi phân.

Ví dụ Tìm vi phân của hàm $y = \ln x$

Áp dụng định nghĩa dạng vi phân ta được $dy = d(\ln x) = \frac{dx}{x}$

2.2.2 Ứng dụng của vi phân để tính gần đúng

Cho hàm $y = f(x)$ khả vi tại x_0. Theo định nghĩa vi phân ta có số gia của hàm tại x_0 là :

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(x)$

Do đó khi Δx khá bé ta có công thức gần đúng.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$$

Ví dụ Tính gần đúng $\sqrt{122}$

Ta thấy $\sqrt{122} = \sqrt{121+1}$

Xét hàm $y = f(x) = \sqrt{x}$

Áp dụng công thức gần đúng $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$ suy ra

$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.\Delta x + \sqrt{x_0}$. Chọn $x_0 = 121,\ \Delta x = 1$ ta được

$\sqrt{122} = \frac{1}{2\sqrt{121}}.1 + \sqrt{121} = 0,0454 + 11 = 11,0454$

Ví dụ Tính gần đúng $\sin 29^o$

Ta thấy $\sin 29^0 = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right)$. Xét hàm $y = f(x) = \sin x$

Ta có $\sin(x_0 + \Delta x) \approx \cos x_0.\Delta x + \sin x_0$, áp dụng cho $x_0 = \frac{\pi}{6},\ \ \Delta x = -\frac{\pi}{180}$ ta được

$$\sin 29^o = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}.\left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\pi}{180} = 0,484$$

2.2.3 Vi phân cấp cao

Nếu hàm $y = f(x)$ khả vi trên (a,b) thì $df = f'(x)dx$ được gọi là vi phân cấp một của $f(x)$, nó là một hàm số của x trên (a,b) trong đó dx không đổi. Vi phân của vi phân cấp một gọi là vi phân cấp hai của hàm $f(x)$ trên (a,b) ký hiệu: $d^2 f$ tức là:

$$d^2 f = d(df) = d[f'(x)dx] = [f'(x)dx]'dx = f''(x)(dx)^2$$

Một cách tổng quát, vi phân của vi phân cấp $(n\text{-}1)$ của hàm $y = f(x)$ được gọi là vi phân cấp n của $f(x)$. Ký hiệu $d^n f$ tức là : $d^n f = f^{(n)}(x)(dx)^n$

Chú ý : Công thức $d^n f = f^{(n)}(x)(dx)^n$ chỉ đúng cho x là biến độc lập.

Ví dụ 4. Xét hàm $f(x) = x^3 + 2x + 1$

Ta có

$$df = (3x^2 + 2)dx; d^2 f = 6x(dx)^2; d^3 f = 6(dx)^3; d^4 f = 0$$

2.3 Ứng dụng đạo hàm

2.3.1 Định lí (Quy tắc L'Hospital).

Cho $f(x),\ g(x) \neq 0$ là hai hàm liên tục và khả vi tại lân cận x_0 (x_0 hữu hạn hoặc ∞). Giả sử $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = 0$ và $g'(x) \neq 0$ với mọi x thuộc lân cận x_0. Khi đó nếu

$\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Ví dụ Tính $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$ (dạng $\dfrac{0}{0}$)

Ta có: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(a^x - x^a)'}{(x-a)'} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x \ln a - ax^{a-1}}{1} = a^a \ln a - a^a$.

Vậy $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a} = a^a \ln a - a^a$

2.3.2 Định lí .

Cho $f(x),\ g(x) \neq 0$ là hai hàm liên tục và khả vi tại lân cận x_0. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \infty$ và $g'(x) \neq 0$, với mọi x thuộc lân cận x_0. Khi đó:

Nếu $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Ví dụ Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x}$ (dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$)

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$. Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

Chú ý : Khi x tiến tới một quá trình nào đó (chẳng hạn x tiến tới x_0), nếu $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ không tồn tại thì không kết luận được cho $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$. Nếu áp dụng quy tắc L'Hospital mà giới hạn vẫn còn dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ thì có thể áp dụng quy tắc L'Hospital một lần nữa và tiếp tục cho đến hết dạng vô định.

Ví dụ Tính $\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}$

Áp dụng liên tiếp hai lần quy tắc L'Hospital ta được

$$\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin\pi x}{2x-2}=\frac{-\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\frac{-\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{1}=\frac{\pi^2}{2}.$$

Vậy $\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}=\frac{\pi^2}{2}$

Ví dụ Tính $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}$

Áp dụng liên tiếp quy tắc L'Hospital ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{\cos x}=6$$

Vậy $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=6$

Đối với các dạng vô định $\infty-\infty$, $0.\infty$, 0^0, ∞^0 và 1^∞ ta phải đưa các dạng vô định đó về một trong hai dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ sau đó lại áp dụng quy tắc L'Hospital.

Ví dụ Tính $\lim_{x\to 0^+} x.\ln x$ (dạng $0.\infty$)

Ta biến đổi để đưa giới hạn về dạng $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+} x=0$$

Ví dụ Tính $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ (dạng ∞-∞)

Ta biến đổi giới hạn để đưa về dạng $\frac{0}{0}$ sau đó áp dụng liên tiếp quy tắc L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$$

Ví dụ Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln^3 x\right)$ (dạng ∞ - ∞)

Ta có: $x-\ln^3 x = x(1-\dfrac{\ln^3 x}{x})$ và

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln^2 x.\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}3\frac{\ln^2 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}6\frac{1}{x}=0$$

Vậy: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln^3 x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{\ln^3 x}{x}\right)=+\infty.1=+\infty$

Ví dụ Tính $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$ (dạng 0^0)

Ta có $x^{\sin x}=e^{\ln x^{\sin x}}=e^{\sin x\ln x}$. Do đó

$$\lim_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x}$$

Bây giờ ta đi tính $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x$ (dạng $0.\infty$)

$$\lim_{x\to0^+}\sin x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x\sin^2 x}{x^2\cos x}=0$$

Vậy $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x}=e^0=1$

Ví dụ Tính $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\ln x}$ (dạng 1^∞)

Ta có : $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(1+x-1)\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}$

mà $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$ (đã xét). Vậy $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\ln x}=e^0=1$

Ví dụ Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{2}{x}}$ (dạng ∞^0)

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}\ln x}=e^{2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^0=1$

2.3.3 Sự biến thiên của hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và có đạo hàm hữu hạn trên (a,b), khi đó ta có các kết quả sau :

Nếu $f(x)$ luôn tăng (giảm) trên $[a,b]$ thì $f'(x)\ge0,\forall x\in(a,b)$ ($f'(x)\le0,\forall x\in(a,b)$)

Nếu $f'(x)>0,\forall x\in(a,b)$ ($f'(x)<0,\forall x\in(a,b)$) thì trên $[a,b]$ hàm $f(x)$ đơn điệu tăng (giảm)

Việc chứng minh hai kết quả trên dựa vào định nghĩa hàm số tăng (giảm), định nghĩa đạo hàm và định lí Lagrange. Sinh viên tự chứng minh như bài tập.

Từ hai kết quả trên ta có nhận xét : Nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm đồng nhất bằng 0 trên $[a,b]$ thì $f(x)$ là hàm hằng trên $[a,b]$.

2.3.4 Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ theo tính chất của hàm số liên tục thì $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a,b]$. Nếu giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đạt được tại một điểm $x_0 \in (a,b)$ thì tại x_0 hàm sẽ có cực trị. Từ đó ta có phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ như sau :

Tìm các cực trị của $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$ và tính các giá trị cực trị. So sánh các giá trị cực trị với $f(a), f(b)$. Số lớn nhất trong các giá trị trên là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$, số bé nhất là giá trị bé nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$

Như vậy để tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$ trước tiên ta phải tìm các cực trị của hàm. Định lí Ferma cho phép ta giới hạn việc tìm cực trị tại những điểm x_0 mà $f'(x_0) = 0$ hoặc không tồn tại đạo hàm, các điểm x_0 như vậy gọi là các điểm tới hạn của $f(x)$.

Kết quả sau cho ta điều kiện đủ để một điểm tới hạn là cực trị của hàm số

2.3.5 Định lí .

Giả sử $f(x)$ liên tục trên một lân cận của x_0 có đạo hàm trong lân cận đó (có thể trừ x_0) và x_0 là điểm tới hạn của $f(x)$. Khi đó :

i) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0

ii) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0

iii) Nếu $f'(x)$ không đổi dấu khi x đi qua x_0 thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
y'		+	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	y_{max}	↘	y_{min}	↗	$+\infty$

Ví dụ Tìm cực trị của hàm số $y = f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$

Miền xác định của hàm số là R

Bảng xét dấu của đạo hàm : $y' = \dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$, với các điểm tới hạn là : $x = 0,\ x = \dfrac{2}{5}$

Ta có hàm số đạt cực đại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{2}{5}$

2.3.6 Định lí .

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi liên tục đến cấp hai trên (a,b), khi đó:

i) Nếu tại $x_0 \in (a,b), f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0

ii) Nếu tại $x_0 \in (a,b), f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0

Ví dụ Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt[3]{x(1-x)^2}$ trên [-1,1]

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{27}\dfrac{1-3x}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$, $f'(x)$ không xác định tại $x = 0,\ x = 1$

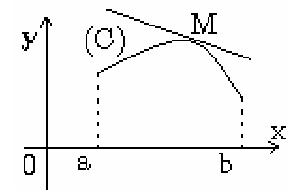
Như vậy trên [-1,1] $f(x)$ có ba điểm tới hạn $f(\frac{1}{3})=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(-1)=-\sqrt[3]{4}$ so sánh các giá trị ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ tại $x=\frac{1}{3}$, đạt giá trị nhỏ nhất $-\sqrt[3]{4}$ tại $x=-1$

2.3.7 Tính lồi, lõm và điểm uốn của đường cong

Giả sử hàm $f(x)$ khả vi trên khoảng (a,b) và có đồ thị trên (a,b) là cung đường cong (C)

Cung đường cong (C) được gọi là lồi trên (a,b) nếu mọi điểm của cung này đều nằm bên dưới tiếp tuyến bất kì của cung. (Hình 2.2)

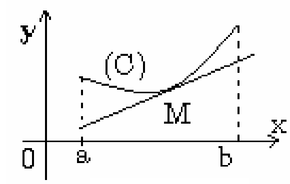
Cung đường cong (C) được gọi là lõm trên (a,b) nếu mọi điểm của cung này đều nằm bên trên tiếp tuyến bất kì của cung. Hình 2.3



Hình 2.2

Điểm phân chia giữa cung lồi và cung lõm kề nhau của một đường cong được gọi là điểm uốn của đường cong đó

Để xét tính lồi , lõm của đường cong ta có định lí sau:



Hình 2.3

2.3.8 Định lí .

Giả sử hàm $f(x)$ khả vi đến cấp hai trên khoảng (a,b). Khi đó

i) Nếu $f''(x)>0, \forall x\in(a,b)$ thì cung đường cong $f(x)$ lõm trên khoảng đó

ii) Nếu $f''(x)<0, \forall x\in(a,b)$ thì cung đường cong $f(x)$ lồi trên khoảng đó

Từ định lí 2.3 ta suy ra hệ quả sau đây :

Giả sử $f(x)$ liên tục tại x_0 khả vi đến cấp hai tại một lân cận của x_0 (có thể trừ tại x_0) và $f''(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0 thì điểm $(x_0, f(x_0))$ là điểm uốn của đường cong $f(x)$

Ví dụ Xét tính lồi lõm và điểm uốn của đường cong $y=e^{-x^2}$

Ta có

$$y'=-2xe^{-x^2};\ y''=4(x^2-\frac{1}{2})e^{-x^2}$$

$$y''=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

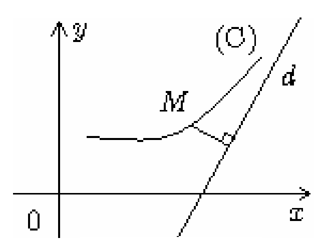
Bảng xét dấu của y''

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	

Như vậy: đường cong lồi trên khoảng $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, lõm trên các khoảng $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ và $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$. Các điểm uốn là : $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{e}}{e})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{e}}{e})$

2.3.9 Tiệm cận của hàm số

Đồ thị của hàm số $f(x)$ gọi là có nhánh vô cực nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Trong trường hợp đó đường thẳng d được gọi là đường tiệm cận của đường cong (C) của hàm $f(x)$ nếu khoảng cách từ điểm $M(x,y)\in(C)$ đến d dần đến 0 khi M chạy ra vô



Hình 2.4

tận trên (C). Hình 2.4

Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty\,(\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty);\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty)$ thì đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng của (C)

Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ thì đường thẳng $y=b$ là tiệm cận ngang của (C)

Nếu $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ thì $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của (C), trong trường hợp này

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\ b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$$

Ví dụ

1) Đường cong $y=f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=2$

2) Đường cong $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$ $\quad TXD: D=(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

Ta có :

$\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}=+\infty$: đường cong có tiệm cận đứng $x=2$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}=+\infty$: đường cong không có tiệm cận ngang

$$a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x-2}}=1$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-a_1x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})}=1$$

Vậy $y=x+1$ là một tiệm cận xiên của đường cong khi $x\to+\infty$

$$a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{\frac{x}{x-2}}=-1$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-a_2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+x\right)=-1$$

Vậy $y=-x-1$ là tiệm cận xiên thứ hai của đường cong khi $x\to-\infty$

Ví dụ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$

Ta có : $TXD=R\setminus\{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+4}{x^2}=\infty$: đường cong có tiệm cận đứng $x=0$

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+4}{x^2}=\infty$: đường cong không có tiệm cận ngang

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	$y_{min}=3$	↗	$+\infty$

$a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - ax\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+4}{x^2} - x\right] = 0$

đường cong có tiệm cận xiên $y = x$

$y' = 1 - \frac{8}{x^3}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

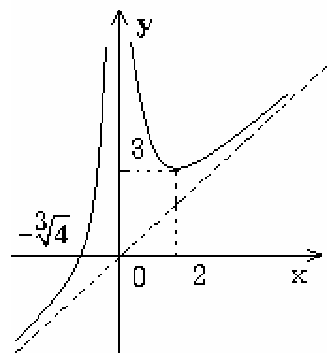
$y'' = \frac{24}{x^4} > 0$: đường cong luôn lõm.

Ta có bảng biến thiên

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{\min} = 3$

Giao điểm của đồ thi với trục hoành $(-\sqrt[3]{4}, 0)$

Vẽ đồ thị



BÀI TẬP CHƯƠNG II

Đạo hàm

Câu 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin^2 x$

b) $y = \cos(x^2 + 3x)$

c) $y = \ln(x^2 + 3x)$

d) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ tại $x = 2$; ds $\frac{5\sqrt{7}}{14}$

e) $y = e^{-\sin x}$ f) $y = x^x$ g) $y = x^{\sin x}$

Câu 2.

a) Cho $f(x) = \begin{cases} x^2, x \ge 1 \\ 2x - 1, x < 1 \end{cases}$. Tính $f'(1) = ?$;ds 2

b) Cho $f(x) = \begin{cases} x^2, x \le 1 \\ -x^2 + 4x + m, x > 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số có đạo hàm tại $x = 1$; ds -2

Câu 3: Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau

a) $y = \sin ax$ b) $y = \frac{1}{ax + b}$

c) $y = \sin^2 x$ d) $y = x \ln x$

Ứng dụng đạo hàm

Câu 1. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau

a) $y = \ln x - \frac{x^2}{2}$ b) $y = 1 + \arctan x$

c) $y = xe^x$ d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

e) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$ f) $y=e^{\sqrt{x^2-4}}$

Câu 2. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $y=x\ln x$; ds y đạt cực tiểu tại $x=1/e$

b) $y=3x-2\sin^2 x$; ds y không có cực trị

Câu 3. Tính các giới hạn sau bằng quy tắc L'hospital

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\sin x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$

CHƯƠNG 3. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

3.1 Tích phân xác định

3.1.1 Định nghĩa.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]$. Chia $[a,b]$ thành n phần bất kỳ bởi các điểm $a = x_1 < x_2 <, ..., < x_n = b$, mỗi phép chia như vậy gọi là một phân hoạch trên $[a,b]$.Trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ lấy điểm M_i tùy ý. Khi đó tổng

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(M_i)\Delta x_i \text{ với } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = \overline{1, n-1}$$

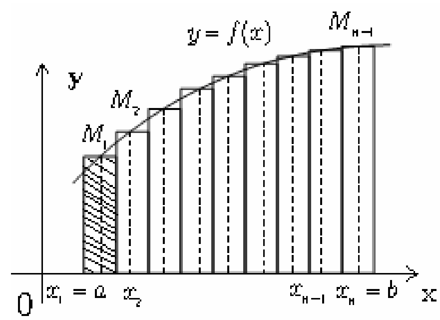
được gọi là tổng tích phân của hàm $f(x)$ ứng với phân hoạch trên. Cho số điểm chia n tăng lên vô hạn sao cho $\max \Delta x_i \to 0$ nếu S_n dần đến giới hạn S không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a,b]$ và cách lấy điểm M_i thì giới hạn S gọi là tích phân xác định của $f(x)$ trên $[a,b]$ và ký hiệu $\int_a^b f(x)dx$. Vậy theo định nghĩa :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} S_n$$

Khi đó $f(x)$ được gọi là hàm khả tích trên $[a,b]$ và $[a,b]$ gọi là khoảng lấy tích phân; a là cận dưới; b là cận trên; $f(x)$ là hàm dưới dấu tích phân; x là biến tích phân. Trong trường hợp $b < a$ ta định nghĩa :

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx$$

nếu $b = a$ ta định nghĩa $\int_a^a f(x)dx = 0$



Hình 3.1

Bây giờ ta xét hình thang cong giới hạn bởi trục Ox, các đường thẳng $x = a, x = b$ và đường cong $f(x) \geq 0$ và liên tục trên $[a,b]$. Chia $[a,b]$ thành n phần bất kỳ bởi các điểm $a = x_1 < x_2 <, ..., < x_n = b$, mỗi phép chia như vậy gọi là một phân hoạch trên $[a,b]$. Trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ lấy điểm M_i tùy ý, dựng các hình chữ nhật có các kích thước $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{1, n-1}$ và $f(M_i)$. Khi đó tổng diện tích các hình chữ nhật này là $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(M_i)\Delta x_i$ ta thấy rằng nếu phân hoạch đoạn $[a,b]$ sao cho n khá lớn,

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ khá bé thì diện tích S_n xấp xỉ bằng diện tích hình thang cong. Từ đó ta đi đến định nghĩa diện tích hình thang cong như sau:

Nếu S_n dần đến giới hạn S khi $n \to \infty$ thì S được gọi là diện tích hình thang cong. Như vậy diện tích hình thang cong nói trên chính là $\int\limits_a^b f(x)dx$. Đây cũng chính là ý nghĩa hình học của tích phân xác định. Hình 3.1

3.1.2 Định lí . (Điều kiện tồn tại tích phân xác định)

Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì nó khả tích trên đoạn đó

Vídụ Tính $\int\limits_a^b cdx$ với c là hằng số

Hàm $f(x) = c$ liên tục trên $[a,b]$ nên khả tích. Ta thành lập tổng tích phân của $f(x) = c$ với một phân hoạch bất kì:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i \ = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

Khi đó $\int\limits_a^b cdx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = c(b-a)$.

Ví dụ Tính $\int\limits_0^1 x^2 dx$

Ta có hàm số tính tích phân liên tục trên đoạn $[0,1]$ nên khả tích trên đoạn đó. Ta phân hoạch đoạn $[0,1]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau và bằng $\frac{1}{n}$, chọn $M_i = x_i = i \times \frac{1}{n}$ thì

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{0, n-1}$ và $(M_i^2) = \frac{i^2}{n^2}$. Suy ra

$$\int\limits_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (M_i^2)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\frac{i^2}{n^2})\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(1^2 + ... + n^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

3.1.3 Các tính chất của tích phân xác định

Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm khả tích trên $[a,b]$ khi đó:

$i) \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k = const)$

$ii) \int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$iii)\ f(x) \ge g(x), \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

$iv) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in [a,b]$

$v) |f(x)|$ khả tích trên $[a,b]$ và $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

3.1.4 Nguyên hàm

Hàm $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên (a,b) nếu

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b).$$

Ví dụ $tg(x)$ là một nguyên hàm của $1+tg^2x$ trên $R\setminus\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $\sin x + 100$ là một nguyên hàm của $\cos x$ …

Có thể chứng minh được: nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên (a,b) thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng đó đều có dạng $F(x)+C$ với C là một hằng số. Họ vô số các nguyên hàm đó được gọi là tích phân bất định của hàm $f(x)$ ký hiệu $\int f(x)dx$. Vậy

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

trong đó dấu $\int$ được gọi là dấu tích phân, $f(x)$ là hàm dưới dấu tích phân, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và x là biến số tích phân.

Từ định nghĩa ta có thể rút ra một số tính chất của tích phân bất định:

$i) \left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$

$ii) \int C.f(x)dx = C.\int f(x)dx$, C là hằng số

$iii) \int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Việc chứng minh các tính chất trên xem như bài tập.

3.1.5 Định lí (Công thức Newton–Leibnitz)

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn đó. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Nhận xét: Theo công thức **Newton–Leibnitz** tích phân xác định không phụ thuộc vào ký hiệu của biến dưới dấu tích phân, nghĩa là

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = ...$$

Công thức **Newton–Leibnitz** chỉ ra mối quan hệ giữa nguyên hàm và tích phân xác định của một hàm số. Ap dụng công thức này ta có thể tính tích phân xác định mà không phải dựa vào việc phân hoạch khoảng lấy tích phân.

Ví dụ Tính $\int_0^1 x^2dx$

Ta có $\frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của $f(x)=x^2$ theo công thức **Newton–Leibnitz**

$$\int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ví dụ Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgxdx$

Ta có trên đoạn $[0,\frac{\pi}{4}]$ hàm số $-\ln(\cos x)$ là một nguyên hàm của tgx nên

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgxdx = -\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \ln(1) = \ln\sqrt{2}$$

Như vậy để tính tích phân xác định bằng cách sử dụng công thức **Newton–Leibnitz** ta phải tìm được một nguyên hàm của hàm dưới dấu tích phân, sau đây là các phương pháp để tìm nguyên hàm của hàm số đã cho.

Tích phân bất định của một số hàm số cơ bản có được liệt kê như sau:

$$\int kdx = kx + C$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x^\beta} = \frac{-1}{(\beta-1)x^{\beta-1}} + C, \quad (\beta \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int e^{\alpha x}dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C, \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C, \quad (a \neq 0)$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C, \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+tg^2x)dx = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot g^2 x) dx = -\cot gx + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, \qquad (a > 0)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{a+x} dx = \ln |a + x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a}\ dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a} \ \pm \ \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 (ax+b)} dx = \frac{1}{a} tg(ax+b) + C, (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 (ax+b)} dx = -\frac{1}{a} cotg(ax+b) + C, (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C, \ (a \neq 0)$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C, \ (a \neq 0)$$

Trong nhiều trường hợp hàm dưới dấu tích phân không đơn giản, không có dạng như những hàm cơ bản nêu trên, ta phải biến đổi hàm dưới dấu tích phân sao cho có thể áp dụng được các tích phân cơ bản. Có hai phương pháp để biến đổi tích phân trong trường hợp này.

3.1.6 Phương pháp đổi biến số

Phương pháp đổi biến trong tích phân bất định có thể chia làm hai dạng

Dạng 1: Đặt $x=\phi(t)$, trong đó $\phi(t)$ là hàm khả vi và đơn điệu đối với biến t. Ta có:

$$\int f(x)dx=\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt$$

Ví dụ Tính $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Đặt $x=t^3$, x khả vi và đơn điệu với mọi t, suy ra $dx=x'(t)dt=3t^2dt$

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\frac{3t^2\sin t}{t^2}=3\int\sin tdt=-3\cos t+C=-3\cos\sqrt[3]{x}+C$$

Ví dụ Tính $\int\sqrt{1-x^2}dx$

Đặt $x=\sin t,\left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t=\arcsin x,(-1\le x\le 1)$. Ta có $dx=x'(t)dt=\cos tdt$

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|$$

$$=\cos t\quad (\cos t\ge 0\ \ do\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2})$$

Suy ra $\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\cos^2 tdt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C$

thay $t=\arcsin x\Rightarrow\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$

Dạng 2: Đặt $u=u(x)$ trong đó $u(x)$ là hàm khả vi. Ta có

$$\int f(x)dx=\int f[u(x)]u'(x)dx=\int f(u)du$$

Ví dụ Tính $\int\frac{e^{5x}dx}{e^{2x}+1}$

Đặt $u=e^x\Rightarrow du=u'(x)dx=e^xdx$. Suy ra

$$\int\frac{e^{5x}dx}{e^{2x}+1}=\int\frac{u^4du}{u^2+1}=\int(u^2-1+\frac{1}{u^2+1})du$$

$$=\frac{u^3}{3}-u+arctg\,u\ =\ \frac{e^{3x}}{3}-e^x+arctg\,(e^x)+C$$

Ví dụ Tính $\int\frac{\sin 2xdx}{\cos^4 x-4}$

Đặt $u=\cos^2 x\Rightarrow du=u'(x)dx=-2\sin x\cos xdx$. Suy ra

$$\int \frac{\sin 2xdx}{\cos^4 x - 4} = -\int \frac{du}{u^2 - 4} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C$$
$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos^2 x - 2}{\cos^2 x + 2}\right| + C$$

Ví dụ Tính $I_1 = \frac{\left(2x^2+1\right)x}{x^4+1}dx$

Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$, khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\left(2u+1\right)}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\int \frac{2udu}{u^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \frac{1}{2}arctgu + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^4+1) + \frac{1}{2}arctg(x^2) + C$$

Áp dụng phương pháp trên khi tính tích phân xác định ta có thể thực hiện như sau:

Đối với dạng 1:

Đặt $x = \varphi(t)$ với $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$ và [$\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$ khi t biến thiên trong $[\alpha, \beta]$ thì x biến thiên trong $[a,b]$. Khi đó $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Ví dụ Tính $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

Đặt $x = \sin t,\ (0 \le t \le \frac{\pi}{2}) \Rightarrow dx = \cos tdt$

Ta có $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Do đó:

$$I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos tdt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 tdt$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2tdt = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}$$

Đối với dạng 2:

Đặt $u = u(x)$ với $u(x)$ đơn điệu, khả vi liên tục trên $[a,b]$ và $f(x)dx$ trở thành $g(u)du$ thỏa $g(u)$ liên tục trên $[u(a),u(b)]$. Khi đó $\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$

Ví dụ Tính $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$

Ta có $I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{\sin x}} \cos x dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}} \cos x\, dx$

Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$ và $u(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, u(\frac{\pi}{2}) = 1$. Khi đó

$I = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1-u^2}{u^{\frac{1}{3}}} du = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} (u^{\frac{-1}{3}} - u^{\frac{5}{3}}) du$

3.1.7 Phương pháp tích phân từng phần

Nếu $u = u(x), v = v(x)$ là hai hàm khả vi liên tục trên một khoảng nào đó, khi đó:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

công thức này gọi là công thức tích phân từng phần, thay vì tính tích phân biểu thức udv ta đi tính tích phân biểu thức vdu có thể đơn giản hơn.

Để tính $\int f(x)dx$ bằng phương pháp tích phân từng phần ta cần phân tích $f(x) = g(x)h(x)$ sau đó đặt

$$\begin{cases} u = g(x) \\ dv = h(x)dx \end{cases}$$

Việc chọn u và dv ở trên, cần thực hiện sao cho u' đơn giản và $v = \int h(x)dx$ dễ tính.

Các dạng tích phân sau đây được tính bằng phương pháp tích phân từng phần với cách đặt tương ứng:

$\int P_n(x)\sin axdx, \int P_n(x)\cos axdx, \int P_n(x)e^{ax}dx$: đặt $u = P_n(x)$

$\int P_n(x)\ln xdx, \int P_n(x)arctgxdx, \int P_n(x)arc\cot gxdx, \int P_n(x)\arcsin xdx, \int P_n(x)\arccos xdx, ...$: đặt $dv = P_n(x)dx$ với $P_n(x)$ là đa thức bậc n theo x

Ví dụ Tính $I = \int (2x+3)e^{2x}dx$

Đặt $\begin{cases} u = 2x+3 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$I = \frac{2x+3}{2}e^{2x} - \int e^{2x}dx = \frac{2x+3}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C = (x+1)e^{2x} + C$

Áp dụng vào tích phân xác định ta tiến hành như sau:

Nếu $u(x), v(x)$ là hai hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$. Khi đó

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$

Cách đặt u và dv tương tự như trong tích phân bất định.

Ví dụ Tính các tích phân sau:

$i)\ I=\int_1^e \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=x \end{cases}$. Khi đó: $I=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e dx=e\ln e-(e-1)=1$

$ii)\ J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u=e^x \\ dv=\cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=e^x dx \\ v=\sin x \end{cases}$. Khi đó: $J=e^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx$.

Đặt $J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx$, ta tiếp tục tích phân từng phần J_1

Đặt $\begin{cases} u=e^x \\ dv=\sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=e^x dx \\ v=-\cos x \end{cases}$

$J_1=-e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx=-e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+J$

$J=e^x\sin x\Big|_0^{\pi/2}-J_1=e^x\sin x\Big|_0^{\pi/2}+e^x\cos x\Big|_0^{\pi/2}-J$. Vậy ta được

$$J=\frac{1}{2}e^x\sin x\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}e^x\cos x\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=J=\frac{1}{2}e^{\pi/2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e^{\pi/2}-1)$$

Như vậy ta đã xây dựng khái niệm và chỉ ra cách tính tích phân trong trường hợp các cận lấy tích phân là hữu hạn và hàm lấy tích phân liên tục . Dưới đây chúng ta sẽ mở rộng khái niệm tích phân với trường hợp cận lấy tích phân là vô hạn và trường hợp hàm dưới dấu tích phân không xác định, ta gọi chung là tích phân suy rộng.

3.2 Tích phân suy rộng

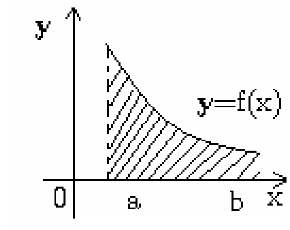
3.2.1 Tích phân suy rộng loại một

Xét hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,+\infty)$, khả tích trên mọi đoạn $[a,b], \forall b\geq a$. Ta định nghĩa tích phân suy rộng của $f(x)$ trên $[a,+\infty)$ là $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ và ký hiệu: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Vậy $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

Nếu giới hạn trên là hữu hạn ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ, nếu giới hạn vô hạn hoặc không tồn tại ta bảo tích phân phân kì.

Về phương diện hình học tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ biểu thị diện tích hình thang cong vô hạn như hình 3.2



Hình 3.2

Ví dụ

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right)=1$$

Vậy $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ hội tụ và $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=1$

Ví dụ

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=+\infty$$

Vậy $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ phân kỳ

Ví dụ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\ (\alpha\in R)$

Nếu $\alpha<1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\right)=+\infty$$ Suy ra $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ phân kỳ.

Nếu $\alpha=1$ thì $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ phân kỳ

Nếu $\alpha>1$

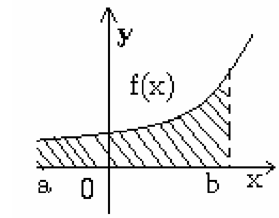
$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}}\right)=\frac{1}{\alpha-1}.$$

Suy ra $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ

Tương tự ta cũng định nghĩa tích phân suy rộng với khoảng lấy tích phân là $(-\infty, b]$ và $(-\infty, +\infty)$



Hình 3.3

Tích phân suy rộng của $f(x)$ trên $(-\infty, b]$ là

$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx,\ (a\le b)$ và ký hiệu $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Vậy $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$,

nếu giới hạn này là hữu hạn ta nói $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ hội tụ, ngược lại ta bảo tích phân $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ phân kì, về phương diện hình học tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ biểu thị diện tích hình thang cong vô hạn như hình 3.3

Tích phân suy rộng của $f(x)$ trên $(-\infty, +\infty)$ là $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$ và được kí hiệu:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Với giả thiết $f(x)$ khả tích trên mọi khoảng $[a,b]$, như vậy ta có thể viết

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,\ \forall c.$$

Tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ và $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ cùng hội tụ.

Ví dụ $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty}(1-e^a) = 1$. Vậy $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ hội tụ.

Ví dụ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{c}\frac{1}{1+x^2}dx + \int_{c}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx,\ \forall c$

$= \lim\limits_{a\to-\infty}(arctgc - arctga) + \lim\limits_{b\to+\infty}(arctgb - arctgc)$

$= arctgc - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - arctgc = \pi$

Suy ra $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ hội tụ.

3.2.2 Định lí (Tiêu chuẩn hội tụ thứ nhất)

Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm không âm trên $[a, +\infty)$, khả tích trên mọi khoảng $[a,b]$ và $f(x)\le g(x)$. Khi đó

i) Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ *ii*) Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ phân kỳ

Ví dụ Xét $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}dx$

Ta thấy: $\frac{1}{x^2+x} < \frac{1}{x^2}, \forall x \in [1,+\infty]$ mà $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ hội tụ suy ra $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}dx$ hội tụ

Ví dụ Xét $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}-1}dx$

Ta có $\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}-1} > \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, mà $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$ phân kì nên $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}-1}dx$ phân kì.

3.2.3 Định lí (Tiêu chuẩn so sánh thứ hai)

Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm không âm trên $[a,+\infty)$, khả tích trên mọi khoảng $[a,b]$. Khi đó

i) Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0 < k < +\infty$ thì các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

ii) Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ hội tụ suy ra $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ

iii) Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ phân kỳ suy ra $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ phân kỳ

Ví dụ Xét sự hội tụ của các tích phân sau

i) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+2x-1}$

Đặt $f(x) = \frac{1}{x^3+2x-1}$, chọn $g(x) = \frac{1}{x^3}$. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 > 0$ mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ hội tụ

Suy ra tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+2x-1}$ hội tụ.

ii) $\int_1^{+\infty} \frac{5}{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}dx$

Đặt $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}$, chọn $g(x) = \frac{1}{x}$. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 5$, mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kì. Suy ra tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{5}{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}dx$ phân kì

iii) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{x^2+x+1}$

Ta có $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^3}}{x^2+x+1}:\frac{1}{x}\right)=+\infty$, mà $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ phân kì nên tích phân đã cho phân kì Trường hợp $f(x)$ có dấu tùy ý ta có kết quả sau

3.2.4 Định lí (Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ)

Nếu $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ hội tụ.

Khi đó ta nói $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ hội tụ tuyệt đối còn nếu $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ phân kỳ nhưng $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ hội tụ thì ta nói $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ bán hội tụ.

Ví dụ Xét sự hội tụ của $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$

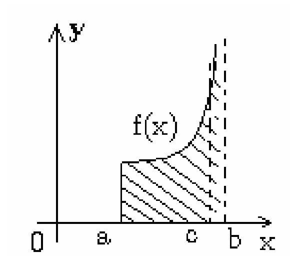
Ta có $\left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right|\le\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{x^2}$ nên $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right|dx$ hội tụ, vậy $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$ hội tụ tuyệt đối

Chú ý. Các tích phân $\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx,\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$ cũng có những định lý tương tự.

3.2.5 Tích phân suy rộng loại hai

Xét hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a,c],\forall c: a\le c<b$ và $\lim_{x\to b^-}f(x)=\infty$. Khi đó, ta định nghĩa tích phân suy rộng của $f(x)$ trên $[a,b)$ là $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$ ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$

Nếu $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$ hữu hạn thì ta nói $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, ngược lại ta nói tích phân phân kỳ. Về phương diện hình học tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,dx$ biểu thị diện tích hình thang cong vô hạn như hình vẽ 3.4



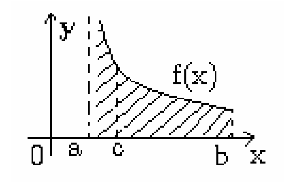
Hình 3.4

Ví dụ Xét $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (hàm gián đoạn tại $x=1$)

Ta có : $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{c\to1^-}\int_0^c\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{c\to1^-}\left(\arcsin x\Big|_0^c\right)=\lim_{c\to1^-}\arcsin c=\frac{\pi}{2}$. Suy ra $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ hội tụ.

Tương tự như trên ta xét tích phân với $f(x)$ khả tích trên $[c,b], \forall c: a < c \le b$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$. Khi đó, ta định nghĩa tích phân suy rộng của $f(x)$ tên $(a,b]$ là $\lim\limits_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$, ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$

Nếu $\lim\limits_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$ hữu hạn thì ta nói $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, ngược lại ta nói phân kỳ. Về phương diện hình học tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ biểu thị diện tích hình thang cong vô hạn như hình 3.5



Hình 3.5

Ví dụ Xét $\int\limits_o^1 \frac{dx}{x}$ (gián đoạn tại $x = 0$)

Ta có $\int\limits_o^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{c\to 0^+}\int\limits_c^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{c\to 0^+}\left(\ln|x|\Big|_c^1\right) = \lim\limits_{c\to 0^+}(-\ln c) = +\infty$. Suy ra $\int\limits_o^1 \frac{dx}{x}$ phân kỳ.

Bây giờ ta xét hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]\setminus c,\ (c\in(a,b))$ và $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$, định nghĩa tích phân suy rộng của $f(x)$ trên $[a,b]$ là tổng của hai tích phân suy rộng như sau:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, c\in(a,b)$$

và $\int_a^b f(x)dx$ được gọi là hội tụ nếu

$\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ cùng hội tụ. Về phương diện hình học tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ biểu thị diện tích hình thang cong vô hạn như hình 3.6

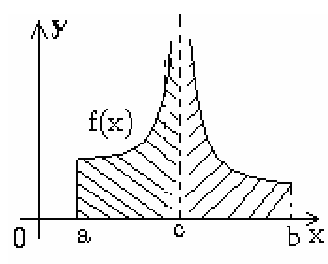
Ví dụ Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng

1) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

Ta có $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{c\to 0^+}\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{c\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_c^1 = \lim\limits_{c\to 0^+}\left(\frac{1}{c} - 1\right) = +\infty$.

Suy ra $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$ phân kỳ, vậy $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ phân kỳ



Hình 3.6

2) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

Ta có $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{c\to 1^-}\int_0^c \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{c\to 1^-}\frac{3}{2}\left[(c-1)^{\frac{2}{3}}-1\right] = -\frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{c\to 1^+}\int_c^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{c\to 1^+}\frac{3}{2}\left[1-(c-1)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{2}$$

Vậy $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ hội tụ và $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 0$

Dưới đây là các tiêu chuẩn so sánh cho tích phân suy rộng của hàm $f(x)$ trên khoảng $[a,b)$. Các trường hợp tích phân suy rộng của $f(x)$ với $f(x)$ gián đoạn tại a hoặc $c, (a<c<b)$ ta cũng có những tiêu chuẩn tương tự.

3.2.6 Định lí (Tiêu chuẩn so sánh thứ nhất)

Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm không âm, $f(x)\le g(x)$ trên $[a,c], (a\le c<b)$, và khả tích trên mọi khoảng $[a,c]$. Khi đó

i) Nếu $\int_a^b g(x)\,dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ

ii) Nếu $\int_a^b f(x)\,dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)\,dx$ phân kỳ.

3.2.7 Định lí (Tiêu chuẩn so sánh thứ hai)

Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm không âm trên $[a,+\infty)$, khả tích trên mọi khoảng $[a,c], (a\le c<b)$. Khi đó

i) Nếu $\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0<k<+\infty$ thì các tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,dx$ và $\int_a^b g(x)\,dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

ii) Nếu $\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì $\int_a^b g(x)\,dx$ hội tụ suy ra $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ

iii) Nếu $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì $\int_a^b g(x)\,dx$ phân kỳ suy ra $\int_a^b f(x)\,dx$ phân kỳ

Trong trường hợp $f(x), g(x)$ có dấu tùy ý ta có

3.2.8 Định lí (Sự hội tụ tuyệt đối)

Nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ.

Khi đó ta nói $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ tuyệt đối, còn nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ phân kỳ nhưng $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ thì ta nói $\int_a^b f(x)\,dx$ bán hội tụ.

Thông thường đối với tích phân suy rộng dạng này , người ta thường so sánh với các tích phân sau:

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ nếu gián đoạn tại a và $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ nếu gián đoạn tại b. Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ gián đoạn tại a thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$, tích phân ban đầu hội tụ nếu hai tích phân sau đồng thời hội tụ.

Ví dụ Xét sự hội tụ $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$

Ta có $f(x) = \frac{1}{\ln x} > 0$, $g(x) = \frac{1}{x-1} > 0$, $\forall x > 1$

Suy ra $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)}{\ln x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$ (quy tắc L'hospital)

mà $\int_1^2 \frac{1}{x-1}dx$ phân kỳ ($\alpha = 1$) do đó $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ phân kỳ

Ví dụ Xét sự hội tụ $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$

Ta có $f(x) = \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1} \geq 0$. Chọn $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{(x-0)^{\frac{1}{2}}}$, $(0 < x \leq 1)$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1} = 1$ mà $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$). Do đó $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$ hội tụ

3.3 Ứng dụng tích phân

3.3.1 Tính diện tích hình phẳng

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và $f(x) \geq 0$ trên $[a,b]$. Khi đó diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cong $f(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ và trục Ox là

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Hàm số $f(x)$ liên tục $[a,b]$ thì diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cong $f(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ và trục Ox là $S = \int_a^b |f(x)|dx$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$ cho bởi công thức sau $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

Nếu đường cong cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ với $x(t),\ y(t),\ x'(t)$ là các hàm liên tục trên $[t_1,t_2]$. Khi đó diện tích phẳng giới hạn bởi đường cong và các đường thẳng $x=a, x=b$ và trục Ox cho bởi công thức :

$$S=\int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)|dt \text{ với } a=x(t_1),\ b=x(t_2)$$

Trong quá trình tính diện tích hình phẳng ta nên chú ý đến tính chất đối xứng của hình

phẳng để việc tính diện tích đơn giản hơn.

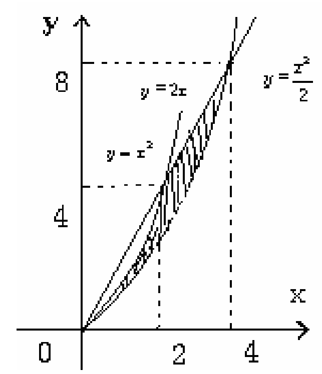
Ví dụ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đườn

$y=x^2,\ y=\frac{x^2}{2}$ và $y=2x$.

Để tính diện tích này ta chia nó làm hai phần, phần thứ nhất ứng với

$x\in[0,2]$ phần thứ hai ứng với $x\in[2,4]$

$$S_1=\int_0^2 (x^2-\frac{x^2}{2})dx=\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=\frac{4}{3}$$



Hình 3.7

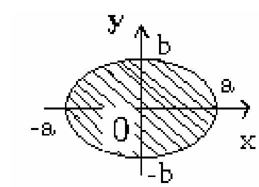
Diện tích hình phẳng đã cho là $S=S_1+S_2=4$. Hình 3.7

Ví dụ tính diện tích hình elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Đường elip chính tắc đối xứng qua các trục tọa độ nên diện tích là :

$$S=4\int_0^a f(x)dx=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

$$=\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\frac{\pi a^2}{4}=\pi ab$$



Hình 3.8

Vậy $S=\pi ab$. Hình 3.8

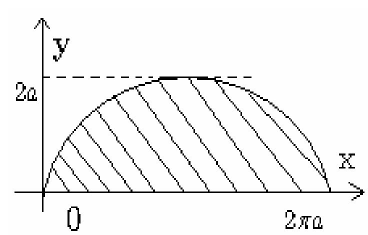
Ví dụ Cho phương trình tham số của đường *cycloid*:

$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ (Hình 3.9)

Với $0\le t\le 2\pi$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường *cycloid* với trục hoành trên $0\le t\le 2\pi$

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi} (1-2\cos t+\cos^2 t)dt$$



Hình 3.9

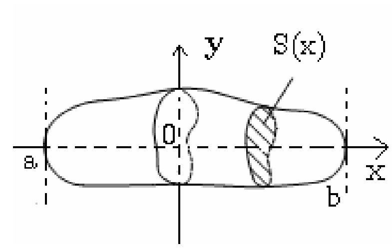
$$= a^2[(t - 2\sin t)\big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}dt]$$

$$= a^2[2\pi + \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\big|_0^{2\pi}] = a^2[2\pi + \pi] = 3\pi a^2.$$

3.3.2 Tính thể tích vật thể

Cho một vật thể giới hạn bởi một mặt cong và hai mặt phẳng $x = a, x = b$ $(a < b)$. Giả sử diện tích thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại x là $S(x)$, $S(x)$ là một

hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$. Khi đó thể tích vật thể được tính như bằng công thức $V = \int_a^b S(x)dx$.(Hình 3.10)



Hình 3.10

Ví dụ Tính thể tích vật thể giới hạn bởi *elipsoid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ là x thiết diện nhận

được là một elip có phương trình

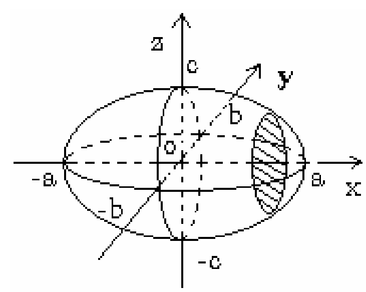
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2} + \frac{z^2}{(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2} = 1$$

Diện tích của elip này là : $S(x) = \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2})$.

Thể tích của vật thể là

$$V = \int_{-a}^{a} S(x)dx = \pi bc\int_{-a}^{a}(1 - \frac{x^2}{a^2})dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)dx$$

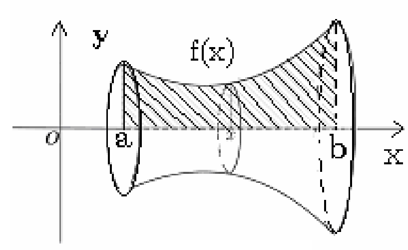
$$= \frac{2\pi bc}{a^2}(a^2x - \frac{x^3}{3})\bigg|_0^a = \frac{2\pi bc}{a^2}(a^3 - \frac{a^3}{3}) = \frac{4\pi abc}{3}$$. Hình 3.11



Hình 3.11

Trường hợp vật thể tròn xoay ta có :

Cho hình thang cong giới hạn bởi đường cong $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ xoay quanh trục Ox. Khi đó ta thu được một vật thể tròn xoay. Các thiết diện vuông góc với trục Ox tại điểm x đều là các hình tròn có tâm nằm trên Ox với bán kính là $f(x)$, diện tích của các thiết diện này là $S(x) = \pi f^2(x)$. Vậy thể tích vật thể tròn xoay là : $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$. Hình 3.12



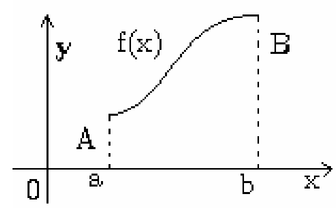
Hình 3.12

Ví dụ Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ khi nó quay quanh trục Ox

Ta có $f^2(x) = y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Theo công thức ta có

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx$$

$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi ab^2$$



Hình 3.13

3.3.3 Tính độ dài cung

Cho cung đường cong $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = f(x)$, $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$. Khi đó độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ được tính theo công thức : $l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$. Hình 3.13

Trường hợp cung đường cong $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t),\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$$

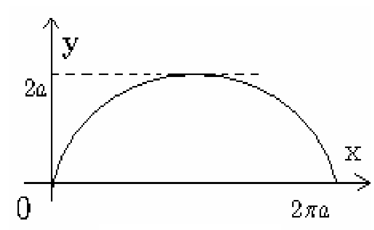
Trong đó $\varphi(t), \psi(t)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục $\forall t \in [t_1, t_2]$. Độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ được tính theo công thức : $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt$

Ví dụ Tính độ dài cung $y = \dfrac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 1$

Ta có

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}$$

$$= \frac{1}{2}[x\sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln\sqrt{2})$$



Hình 3.14

Ví dụ Tính độ dài cung của đường *cycloid*: (Hình 3.14)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi$$. Theo công thức ta có

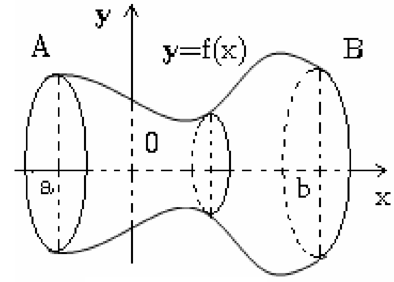
$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 8a$$

3.3.4 Diện tích mặt tròn xoay

Xét mặt tròn xoay sinh ra do cung $\overset{\frown}{AB}$ là biểu diễn của hàm $f(x) \ge 0$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ quay xung quanh trục Ox. Hình 3.15. Diện tích mặt tròn xoay này tính theo công thức :

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ ở trên cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), a \le t \le b$ thì diện tích mặt tròn xoay được tính



Hình 3.15

$$S = 2\pi\int_a^b |y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

Ví dụ Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi cung $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ khi quay quanh Ox. Theo công thức trên diện tích cần tính là :

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} |a(1-\cos t)|\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$= 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = \frac{64\pi a^2}{3}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG III

Tích phân bất định

Câu 1: Tính các tích phân sau:

a) $\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}$; ds $-\ln(\cos x+\sqrt{\cos^2 x+4})+C$

b) $\int\frac{\sin(\ln x)dx}{x}$; ds $-\cos(\ln x)+C$

c) $\int\frac{2dx}{x^2-6x+8}$; ds $\ln|x-4|-\ln|x-2|+C$

d) $\int(2-3\cot^2 x)dx$; ds $3\cot x+5x+C$

e) $I=\int\frac{e^x}{e^x-2}dx$; ds $\ln|e^x-2|+C$

f) $\int\frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{2+\tan^2 x}}dx$; ds $\ln\left|\tan x+\sqrt{2+\tan^2 x}\right|+C$

g) $\int\frac{x+3x^2}{1+x^2+2x^3}dx$; ds $\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2+2x^3\right|+C$

h) $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; ds $\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})-C$

Câu 2. Tính các tích phân sau

a) $\int x.arctgx.dx$ b) $\int\ln x dx$

c) $\int x\cos x dx$ d) $\int\frac{x.arctgx.dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\frac{2x+1}{(x+1)^3}$. Xác định A,B,C sao cho $f(x)=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}$ rồi tính $\int f(x)dx$.

Câu 3. Tính các đạo hàm

a) $f(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$ b) $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(t^2)dt$

Tích phân xác định

Câu 1: Tính tích phân sau:

a) $I=\int_0^1 2^x dx$; ds $1/\ln 2$ b) $I=\int_1^e \ln x dx$; ds 1

c) $I=\int_0^1 \frac{\cos(\arctan x)}{1+x^2}dx$; ds $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $I=\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; ds $\frac{\pi}{4}$

e) $I=\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$; ds $2(\sqrt{2}-1)$

Câu 2: Tính tích phân sau:

a) $I=\int_1^e xe^x dx$; ds $e^e(e-1)$

b) $I=\int_1^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

c) $I=\int_1^{\pi} \left(x\cos x\right)^2 dx$

d) $I=\int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Tích phân suy rộng

Câu 1. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{5+2x}$; ds $+\infty$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+2x+3}$; ds $+\infty$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; ds $\frac{\pi}{2}$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)dx}{x}$; ds phân kỳ

Câu 2. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$; ds 2

b) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; ds $-\frac{4}{3}$

c) $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$; ds phân kỳ

d) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$; ds hội tụ

Ứng dụng tích phân

Câu 1. Tính diên tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

a) $y^2=2x, x^2=2y$; ds $\frac{4}{3}$

b) $y=x^2+4, y=x+4$; ds 1/6

Câu 2. Tính thể tích các vật thể cho bởi:

a) $y=2x-x^2, y=0$ xoay quanh trục Ox ; ds $\frac{16}{15}\pi$

b) $y=x^2, y=1$ xoay quanh trục Oy ; ds $\frac{1}{2}\pi$

Câu 3.Tìm độ dài của đường cong

a) $9y^2=4(3-x^2)$ nằm giữa các giao điểm của nó với trục tung.

b) $2y=x^2-2$ nằm giữa các giao điểm của nó với trục hoành.

CHƯƠNG IV. LÝ THUYẾT CHUỖI

4.1 Chuỗi số

4.1.1 Các định nghĩa

Cho dãy số vô hạn $a_1, a_2, ..., a_n...$ Ta gọi tổng vô hạn $a_1 + a_2 + ... + a_n...$ là một chuỗi số, ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$a_1, a_2, ...a_n, ...$được gọi là các số hạng của chuỗi số, a_n được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi số .

Nếu tồn tại hữu hạn $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ thì ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và S gọi là tổng của chuỗi, ký hiệu $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ngược lại, ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Ví dụ Xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + ... + 1 + ...$

Ta có $S_n = 1 + 1 + ... + 1 = n$ nên $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ hay chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ phân kỳ

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - ... + (-1)^n + ...$

Ta có $S_n = 0$ với n chẵn và $S_n = -1$ với n lẻ suy ra $\lim_{n\to\infty} S_n$ không xác định do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ phân kỳ.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0)$

Đây là cấp số nhân vô hạn với công bội là q nên $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$

Nếu $|q| = 1$ thì chuỗi phân kỳ như đã xét ở trên.

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$ (vì $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$). Do đó chuỗi hội tụ.

Nếu $|q| > 1$ thì $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right) = \infty$ (vì $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$). Do đó chuỗi phân kỳ.

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0)$ hội tụ khi $|q| < 1$, phân kỳ khi $|q| \geq 1$.

4.1.2 Định lí (Điều kiện cần của chuỗi số hội tụ)

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Từ định lí có thể suy ra: nếu $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$

Ta có $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0$ nên chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n + 1\right)$

Ta có

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2+1} - n + 1 \\ &= \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)}{\sqrt{n^2+1} + n} + 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} + 1 \end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} + 1 \right) = 1$ nên chuỗi đã cho phân kỳ.

4.1.3 Các tính chất của chuỗi số hội tụ

i) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng là S thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ (c: hằng số) cũng hội tụ và có tổng là cS (nghĩa là $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$).

ii) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ và có tổng lần lượt là S_1, S_2 thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ cũng hội tụ và tổng là $S_1 \pm S_2$. Tức là: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

iii) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ cũng hội tụ và ngược lại. Tức là tính hội tụ của chuỗi không thay đổi khi ta thêm vào hoặc bớt ra một số hữu hạn các số hạng.

Ví dụ Tính tổng (nếu có) của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{4^{n+2}}$

Ta có $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{4^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^n \right]$. Vì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ có tổng là $S_1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ và chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ hội tụ có tổng là $S_2 = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$.

Suy ra chuỗi đã cho hội tụ và có tổng là $S = \frac{1}{16}.2 + \frac{3}{16}.4 = \frac{7}{8}$.

4.2 Chuỗi số dương

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là chuỗi số dương nếu $a_n > 0, \forall n$.

Để khảo sát sự hội tụ của chuỗi số dương ta có các tiêu chuẩn sau:

4.2.1 Định lí (Tiêu chuẩn so sánh 1)

Cho hai chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nếu tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $a_n \le b_n, \forall n \ge n_0$ thì:

i) chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

ii) chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n}$

Ta có $\frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n} < \frac{1}{3^n}, \forall n \ge 1$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ hội tụ theo định lý trên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n}$ hội tụ.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

Ta có $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ge \frac{1}{n}, \forall n \ge 1$. Do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ (tự chứng minh) suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ phân kỳ.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

Ta có: $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}, n \ge 2$. Do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ phân kỳ.

4.2.2 Định lí (Tiêu chuẩn so sánh 2)

Cho hai chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Giả sử tồn tại $\lim_{x \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$. Khi đó:

i) nếu $k = 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

ii) nếu $k = +\infty$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ

iii) nếu $0 < k < +\infty$ thì hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ có cùng tính chất .

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$

Ta có $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}, \quad n \to \infty$. Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ phân kỳ

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$

Vì $\sin\frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{2^n}, \ n \to \infty$. Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$ hội tụ.

4.2.3 Định lí (Tiêu chuẩn D'Alembert)

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Giả sử tồn tại $\lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$. Khi đó nếu $D < 1$ thì chuỗi hội tụ, nếu $D > 1$ thì chuỗi phân kỳ.

Nếu $D = 1$ thì chưa có kết luận nhưng nếu tồn tại $n_0 > 0$ sao cho $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \geq n_0$ thì chuỗi phân kỳ.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$

Ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1$. Vậy chuỗi hội tụ.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} . \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$

Vậy chuỗi hội tụ.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

Ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} . \frac{n^n}{e^n n!} = \lim_{n\to\infty} e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{e}{e} = 1$

Hơn nữa dãy số $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ là dãy số tăng và hội tụ về số e nên

$e \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 0 \Rightarrow \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq 1, \forall n > 0$ hay $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n > 0$. Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

4.2.4 Định lí. (Tiêu chuẩn Cauchy)

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Giả sử tồn tại $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = D$. Khi đó nếu $D<1$ thì chuỗi hội tụ, nếu $D>1$ thì chuỗi phân kỳ.

Nếu $D=1$ thì chưa có kết luận nhưng nếu tồn tại $n_0>0$ sao cho $\sqrt[n]{a_n} \ge 1, \forall n \ge n_0$ thì chuỗi phân kỳ.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$

Ta có $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3} < 1$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n-5}\right)^{2n-1}$

Ta có $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{2n-5}\right)^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{2-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^2}{\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{1/n}} = \frac{9}{4} > 1$

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

4.2.5 Định lí. (Tiêu chuẩn tích phân)

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm và giảm trên $[1,+\infty)$. Khi đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ và tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (chuỗi **Riemann**).

Ta đã biết $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ hội tụ khi $\alpha > 1$; phân kỳ khi $\alpha \le 1$ và $\frac{1}{x^{\alpha}}$ liên tục, không âm và giảm trên $[1,+\infty)$. Do đó $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi $\alpha > 1$; phân kỳ khi $\alpha \le 1$.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Xét tích phân suy rộng $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ với $\frac{1}{x \ln x}$ giảm và liên tục trong $[2,+\infty)$. Ta có

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x\ln x} dx = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 2) = +\infty .$$

Vậy tích phân suy rộng phân kỳ do đó chuỗi đã cho phân kỳ.

4.3 Chuỗi có dấu bất kỳ

4.3.1 Định lí. (Chuỗi hội tụ tuyệt đối)

Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in R$. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ đã cho cũng hội tụ.

Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ở định lý trên được gọi là hội tụ tuyệt đối. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gọi là bán hội tụ.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

Ta có $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ (theo định lý so sánh) nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$ hội tụ suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ hội tụ tuyệt đối.

Chú ý: Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ chưa chắc phân kỳ. Tuy nhiên, nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy để có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng phân kỳ.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^3}$

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-2)^n}{n^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$. Ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}.\frac{n^3}{2^n} = 2 > 1$ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-2)^n}{n^3}\right|$ phân kỳ theo tiêu chuẩn D'Alembert. Suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^3}$ phân kỳ.

Chuỗi đan dấu là chuỗi số có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ hoặc $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ với $a_n > 0, \forall n > 0$. Ta có kết quả sau về sự hội tụ của chuỗi dan dấu

4.3.2 Định lý (Leibnitz)

Cho chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ hoặc $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. Nếu dãy số dương $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ giảm và dần tới 0 khi $n \to \infty$ thì chuỗi đan dấu hội tụ. Gọi S là tổng của chuỗi này thì $0 < S \le a_1$.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+...$

Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu, các số hạng giảm dần tới 0 khi $n\to\infty$ nên chuỗi này hội tụ. Hơn nữa chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ. Vậy chuỗi đã cho bán hội tụ.

4.4 Chuỗi hàm

4.4.1 Các định nghĩa

Cho dãy các hàm số $a_1(x),\ a_2(x),...,\ a_n(x),...$ cùng xác định trên miền D. Khi đó tổng $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ được gọi là chuỗi hàm.

Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ được gọi là hội tụ tại $x_0\in D$ nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x_0)$ hội tụ. Tập hợp tất cả các điểm tại đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ hội tụ được gọi là miền hội tụ của chuỗi đó.

Có một số chuỗi hàm mà ta có thể tìm được miền hội tụ của nó bằng cách sử dụng các định lý ở phần trước.

Ví dụ Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ hội tụ khi và chỉ khi $x>1$ nên miền hội tụ của chuỗi hàm này là $(1,+\infty)$.

Ví dụ Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$

Chuỗi này hội tụ khi và chỉ khi $|x|<1$ nên miền hội tụ của chuỗi này là $(-1,1)$

Sau đây ta xét một loại chuỗi hàm thông dụng nhất là chuỗi lũy thừa.

4.4.2 Chuỗi luỹ thừa

Chuỗi luỹ thừa là chuỗi hàm có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ (1) hoặc $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ (2).

Bằng cách đặt $X=x-x_0$ chuỗi (1) thành chuỗi (2). Vậy ta chỉ cần khảo sát chuỗi (2).

4.4.3 Định lý (Abel)

Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ hội tụ tại $x=x_0\neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x\in(-|x_0|,|x_0|)$.

Từ định lí trên suy ra: nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ phân kỳ tại $x=x_0\neq 0$ thì chuỗi phân kỳ tại mọi $x\in(-\infty,-|x_0|)\cup(|x_0|,+\infty)$.

4.4.4 Bán kính hội tụ

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Nếu tồn tại số $r > 0$ sao cho chuỗi hội tụ $\forall x \in (-r, r)$ và phân kỳ $\forall x \in (-\infty - r) \cup (r, +\infty)$ thì r được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi.

Nếu không tồn tại số $r > 0$ như trên ta nói bán kính hội tụ của chuỗi là $r = 0$.

Như vậy, để tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa ta tìm bán kính hội tụ r, rồi khảo sát sự hội tụ của chuỗi tại 2 đầu mút $x = -r, x = r$. Sau đây là phương pháp tìm bán kính hội tụ.

4.4.5 Định lý

Nếu $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = D$ hoặc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = D$ thì bán kính hội tụ r của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ được xác định như sau:

$$r = \begin{cases} \frac{1}{D}, & 0 < D < +\infty \\ 0, & D = +\infty \\ +\infty, & D = 0 \end{cases}$$

Ví dụ Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Ta có $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{n+1} . \frac{n}{1} = 1$ suy ra $r = 1$

Tại $x = -1$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là chuỗi đan dấu có các số hạng giảm và dần về 0 nên chuỗi hội tụ. Tại $x = 1$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ. Vậy miền hội tụ là $D = [1,1)$.

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

Câu 1. Tìm tổng của các chuỗi sau

a) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ... = e$

b) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... \pm \frac{1}{n!} \mp ... = e$

c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... \pm \frac{1}{n} \mp ... = \ln 2$

d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = 2$

e) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ... \pm \frac{1}{2^n} \mp ... = \frac{2}{3}$

f) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... \pm \frac{1}{2n-1} \mp ... = \frac{\pi}{4}$

g) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + ... = 1$

h) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+...=\frac{1}{2}$

i) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot(n+1)}+...=\frac{3}{4}$

k) $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}+...+\frac{1}{(4n-1)\cdot(4n+1)}+...=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$

Câu 2. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau :

a) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}$; ds

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$; ds 2

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; ds 1

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; ds phân kỳ

e) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n}$; ds phân kỳ

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}+n}{3^{n}+3n+3}$; ds hội tụ

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{n!}$; ds hội tụ

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^{2}-1}{3n^{2}+2}\right)^{n}$; ds hội tụ

k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n}(n!)^{2}}{(2n)!}$; ds phân kỳ

l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\ln n}$; ds bán hội tụ

Câu 3. Bán kính hội tụ của các chuỗi sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{2^{n}+3^{n}}$; ds 3

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n.3^{n}}$; ds 3

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{2^{n}}$; ds 2

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{\sqrt{n^{2}+1}}$; ds 1

Câu 4. Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}$; ds $(-1;1)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{n^{2}}.x^{n}}{(n+1)^{n^{2}}}$; ds $(-e;e)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n}}{n}$; ds $(-1;1]$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n}(x-2)^{2n}$

CÁC ĐỀ THI MẪU

ĐỀ THI GIỮA KÌ MÔN: TOÁN CAO CẤP A1

Mã đề: 01......... Thời gian làm bài: 75 phút Lớp/nhóm: ĐH

Lưu ý: Sử dụng tài liệu khi làm bài thi ☐ Được ☑ Không được

Câu 1: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2}$

A. e^2 **B.** đáp án khác **C.** $\dfrac{1}{e}$ **D.** e

Câu 2: Hàm số $f(x)=x^2-3|x|+2$ có $f'(x)$ khi $x<0$ là:

A. $2x+3$ **B.** $2x-3$ **C.** 0 **D.** $3-2x$

Câu 3: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}, & x\neq 0, n\in N\\ a, & x=0\end{cases}$ liên tục trên R

A. $a=0$ **B.** $a=n$ **C.** đáp án khác **D.** $a=\dfrac{1}{n}$

Câu 4: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$

A. đáp án khác **B.** e **C.** $4(\ln 2-1)$ **D.** $\ln 2-1$

Câu 5: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n+2\cdot 5^n}$

A. 0 **B.** $+\infty$ **C.** $\dfrac{15}{2}$ **D.** $-\dfrac{15}{2}$

Câu 6: Tìm điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=3^{x/(1-x^2)}$ và cho biết nó thuộc loại nào

A. $x=1, x=-1$, loại 2 **B.** $x=1, x=-1$, loại 1

C. $x=1, x=-1$, khử được **D.** $x=\pi$, điểm nhảy

Câu 7: Hàm số $f(x)=x^2-3|x|+2$ có $f'(0)$ là:

A. $f'(0)=-1$ **B.** $f'(0)=3$ **C.** $f'(0)=0$ **D.** không tồn tại

Câu 8: Hàm số $x=a\cdot\cos^3 t, y=b\cdot\sin^3 t, t\in(0,\pi/2)$ có $y'(x)$ là:

A. $\dfrac{b}{a}\tan t$ **B.** $-\dfrac{b}{a}\tan t$ **C.** $3b\sin^2 t$ **D.** $-\cos^2 t\sin t$

Câu 9: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 0}(\cosh x)^{1/(1-\cos x)}$

A. e **B.** 0 **C.** $\dfrac{1}{5}$ **D.** đáp án khác

Câu 10: Hàm số $x=a\cdot\cos^3 t, y=b\cdot\sin^3 t, t\in(0,\pi/2)$ có $y'(t)$ là:

A. $-\cos^2 t\sin t$ **B.** $3b\sin^2 t$ **C.** $-3b\sin^2 t\cos t$ **D.** $3b\sin^2 t\cos t$

Câu 11: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n}$

A. ∞ **B.** đáp án khác **C.** 0 **D.** $\dfrac{1}{2}$

Câu 12: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^{10}+n+1)}$

A. 0 **B.** đáp án khác **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{5}$

Câu 13: Tìm điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$ và cho biết nó thuộc loại nào

A. $x=0$, loại 2 **B.** $x=\pi/2+n\pi$, loại 2
C. $x=\pi/2+n\pi$, khử được **D.** $x=\pi$, điểm nhảy

Câu 14: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}(\arcsin x)\cot x, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ liên tục trên (-1,1)

A. $a=0$ **B.** $a=\dfrac{1}{4}$ **C.** $a=1$ **D.** $a=\dfrac{-1}{4}$

Câu 15: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{1/x}+\dfrac{1}{x}\right)^x$

A. e **B.** $\ln 2-e$ **C.** e^2 **D.** e^{-2}

Câu 16: Hàm số $f(x)=\begin{cases}e^{1/x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ có $f_+^{'}(0)$ là:

A. $f_+^{'}(0)=-\infty$ **B.** $f_+^{'}(0)=1$ **C.** $f_+^{'}(0)=+\infty$ **D.** Đáp án khác

Câu 17: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2}$

A. $\dfrac{1}{5}$ **B.** -1 **C.** $+\infty$ **D.** 0

Câu 18: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$

A. e **B.** $\dfrac{4}{3}$ **C.** 0 **D.** $-\dfrac{4}{3}$

Câu 19: Hàm số $x=a\cdot\cos^3 t, y=b\cdot\sin^3 t, t\in(0,\pi/2)$ có $x^{'}(t)$ là:

A. $-3a\sin^2 t\sin t\neq 0,\forall t\in(0,\pi/2)$ **B.** $-\cos^2 t\sin t\neq 0,\forall t\in(0,\pi/2)$
C. $-3a\cos^2 t\neq 0,\forall t\in(0,\pi/2)$ **D.** $-3a\cos^2 t\sin t\neq 0,\forall t\in(0,\pi/2)$

Câu 20: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to\pi/4}\cot 2x\cdot\cot(\pi/4-x)$

A. 2 **B.** 1 **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 0

Câu 21: Tìm điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x-1|}$

A. $x=\pi/2+n\pi$ **B.** $x=0, x=1, x=2$ **C.** $x=0, x=1$ **D.** $x=e$

Câu 22: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\tan^2 x\right)^{1/\sin^2(2x)}$

A. 1 **B.** $=e^{1/4}$ **C.** 0 **D.** $e^{-1/4}$

Câu 23: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases} x\cot(2x), & x\neq 0, |x|<\pi/2 \\ a, & x=0 \end{cases}$ liên tục trên

$(-\pi/2,\pi/2)$ R

A. $a=1/2$ **B.** $a=\dfrac{1}{4}$ **C.** đáp án khác **D.** $a=0$

Câu 24: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$

A. 0 **B.** $\dfrac{1}{80}$ **C.** $-\dfrac{4}{3}$ **D.** $\dfrac{-1}{80}$

Câu 25: Hàm số $f(x)=x^2-3|x|+2$ có $f_-^{'}(0)$ là:

A. $2x-3$ **B.** 3 **C.** 0 **D.** -3

Câu 26: Tìm điểm gián đoạn của hàm số $y=e^{-1/|x|}$ và cho biết nó thuộc loại nào

A. $x=0$, khử được **B.** $x=\pi$, điểm nhảy **C.** $x=e$, loại 1 **D.** $x=0$, loại 2

Câu 27: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{n^3}{n^2+1}\right)$

A. 0 **B.** -1 **C.** $\dfrac{1}{5}$ **D.** đáp án khác

Câu 28: Hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ có $f^{'}(0)$ là:

A. $f^{'}(0)=1$ **B.** Không tồn tại **C.** $f^{'}(0)=\infty$ **D.** $f^{'}(0)=0$

Câu 29: Cho hàm số $y=1+x^2$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất?

A. Hàm số đồng biến trên $(1,+\infty)$ và nghịch biến $(-\infty,1)$

B. Hàm số có điểm cực đại là (0,1)

C. Hàm số có điểm cực tiểu là (0,1)

D. Hàm số luôn đồng biến

Câu 30: Đạo hàm cấp n của hàm $\sin(ax)$ là :

A. kết quả khác **B.** $a^n\cdot\sin(ax+n\dfrac{\pi}{2})$ **C.** $a^n\cdot\sin(ax+\dfrac{\pi}{2})$ **D.** $a^n\cdot\sin(x+n\dfrac{\pi}{2})$

Câu 31: Hàm số $f(x)=x^2-3|x|+2$ có $f_+^{'}(0)$ là:

A. $2x-3$ **B.** 0 **C.** 3 **D.** -3

Câu 32: Hàm số $f(x)=\begin{cases} e^{1/x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ có $f^{'}(0)$ là:

A. không tồn tại **B.** $f^{'}(0)=0$ **C.** $f^{'}(0)=-1$ **D.** $f^{'}(0)=1$

Câu 33: Đạo hàm cấp n của hàm e^{ax} là :

A. kết quả khác **B.** $a^n\cdot e^{ax}$ **C.** $a^{n-1}\cdot e^{ax}$ **D.** $a^n\cdot e^x$

Câu 34: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/x^2}$

A. -1 **B.** $+\infty$ **C.** 0 **D.** $e^{-1/2}$

Câu 35: Tìm tiệm cận của hàm số: $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

A. $y=x-\dfrac{1}{4}$ **B.** $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$ **C.** $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}$ **D.** $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$

Câu 36: Hàm số $f(x)=\begin{cases} e^{1/x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ có $f_-^{'}(0)$ là:

A. Đáp án khác **B.** $f_-^{'}(0)=-1$ **C.** $f_-^{'}(0)=0$ **D.** $f_-^{'}(0)=1$

Câu 37: Đạo hàm cấp n của hàm $\ln x$ là :

A. $\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ **B.** kết quả khác **C.** $(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ **D.** $a^{n-1}\cdot e^{ax}$

Câu 38: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$

A. 0 **B.** $\dfrac{-1}{80}$ **C.** 10 **D.** 20

Câu 39: Hàm số $f(x)=x^2-3|x|+2$ có $f^{'}(x)$ khi $x>0$ là:

A. $2x-3$ **B.** 0 **C.** $3-2x$ **D.** $2x+3$

Câu 40: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+2x$ trên [-3,0]

A. 0 **B.** -1 **C.** -2 **D.** $-\dfrac{1}{2}$

----------- HẾT ----------

PHIẾU ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	■	■				■			■											■
B			■					■					■					■		
C				■							■			■	■	■	■			
D					■		■			■		■							■	

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A			■			■						■							■	■
B	■			■	■		■			■			■							
C									■						■	■	■			
D		■						■			■			■				■		

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN: TOÁN CAO CẤP A1

Mã đề: 02......... Thời gian làm bài: 75 phút Lớp/nhóm: ĐH

Lưu ý: Sử dụng tài liệu khi làm bài thi ☐ Được ☑ Không được

Câu 1: Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì

A. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$ **B.** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

C. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$ **D.** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Câu 2: Bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + e^n}$ là :

A. $r = 1/e$ **B.** $r = 1$ **C.** $r = e$ **D.** $+\infty$

Câu 3: Tích phân $\int_{a}^{b} f(x)dx$ bằng với tích phân

A. $\int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx;\ \ c \in R$ **B.** $\int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx;\ \ a \le c \le b$

C. $\int_{c}^{a} f(x)dx + \int_{b}^{c} f(x)dx;\ \ a \le c \le b$ **D.** $\int_{a}^{b} f(t)dx$

Câu 4: Tính tích phân suy rộng $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx$

A. $-\frac{1}{4}\ln 5 + \frac{2}{3}\ln 2$ **B.** $\frac{1}{4}\ln 5 + \frac{2}{3}\ln 2$ **C.** $\frac{2}{3}\ln 2$ **D.** $\frac{2}{3}\ln 2$

Câu 5: Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì:

A. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ **B.** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$

C. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$ **D.** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{-a/2}^{a/2} f(x)dx$

Câu 6: Tính tích phân suy rộng $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^5}dx$

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{1}{64}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** ∞

Câu 7: Tính thể tích tròn xoay do $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh Oy

A. $\frac{1}{3}\pi ba^2$ **B.** $\frac{2}{3}\pi ba^2$ **C.** $\frac{4}{3}\pi ba^2$ **D.** πba^2

Câu 8: Cho dãy vô hạn các số thực $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ .Phát biểu nào sau đây là đúng nhất

A. $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ được gọi là một dãy số

B. $\sum_{i=1}^{n} u_i$ được gọi là một chuỗi số

C. $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ được gọi là một chuỗi số

D. $u_1^2, u_2^2, ... u_n^2, ..$ được gọi là một chuỗi số dương

Câu 9: Cho $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Chọn phát biểu đúng:

A. $S = +\infty$ **B.** $S = 2$ **C.** $S = 3$ **D.** $S = 0$

Câu 10: Tính tích phân $\int_0^{2008\pi} \sin(2008x + \sin x)dx$

A. $\frac{\pi}{2}$ **B.** -1 **C.** 1 **D.** 0

Câu 11: Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $(\forall x \in [a,b])\ f(x) < g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$

B. $(\forall x \in [a,b])\ f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

C. $(\forall x \in [a,b])\ f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

D. $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Câu 12: Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kì T thì:

A. $\int_a^{a+T} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ **B.** $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$

C. $\int_a^{a+T} f(x)dx = 0$ **D.** $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_T^a f(x)dx$

Câu 13: Tính tích phân suy rộng $\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx$

A. $\frac{2}{3}\ln 2$ **B.** $\frac{2}{3}\ln 2$ **C.** $-\frac{2}{3}\ln 2$ **D.** $\ln 2$

Câu 14: Tính tích phân $\int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$

A. 0 **B.** $\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ **C.** $\ln\frac{\sqrt{2}+1}{3}$ **D.** $\ln\frac{\sqrt{2}+1}{3(\sqrt{2}-1)}$

Câu 15: Tính tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x+3)^2}$

A. $\frac{1}{5}$ **B.** ∞ **C.** 0 **D.** $\frac{1}{10}$

Câu 16: Tính tích phân suy rộng $\int_{2}^{+\infty} \frac{(x^2+1)}{x(x-1)^3}dx$

A. $1+\ln 2$ **B.** $1-\ln 2$ **C.** $\frac{1}{5}\ln 2$ **D.** $\frac{12}{5}\ln 6$

Câu 17: Tính tích phân $\int_{\sqrt{7}}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

A. $-2\ln\frac{3}{4+\sqrt{7}}$ **B.** 0 **C.** $\ln\frac{3}{4+\sqrt{7}}$ **D.** $2\ln\frac{3}{4+\sqrt{7}}$

Câu 18: Cho $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n(n^2-1)}}$. Chọn phát biểu đúng:

A. Chuỗi đan dấu **B.** Chuỗi phân kỳ **C.** Chuỗi hội tụ **D.** Chuỗi có dấu bất kỳ

Câu 19: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=-2x^2+3x+6$ và đường thẳng $y=x+2$.

A. 9 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 7

Câu 20: Chọn phát biểu đúng:

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ là chuỗi phân kỳ **B.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ là chuỗi phân kỳ

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n^2+10}$ là chuỗi hội tụ **D.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ là chuỗi hội tụ

Câu 21: Tính tích phân suy rộng $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4-x)\sqrt{1-x^2}}$

A. $\frac{-\pi}{\sqrt{15}}$ **B.** $\frac{\pi}{\sqrt{15}}$ **C.** $+\infty$ **D.** đáp án khác

Câu 22: Tính tích phân $\int_{-1}^{1} \left|e^x-1\right|dx$

A. 1 **B.** 0 **C.** $e+\frac{1}{e}$ **D.** $e+\frac{1}{e}-2$

Câu 23: Tính tích phân suy rộng $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

A. $\frac{\pi}{4}$ **B.** $-\frac{\pi}{2}$ **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** 0

Câu 24: Tính tích phân suy rộng $\int_{0}^{1} \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}-x^3\right)dx}{\sqrt[5]{x^3}}$

A. đáp án khác **B.** $\frac{625}{187}$ **C.** $\frac{25}{187}$ **D.** $+\infty$

Câu 25: Cho $S=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n(n+1)}$. Chọn phát biểu đúng:

A. $S=\pi$ **B.** không tồn tại S **C.** $S=\frac{2}{\pi}$ **D.** $S=0$

Câu 26: Tính tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln^2 x+1)}dx$

A. $\frac{\pi}{2}$ **B.** $-\frac{\pi}{2}$ **C.** 0 **D.** $2\ln 2$

Câu 27: Bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$ là :

A. kết quả khác **B.** $r = 1/5$ **C.** $r = 3$ **D.** $r = 5$

Câu 28: Tính tích phân suy rộng $\int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx$

A. $-\frac{\pi}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $-\frac{1}{4}$ **D.** 0

Câu 29: Tính tích phân $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx$

A. $\frac{14}{20}$ **B.** $-\frac{141}{20}$ **C.** 0 **D.** $\frac{141}{20}$

Câu 30: Cho $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{4n^2-1}$. Chọn phát biểu đúng:

A. $S = 0$ **B.** $S = a/2$ **C.** $S = 2a$ **D.** không tồn tại S

Câu 31: Tính tích phân $\int_a^b dx$

A. 0 **B.** $b - a$ **C.** $-b - a$ **D.** $a - b$

Câu 32: Tính tích phân suy rộng $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+\sqrt{e^x}}dx$

A. $2\ln 2$ **B.** $\frac{1}{5}\ln 2$ **C.** $1-\ln 2$ **D.** $2-2\ln 2$

Câu 33: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$

A. $2-\ln 2$ **B.** $2+\frac{1}{\ln 2}$ **C.** $2-\frac{1}{\ln 2}$ **D.** $2+\ln 2$

Câu 34: Tính tích phân $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)dx}{x}$

A. 1 **B.** $\cos 1$ **C.** $\sin 1$ **D.** 0

Câu 35: Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $(\forall x \in [a,b])\ f(x) \geq 0\ \&\ \exists x_0 \in [a,b]\ f(x_0) > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

B. $\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$

C. $(\forall x \in [a,b])\ f(x) \geq 0\ \&\ \exists x_0 \in [a,b]\ f(x_0) > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$

D. $(\forall x \in [a,b])\ f(x) \geq 0 \ \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx > 0$

Câu 36: Tính tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^3}$

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $+\infty$ **D.** $\frac{1}{5}$

Câu 37: Tính tích phân $\int\limits_a^b dx$

A. $a-b$ **B.** $-b-a$ **C.** $b-a$ **D.** 0

Câu 38: Tính tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

A. $\frac{\pi}{2}$ **B.** đáp án khác **C.** π **D.** $+\infty$

Câu 39: Tính tích phân suy rộng $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

A. $\frac{\pi}{3}$ **B.** $\frac{\pi}{4}$ **C.** 0 **D.** $-\frac{\pi}{2}$

Câu 40: Cho chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Phát biểu nào sau đây là sai:

A. Các số u_n có giá trị tăng khi n tiến ra $+\infty$

B. Nếu $u_n > 0, \forall n$ dãy $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ là dãy tăng

C. Biểu thức của u_n được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi số.

D. $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi số.

----------- HẾT ----------

PHIẾU ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A				■	■								■			■			■	
B			■			■			■			■								
C		■					■	■			■							■		
D	■									■				■	■		■			■

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A					■	■												■	■	■
B	■			■				■		■	■					■				
C			■										■	■	■		■			
D		■					■		■			■								

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Đình Trí, Toán học cao cấp, Tập 2NXBGD, 2006

[2] Phan Quốc Khánh, Phép tính vi tích phân, Tâp1, NXBGD, 1996

[3] Đỗ Công Khanh, TCC giải tích hàm một biến, NXBĐHQG, 2006

[4] Nguyễn Phú Vinh, Giáo trình toán CC, Lưu hành nội bộ trường ĐHCN. TPHCM

MỤC LỤC