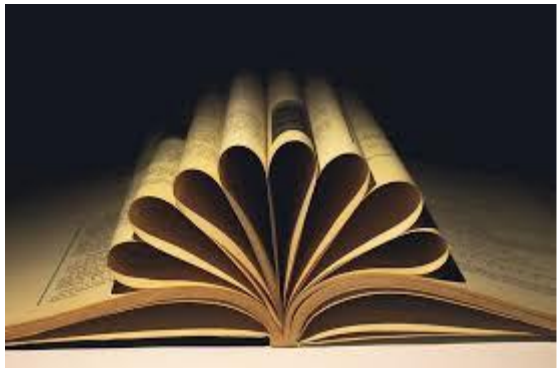
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VĂN LANG

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN



CÁC BÀI GIẢNG TOÁN RỜI RẠC

Biên soạn: **PGS.TS. NGUYỄN VĂN LỘC- TS. TRẦN NGỌC VIỆT**

TP.HỒ CHÍ MINH .THÁNG 2 NĂM 2020

Chương 1. CƠ SỞ LÔGIC

Bài 1. Mệnh đề- logic- vị từ và lượng từ

1. Mệnh đề

1.1. Định nghĩa

Mệnh đề là một khẳng định có giá trị đúng hoặc sai (nhưng không thể vừa đúng vừa sai).

Kí hiệu mệnh đề: *P*, *Q*, *R*,……

Chú ý: Các câu hỏi, câu cảm thán, câu mệnh lệnh không phải mệnh đề.

1.2. Các phép toán trên các mệnh đề

1.2.1. Phép phủ định

Phủ định của mện đề P là mệnh đề ký hiệu: $\overline{P}$ (đọc "không P") là mệnh đề có giá trị được xác định bằng bảng sau:

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

Ví dụ 1: Cho p: "5+2 = 9", thì $\overline{P}$ là mệnh đề "không phải 5 + 2 = 9". Nghĩa là $"5+2\neq 9"$. Ở đây, p là sai và $\overline{P}$ đúng.

Luyện tập 1. Cho mệnh đề P: 2+3 > 7. Tìm mệnh đề $\overline{P}$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề đó?

1.2.2.Phép hội

Hội của hai mệnh đề *P*, *Q* được ký hiệu bởi $P \wedge Q$ (đọc "*P* và *Q*" là một mệnh đề có giá trị được xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Vậy mệnh đề $P \wedge Q$ chỉ đúng khi cả *P* và *Q* đều đúng, còn sai trong các trường hợp còn lại.

Ví dụ 2: Cho mệnh đề:

P: "2 là số nguyên tố"

Q: "2 là số chẵn".

$P \wedge Q$: "2 là số nguên tố và 2 là số chẵn".

Ta có: $P = 1$ và $Q = 1$, do đó: $P \wedge Q = 1$.

Luyện tập 2. Cho mệnh đề *P*: "14 là số nguyên" và *Q*: "14 chia hết cho 5". Hãy lập mệnh đề $P \wedge Q$ và xác $\mathbb{R}$ định tính đúng sai của mệnh đề đó.

1.2.3. Phép tuyển (không loại)

Tuyển của hai mệnh đề *P, Q* được ký hiệu bởi $P \vee Q$ (đọc: "*P* hoặc *Q*" là một mệnh đề có giá trị được xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Vậy mệnh đề $P \vee Q$ chỉ sai khi cả *P* và *Q* đều sai, đúng trong các trường hợp còn lại.

Ví dụ 3. Cho mệnh đề *P*: "12 là số nguyên"và *Q*: "12 chia hết cho 5". Thì mệnh đề $P \vee Q$ là mệnh đề "12 là số nguyên và 12 chia hết cho 5" là mệnh đề đúng. Ở đây, mệnh đề p đúng nên $P \vee Q$ đúng.

Luyện tập 2. Cho mệnh đề *P*: “7 là số chẵn” và *Q*: “7 > 10”. Hãy lập mệnh đề $P \vee Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề đó.

Chú ý.

+ Phép tuyển nêu trên gọi là tuyển không loại: Với phép tuyển này từ “hoặc” được hiểu theo nghĩa: *P* hoặc *Q* hoặc cả *P* và *Q*.

+ Phép tuyển loại: *P* hoặc *Q* nhưng không thể cả *P* và *Q*. Kí hiệu: $\veebar$.

+ Trong giáo trình ta dùng phép tuyển không loại.

Phép tuyển loại, được xác định bởi bảng giá trị sau:

P	Q	$P \veebar Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ví dụ 4. Hoàng sinh ra ở Hà Nội hoặc ở TP. Hồ Chí Minh.

1.2.4. Phép kéo theo (còn gọi là mệnh đề có điều kiện hay phép suy diễn)

Mệnh đề *P* kéo theo mệnh đề *Q* được ký hiệu là $P \Rightarrow Q$ là một mệnh đề có giá trị được xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Vậy mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi *P* đúng và *Q* sai, còn đúng trong mọi trường hợp còn lại

Ví dụ 5. Cho mệnh đề p: “2 < 3” và mệnh đề q: “4 < 9” thì $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề “nếu 2 < 3 thì 4 < 9” . Do p đúng, q đúng nên $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng.

Luyện tập 5. Cho mệnh đề p: "3 + 2 = 6" và mệnh đề q: "4 x 2 = 8". Hãy lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề đó.

1.2.5. Phép tương đương

Mệnh đề P tương đương với mệnh đề Q, được ký hiệu bởi $P \Leftrightarrow Q$ là một mệnh đề xác định bởi $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. Từ đó ta có bảng chân trị sau:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Như vậy, mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ chỉ đúng khi cả hai mệnh đề P và Q cùng đúng hoặc cùng sai và sai trong các trường hợp còn lại.

Chú ý

Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ còn được đọc là:"*P* khi và chỉ khi *Q"*; "*P* nếu và chỉ nếu *Q*" ;"*P* là cần và đủ đối với *Q*"; "Nếu *P* thì *Q* và ngược lại".

Ví dụ 6. Cho mệnh đề p:" 5 +2 = 7" và mệnh đề "3 x 4 = 9" thì mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$: "5 +2 = 7 khi và chỉ khi 3 x 4 = 9" là mệnh đề sai vì p đúng , q sai.

Luyện tập 6. Cho mệnh đề p: "3 > 6" và mệnh đề q: "4 + 2 = 10". Hãy lập mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề đó.

1.3. Công thức và tương đương lôgic

1.3.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1

Công thức (hay mệnh đề phức hợp) là các mệnh đề được xây dựng từ một số mệnh đề ban đầu nhờ liên kết chúng lại bằng các phép toán lôgic (hội, tuyển, phủ định, kéo theo, tương đương).

Các mệnh đề không được xây dựng từ các mệnh đề khác qua các phép toán lôgic gọi là mệnh đề sơ cấp.

Ví dụ 7. Giải thích tại sao công thức $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$ là mệnh đề phức hợp.

Định nghĩa 2

a) Một công thức luôn có giá trị đúng được gọi là một hằng đúng hay định lí (Hay còn gọi là luật).

b) Một công thức luôn có giá trị sai được gọi là hằng sai hay mâu thuẫn.

Ví dụ 8. Chứng tỏ rằng : Công thức $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$ là định lý.

Định nghĩa 3

a) Hai mệnh đề *A* và *B* gọi là tương đương logic nếu chúng có cùng chân trị. Khi đó ta viết: $A \equiv B$ hay A=B.

b) Mệnh đề *B* gọi là hệ quả logic của mệnh đề *A* nếu $A \Rightarrow B$ là một mệnh đề hằng đúng.

Ví dụ 9. Hai mệnh đề sau là tương đương lôgic: $P \vee (Q \Rightarrow R) \equiv P \vee (\overline{Q} \vee R)$

(Vì biểu thức con $Q \Rightarrow R$ tương đương lôgic với $\overline{Q} \vee R$).

Luyện tập 9. Chứng tỏ rằng: Hai mệnh đề E và F sau là tương đương lôgic.

$$E = \overline{P \Rightarrow Q},\ F = \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}.$$

Chú ý

Mệnh đề phức hợp *A* và *B* tương đương lô gic khi và chỉ khi $A \Leftrightarrow B$ là mệnh đề hằng đúng.

1.3.2. Độ ưu tiên của các thuật toán

Cấp ưu tiên	Thực hiện

1 2	Các phép toán trong ngoặc. Phép phủ định (-),phép hội $(\wedge)$
3 4 5	Phép tuyển $(\vee)$ Phép kéo theo $(\Rightarrow)$ Phép tương đương $(\Leftrightarrow)$

1.3.3. Các qui luật lôgic

1) Định lí

Với *P, Q, R* là các mệnh đề bất kỳ. Khi đó ta có:

1. Luật phủ định của phủ định: $\overline{\left(\overline{P}\right)}=P$
2. Các luật De Morgan: $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}; \overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}.$
3. Luật giao hoán: $P \wedge Q = Q \wedge P; P \vee Q = Q \vee P.$
4. Luật kết hợp: $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R; P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R.$
5. Luật phân bố:

   $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R);$
   $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$
6. Luật lũy đẳng: $P \wedge P = P; P \vee P = P.$
7. Luật về phần tử bù: $P \wedge \overline{P} = 0; P \vee \overline{P} = 1.$
8. Luật thống trị: $P \wedge 0 = 0; P \vee 1 = 1.$
9. Luật hấp thụ: $P \wedge (P \vee Q) = P; P \vee (P \wedge Q) = P.$
10. Luật chứng minh phản chứng thứ nhất: $P \Rightarrow Q = \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
11. Luật chứng minh phản chứng thứ hai: $\overline{P \Rightarrow Q} = P \wedge \overline{Q}$

Chứng minh

11 luật trên có thể kiểm tra bằng cách lập bảng chân trị 2 vế của tương đương lôgic

Ví dụ 10. Chứng minh: $((P \wedge Q) \Rightarrow R) = (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$.

Giải.

$$(P \wedge Q) \Rightarrow R = \overline{P \wedge Q} \vee R$$
$$= (\overline{P} \vee \overline{Q}) \vee R$$
$$= \overline{P} \vee (\overline{Q} \vee R)$$
$$= \overline{P} \vee (Q \Rightarrow R)$$
$$= P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$$

Luyện tập 10. Chứng minh mệnh đề sau là mệnh đề hằng đúng.

$$((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$$

2. Hàm mệnh đề

2.1.Định nghĩa

Hàm mệnh đề là một khẳng định *P(x, y, ...)* trong đó có chứa một số biến *x,y,...*lấy giá trị trong những tập hợp cho trước *A, B,...*sao cho:

+ Bản thân *P(x,y,..)* không phải là mệnh đề

+ Nếu thay *x,y,...*bởi các giá trị cụ thể $a \in A, b \in B$ ...ta sẽ được một mệnh đề.

Ví dụ 11.

P (n) = "n là một số nguyên tố" là một hàm mệnh đề theo biến $n \in \mathbb{N}$.

Với n = 2, n = 7 ta được các mệnh đề đúng P(2), P(7); còn n = 4, n = 6, n = 9 ta được các mệnh đề sai P(4), P(6), P(9).

Luyện tập 11. Cho Q(x, y) = "x = y + 3" là một hàm mệnh đề theo 2 biến $x, y \in \mathbb{R}$.

Xác định chân trị của các mệnh đề Q(1,2) và Q(3,0).

2.2. Vị từ và lượng tử

2.2.1.Định nghĩa

Giả sử *P(x)* là một mệnh đề theo biến $x \in A$.

- $\forall x \in A, P(x)$là một mệnh đề, nó nhận giá trị đúng khi và chỉ khi với phần tử bất kỳ $a \in A$ ta có: *P(a) = 1*.
- $\exists x \in A, P(x)$ là một mệnh đề, nó nhận giá trị đúng khi và chỉ khi tồn tại $a \in A$ để *P(a) = 1*.

Các toán tử $\forall, \exists$ được gọi là các lượng tử, $\forall$ được gọi là lượng tử là lượng tử chung (hay lượng tử với mọi), $\exists$ được gọi là lượng tử riêng (hay lượng tử tồn tại).

Mệnh đề có chứa các lượng tử gọi là các vị từ.

Ví dụ 12. Mệnh đề" với mọi số nguyên n ta có 2n + 1 là một số lẻ" có thể viết: $\forall n \in \mathbb{Z},\ 2n+1$ lẻ. Và mệnh đề này có giá trị đúng.

Luyện tập 12. Sử dụng lượng từ $\exists$ để viết mệnh đề sau và xác định giá trị của mệnh đề này: "Tồn tại số thực x để $\ln(x^2-3)=0$."

2.2.2. Phủ định của vị từ

Định lí

Nếu P(x) là hàm mệnh đề xác định trên tập A, ta có:

a) $\overline{\forall x \in A,\ P(x)} = \exists x \in A,\ \overline{P(x)}$.

b) $\overline{\exists x \in A,\ P(x)} = \forall x \in A,\ \overline{P(x)}$.

Hệ quả

Nếu P(x) là hàm mệnh đề xác định trên tập A, ta có:

a) $\overline{\forall x,\ (P(x) \Rightarrow Q(x))} = \exists x,\ (P(x) \wedge \overline{Q(x)})$.

b) $\overline{\exists x,\ (P(x) \Rightarrow Q(x))} = \forall x,\ (P(x) \wedge \overline{Q(x)})$.

Ví dụ 13. Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$" là mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$".

Luyện tập 13. Lấy phủ định của định nghĩa một hàm thực liên tục tại $x_0 \in \mathbb{R}$ cho bởi công thức sau:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (\left|x - x_0\right| < \delta) \Rightarrow (\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon)$$

Bài 2. Các phương pháp chứng minh- tập hợp

3. Suy luận Toán học

3.1. Suy luận và quy tắc suy diễn

Suy luận là rút ra mệnh đề mới từ một hay nhiều mệnh đã có. Mệnh đề đã có được gọi là giả thiết hay tiền đề, mệnh đề mới được gọi là kết luận

Các quy tắc suy diễn thường dùng

1) Qui tắc Modus Ponens (Phương pháp khẳng định)

Công thức: $\left[(P \Rightarrow Q) \wedge P\right] \Rightarrow Q$

Dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \underline{P \quad\quad} \\ Q \end{array}$$

Ví dụ 1.

Nếu một số có tổng các chữ số chia hết cho 3 , thì số đó chia hết cho 3

Số 31257 có tổng các chữ số là 3 + 1+2 +5 +7 = 18 chia hết cho 3.

Số 31257 chia hết cho 3

Luyện tập 1.

Lập dưới dạng sơ đồ câu phát biểu sau: "Số 23418 chia hết cho 9 vì có tổng các chữ số chia hết cho 9".

2) Qui tắc Modus Tollens (phương pháp phủ định)

Công thức: $\left[(P \Rightarrow Q) \wedge \overline{Q}\right] \Rightarrow \overline{P}$

Dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \underline{\overline{Q} \quad\quad} \\ \overline{P} \end{array}$$

Ví dụ 2.

Nếu một số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì số đó chia hết cho 9

Số 35687 không chia hết cho 9

Số 35687 có tổng các chữ số không chia hết cho 9

Luyện tập 2.

Lập dưới dạng sơ đồ câu phát biểu sau: "Số 23417 không chia hết cho 3 vì có tổng các chữ số chia hết cho 3"

3) Tam đoạn luận (Syllogism)

Công thức: $\left[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\right] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \underline{Q \Rightarrow R} \\ P \Rightarrow R \end{array}$$

Ví dụ 3.

Nếu một số chia hết cho 2 thì số đó là số chẵn

Nếu một số là số chẵn thì số đó viết được dưới dạng 2k, với k là số tự nhiên.

Nếu một số chia hết cho 2 thì số đó viết được dưới dạng 2k, với k là số tự nhiên.

Luyện tập 3.

Lập dưới dạng sơ đồ liên kết để rút ra kết luận từ các câu phát biểu sau:" Nếu một số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì số đó chia hết cho 9"," Nếu một số chia hết cho 9 thì số đó chia hết cho 3".

4) Qui tắc mâu thuẫn (chứng minh bằng phản chứng)

Công thức: $P \Rightarrow Q = \left[\left(P \wedge \overline{Q}\right) \Rightarrow 0\right]$

Qui tắc này cho phép ta chứng minh $\left(P \Rightarrow \overline{Q}\right) \Rightarrow 0$ thay cho $P \Rightarrow Q$

Nói cách khác, nếu thêm giả thiết phụ $\overline{Q}$ vào giả thiết P cho trước mà dẫn đến một mâu thuẫn thì Q là hệ quả lôgic của P.

Ví dụ 4.

Nếu tam giác có hai phân giác bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Nếu tam giác không phải là tam giác cân thì tam giác không có hai phân giác bằng nhau.

Luyện tập 4.

Viết tương đương logic của mệnh đề sau:” Nếu một số chia hết cho 3 thì số đó có tổng các chữ số chia hết cho 3”.

Ví dụ minh họa áp dụng các quy tắc suy diễn

Ví dụ 5. Chứng minh công thức sau hằng đúng:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge ((x_1 \vee x_2) \Rightarrow \overline{x_3 \wedge x_4}) \Rightarrow \overline{(x_3 \wedge x_4)} \quad (1)$$

Giải. Mô hình suy diễn của công thức (1) là:

$$\frac{\begin{cases}(x_1 \vee x_2) \\ (x_1 \vee x_2) \Rightarrow \overline{(x_3 \vee x_4)}\end{cases}}{\therefore \overline{x_3 \vee x_4}} (K\text{đ}) \equiv \frac{\overline{x_3 \vee x_4}}{\therefore x_3 \wedge x_4} \equiv 1$$

Vậy (1) là công thức hằng đúng.

Luyện tập 5.

Suy luận dưới đây là đúng hay sai:

“ Bình đi chơi thì Bình không học Toán rời rạc. Bình không học Toán rời rạc thì Bình thi trượt Toán rời rạc. Mà Bình thích đi chơi. Vậy Bình thi trượt Toán rời rạc”

3.2. Một số phương pháp chứng minh Toán học

1) Phương pháp chứng minh trực tiếp

Nội dung phương pháp

Để chứng minh mệnh đề đúng có dạng: $A \Rightarrow B$

Ta xây dựng một dãy các hệ quả lôgic sau:

$$A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, ...A_{n-1} \Rightarrow A_n, A_n \Rightarrow B$$

Áp dụng qui tắc Modus Ponens, ta có:

$A, A \Rightarrow A_1$ đúng thì A_1 đúng.

$A_1, A_1 \Rightarrow A_2$ đúng thì A_2 đúng

……………………….

$A_n, A_n \Rightarrow B$ đúng thì B đúng

Ví dụ 6.

Chứng minh rằng nếu n chia hết cho 3 thì n^2 chia hết cho 9.

Chứng minh

Giả sử n chia hết cho 3, suy ra $n = 3k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 = 9k^2$. Do đó n^2 chia hết cho 9.

Luyện tập 6.

Chứng minh rằng nếu n là số nguyên tố lớn hơn 5 thì $n^2 - 1$ chia hết cho 24.

2).Phương pháp chứng minh gián tiếp

Nội dung phương pháp

Để chứng minh mệnh đề đúng có dạng $P \Rightarrow Q$

Ta có thể chứng minh $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ đúng , vì: $P \Rightarrow Q = \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Phương pháp chứng minh này gọi là chứng minh gián tiếp.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng nếu $3n + 1$ $(n \in \mathbb{Z})$ là số chẵn thì n là số lẻ .

Chứng minh

Giả sử n là số chẵn, suy ra: $n = 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3n + 1 = 3(2k) + 1 = 6k + 1$ là số lẻ.

Luyện tập 7. Chứng minh rằng nếu p^2 là bội số của 3 thì p là bội số của 3.

3).Phương pháp chứng minh phản chứng

Nội dung phương pháp

Phương pháp phản chứng dựa trên qui tắc mâu thuẫn: $(P \Rightarrow Q) = (P \wedge \overline{Q} \Rightarrow 0)$.

Như vậy, để chứng minh mệnh đề đúng có dạng: $P \Rightarrow Q$, ta có thể chứng minh bằng phản chứng rằng: giả sử P đúng nhưng Q sai, khi đó ta sẽ nhận được mâu thuẫn.

Ví dụ 8.

Chứng minh rằng nếu n là số nguyên tố lớn hơn 5 thì $n^2 - 1$ chia hết cho 24.

Chứng minh

Các bước lập luận sẽ là:

1. Giả sử n là số nguyên tố lớn hơn 5 , n^2-1 không chia hết cho 24.

2. $n^2-1=(n-1)(n+1)$.

3. $n-1, n+1$ là 2 số chẵn liên tiếp nên tích $(n-1)(n+1)$ chia hết cho 4.

4. n^2-1 không chia hết cho 24 nên n^2-1 không chia hết cho 6.

5. Suy ra n^2-1 không chia hết cho 2 hoặc không chia hết cho 3.

6. Xét hai trường hợp:

+ Nếu n^2-1 không chia hết cho 2 thì n-1 và n+1 là hai số lẻ suy ra n là số chẵn. Vậy n không là số nguyên tố lớn hơn 5,

+ Nếu n^2-1 không chia hết cho 3 thì n phải chia hết cho 3, vì (n-1)(n+1) chia hết cho 3 (ba số tự nhiên liên tiếp). Vậy n không là số nguyên tố lớn hơn 5.

7. Từ (6) suy ra n không là số nguyên tố lớn hơn 5. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Luyện tập 8. Chứng minh rằng: Nếu 3n+2 là số lẻ thì n là số lẻ.

4. Lý thuyết tập hợp

4.1.Tập hợp

1) Khái niệm tập hợp

a) Khái niệm tập hợp**:** Tập hợp là một khái niệm cơ bản của Toán học, không được định nghĩa, mà làm cơ sở để định nghĩa các khái niệm khác.

Những yếu tố tạo thành tập hợp gọi là phần tử (hay điểm) của tập hợp.

Nếu *a* là một phần tử của tập hợp *A*, ta viết: $a \in A$ (đọc: "Phần tử *a* thuộc tập hợp *A*").

Trong trường hợp ngược lại, ta viết $a \notin A$ (đọc: "Phần tử *a* không thuộc tập hợp *A*").

b) Hai cách xác định tập hợp

Cách 1. Liệt kê các phần tử của tập hợp.

- Các phần tử của tập hợp được viết trong hai dấu ngoặc nhọn {}, cách nhau bởi dấu";" (nếu có phần tử là số) hoặc dấu",".
- Mỗi phần tử được liệt kê một lần, thứ tự liệt kê tùy ý.

Cách 2. Nêu ra tính chất đặc trưng của các phần tử thuộc tập hợp.

" Tính chất" ở đây thường được biểu hiện bởi một vị từ *p(x)* theo một biến $x \in U$. Khi ấy tập hợp tất cả các phần tử $x \in U$ sao cho *p(x)* đúng được kí hiệu bởi:

$A = \{x \in U \mid p(x)\}$ được gọi là tập hợp vũ trụ. Nếu *U* hiểu ngầm thì *A* có thể viết:

A={ x | p(x) }.

Ví dụ 9. Tập hợp A các phần tử có thể cho bằng 2 cách sau:

Cách 1. Liệt kê:

$$A = \{-1; 1\}.$$

Cách 2. Nêu ra tính chất đặc trưng của các phần tử tạo thành tập hợp.

$$A = \{x \in R \mid x^2 - 1 = 0\}$$

Luyện tập 9.

Cho ví dụ xác định tập hợp bằng 2 cách: Liệt kê và chỉ ra các thuộc tính đặc trưng.

2). Các loại tập hợp

a) Các tập hợp số

N = {0; 1; 2; 3; ….}: Tập hợp các số tự nhiên.

N* = {1; 2; 3; 4; …}: Tập hợp các số tự nhiên khác 0.

Z = {….; -2; -1; 0; 1; 2; ….}: Tập hợp các số nguyên.

$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p,q \in Z \ \& \ q \neq 0 \right\}$:Tập hợp các số hữu tỉ.

R: Tập hợp các số thực.

C: Tập hợp các số phức.

b) Tập hữu hạn và tập vô hạn

- Nếu tập hợp A có n phần tử thì ta nói A là tập hợp hữu hạn và viết |A|=n.
- Nếu tập hợp A có vô số phần tử thì ta nói A là tập hợp vô hạn và viết $|A| = +\infty$.

Tập rỗng: Tập hợp rỗng là tập hợp không có phần tử nào, kí hiệu $\varnothing$.

Tập con của một tập hợp: Nếu mọi phần tử của tập hợp *A* đều là phần tử của tập hợp *B* thì ta nói *A* là tập hợp con của tập hợp *B* (hay được bao hàm trong *B*, hay *B* bao hàm *A*, kí hiệu: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Định nghĩa trên có thể viết dưới dạng kí hiệu như sau: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$

c) Hai tập hợp bằng nhau

Hai tập hợp *A* và *B* được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi tập hợp *A* là tập hợp con của tập hợp *B* và tập hợp *B* là tập hợp con của tập hợp *A*.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \cap (B \subset A)$$

d) Biểu đồ Venn: Biểu đồ Venn là đường cong kín biểu diễn tập hợp, mà mỗi phần tử của tập hợp được đặc trưng bởi một điểm nằm trong đường cong ấy.

4.2.Các phép toán trên tập hợp.

1). Các phép toán

Giả sử A, B là hai tập hợp con của tập hợp vũ trụ U.

a) Phép giao:

$$A \cap B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói hai tập A và B rời nhau.

b) Phép hợp:

$$A \cup B = \{x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

c) Phép hiệu:

$$A \setminus B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Ví dụ 10.

Cho hai tập hợp A = {1, 2, 5, 7, 8, 12} và B = {2, 4, 7, 9, 13}.

Hãy xác định các tập hợp:

$$A \cap B; A \cup B; A \setminus B; B \setminus A.$$

Luyện tập 10.

Cho hai tập hợp A = {0 , 2, 8, 7, 11, 12} và B = {0, 4, 8, 11, 15}.

Hãy xác định các tập hợp:

$$A \cap B; A \cup B; A \setminus B; B \setminus A.$$

d) Phép lấy phần bù:

$$\overline{A} = C_B^A = B \setminus A = \{x \in U \mid (x \in B) \wedge (x \notin A)\}$$

Ví dụ 11.

Cho hai tập hợp A = { 5, 9, 14, 17, 29} và B = { 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 29}.

Hãy xác định tập hợp: $\overline{A} = C_B^A$

Luyện tập 11.

Cho hai tập hợp:

A = {1, 5, 9, 12, 15, 27} và B = { 1, 2, 3, 4, 5,7, 9, 12, 14, 15,27, 29}.

Hãy xác định tập hợp: $\overline{A} = C_B^A$

2). Các tính chất của các phép toán

Với *A*, *B*, *C* là các tập con tùy ý của tập hợp vũ trụ U, ta có:

1. Tính giao hoán:

$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cup B = B \cup A.$$

2. Tính kết hợp:

$$\left(A \cap B\right) \cap C = A \cap \left(B \cap C\right),$$
$$\left(A \cup B\right) \cup C = A \cup \left(B \cup C\right).$$

3. Tính phân phối:

$$A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right),$$
$$A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup C\right).$$

4. Công thức De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

5. Phần tử trung hòa:

$$A \cup \varnothing = A,$$
$$A \cap U = A.$$

6. Phần bù:

$$A \cup \overline{A} = U,$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

7. Tính thống trị:

$$A \cup U = U,$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing.$$

3) Lực lượng của tập hợp

Kí hiệu lực lượng của tập hợp A là |A| định nghĩa:

|A| = Số phần tử của A

Khi đó ta có các công thức sau:

a) $\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right|.$

b) $\left|A \cup B \cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A \cap B\right| - \left|A \cap C\right| - \left|B \cap C\right| + \left|A \cap B \cap C\right|.$

Ví dụ 12.

Có 150 sinh viên ghi tên học môn Lôgic Toán; 120 sinh viên ghi tên học môn lý thuyết đồ thị và 200 sinh viên ghi tên học môn Văn phạm và ôtômat. Hỏi có bao nhiêu sinh viên ghi tên học một trong ba môn, biết rằng không có sinh viên nào ghi tên học đồng thời 2 môn hoặc cả 3 môn.

Giải

Gọi

A:=" Tập sinh viên học môn Lôgic Toán" , suy ra |A| = 150.

B:=" Tập sinh viên học môn lý thuyết đồ thị" , suy ra |B| = 120.

C:=" Tập sinh viên học môn Văn phạm và ôtômat", suy ra |C| = 200.

Ta có:

$$A \cap B = \phi, A \cap C = \phi, B \cap C = \phi, A \cap B \cap C = \phi.$$

Số sinh viên ghi tên học một trong ba môn là:

$$\left|A \cup B \cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| = 470.$$

Luyện tập 12. Mỗi sinh viên lớp Toán rời rạc hoặc là giỏi Toán , hoặc là giỏi tin, hoặc giỏi cả hai môn này. Trong lớp có bao nhiêu sinh viên nếu có 38 người giỏi Tin, 23 người giỏi Toán và 7 người giỏi cả hai môn?

4) Biểu diễn tập hợp trên máy tính

Giả sử X là một tập vũ trụ và $A \subseteq X$ (với giả thiết dung lượng bộ nhớ của máy tính không bé hơn lực lượng của X).

Giả sử |X| = n, khi đó ta sắp (đánh số) các phần tử của $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Ta có thể biểu diễn tập A trên máy tính bằng một xâu bít có chiều dài n, trong đó bit thứ i là 1 nếu $a_i \in A$, còn bít thứ i là 0 nếu $a_i \notin A (i = \overline{1, n})$.

Ví dụ 13.

Cho X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (sắp xếp các phần tử của X theo thứ tự tăng dần)

a) Xác định xâu bit của tập $A = \{1,3,5,7,9\} \subset X$.

b) Xác định xâu bit của tập $A = \{2,4,6,8\} \subset X$.

c) Xác định xâu bit của tập các phần tử không vượt quá 5 trong X, tức là tìm xâu bit của tập C = {1, 2, 3, 4, 5}.

Giải.

a) Xác định xâu bit của tập A là: 1010101010.

b) Xác định xâu bit của tập B là: 0101010101.

c) Xác định xâu bit của tập C là: 1111100000.

Luyện tập 13.

Cho X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (sắp xếp các phần tử của X theo thứ tự tăng dần) và các tập hợp sau: A ={1, 3, 5, 7, 9 }; B ={2, 4, 6, 8}; C ={ 1, 2, 3, 4, 5}.

a) Xác định xâu bit của tập $A \cup B$.

b) Xác định xâu bit của tập $A \cap B$.

c) Xác định xâu bit của tập $\overline{A}, \overline{B}$.

Chú ý.

+ Để nhận được các xâu bit cho hợp của hai tập hợp, ta thực hiện phép tuyển $(\vee)$ hai xâu bit đó.

+ Để nhận được các xâu bit cho giao của hai tập hợp, ta thực hiện phép hội $(\wedge)$ hai xâu bit đó.

+ Để nhận được các xâu bit của phần bù của tập hợp A, ta chỉ việc thay 0 bởi 1 và thay 1 bởi 0 trong xâu bit của A.

Bài 3. Ánh xạ - quy nạp Toán học

5. Ánh xạ

1) Tích Descartes của các tập hợp

Tích Descartes của hai tập hợp *A* và *B*, kí hiệu $A \times B$, là tập các cặp có thứ tự *(a,b)*, trong đó $a \in A \& b \in B$.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B\}$$

Định lý.

Cho các tập hữu hạn A, B, C. Thì:

a) $|A \times B| = |A| \times |B|$.

b) $|A \times B \times C| = |A| \times |B| \times |C|$.

Ví dụ 1.

Nếu *A* = *{a, b}*, *B* = *{c, d, e}* thì

$A \times B = \ (a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\ $.

Luyện tập 1. Cho các tập hợp *A* = *{1, 2}*, *B* = *{a, b, c}*.Tính:

a) $A \times B$.

b) $|A \times B|$.

2) Ánh xạ

Định nghĩa 1

a) Một ánh xạ *f* từ tập *X* vào tập *Y*, kí hiệu $f: X \to Y$, là phép tương ứng liên kết mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y \in Y$

Kí hiệu:

$$\begin{aligned} f &: X \to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- *X* gọi là tập nguồn (hay miền xác định của hàm *f*), *Y* gọi là tập đích .

- Phần tử $y = f(x) \in Y$ gọi là ảnh của x.
- $f\left(x\right) = \left\{ y \in Y \mid \exists x \in X, y = f\left(x\right) \right\}$ gọi là miền giá trị của *f*.

b) Hai ánh xạ *f*,*g* từ *X* vào *Y* được gọi là bằng nhau nếu:

$$\forall x \in X, f\left(x\right) = g\left(x\right)$$

Ví dụ 2.

Phép tương ứng

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = 2x + 1 \end{aligned}$$

Là một ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$, vì với mỗi $x \in \mathbb{R}$ có đúng một $y \in \mathbb{R}$ xác định bởi *y =2x +1*.

Luyện tập 2.

Phép tương ứng

$$\begin{aligned} f : R &\to R \\ x &\mapsto y = \frac{2}{x-5} \end{aligned}$$

Có phải là ánh xạ không vì sao?.

Chú ý: Trong Toán học, từ "ánh xạ" cũng thường được thay bằng từ "hàm" hoặc "toán tử".

Định nghĩa 2

a) Nếu *A* là một tập con của *X* thì ảnh của *A* bởi *f* là tập hợp:

$$f(A) = \left\{ y \in Y \mid \exists x \in A, y = f\left(x\right) \right\}$$

b) Nếu *B* là một tập con của *Y* thì nghịch ảnh (tạo ảnh) của *B* là tập hợp:

$$f^{-1}\left(B\right) = \left\{ x \in X \mid f\left(x\right) \in B \right\}$$

Khi $B = \left\{ b \right\}$ thì: $f^{-1}\left(b\right) = \left\{ x \in X \mid f\left(x\right) \right\}$.

Định nghĩa 3 (các loại ánh xạ)

Xét ánh xạ $f: X \to Y$.

Định nghĩa 3.1

Ánh xạ *f* được gọi là đơn ánh (injunction) nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (tức là mỗi $y \in Y$ hoặc không có nghịch ảnh hoặc là ảnh của nhiều nhất một phần tử thuộc *X*).

Một đơn ánh còn được gọi là ánh xạ một đối một (one-to-one). Ngoài ra từ tính tương đương lô gic của các mệnh đề $p \Rightarrow q \,\&\, \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$, chúng ta có thể suy ra rằng $f: X \to Y$ là đơn ánh khi và chỉ khi $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Ví dụ 3.

Ánh xạ

$$f: \{a, b, c, d\} \to \{1,2,3,4,5\}$$
$$f(a) = 4,\ f(b) = 5,\ f(c) = 1,\ f(d) = 3$$

Là một đơn ánh.

Luyện tập 3.

Chứng tỏ rằng, ánh xạ:

$$f: R \to R$$
$$x \mapsto f(x) = x^3$$

Là một đơn ánh.

Định nghĩa 3.2

Ánh xạ *f* được gọi là toàn ánh (surjection) nếu $f(X) = Y$ (tức là mỗi $y \in Y$ đều là ảnh của một hay nhiều phần tử $x \in X$).Một toàn ánh $f: X \to Y$ còn được gọi là ánh xạ từ X lên (on to) Y.

Ví dụ 4.

Ánh xạ:

$$f: \{a, b, c, d\} \to \{1,2,3\}$$
$$f(a) = 3,\ f(b) = 2,\ f(c) = 1,\ f(d) = 3$$

Là toàn ánh.

Luyện tập 4.

Ánh xạ:

$$f : R \rightarrow R$$
$$x \mapsto f(x) = x^2$$

Có phải là ánh xạ toàn ánh không, vì sao?

Định nghĩa 3.3

Ánh xạ *f* được gọi là song ánh nếu nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh.

Ví dụ 5.

Ánh xạ

$$f : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1,2,3,4\}$$
$$f(a) = 3,\ f(b) = 2,\ f(c) = 4,\ f(d) = 1$$

Là một ánh xạ song ánh.

Luyện tập 5.

Chứng minh rằng, ánh xạ:

$$f : R \rightarrow R$$
$$x \mapsto f(x) = x^3 + 1$$

Là một ánh xạ song ánh.

Chú ý:

Nếu ánh xạ f là một song ánh từ *X* vào *Y*, ta viết: $f : X \leftrightarrow Y$

Khi ấy: $\forall y \in Y, \exists! x \in X : f(x) = y$

Trong đó kí hiệu $\exists!$ để chỉ tồn tại duy nhất *x*.

Do đó tương ứng $y \mapsto x$ là một ánh xạ từ *Y* vào *X*, và gọi là **ánh xạ ngược** của *f*, kí hiệu: f^{-1}.

Vậy:

$$f^{-1}: Y \to X$$
$$y \mapsto f^{-1}(y) = x, f(x) = y.$$

Định nghĩa 4

Giả sử ta có ánh xạ song ánh $f: X \to Y$, ánh xạ ngược của f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi $y \in Y$ với một phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho *f(x) = y* . Ánh xạ ngược của ánh xạ f được kí hiệu là f^{-1}.

Ví dụ 6.

Xét song ánh

$$f: \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$$
$$f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 1$$

Tìm các ánh xạ ngược của ánh xạ f.

Giải.

Ánh xạ ngược của ánh xạ f là:

$$f^{-1}: \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$$
$$f^{-1}(1) = c, f^{-1}(2) = a, f^{-1}(3) = b$$

Luyện tập 6.

Tìm ánh xạ ngược của ánh xạ:

$$f: R \to R$$
$$x \mapsto f(x) = x^3 + 1$$

Định nghĩa 4 (Tích các ánh xạ)

Cho hai ánh xạ $f: X \to Y$ & $g: Y \to Z$

Tích của hai ánh xạ *f* và *g* là ánh xạ *h* từ *X* vào *Z* xác định bởi:

$$h : X \to Z$$
$$x \mapsto h(x) = g\left(f(x)\right)$$
$$\Rightarrow h = g_0 f : X \to Y \to Z$$
$$x \mapsto f(x) \mapsto h(x) = g\left(f(x)\right)$$

Ví dụ 7.

Cho hai ánh xạ:

$$f : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$$
$$f(a) = b,\ f(b) = c,\ f(c) = a;$$
$$g : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$$
$$g(a) = 3, g(b) = 2, g(c) = 1$$

Giải

Ta có:

$$f : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$$
$$f(a) = b,\ f(b) = c,\ f(c) = a;$$
$$g : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$$
$$g(a) = 3, g(b) = 2, g(c) = 1$$

Suy ra:

$$(g_0 f)(a) = g\left(f(a)\right) = g(b) = 2$$
$$(g_0 f)(b) = g\left(f(b)\right) = g(c) = 1$$
$$(g_0 f)(c) = g\left(f(c)\right) = g(a) = 3$$

Luyện tập 7.

Cho hai ánh xạ:

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto f(x) = \cos x.$$
$$g : R \to R$$
$$x \mapsto g(x) = x^3 + 1$$

Tìm tích $g \circ f$.

Định lí

Giả sử: $f: X \to Y$. A_1, A_2 là hai tập con của X, B_1, B_2 là hai tập con của Y. Ta có:

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

b) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

6. Phương pháp quy nạp

Nội dung phương pháp

Nguyên lý qui nạp

Mệnh đề $\forall n \in N, P(n)$ là hệ quả của mệnh đề: $P(0) \wedge \left[\forall n \in N, P(n) \Rightarrow P(n+1)\right]$

Phương pháp chứng minh bằng qui nạp

Để chứng minh *P(n)* đúng với mọi $n \in N$, tùy ý:

Bước 1.(cơ sở) Kiểm chứng để khẳng định *P(0)* đúng.

Bước 2. (qui nạp) Giả sử với $n \in N$ tùy ý, *P(n)* đúng. Ta chứng minh *P(n+1)* đúng.

Bước 3. (Kết luận) *P(n)* đúng với mọi số tự nhiên *n*.

Chú ý. Nguyên lý qui nạp có thể bắt đầu từ số $n_0 \in N$.

Nghĩa là: $\left[P(n_0) \wedge \left[\forall n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)\right]\right] \Rightarrow \left[\forall n \geq n_0, P(n)\right]$.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Chúng minh

Xét: P(n): "$0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$".

+ Bước cơ sở: Khi n=0 thì P(0) là mệnh đề: $0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

Vế phải của đẳng thức bằng 0. Nên P(0) đúng.

+ Bước quy nạp: Giả sử P(n) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}$ tùy ý:

$$0+1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Khi ấy $0+1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Nghĩa là P(n+1) đúng.

Do đó theo nguyên lý qui nạp, ta có điều phải chứng minh.

Luyện tập 8. Chứng minh rằng: Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 6.

7. Đệ quy và ứng dụng

Ta có thể sử dụng đệ quy để định nghĩa các dãy số, hàm số và tập hợp. Chẳng hạn, để định nghĩa một hàm xác định trên tập hợp các số nguyên không âm, chúng ta cho:

1) Giá trị của hàm tại *n = 0*.

2) Công thức tính giá trị của nó tại số nguyên n từ các giá trị của nó tại các số nguyên nhỏ hơn.

Định nghĩa như trên được gọi là **định nghĩa đệ quy.**

Ví dụ 9.

Giả sử hàm f được định nghĩa đệ quy như sau: $f(0)=3, f(n+1)=2f(n)+3$.

Hãy tìm f(1), f(2) và f(3).

Giải

Từ định nghĩa đệ quy ta có:

f(1) = 2f(0) +3 = 2.3 + 3 = 9.

f(2) = 2f(1) +3 = 2.9 +3 = 21.

f(3) = 2f(2) + 3 = 2.21 + 3 = 45.

Luyện tập 9.

Giả sử tập A được định nghĩa đệ quy như sau:

1. $3 \in A$.
2. $x \in A \,\&\, y \in A \Rightarrow x+y \in A$

Chứng minh rằng A là tập các số nguyên dương chia hết cho 3.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Xét chân trị các mệnh đề sau:

a) $\left(\sqrt{2}<1\right)\wedge(1<3)$; b) $(2+4=6)\vee(\log_2 1<0)$; c) $(1>5)\Rightarrow(5+4<6)$.

Bài 2. Lập bảng chân trị cho các mệnh đề phức hợp sau:

a) $\overline{P}\Rightarrow(P\vee Q)$; b) $\overline{P}\Rightarrow\left(\overline{Q}\vee R\right)$;

c) $P\vee(Q\wedge R)$; d) $(P\wedge Q)\Leftrightarrow(Q\wedge R)\wedge\overline{Q}$.

Bài 3. Hãy chỉ ra các hằng đúng trong các công thức sau:

a) $(P\vee Q)\Rightarrow(P\wedge Q)$; b) $(P\wedge Q)\Rightarrow(P\vee Q)$;

c) $P\Rightarrow\left(\overline{Q}\Rightarrow P\right)$; d) $(P\Rightarrow Q)\Rightarrow\left[(Q\Rightarrow R)\Rightarrow(P\Rightarrow R)\right]$.

Bài 4. Chứng minh các tương đương lôgic sau:

a) $(P\Rightarrow(Q\Rightarrow P))=\left(R\vee\overline{R}\right)$; b) $(P\wedge Q)\vee\overline{Q}=P\vee\overline{Q}$;

c) $(P\Rightarrow Q)=\left(\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}\right)$; d) $((P\wedge Q)\Rightarrow R)=(P\Rightarrow(Q\Rightarrow R))$.

Bài 5. Xét các hàm mệnh đề theo biến thực *x*:

$P(x): x^2-5x+6=0$

$Q(x): x^2-4x-5=0$

$R(x): x>0$

Hãy xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a) $\forall x, P(x)\Rightarrow R(x)$; b) $\forall x, Q(x)\Rightarrow\neg R(x)$;

c) $\exists x, Q(x)\Rightarrow R(x)$; d) $\exists x, P(x)\Rightarrow\neg R(x)$.

Bài 6. Các ánh xạ $f: A\to B$ sau là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Xác định ánh xạ ngược nếu có:

a) $A=\mathbb{R}, B=\mathbb{R}, f(x)=x+7$.

b) $A=\mathbb{R}, B=\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x-3$.

c) $A=[4,9], B=[21,96], f(x)=x^2+2x-3$.

d) $A=\mathbb{R}, B=\mathbb{R}, f(x)=3x+2|x|$.

Bài 7. Cho ánh xạ $f: E \to F$. Chứng minh: F đơn ánh khi và chỉ khi $f(A \cap B)=f(A)\cap f(B)$; với mọi $A,B \subseteq E$. Qui ước: $f(\varnothing)=\varnothing$.

Bài 8. Cho các ánh xạ $f: E \to F$ & $g: F \to G$. Đặt $h=g_o f$. Chứng minh:

a) Nếu *h* toàn ánh thì *g* toàn ánh.

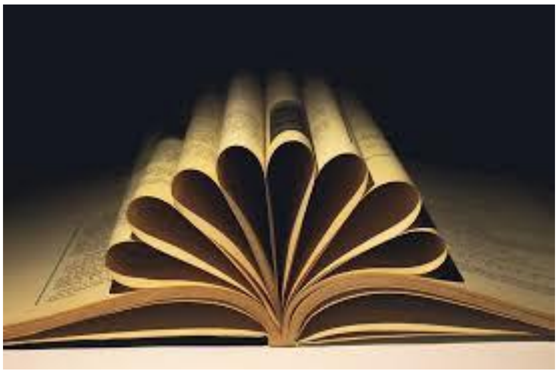
b) Nếu *h* đơn ánh thì *f* đơn ánh.

Bài 9. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có:

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bài 10. Tính tổng $T=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VĂN LANG
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN



CÁC BÀI GIẢNG TOÁN RỜI RẠC

Biên soạn: PGS.TS. NGUYỄN VĂN LỘC- TS. TRẦN NGỌC VIỆT

TP.HỒ CHÍ MINH .THÁNG 2 NĂM 2020

Chương 2. PHÉP ĐẾM

Bài 4. Các nguyên lý:

+ Nguyên lý cộng.

+ Nguyên lý nhân.

+ Nguyên lý bù trừ.

1. Các cơ sở lý thuyết.

Nền tảng lý thuyết của các nguyên lý đếm cơ bản là các khái niệm về quan hệ giữa số phần tử của hai tập hợp hữu hạn được phát biểu trong các định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 1.

Hai tập hợp hữu hạn A và B được gọi là có số phần tử bằng nhau, ký hiệu $|A| = |B|$, nếu có một song ánh $f : A \to B$.

Định nghĩa 2.

Giả sử A và B là hai tập hợp hữu hạn, ta nói số phần tử của A nhỏ hơn hoặc bằng số phần tử của B, ký hiệu $|A| \le |B|$, nếu có một đơn ánh $f : A \to B$.

Từ định nghĩa 2, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.

Hai tập hợp hữu hạn A và B có số phần tử bằng nhau nếu có một đơn ánh từ A đến B và một đơn ánh từ B đến A.

Mối quan hệ giữa số phần tử của hai tập hợp và số phần tử của hợp, giao, tích Descartes của hai tập hợp đó, là cơ sở của các nguyên lý đếm cơ bản được phát biểu trong định lý 1.

Định lý 1.

Giả sử A và B là hai tập hợp hữu hạn. Khi đó ta có :

a) $A \cup B = |A| + |B|$ nếu $A \cap B = \varnothing$.

b) $|A \times B| = |A| \times |B|$

Hệ quả 1.1.

Giả sử A là một tập hữu hạn, B là một tập hợp con của A và $\overline{B}$ là phần bù của B trong A thì $\left|A\right| = \left|B\right| + \left|\overline{B}\right|$.

Ví dụ 1.

Một đoàn vận động viên tham gia thi hai môn bắn súng và bơi. Đoàn có 10 vận động viên nam. Số vận động viên thi bắn súng là 14 người. Số vận động viên nữ thi bơi bằng số vận động viên nam thi bắn súng. Hỏi toàn đoàn có bao nhiêu người.

Giải

Vì số vận động viên nam đã biết nên để tìm số vận động viên toàn đoàn chỉ cần tìm số vận động viên nữ.

Gọi A là tập hợp các vận động viên nữ, A_1, A_2 lần lượt là tập hợp các vận động viên nữ thi bắn súng và thi bơi thì $\left|A\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right|$. Gọi B là tập hợp các nam vận động viên thi bắn súng, theo giả thiết ta có $\left|A_2\right| = \left|B\right|$. Từ đây suy ra $\left|A\right| = \left|A_1\right| + \left|B\right|$. Nghĩa là, số vận động viên nữ bằng tổng số vận động viên nữ bắn súng và vận động viên nam bắn súng. Theo giả thiết tổng số này là 14. vậy số nữ vận động viên là 14, do đó toàn đoàn có 10 +14 = 24 vận động viên.

Luyện tập 1.

Trong một đợt phổ biến đề tài tốt nghiệp. Ban chủ nhệm khoa công bố danhsach1 các đề tài bao gồm 80 đề tài về chủ đề "xây dựng hệ thông tin quản lý", 10 đề tài về chủ đề "thiết kế phần mềm dạy học", 10 đề tài về "hệ chuyên gia". Hỏi một sinh viên có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?

Định lý 2. (Định lý tổng quát)

Giả sử n là số nguyên dương, $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ là các tập hợp hữu hạn. Khi đó ta có:

$$a).\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| + \ldots + \left|A_n\right|, \forall i, j = 1,2,\ldots,n, i \neq j, A_i \cap A_j = \phi$$
$$b).\left|A_1 \times A_2 \times \ldots A_n\right| = \left|A_1\right| \times \left|A_2\right| \times \ldots \times \left|A_n\right|$$

Với m, n là các số nguyên dương. Tìm số ánh xạ từ tập A có m phần tử đến tập B có n phần tử.

Giải

Giả sử

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \& B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$$

Đặt

$$F = \{f : A \to B\} = \{(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_m)) \mid f(a_i) \in B, \forall i = 1, ..., m\}$$
$$\Rightarrow \{(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_m)) \mid f(a_i)\} = B \times B \times B \times ... \times B (m..lan0$$
$$\Rightarrow |F| = |B \times B \times ... \times B| = |B|^M = n^m$$

Vậy số ánh xạ từ tập A có m phần tử đến tập B có n phần tử là n^m.

Luyện tập 2.

Ghi nhãn cho chiếc ghế trong hội trường bằng một chữ cái và một số nguyên dương không vượt quá 100. Hỏi có bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn?

2. Các nguyên lý đếm cơ bản

1.1. Nguyên lý cộng:

Giả sử một công việc được phân thành n trường hợp riêng biệt: trường hợp 1 có m_1 cách thực hiện, trường hợp 2 có m_2 cách thực hiện, …, trường hợp n có m_n cách thực hiện. Khi đó số cách thực hiện công việc là : $m_1 + m_2 + ... + m_n$.

Chú ý

Nguyên lý cộng có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau: Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập hợp rời nhau, ta có $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$.

Ví dụ 3.

Cho tập hợp A {1, 2, 3}. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một tập con B của A.

Giải

Để chọn ra một tập con B của A ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Chọn tập B không chứa phần tử nào cả: có 1 cách chọn $B = \varnothing$.

+ Trường hợp 2: Chọn tập B chứa một phần tử: có 3 cách chọn (B ={1}, B = {2}, B= {3}).

+ Trường hợp 3: Chọn tập B chứa 2 phần tử: có 3 cách chọn: (B = {1, 2}, B = {1, 3}, B = {2, 3}).

+ Trường hợp 4: Chọn tập B chứa 3 phần tử : có 1 cách chọn (B =A).

Vậy theo nguyên lý cộng, ta có tất cả 1 +3 +3 +1 = 8 cách chọn tập con B.

Luyện tập 3.

Một sinh viên có thể chọn bài thực hành trên máy tính từ 4 danh sách. Danh sách thứ nhất có 23 bài thực hành; danh sách thứ 2 có 19 bài thực hành; danh sách thứ 3 có 15 bài thực hành; danh sách thứ 4 có 20 bài thực hành. Biết các bài thực hành trong các danh sách là khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn bài thực hành trên máy tính?

1.2. Nguyên lý nhân

Giả sử một công việc được thực hiện qua n bước liên tiếp: bước 1 có m_1 cách thực hiện, bước 2 có m_2 cách thực hiện, …, bước n có m_n cách thực hiện. Khi đó số cáchchọn thực hiện công viêc là $m_1.m_2....m_n$.

Chú ý. Nguyên lý nhân có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau: Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập hợp hữu hạn, ta có

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots |A_n|$$

Ví dụ 4.

Có bao nhiêu dãy nhị phân có độ dài bằng 7?

Giải.

Mỗi một trong 7 bít của dãy nhị phân có thể chọn bằng 2 cách (Vì mỗi bít bằng 0 hoặc bằng 1). Theo nguyên lý nhân có $2^7 = 128$ dãy nhị phân có độ dài 7.

Luyện tập 4.

Trong một lớp học gồm 30 người. Có bao nhiêu cách cử một ban đại diện lớp gồm một lớp trưởng, một lớp phó và một thủ quỹ?

1.3. Nguyên lý bù trừ

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, để tính số cách thực hiện công việc, ta tính số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc.

1.4. Định lí (Nguyên lý bù trừ)

Giả sử $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập hợp hữu hạn. Khi đó :

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n\right| = \sum_{1 \le i \le n} \left|A_i\right| - + \sum_{1 \le i \prec j \prec k \le n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - ... + (-1)^{n+1} \left|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n\right|$$

Áp dụng định lí trên với :

Hai tập hợp A_1, A_2 ta có : $\left|A_1 \cup A_2\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| - \left|A_1 \cap A_2\right|$

Ba tập hợp A_1, A_2, A_3 ta có:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_3\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| + \left|A_3\right| - \left|A_1 \cap A_2\right| - \left|A_1 \cap A_3\right| - \left|A_2 \cap A_3\right| + \left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right|$$

Ví dụ 5.

Có bao nhiêu dãy nhị phân độ dài 8 bit hoặc được bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00 ?

Giải

+ Việc thứ nhất, xây dựng dãy nhị phân độ dài 8 bit được bắt đầu bằng bit 1: có 2^7 (vì bit đầu chỉ có thể chọn bằng một cách, mỗi một trong 7 bit sau có thể chọn bằng 2 cách)

+Viêc thứ hai, xây dựng dãy nhị phân độ dài 8 kết thúc bằng hai bit 00: có $2^6 = 64$ cách.

+ Có thể làm cả hai việc đồng thời, xây dựng dãy nhị phân độ dài 8 bit được bắt đầu bằng bit 1 và kết thúc bằng hai bit 00: có $2^5 = 32$ cách.

Kết luận: Số dãy nhị phân thỏa mãn yêu cầu là :

128 +64 - 32 = 160.

Luyện tập 5.

Trong một lớp học có 180 sinh viên. Trong số này có 55 sinh viên chọn môn Anh văn, 45 sinh viên chọn môn Pháp văn và 15 sinh viên chọn cả Anh văn và Pháp văn. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không theo học Anh văn cũng không theo học Pháp văn ?

Bài 5. Nguyên lý chuồng bồ câu.

Hoán vị, tổ hợp và chỉnh hợp:

+ **Định nghĩa và công thức.**

+ **Công thức nhị thức Newton.**

+ **Hệ số tổ hợp.**

2.4. Nguyên lý Dirichlet (nguyên lý chuồng bồ câu)

Nguyên lý Dirichlet 1

Nguyên lý này được phát triển từ một mệnh đề rất đơn giản gọi là nguyên lý **"chuồng chim bồ câu".** Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ngăn (cửa) chuồng thì chắc chắn có ít nhất một ngăn (cửa) có nhiều hơn một con chim bay vào.

Ví dụ 1.

Trong số 367 người bất kỳ bao giờ cũng tìm được ít nhất 2 người có ngày sinh nhật giống nhau.

Giải

Do một năm chỉ có 366 ngày tháng sinh khác nhau, kể cả ngày 29 tháng 2. Nên nếu không tồn tại hai người có cùng ngày sinh nhật thì chỉ có 366 người có ngày sinh nhật, điều đó mâu thuẫn với giả thiết có 367 người có ngày sinh nhật.

Luyện tập 1.

Trong kì thi học sinh giỏi Toán, điểm bài thi được đánh giá bo7i3mo65t số nguyên trong khoảng từ 0 đến 100. Hỏi rằng ít nhất phải có bao nhiêu học sinh dự thi để chắc chắn tìm được hai học sinh có điểm kết quả giống nhau.

Nguyên lý Dirichlet tổng quát 2.

Nếu xếp nhiều hơn *n* đối tượng vào *n* cái hộp thì tồn tại ít nhất một hộp chứa không ít hơn 2 đối tượng.

Chứng minh (phản chứng).

Giả sử không hộp nào chứa nhiều hơn một đối tượng, thì chỉ có nhiều nhất là *n* đối tượng được xếp vào các hộp, điều đó trái với giả thiết là số đối tượng lớn hơn *n*.

Điều mâu thuẫn chứng tỏ rằng: Phải tồn tại một hộp chứa không ít hơn 2 đối tượng.

Ví dụ 2.

Chứng minh rằng: Mọi tập hợp A có ít nhất 6 phần tử của tập

B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} sẽ có hai trong số các phần tử có tổng bằng 10.

Giải

Xét các cửa của chuồng bồ câu được chọn là các tập hợp con {1,9}, {2, 8}, {3, 7}, {4, 6}, {5}. Do chỉ có 5 cửa trong khi số chim bồ câu không ít hơn 6, nên có ít nhất 2 phần tử phân biệt của A thuộc về cùng một tập hợp con trên, hay chính xác hơn thuộc về cùng một trong bốn tập hợp con đầu tiên.

Đó là những cặp có tổng số bằng 10.

Luyện tập 2.1.

Trong mặt phẳng cho 6 điểm, từng cặp nối với nhau bởi các cung màu xanh hoặc màu đỏ.Chứng minh rằng: luôn tìm được 3 điểm sao cho các cung nối chúng có cùng màu (chúng tạo thành tam giác xanh hoặc đỏ).

Luyện tập 2.2

Xét một cơ sở dữ liệu có 500 000 bản tin (record). Hỏi có thể sử dụng một vùng (thuộc tính) với nhiều nhất 4 ký tự là các mẫu tự làm khóa chính hay không? Ở đây một vùng được nói là một khóa chính nếu giá trị của nó xác định bản tin duy nhất. (Bảng ký tự có 26 chữ cái)

Giải

Số các từ gồm nhiều nhất 4 mẫu tự làm số cửa của chuồng bồ câu. Số cửa này được cho bởi nguyên lý cộng và nguyên lỳ nhân:

$$26^4 + 26^3 + 26^2 + 26^1 = 475254$$

Vì có đến 500.000 bồ câu nên có ít nhất hai bản tin có cùng giá trị của thuộc tính, suy ra không thể dùng thuộc tính này làm khóa chính được.

Nguyên lý Dirichlet tổng quát 3

Nếu đem xếp *n* đối tượng vào *k* cái hộp, thì ít nhất một hộp chứa không ít hơn $\left[n/k\right]$ đối tượng ($\left[n/k\right]$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $\frac{n}{k} \le \left[\frac{n}{k}\right]$)

(ký hiệu$\left[x\right]$ là số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn *x*).

Chú ý.

$$\left[\frac{3}{4}\right]=1,\left[\frac{4}{3}\right]=2,\left[-\frac{3}{4}\right]=0$$

Ví dụ 3.

Trong 100 người. Hỏi có ít nhất bao nhiêu người sinh cùng một tháng?

Giải

Xếp những người cùng sinh một tháng vào một nhóm. Có 12 tháng tất cả, nên có 12 nhóm. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một nhóm có không ít hơn: $\left[\frac{100}{12}\right]=[8,3]=9$ người.

Luyện tập 3.

Trong Khoa học máy tính, để xử lý các ký hiệu cần phải mã hóa chúng bằng các số nhị phân.Giả sử mỗi ký hiệu được mã hóa bởi số nhị phân 8 bit, hãy cho biết một bảng mã các ký như vậy có thể mã hóa được tối đa bao nhiêu ký hiệu?

2.3. Giải tích tổ hợp

2.3.1. Hoán vị

Định nghĩa

Một hoán vị của n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm đủ mặt n phần tử đã cho.

Công thức: Số các hoán vị của n phần tử là:

$$P_n=n!=n.(n-1)(n-2)....2.1.$$

Ví dụ 4.

Thầy giáo muốn tặng 5 cuốn sách khác nhau cho 5 học sinh (mỗi học sinh chỉ nhận 1 cuốn). Hỏi có bao nhiêu cách tặng.

Giải

Số cách tặng sách là: $P_5=5!=120$.

Luyện tập 4.

Một thương nhân đi bán hàng tại tám thành phố. Chị ta bắt đầu cuộc hành trình của mình tại một thành phố nào đó và có thể đến 7 thành phố kia theo bất kỳ lộ trình nào mà chị muốn sau đó trở về thành phố xuất phát. Hỏi chị này có thể đi qua tất cả các thành phố theo bao nhiêu lộ trình khác nhau?

2.3.2. Chỉnh hợp

Định nghĩa

Một chỉnh hợp chập *k* từ *n* phần tử $(1 \le k \le n)$ là một bộ có thứ tự gồm *k* phần tử lấy từ *n* phần tử đã cho, mỗi phần tử không được lấy lặp lại.

Định lí

Số các chỉnh hợp chập k của tập n phần tử là:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

Đặc biệt khi $k = n,\ A_n^k = P_n = n!$

Ví dụ 5.

Một lớp phải học 10 môn, mỗi ngày học 2 môn. Hỏi có bao nhêu cách sắp xếp thời khóa biểu trong một ngày?

Giải

Mỗi cách sắp xếp thời khóa biểu trong ngày là việc ghép hai môn trong số 10 môn, các cách này khác nhau do có ít nhất một môn khác nhau hoặc chỉ do thứ tự sắp xếp trước sau giữa hai môn. Vì vậy, mỗi cách xếp ứng với một chỉnh hợp chập 2 từ 10 phần tử. Do đó, số cách xếp thời khóa biểu là: $A_{10}^2 = 10.9 = 90$.

Luyện tập 5.

Giả sử có 8 vận động viên chạy thi tốc độ cư ly 2000m. Người đến đích đầu tiên được trao huy chương vàng, người đến đích thứ hai được trao huy chương bạc, người đến đích thứ ba được trao huy chương đồng. Hỏi có bao nhiêu cách trao huy chương Vàng, Bạc, Đồng cho 8 vận động viên trên.

Chú ý.

Tất cả các bài toán đếm sử dụng chỉnh hợp chập k đều có thể giải bằng cách sử dụng nguyên lý nhân cho n bước, tuy nhiên sử dụng chỉnh hợp thì ngắn gọn hơn.

2.3.3.Tổ hợp

Định nghĩa

Một tổ hợp chập k từ n phần tử $(1 \le k \le n)$ là một bộ gồm k phần tử không phân biệt thư 1 tự lấy từ n phần tử đã cho, mỗi phần tử không được lấy lặp lại. Cũng có thể nói, một tổ hợp chập k là tập con gồm k phần tử của tập n phần tử đã cho.

Định lí

Số tổ hợp chập *k* của tập *n* phần tử là: $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Ví dụ 6.

Một tổ gồm 8 nam và 6 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một nhóm 5 người mà trong đó có đúng 2 nữ ?

Giải

+ Số cách chọn 2 nữ trong 6 nữ là :

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!.4!} = 15$$

+ Số cách chọn 3 nam trong 8 nam là:

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!.5!} = 56$$

Vậy số cách chọn 5 bạn theo yêu cầu là : 15.56 = 840.

Luyện tập 6.

Một lớp học có 20 sinh viên, trong đó có 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử 3 người đi dự hội nghị sinh viên của trường sao cho trong 3 người đó có ít nhất một cán bộ lớp ?

Định lí 2 (Định lí nhị thức)

Cho các số thực a,b và số nguyên $n \ge 1$. Ta có :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n \quad (*)$$

Công thức trên còn gọi là **khai triển nhị thức Newton.**

Hệ quả.

Cho số nguyên $n \ge 1$ khi đó:

a) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n.$

b) $\left(-1\right)^0C_n^0+\left(-1\right)^1C_n^1+\left(-1\right)^2C_n^2+...+\left(-1\right)^{n-1}C_n^{n-1}+\left(-1\right)^nC_n^n=0.$

Chú ý.

+Vế phải của (*) có n + 1 số hạng; số mũ của a giảm dần từ n đến 0, còn số mũ của b tăng dần từ 0 đến n; tổng các số mũ của a và b trong một số hạng luôn bằng n.

+Số hạng thứ k + 1 trong khai triển của $(a+b)^n$ là $C_n^k a^{n-k}b^k$.

+ Vì $C_n^r = C_n^{n-r}$ nên các số hạng ở vế phải của (*) có tính đối xứng.

Ví dụ 7.

Viết khai triển Newton của biểu thức $(3x-1)^{16}$ .Từ đó chứng minh rằng:

$$3^{16}C_{16}^0-3^{15}C_{16}^1+3^{14}C_{16}^2-...+C_{16}^{16}=2^{16}$$

Giải

Viết khai triển Newton của biểu thức $(3x-1)^{16}$

$$\left(3x-1\right)^{16}=\sum_{k=0}^{16}C_{16}^k\left(3x\right)^{16-k}\left(-1\right)^k=C_{16}^0 3^{16}x^{16}-C_{16}^1 3^{15}x^{15}+C_{16}^2 3^{14}x^{14}-...+C_{16}^{16}.$$

Cho x = 1 ta được :

$$2^{16}=\left(3-1\right)^{16}=C_{16}^0 3^{16}-C_{16}^1 3^{15}+C_{16}^2 3^{14}-...+C_{16}^{16}$$

Luyện tập 7.

Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển:

$$P(x)=\left(2+x\right)^{15}$$

2.3.5.Tam giác Pascal

n = 1: 1 1

n = 2: 1 2 1

n = 3: 1 3 3 1

n = 4: 1 4 6 4 1

n = 5: 1 5 10 10 5 1

n = 6: 1 6 15 20 15 6 1

……………………………………..

Các số trên lập thành một tam giác, gọi là **tam giác Pascal.**

Hằng đẳng thức PASCAL.

Trong tam giác Pascal có hai cạnh được ghi toàn bằng số 1, các ô còn lại được ghi theo hằng đẳng thức Pascal: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Nghĩa là giá trị của một ô bằng giá tri của ô ngay trên cộng cho bên trái của ô ngay trên đó.

Ví dụ 8.

Chứng minh rằng : với $3 \le k \le n$ ta có $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-1} = C_{n+3}^k$.

Giải

Ta có :

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-1} = C_n^k + C_n^{k-2} + 2\left(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}\right) + C_n^{k-2} + C_n^{k-3} =$$
$$= C_{n+1}^k + 2C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2} = \left(C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}\right) + \left(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}\right) =$$
$$= C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1} = C_{n+3}^k (dpcm)$$

Luyện tập 8.

Chứng minh rằng với $4 \le k \le n$ thì

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k.$$

Bài 6. Hoán vị -chỉnh hợp lặp và tổ hợp lặp.

Nếu một phần tử có thể xuất hiện nhiều lần thì ta có hoán vị lặp, chỉnh hợp lặp, tổ hợp lặp.

1. Hoán vị lặp.

Định nghĩa

Nếu có n vật, được xếp vào n vị trí, mà trong n vật này ta có n_1 vật giống nhau n_2, vật giống nhau n_k, vật giống nhau. Thì hoán vị của n phần tử gọi là hoán vị lặp.

Định lí 1

Số cách xếp đặt n vật này vào n chỗ là : $\overline{P}_n = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$.

Ví dụ 1.

Xét những số gồm 9 chữ số, trong đó có 5 chữ số 1 và bốn chữ số còn lại là 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số như thế nếu các chữ số được xếp tùy ý.

Giải

Dùng 9 chữ số gồm 5 chữ số 1 và các số 2, 3, 4, 5. Ta hoán vị để có các số cần lập, nhưng làm như thế đã bị lập lại 5! (vì khi hoán vị các số 1, ta có có số không đổi)

Vậy, số các số lập được chỉ có là: $\overline{P_8} = \frac{9!}{5!} = 6.7.8.9 = 3024$.

Luyện tập 1.

Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, còn mỗi số khác có mặt đúng 1 lần.

2. Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa

Một **chỉnh hợp lặp chập *k(k- repetitive permutation)* của *n* phần tử** là một bộ có thứ tự gồm *k* phần tử lấy từ *n* phần tử đã cho, trong đó, mỗi phần tử có thể được lấy lặp lại.

Ký hiêu số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là: $\overline{A_n^k}$.

Định lí 2

Số chỉnh hợp lặp chập *k* của *n* phần tử là: $\overline{A_n^k} = n^k$.

Ví dụ 2.

Hãy tìm số các dãy nhị phân có độ dài k

Giải

Mỗi dãy nhị phân có độ dài k tương ứng là một chỉnh hợp lặp chập k của 2 phần tử 0 và 1 .

Vậy số các dãy nhị phân có độ dài k là: $\overline{A_2^k} = 2^k$.

Luyện tập 2.1.

Để đăng ký một loại máy mới, người ta dùng 3 chữ số trong 9 chữ số : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Hỏi có thể đánh số được bao nhiêu máy?

Luyện tập 2.2.

Với 6 chữ số 1, 2, 3,4,5, 6 có thể lập được bao nhiêu số gồm 7 chữ số trong đó chữ số 6 có mặt hai lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần?

3. Tổ hợp lặp

Một tổ hợp lặp chập *k* (k- repetitive combination) của *n* phần tử là một bộ gồm *k* phần tử không phân biệt thứ tự, mỗi phần tử có thể được lấy lặp lại từ *n* phần tử đã cho.

Định lí 3

Số tổ hợp lặp chập *k* từ *n* phần tử là: $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$.

Ví dụ 3.

Có 4 loại bút bi: xanh, đỏ, vàng, tím và mỗi loại có ít nhất 6 cây bút (các bút cùng loại là giống nhau). Có bao nhiêu cách khác nhau để mua 6 cây bút ?

Giải

Mỗi bộ 6 cây được mua từ 4 loại bút là một tổ hợp lặp chập 6 của 4 phần tử.

Vậy số cách khác nhau để mua là: $\overline{C_4^6} = C_9^6 = 84$.

Luyện tập 3.

Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình: $x_1 + x_2 + x_3 = 11$.

Bài tập ôn tập chương 2.

Bài 1. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài:

a) Bằng n ?

b) Nhỏ hơn hoặc bằng n ?

Bài 2. Có thể tạo được bao nhiêu hàm số từ tập A có m phần tử vào tập B có n phần tử ?

Bài 3.Trong một Trường Đại học có 18 sinh viên xuất sắc về Toán và 325 sinh viên xuất sắc về CNTT.

a) Có bao nhiêu cách chọn hai đại diện, sao cho một là sinh viên Toán, còn người kia là sinh viên CNTT?

b) Có bao nhiêu cách chọn một đại diện là sinh viên Toán hoặc sinh viên CNTT ?

Bài 4. Biết rằng có 1232 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha; 879 sinh viên học tiếng Pháp; 114 sinh viên học tiếng Nga; 103 sinh viên học cả Tây Ban Nha và Pháp; 23 sinh viên học cả Tây Ban Nha và Nga; 14 sinh viên học cả Pháp và Nga. Nếu tất cả 2092 sinh viên đều theo học ít nhất một ngoại ngữ thì có bao nhiêu sinh viên học cả ba thứ tiếng?

Bài 5. Trong bất kỳ một nhóm 27 từ tiếng Anh nào, ít nhất cũng có 2 từ bắt đầu bằng cùng một chữ cái ?

Bài 6. Chứng tỏ rằng, trong bất kỳ một tập hợp gồm 6 lớp học nào cũng có ít nhất hai lớp gặp nhau cùng một ngày, biết một tuần học từ thứ 2 đến thứ 6.

Bài 7. Có 100 vé đánh số từ 1 đến 100 được bán cho 100 người khác nhau. Người ta sẽ trao 4 giải thưởng kể cả giải độc đắc. Hỏi :

a) Có bao nhiêu cách trao thưởng?

b) Có bao nhiêu cách trao thưởng nếu người giữ vé 47 trúng giải độc đắc?

Bài 8. Một câu lạc bộ có 25 thành viên.

a) Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào ủy ban thường trực?

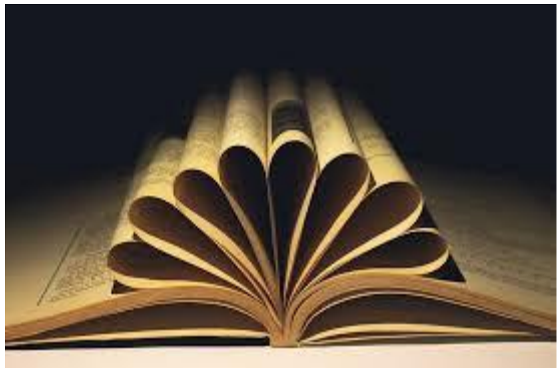
b) Có bao nhiêu cách chọn chủ tịch, phó chủ tịch, thư ký và thủ quỹ?

Bài 9. Tìm hệ số của x^9 trong khai triển của $(2-x)^{19}$.

Bài 10. Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển của $(2x-3y)^{200}$.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VĂN LANG

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN



CÁC BÀI GIẢNG TOÁN RỜI RẠC

Biên soạn: PGS.TS. NGUYỄN VĂN LỘC- TS. TRẦN NGỌC VIỆT

TP.HỒ CHÍ MINH .THÁNG 2 NĂM 2020

Chương 3. QUAN HỆ

Bài 7. 1).Quan hệ trên các tập hợp: + Quan hệ hai ngôi trên một tập hợp;+ Các tính chất: Phản xạ, đối xứng, phản xứng, và truyền.

2).Biểu diễn quan hệ: + Nêu nội dung quan hệ; + Liệt kê tập hợp;

+ Dùng ma trận.

1. Quan hệ trên các tập hợp.

1.1. Quan hệ hai ngôi trên một tập hợp.

Định nghĩa 1

Cho hai tập hợp A, B khác rỗng. Một tập con $\Re$ cuả tích Đề-các $A \times B$ được gọi là một quan hệ hai ngôi (binary relation) $\Re$ từ tập A vào tập B. Như vậy, cho quan hệ hai ngôi từ A vào B, tức là cho $\Re \subseteq A \times B$.

Một quan hệ hai ngôi từ A vào A được gọi là một quan hệ hai ngôi trên A.

Nếu $(a,b) \in \Re$ ta viết $a\Re b$, ngược lại $(a,b) \notin \Re$ ta viết $a\overline{\Re}b$.

Chú ý. Một ánh xạ *f* từ A đến B cũng là một quan hệ, tuy nhiên điều ngược lại không đúng. Nói cách khác, ánh xạ là trường hợp đặc biệt của quan hệ

Ví dụ 1

Cho A = {1, 2, 3,4} và B = {3, 5}. Chứng minh rằng: Quan hệ $\Re$ = {(1, 4), (1, 5), (3, 3), (3, 5)} là một quan hệ hai ngôi từ A vào B.

Giải

Quan hệ $\Re$ = {(1, 4), (1, 5), (3, 3), (3, 5)} là một quan hệ hai ngôi từ A vào B,

Vì $\Re \subseteq A \times B$.

Luyện tập 1

Chứng tỏ rằng: các quan hệ sau là các quan hệ hai ngôi trên tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$:

$\Re_1 = \ (a,b) \mid a \le b \ $;

$\Re_2 = \ (a,b) \mid a > b \ ;$

$\Re_3 = \ (a,b) \mid a = b \vee a = -b \ ;$

$\Re_4 = \ (a,b) \mid a = b \ ;$

$\Re_5 = \ (a,b) \mid a = b + 1 \ ;$

$\Re_6 = \ (a,b) \mid a + b \leq 3 \ .$

Định nghĩa 2

Một quan hệ n- ngôi (n- ary relation) giữa các tập hợp $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ là một tập con $\Re$ của tích Descartes $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$.

Các tập $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ được gọi là miền xác định, số n là bậc và $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Re$ là bộ n- tọa độ (n- thành phần) của quan hệ.

Ví dụ 2. Cho tập $\Re = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{N}, x^2 + y^2 = z^2\}$ là một quan hệ 3-ngôi trên tập các số tự nhiên. Xác định một cặp phần tử của $\Re$.

Giải

Theo bài ra: Tập $\Re = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{N}, x^2 + y^2 = z^2\}$ là một quan hệ 3-ngôi trên tập các số tự nhiên. Có thể thấy: $(3,4,5) \in \mathbb{N}, 3^2 + 4^2 = 5^2$.

$$(6,8,10) \in \mathbb{N}, 6^2 + 8^2 = 10^2$$

Luyện tập 2

Giả sử A, N, S, D, T lần lượt là các tập hợp biểu diễn tên các hãng hàng không, số chuyến bay, các điểm đi, điểm đến và thời gian xuất phát các chuyến bay, thì một tập con các bộ 5 phần tử (*a, n, s, d, t*) của $A \times N \times S \times D \times T$ là một quan hệ 5-ngôi biểu diễn các chuyến bay. Hãy xác định một phần tử của quan hệ này.

1.2. Các tính chất của quan hệ hai ngôi

1.2.1. Quan hệ phản xạ

Định nghĩa

Một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp A được gọi là có tính phản xạ (reflexive) nếu $\forall a \in A \Rightarrow a\Re a$.

Ví dụ 3

Quan hệ " = " trên tập hợp số bất kỳ là có tính phản xạ vì mọi số đều bằng chính nó.

Luyện tập 3.

Cho tập A = {1, 2, 3, 4}, và các quan hệ hai ngôi sau:

$$\Re_1 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\};$$
$$\Re_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}.$$

Chứng minh rằng: Quan hệ $\Re_1$ có tính phản xạ; còn quan hệ $\Re_2$ không có tính phản xạ.

1.2.2. Quan hệ đối xứng

Định nghĩa

Một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp A được gọi là có tính đối xứng (symmetric) nếu $\forall a, b \in A \,\&\, a\Re b \Rightarrow b\Re a$.

Ví dụ 4

Chứng minh rằng: Quan hệ $\Re$ = {(1, 2), (2, 1), (2, 2), 1, 3), (3, 1)} trên tập A = {1, 2, 3,4} là đối xứng.

Giải

Quan hệ $\Re$ = {(1, 2), (2, 1), (2, 2), 1, 3), (3, 1)} trên tập A = {1, 2, 3,4} là đối xứng.

Vì $\forall a, b \in A, (a,b) \in \Re \Rightarrow (b,a) \in \Re$.

Luyện tập 4. Chứng minh rằng: Quan hệ "$\leq$" trên các tập số N, Z, Q, R không có tính đối xứng.

1.2.3. Quan hệ phản đối xứng

Định nghĩa

Một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp A được gọi là có tính phản đối xứng (antisymmetric) nếu $\forall a, b \in A, a\Re b \,\&\, b\Re a \Rightarrow a = b$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng: Quan hệ "$\subseteq$" trên các tập hợp trong một vũ trụ U là phản đối xứng.

Giải

Quan hệ "$\subseteq$" trên các tập hợp trong một vũ trụ U là phản đối xứng, vì với hai tập hợp $A, B \subseteq U, A \subseteq B \,\&\, B \Re A \Rightarrow A = B$.

Luyện tập 5. Chứng minh rằng: Quan hệ $\Re$ = {(1, 2), (2, 1), (2, 2), 1, 3), (3, 1)} trên tập A = {1, 2, 3,4} không có tính phản đối xứng.

1.2.4. Quan hệ bắc cầu

Định nghĩa

Một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp A được gọi là có tính bắc cầu (transitive) nếu $\forall a, b, c \in A, a\Re b \,\&\, b\Re c \Rightarrow a\Re c$

Ví dụ 6. Chứng minh rằng: Quan hệ $\Re$ = {(1, 1), (2, 3), (3, 4), (2, 4)} trên tập A = {1, 2, 3, 4} có tính bắc cầu.

Giải

Quan hệ $\Re$ = {(1, 1), (2, 3), (3, 4), (2, 4)} trên tập A = {1, 2, 3,4} có tính bắc cầu vì khi có $(2,3), (3,4) \in \Re$ thì cũng có $(2,4) \in \Re$.

Luyện tập 6. Chứng minh rằng: Quan hệ "$\leq$" trên các tập số N, Z, Q, R có tính bắc cầu.

2. Biểu diễn quan hệ

2.1. Biểu diễn quan hệ bằng cách nêu các tính chất đặc trưng.

Nêu tính chất đặc trưng cho quan hệ $\Re$, tức là tính chất hay tiêu chuẩn để xác định các phần tử thuộc $\Re$ hay không.

Ví dụ 7.

Trên tập A = {1, 2, 3, 4, 5}, xét quan hệ $\Re$ được định nghĩa bởi: $a\Re b \Leftrightarrow a + b$ là số lẻ.

Với quan hệ này ta có: $1\Re 2$, nhưng $1\overline{\Re}3$.

Luyện tập 7.

Xét các quan hệ sau trên tập các số nguyên:

$\Re_1 = \ (a,b) \mid a \leq b\ $;

$\Re_2 = \ (a,b) \mid a = b \vee a = -b\ $;

$\Re_3 = \ (a,b) \mid a = b + 1\ $;

$\Re_4 = \ (a,b) \mid a + b \leq 3\ $.

Hỏi mỗi cặp sau được chứa trong các quan hệ nào ở trên: (1; 1), (1; 2), (2; 1), (1; -1).

Giải

2.2. Biểu diễn quan hệ bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp

Liệt kê tất cả các cặp hay bộ phần tử có quan hệ $\Re$ (nếu $\Re$ có ít phần tử).

Ví dụ 8

Cho A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {4, 5, 6, 7}.

Giả sử $\Re$ = {(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)}. Khi đó $\Re$ là một quan hệ từ A vào B.

Luyện tập 8

Cho tập A = {a, b, c, d}, B = {m, n}.

Khi đó tập $\Re = \{(a,n),(b,m),(c,n)\} \subset A \times B$ là một quan hệ từ A vào B.

2.3.Biểu diễn quan hệ bằng cách sử dụng ma trận biểu diễn quan hệ

Cho $\Re$ là một quan hệ giữa tập $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ và tập $B = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$.

Ta có thể biểu diễn quan hệ dưới dạng một ma trận không - một $M_\Re$, gọi là ma trận quan hệ như sau:

Các phần tử của A được sắp xếp theo một trật tự nào đó trên một cột, còn các phần tử của B được sắp xếp theo một trật tự nào đó trên hàng. Khi đó $M_\Re = (m_{ij})_{m \times n}$ được xác định: $m_{ij} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow x_i \Re y_j \\ 0 \Leftrightarrow x_i \overline{\Re} y_j \end{cases}$

Ta nói $\Re$ được biểu diễn bởi ma trận $M_\Re$.Quan hệ hai ngôi $\Re$ và ma trận $M_\Re$ xác định lẫn nhau một cách duy nhất.

Ví dụ 9. Cho A = {2, 3, 4}, B = {5, 6, 7, 8} và $\Re$ = {(2; 6), (2; 8), (3; 6), 4; 8)}. Hãy xác định ma trận của quan hệ $\Re$.

Giải

Biểu diễn theo cột từ trên xuống là các phần tử 2, 3, 4 của tập A, Biểu diễn theo hàng từ trái qua phải là các phần tử 5, 6, 7, 8 của tập B.

Ta có ma trận quan hệ như sau:

$$M_{\Re} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luyện tập 9

Cho A = {a, b, c, d, e}, B = {x, y, z, t}. Giả sử $\Re$ là một quan hệ từ A vào B:

$\Re$ = {(a, x), (a, z), (a, t), (b, y), (b, t), (c, x), (c, y), (c, t), (d, x), (d, y), (d, z), (e, y), (e, t)}. Hãy xác định ma trận của quan hệ $\Re$.

Bài 8. Quan hệ tương đương:+ Lớp tương đương;+ Sự phân hoạch thành các lớp tương đương; + Quan hệ đồng dư mod n.

1. Quan hệ tương đương

1.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1

Một quan hệ $\Re$ trên tập A được gọi là phản xạ (reflexive) nếu: $\forall x \in A: x\Re x$.

Định nghĩa 2

Một quan hệ $\Re$ trên tập A được gọi là đối xứng (symmetric) nếu:

$\forall x, y \in A: x\Re y \Rightarrow y\Re x$.

Định nghĩa 3

Một quan hệ $\Re$ trên tập A được gọi là bắc cầu (transitive) nếu:

$\forall x, y, z \in A: x\Re y \,\&\, y\Re z \Rightarrow x\Re z$.

Định nghĩa 4 (quan hệ tương đương)

Một quan hệ $\Re$ trên tập hợp A được gọi là quan hệ tương đương nếu nó có cả ba tính chất: Phản xạ, đối xứng, bắc cầu. Nghĩa là: a

1) Tính phản xạ: $\forall x \in A: x\Re x$.

2) Tính đối xứng: $\forall x, y \in A: x\Re y \Rightarrow y\Re x$.

3) Tính bắc cầu: $\forall x, y, z \in A: x\Re y \ \& \ y\Re z \Rightarrow x\Re z$.

Ví dụ 1. Gọi P là tập hợp các đường thẳng trong mặt phẳng. Chứng minh rằng: Quan hệ song song được định nghĩa bởi: $M\Re N \Leftrightarrow M // N$.

Là quan hệ tương đương

Chú ý. Quan hệ "⊥" (vuông góc) trên P không phải là quan hê tương đương, vì nó không phản xạ và bắc cầu.

Luyện tập 1.1. Chứng minh rằng: Quan hệ $\Re$ = {(1; 1), (2; 2), (3; 3), (2; 3), (3; 2)} là quan hệ tương đương.

Luyện tập 1.2. Chứng minh rằng: Quan hệ $\Re$ trên $\mathbb{R}$ sau là quan hệ tương đương:

$$x\Re y \Leftrightarrow \sin x = \sin y.$$

2. Phân hoạch tương đương

2.1. Khái niệm phân hoạch tương đương

+ Cho tập $A \neq \phi$ và hữu hạn phần tử. Ta chia tập A thành n tập con $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sao cho $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \ \& \ A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$. Khi đó ta nói các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một phân hoạch tương đương trên tập A.

+ Ngược lại ứng với mỗi phân hoạch tương đương $A_1, A_2, \ldots, A_n$ trên tập A, ta xác định quan hệ tương đương $\Re$ trên A sinh ra phân hoạch đó như sau: $\forall a, b \in A,\ a\Re b \Leftrightarrow \exists A_i, a, b \in A_i \ \ i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Ta chứng tỏ rằng quan hệ $\Re$ định nghĩa như trên là quan hệ tương đương trên A và $\Re$ sinh ra phân hoạch đã cho. Thật vậy, ta chứng tỏ $\Re$ thỏa mãn ba tính chất:

+ **Phản xạ**: Với mỗi $a \in A$ có duy nhất A_i để $a \in A_i \Leftrightarrow a\Re a$.

+ **Đối xứng**: Nếu $a,b \in A$ mà $a\Re b$, suy ra có ít nhất A_i sao cho $a,b \in A_i \quad i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, từ đó $b,a \in A_i \Leftrightarrow b\Re a$.

+ **Bắc cầu**: Giả sử

$$a,b,c \in A \;\&\; a\Re b, b\Re c.$$

$$a\Re b \Rightarrow \exists A_i, a,b \in A_i \;.$$

$$b\Re c \Rightarrow \exists A_j, b,c \in A_j \;.$$

$$A_i \cap A_j = \phi, i \neq j, b \in A_i \;\&\; b \in A_j \Rightarrow A_i = A_j \Rightarrow a,c \in A_i \Leftrightarrow a\Re c.$$

Ví dụ 2. Cho tập A = {2, 3, 4, 5, 6} và phân hoạch của A là $A_1 = \{2;3\}, A_2 = \{4\}, A_3 = \{5,6\}$. Hãy xác định quan hệ $\Re$ sinh ra phân hoạch trên. Chứng tỏ $\Re$ là quan hệ tương đương. Lập ma trận của quan hệ $\Re$.

Giải

Quan hệ $\Re$ sinh ra phân hoạch trên là:

$\Re$ = {(2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (5, 6), (6, 5)} .

Ma trận của quan hệ $\Re$ là:

$$M_R^{5\times5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hàng thứ nhất và hàng thứ hai của ma trận sinh ra $A_1 = \{2,3\}$.

Hàng thứ ba của ma trận sinh ra $A_2 = \{4\}$.

Hàng thứ tư và hàng thứ năm của ma trận sinh ra $A_3 = \{5,6\}$.

Chú ý. Với mỗi quan hệ tương đương $\Re$ trên tập A thì nó sẽ sinh ra một phân hoạch tương đương trên tập A; và ngược lại, với phân hoạch tương đương trên A sẽ snh ra một quan hệ tương đương trên A.

Luyện tập 2. Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5}. Trên A xác định quan hệ $\Re$ như sau: $\forall a,b \in A: a\Re b \Leftrightarrow a+b=2k\ (k=1,2,...)$.

a) Biểu diễn $\Re$ bằng phương pháp liệt kê và ma trận.

b) Chứng minh $\Re$ là quan hệ tương đương trên A.

c) Tìm phân hoạch tương đương trên A do $\Re$ sinh ra.

d) Cho $A_1=\{1\}, A_2=\{2,3\}, A_3=\{4,5\}$. Tìm quan hệ tương đương S trên A mà S sinh ra phân hoạch A_1, A_2, A_3 ở trên.

3. Lớp tương đương

Định nghĩa

Giả sử $\Re$ là một quan hệ tương đương trên A và $x \in A$. Khi ấy lớp tương đương chứa x, kí hiệu $\overline{x}$ hay [x], là tập hợp con: $\{y \in A / y\Re x\}$

Định lí 1

Giả sử $\Re$ là một quan hệ tương đương trên tập hợp A. Khi ấy:

a) $\forall x \in A, x \in [x]$.

b) $\forall x, y \in A, x\Re y \Leftrightarrow [x]=[y]$.

c) Nếu $[x] \cap [y] \neq \varnothing \Rightarrow [x]=[y]$.

Vậy quan hệ tương đương $\Re$ phân hoạch tập hợp A thành các lớp tương đương rời nhau từng đôi một. Hai phần tử có quan hệ $\Re$ thì cùng thuộc một lớp tương đương. Hai phần tử không có quan hệ $\Re$ thì thuộc về hai lớp tương đương rời nhau. Mỗi phần tử trong một lớp tương đương đều là phần tử đại diện của lớp tương đương đó.

Định lí 2

Giả sử $\Re$ là một quan hệ tương đương trên tập hợp A. Khi đó các lớp tương đương của $\Re$ sẽ lập nên một phân hoạch của tập A. Ngược lại, với mỗi phân hoạch đã cho $\{A_i / i \in I\}$ của tập A, tồn tại một quan hệ tương đương $\Re$ có các tập con A_i là các lớp tương đương của nó.

Ví dụ 3.

Xét quan hệ $\Re$ trên $\mathbb{R}$: $x\Re y \Leftrightarrow x^3 - 12x = y^3 - 12y$

Chứng minh rằng: $\Re$ là một quan hệ tương đương. Hãy lập các lớp tương đương tạo bởi các phần tử đại diện: $\{0;2;-5\} \in \mathbb{R}$.

Giải

Xét $\{0;2;-5\} \in \mathbb{R}$ ta có các lớp tương đương:

$$[0] = \ x \in \mathbb{R} \mid x\Re 0 \ = \ x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 12x = 0 \ = \ 0; 2\sqrt{3}; -2\sqrt{3} \ .$$

$$[2] = \ x \in \mathbb{R} \mid x\Re 2 \ = \ x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 12x = -16 \ = \ 2; -4 \ .$$

$$[-5] = \ x \in \mathbb{R} \mid x\Re(-5) \ = \ x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 12x = -65 \ = \ -5 \ .$$

Luyện tập 3

Chứng minh rằng: Quan hệ $\Re$ trên tập $\mathbb{Z}$: $m\Re n \Leftrightarrow m^2 = n^2$. Là quan hệ tương đương. Xác định các lớp tương đương của $\Re$.

4. Quan hệ đồng dư modulo n

4.1. Định nghĩa

Giả sử n là một số nguyên dương, ta định nghĩa quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp $\mathbb{Z}$ sao cho $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a\Re b \Leftrightarrow (a-b) \vdots n$ thì $\Re$ là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{Z}$.

Quan hệ này được gọi là quan hệ đồng dư modulo n trên $\mathbb{Z}$, vì khi a quan hệ với b thì a và b chia cho n có cùng số dư. Nếu $a\Re b$ thì ta viết $a \equiv b (\bmod n)$.

Ví dụ 4. Ký hiệu $\Re$ là quan hệ đồng dư (mod 5). Chứng minh rằng: $2\Re 7$.

Giải

Với n = 5 thì $2\Re 7$ vì 2- 7 chia hết cho 5, nghĩa là $2 \equiv 7 (\bmod 5)$.

Luyện tập 4. Chứng minh rằng: Nếu số nguyên n không chia hết cho 3 thì

$$n^2 \equiv 1 (\bmod 3).$$

4.2. Quan hệ đồng dư là quan hệ tương đương

Bài toán. Quan hệ đồng dư modulo n (*n* nguyên > 1) $\Re = \ (a, b) \mid a \equiv b (\bmod n)$

Có phải là quan hệ tương đương trên tập các số nguyên không?

Giải

+$\forall a \in \mathbb{Z}$ ta có a - a = 0 chia hết cho n (vì 0 = 0.n) nên $a \equiv a(\bmod n) \Rightarrow \Re$ phản xạ.

+$\forall a, b \in \mathbb{Z}$, giả sử $a \equiv b(\bmod n)$. Khi đó $a - b = kn$, với $k \in \mathbb{Z}$. Từ đó suy ra $b - a = -kn$, vậy $b \equiv a(\bmod n) \Rightarrow \Re$ đối xứng.

+$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ giả sử $a \equiv b(\bmod n)$ và $b \equiv c(\bmod n)$. Khi đó

$\exists k, l \in \mathbb{Z} : a - b = k.n \,\&\, b - c = l.n \Rightarrow a - c = k.n + l.n = (k + l)n$

$\Rightarrow a \equiv c(\bmod n) \Rightarrow \Re$.

Bắc cầu.

Vậy $\Re$ là một quan hệ tương đương.

Các hệ quả

Hệ quả 1. $a \equiv b(\bmod n) \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c(\bmod n)$.

Hệ quả 2. $a \equiv b(\bmod n) \Rightarrow a \pm kn \equiv b(\bmod n)$.

Hệ quả 3. $a \equiv b(\bmod n) \Rightarrow a^m \equiv b^m(\bmod n)$.

Ví dụ 5. Tìm số dư của 14^{25} chia cho 17.

Giải

$14 \equiv -3(\bmod 17) \Rightarrow 14^{25} \equiv (-3)^{25}(\bmod 17)$

Vì $(-3)^{25} = (-3)^{24}(-3) = (3^3)^8(-3)$

$\Rightarrow 14^{25} \equiv (3^3)^8(-3)(\bmod 17)$.

Do $3^3 \equiv 10(\bmod 17)$

$\Rightarrow (3^3)^2 \equiv 10^2(\bmod 17) \equiv -2(\bmod 17)$

$\Rightarrow (3^3)^4 \equiv 10^4(\bmod 17) \equiv 4(\bmod 17)$

$\Rightarrow (3^3)^8 \equiv 10^8(\bmod 17) \equiv -1(\bmod 17)$,

Do $(3^3)^8.(-3) \equiv 3(\bmod 17)$

$\Rightarrow 14^{25} \equiv 3(\mathrm{mod}\,17)$.

Vậy số dư bằng 3.

Luyện tập 5. Tìm tất cả các số nguyên dương n để cho số $2^n - 1$ chia hết cho 7.

4.3. Lớp tương đương trong quan hệ đồng dư

Khái niệm

Với $n \in Z$, quan hệ đồng dư (mod n) là một quan hệ tương đương với n lớp đồng dư (lớp tương đương) $[0],[1],...,[n-1]$. Các lớp đồng dư này được ký hiệu lần lượt là $[0]_n,[1]_n,[2]_n,...,[n-1]_n$. Chúng tạo thành một phân hoạch của tập các số nguyên.

Ví dụ 6. Xác định các lớp tương đương của quan hệ đồng dư (mod 3).

Giải

Quan hệ $\equiv (\mathrm{mod}\,3)$ [0], [1], có 3 lớp tương đương:

$[0]= \ \dots;-6;-3;0;3;\dots \ ;$

$[1]= \ \dots;-5;-2;1;4;\dots \ ;$

$[2]= \ \dots;-4;-1;2;5;\dots \ .$

Chú ý rằng: [0] = [3] = [6] =…

[1] = [4] = [7] =…

[2] = [-1] = [5] =…

Như thế {[0], [1], [2]} là một phân hoạch của $\mathbb{Z}$, nghĩa là $\mathbb{Z}$ là hợp của 3 tập hợp đôi một rời nhau [0], [1], [2].

Luyện tập 6. Cho A = {0; 1; 2; 3; 4 ; 5; 6; 9; 11; 23; 24; 39}. Xác định các lớp tương đương của quan hệ đồng dư (mod 5) trên tập A.

Bài 9. Quan hệ thứ tự: + Thứ tự toàn phần và bán phần; + Biểu đồ Hasse; + Phần tử min và max; + Các phần tử tối tiểu và tối đại

1. **Quan hệ thứ tự:**

1.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1

Một quan hệ $\Re$ trên tập A được gọi là phản xạ (reflexive) nếu: $\forall x \in A: x\Re x$.

Định nghĩa 2.

Một quan hệ $\Re$ trên tập hợp A được gọi là phản xứng (antisymmetric) nếu:

$\forall x, y \in A: x\Re y \,\&\, y\Re x \Rightarrow x = y$.

Định nghĩa 3

Một quan hệ $\Re$ trên tập A được gọi là bắc cầu (transitive) nếu:

$\forall x, y, z \in A: x\Re y \,\&\, y\Re z \Rightarrow x\Re z$.

Định nghĩa 4 (Quan hệ thứ tự).

Một quan hệ $\Re$ trên tập hợp A được gọi là quan hệ thứ tự nếu nó phản xạ, phản xứng và bắc cầu. Khi đó ta nói A là một tập hợp sắp thứ tự (hay có thứ tự).

Chú ý

Ta thường kí hiệu một quan hệ thứ tự bởi $\prec$. Cặp $(A, \prec)$ là một tập hợp có thứ tự.

Giả sử B là một tập hợp con của một tập hợp có thứ tự $(A, \prec)$. Khi đó $\prec$ cảm sinh một thứ tự trên B một cách tự nhiên: Với $x, y \in B$, ta nói $x \prec y$ trong B nếu $x \prec y$ trong A.

Ví dụ 1. 1. Cho tập A = {1, 2, 3, 4} và các quan hệ trên tập A:

$\Re_1 = \{(2;1),(3;1),(3;2),(4;1),(4;2),(4;3)\}$.

$\Re_2 = \{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(2;2),(2;3),(2;4),(3;3),(3;4),(4;4)\}$.

$\Re_3 = \{(3;4)\}$.

Chứng minh rằng: Các quan hệ trên có tính phản xứng.

Giải

Các quan hệ trên có tính phản xứng, vì đối với các quan hệ đã cho không có cặp (a, b) nào với $a \neq b$ sao cho cả (a, b) và (b,a) đều thuộc các quan hệ đó.

Ví dụ 1.2. $(\mathbb{R}, \leq)$ là một tập hợp sắp thứ tự. Thứ tự $(\leq)$ cảm sinh các thứ tự tụ nhiên trên Z, Q.

Luyện tập 1.1. Chứng tỏ rằng: Các quan hệ sau trên tập các số nguyên có tính phản xứng:

$$\Re_1 = \{(a,b) / a \leq b\};$$
$$\Re_2 = \{(a,b) / a > b\};$$
$$\Re_3 = \{(a,b) / a = b\};$$
$$\Re_4 = \{(a,b) / a = b + 1\}$$

Luyện tập 1.2. Với $\mathbb{Z}^+$ (tập các số nguyên dương), đặt: $U_n = \ a \in \mathbb{Z} \mid a \mid n$

Trong đó *a*|*n* có nghĩa a là một ước của n hay n chia hết cho a.

Trên U_n ta định nghĩa quan hệ: $x \Re y \Leftrightarrow x \mid y$

Chứng tỏ rằng: Quan hệ $\Re$ là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Z}^+$.

2. Thứ tự toàn phần và bán phần

Định nghĩa (thứ tự toàn phần và thứ tự bán phần)

Xét tập hợp có thứ tự $(A, \prec)$.

i) $\prec$ là thứ tự toàn phần (totally ordered set) nếu $\forall x, y \in A : (x \prec y) \vee (y \prec x)$(nghĩa là hai phần tử bất kỳ của A đều so sánh được(comparable). Hay $\forall a, b \in A, a \prec b \vee b \prec a$

.

ii) $\prec$ Là thứ tự bán phần (partial ordered set) nếu $\exists x, y \in A : \left(x \overline{\prec} y\right) \vee \left(y \overline{\prec} x\right)$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: N, Z, Q, R với thứ tự $(\leq)$ thông thường là những tập sắp thứ tự toàn phần.

Giải

N, Z, Q, R với thứ tự $(\leq)$ thông thường là những tập sắp thứ tự toàn phần, vì với hai số *x,y* bất kỳ ta đều có: $x \leq y \vee y \leq x$.

Luyện tập 2. Chứng minh rằng: Quan hệ thứ tự ước số " | " trên tập hợp các số nguyên dương là quan hệ thứ tự bộ phận.

3. Phần tử min và max

Định nghĩa (phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất)

Xét tập hợp có thứ tự $(A,\prec)$.

i) $a \in A$ là phần tử nhỏ nhất của tập hợp A, ký hiệu $a = \min(A)$, nếu: $\forall x \in A$ ta có: $a \prec x$.

ii) $b \in A$ là phần tử lớn nhất của tập hợp A, kí hiệu $b = max(A)$, nếu:$\forall x \in A$ ta có: $x \prec b$.

Ví dụ 3. Trong tập hợp có thứ tự $(A,\leq)$ với $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 100\}$.

Tìm phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất của tập A.

Giải

a = Min(A)= -9; b = max(A)= 9

Luyện tập 3.

Cho tập hợp X = {a, b, c} và $A = \wp(X) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$,

Xét tập hợp có thứ tự $(A,\prec)$, trong đó $\forall x, y \in A, x \prec y \Leftrightarrow x \subseteq y$.

Giả sử B = {{a}, {a, b}, {a, c}} và C = {{a}, {c}, {a, c}}. Tìm phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất của tập B và C.

4. Các phần tử tối tiểu và tối đại

4.1. Định nghĩa (phần tử tối tiểu và phần tử tối đại)

Xét tập hợp có thứ tự $(A,\prec)$.

i) $a \in A$ là phần tử tối tiểu của A nếu không tồn tại $x \in A$ sao cho $a \neq x \prec a$. Nói cách khác mệnh đề sau là đúng: $\forall x \in A,\ x \prec a \Rightarrow x = a$.

ii) $b \in A$ là phần tử tối đại của A nếu không tồn tại $\forall x \in A$ sao cho $b \prec x \neq b$. Nói cách khác mệnh đề sau là đúng: $\forall x \in A, b \prec x \Rightarrow b = x$.

4.2.Định lý 1

Trong một tập hợp sắp thứ tự, phần tử lớn nhất (tương ứng phần tử nhỏ nhất), nếu tồn tại, là phần tử tối đại (tương ứng ứng tối tiểu) duy nhất.

4.3. Định lý 2

Nếu một tập hợp sắp thứ tự hữu hạn có một phần tử tối đại (tương ứng tối tiểu) duy nhất thì phần tử đó chính là phần tử lớn nhất (tương ứng nhỏ nhất).

Chú ý

Định lý trên sẽ không còn đúng nếu bỏ đi điều kiện hữu hạn của tập hợp.

Ví dụ 4. Cho tập E = {a, b, c} và $A = \wp \ E \ \setminus \ \phi, E$. Tìm phần tử tối tiểu và phần tử tối đại của $(A, \subset)$.

Giải

Phần tử tối tiểu của $(A, \subset)$ là: {a}, {b}, {c}.

Phần tử tối đại của $(A, \subset)$ là: {a, b}, {a, c}, {b, c}.

Luyện tập 4. Cho A = {2; 4; 5; 6; 8; 12}. Tìm các phần tử tối tiểu và phần tử tối đại của (A, |).

4.4. Định nghĩa (phần tử chặn dưới và phần tử chặn trên)

Xét tập hợp có thứ tự $(A, \prec)$ và $B \subset A$:

i) $a \in A$ là một chặn dưới của B nếu $\forall x \in B$ ta có $a \prec x$.

Phần tử lớn nhất của tập hợp {/ là chặn dưới của B} được kí hiệu là inf(B)

ii) $b \in A$ là một chặn trên của B nếu $\forall x \in B$ ta có $x \prec b$.

Phần tử bé nhất của tập hợp {$b \in A$/a là chặn trên của B} được ký hiệu sup(B).

Ví dụ 5. Trong $(\mathbb{R}, \leq)$, xét tập $A = \ x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 100 \ $. Tìm sup(A) và inf(A).

Giải

sup(A) =10

inf(A) = -10.

Chú ý

Nếu trong tập A tồn tại phần tử maxA (tương ứng min A) thì đó cũng chính là supA (tương ứng infA)

Luyện tập 5.

Cho tập hợp X = {a, b, c} và $A = \wp\ X\ =\ \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$,

Xét tập hợp có thứ tự $(A, \prec)$, trong đó $\forall x, y \in A, x \prec y \Leftrightarrow x \subseteq y$.

Giả sử B = {{a}, {a, b}, {a, c}} và C = {{a}, {c}, {a, c}}. Tìm các chặn dưới, chặn trên và tìm supB và infB ; supC và infC ?

5. **Biểu đồ Hasse cho các tập hữu hạn được sắp thứ tự**

5.1. Định nghĩa 1

Xét tập hợp có thứ tự $(A, \prec)$ và x,y là hai phần tử bất kỳ của A.

i) Nếu $x \prec y$ ta nói y là trội của x hay x được trội bởi y.

ii) *y* là trội trực tiếp của *x* nếu *y* trội *x* và không tồn tại một trội *z* của *x* sao cho $x \prec z \prec y \;\&\; x \neq z \neq y$.

Ví dụ 6. Với thứ tự "$\leq$" thông thường trên tập hợp các số nguyên Z, thì 5 là trội trực tiếp của 4 (hay 5 là đi ngay sau 4), 100 là trội trực tiếp của 99. Tuy nhiên, 100 không trội trực tiếp của 98.

Định nghĩa 2

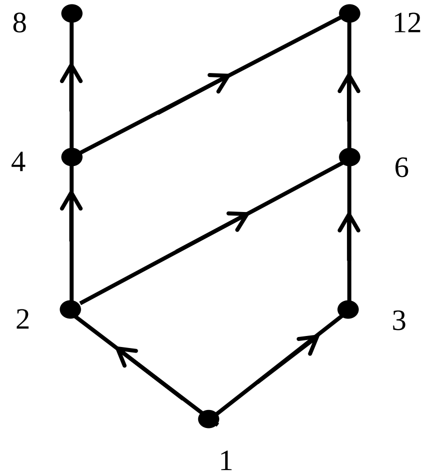
Biểu đồ Hasse của một tập hữu hạn có thứ tự $(A, \prec)$ bao gồm:

i) Một tập hợp các điểm trong mặt phẳng tương ứng 1-1 với A, gọi là các đỉnh.

ii) Một tập hợp các cung có hướng nối một số đỉnh: Hai đỉnh *x*, *y* được nối lại bởi một cung có hướng (từ *x* tới *y*) nếu *y* là trội trực tiếp của *x*.

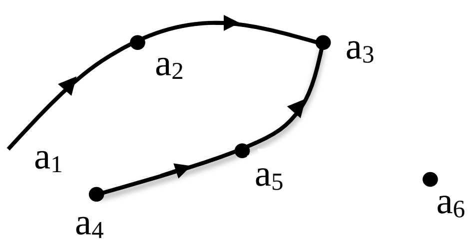
Ví dụ 7. Xét tập hợp sắp thứ tự (A,|) = ({1, 2, 3, 4, 6, 8, 12}, |) với thứ tự ước số |. Hãy vẽ biểu đồ Hasse của một tập hữu hạn có thứ tự (A, |).

Giải Biểu đồ Hasse của một tập hữu hạn có thứ tự (A, |) là:



Luyện tập 7.1. Xét tập hợp sắp thứ tự $(E,\subseteq) = \{1,2,3\},\subseteq$, tập hợp $\wp\ E\ =\ \phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}$ gồm các tập con của E với quan hệ $\subseteq$. Chứng minh rằng: $(\wp\ E\ ,\subseteq)$ là tập hợp có thứ tự. Hãy vẽ biểu đồ Hasse của một tập hợp này.

Luyện tập 7.2. Cho biểu đồ Hasse của một tập (A, <).



Hãy xác định các phần tử của tập A và quan hệ thứ tự "<" giữa các phần tử của tập A.

Luyện tập 7.3. Vẽ biểu đồ Hasse của tập A = {1; 2; 3; 4; 5} với thứ tự thông thường.

Bài tập ôn tập chương 3.

Bài 1. Cho $\Re$ là quan hệ trên tập số tự nhiên $\mathbb{Z}^+$ nguyên dương xác định bởi phương trình $3x+4y=17$. Viết $\Re$ ở dạng liệt kê và dạng ma trận.

Bài 2. Cho X = {*a, b, c, d, e, f*} và Y = {*beef, dad, ace, cab*}, $\Re$ là quan hệ giữa X và Y, trong đó $(x,y)\in\Re$ nếu *x* là một mẫu tự trong từ *y*. Tìm ma trận M biểu diễn $\Re$.

Bài 3. Xét tập A = {1, 2, 3}. Trong số các quan hệ dưới đây, hãy cho biết quan hệ nào là phản xạ, đối xứng, phản xứng, bắc cầu:

a) $\Re=$ {(1; 1), (1; 2), (1; 3), (3; 3)}.

b) S = {(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (3; 3)}.

c) T = {(1; 1), (1; 2), (2; 2), (2; 3)}.

Bài 4. Trong số các quan hệ dưới đây, hãy cho biết quan hệ nào là phản xạ, đối xứng, phản xứng, bắc cầu:

a) Quan hệ $\Re$ trên $\mathbb{Z}$: $x\Re y \Leftrightarrow x+y$ là số chẵn.

b) Quan hệ $\Re$ trên $\mathbb{Z}$: $x\Re y \Leftrightarrow x+y$ là số lẻ.

c) Quan hệ $\Re$ trên $\mathbb{Z}$: $x\Re y \Leftrightarrow x^2+y^2$ là số chẵn.

d) Quan hệ $\Re$ trên $\mathbb{R}$: $x\Re y \Leftrightarrow |x|=|y|$.

e) Quan hệ $\Re$ trên $\mathbb{R}$: $x\Re y \Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 y=1$.

Bài 5. Cho $\Re=$ {(1; 1), (1; 3), (3; 1), (3; 3)}. $\Re$ có phải là quan hệ tương đương trên A = {1; 2; 3} không ? Trên B = {1; 3}.

Bài 6. Cho A = {1; 2; 3; …; 14; 15} và là một quan hệ trên A được xác định bởi: $(a,b)\Re(c,d)\Leftrightarrow a+d=b+c$.

Chứng minh $\Re$ là một quan hệ tương đương. Tìm lớp tương đương của (2;11).

Bài 7. Cho A = {1; 2; 3; 4; 5; 6} và

$\Re=$ {(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (4; 5), (5; 4), (5; 5), (6; 6)}.

a) Chứng tỏ $\Re$ là một quan hệ tương đương.

b) Tìm các lớp tương đương [1], [2], [3].

c) Tìm phân hoạch của A thành các lớp tương đương.

Bài 8. Chứng tỏ $\Re$ là một quan hệ thứ tự trên tập S và cho biết đó là thứ tự toàn phần hay bán phần? Chỉ ra các phần tử min, max, tối tiểu, tối đại (nếu có) của (S,$\Re$).

Bài 9. Cho tập hợp E và một quan hệ $\Re$ trên E. Chứng minh rằng $\Re$ có hai tính chất đối xứng và phản xứng khi và chỉ khi $x\Re y \Leftrightarrow x = y$.

Bài 10. Giả sử $A = \wp\ E$ với E = {1; 2; 3}. Trong tập A với thứ tự bao hàm, hãy tìm sup và inf của tập con $B \subset A$ dưới đây:

a) *B*={{1}, {2}}.

b) *B* = {{1}, {2}, {3}, {1; 2}}.

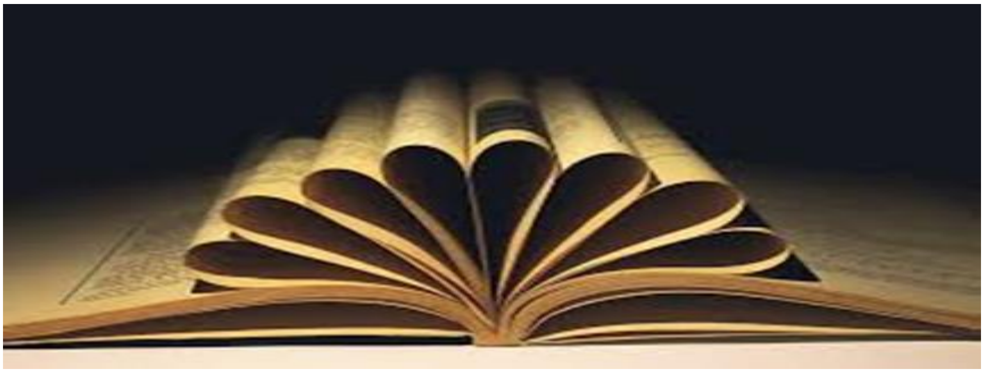
c) $B = \ \phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$.

d) *B* = {{1}, {1; 2}, {1; 3}, {1; 2; 3}}.

---------⊛⊛✪✪✪⊛⊛----------

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VĂN LANG

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN



CÁC BÀI GIẢNG

TOÁN RỜI RẠC

Biên soạn: PGS.TS. NGUYỄN VĂN LỘC- TS. TRẦN NGỌC VIỆT

TP.HỒ CHÍ MINH .THÁNG 2 NĂM 2020

Chương 4. ĐẠI SỐ BOOLE

Bài 10. Đại số bool nhị phân:

+ Đại số Bool của các hàm Bool.

+ Từ đơn, đơn thức.

+ Đơn thức tối tiểu.

+ Đa thức.

+ Dạng công thức đa thức.

+ Dạng nối rời

1. Định nghĩa trừu tượng của đại số Boole

1.1.Định nghĩa

Một tập hợp $A \neq \phi$ cùng với hai phép toán, ký hiệu $\vee, \wedge$, được gọi là một đại số Boole (Boolean algebra) nếu thỏa mãn các tiên đề sau $\forall x, y, z \in A$:

a) Tính giao hoán: $x \vee y = y \vee x$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

b) Tính kết hợp:

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$
$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

c) Tính phân phối:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

d) Tính đồng nhất: Tồn tại hai phần tử trung hòa, ký hiệu 0,1 đối với hai phép toán $\vee$, $\wedge$ sao cho:

$x \vee 0 = x$

$x \wedge 1 = x$

e) Tính nuốt:

$$\forall x \in A, \exists \overline{x} \in A:$$
$$x \vee \overline{x} = 1$$
$$x \wedge \overline{x} = 0$$

Ví dụ 1. Xét tập hợp M các mệnh đề với hai phép toán tuyển $\vee$ và phép toán hội $\wedge$ logic. Chứng minh rằng M là một đại số Boole.

Giải.

Theo các phép toán logic tuyển và hội: $\vee, \wedge$ có tính giao hoán, kết hợp và phân bố (thỏa mãn tiên đề 1, 2, 3). Các hằng logic 0 và 1 tương ứng với các mệnh đề hằng sai và hằng đúng thỏa mãn: $x \vee 0 = x \,\&\, x \wedge 1 = x$ với mọi *x* trong M.

Cuối cùng, với mọi mệnh đề x trong M, có $\overline{x} = \neg x$, thỏa mãn $x \vee \overline{x} = x \vee \neg x = 1 \,\&\, x \wedge \overline{x} = x \wedge \neg x = 0$. Nghĩa là với mọi *x* trong M luôn có phần bù $\overline{x}$ trong M. Vì vậy, theo định nghĩa, M là một đại số Boole.

Luyện tập 1. Xét tập hợp $\wp$*(E)* gồm các tập hợp con của một tập hợp E khác rỗng. Trên $\wp$*(E)* ta định nghĩa hai phép toán tuyển và hội $\vee, \wedge$ tương ứng là phép hợp và giao $\cup, \cap$ các tập hợp. Chứng minh rằng: $\wp$(E) là đại số Boole.

1.2. Các luật trong đại số Boole

Định lý.

Giả sử A là một đại số Boole thì $\forall x, y \in A$ ta có:

1. Luật thống trị.

a) $x \wedge 0 = 0$.

b) $x \vee 1 = 1$.

2. Luật lũy đẳng.

a) $x \wedge x = x$.

b) $x \vee x = x$.

3. Luật bù kép.

$\overline{\overline{x}} = x$.

4. Luật trung hòa.

a) $\overline{1} = 0$.

b) $\overline{0} = 1$.

5. Luật hấp thụ.

a) $x \wedge (x \vee y) = x$.

b) $x \vee (x \wedge y) = x$.

6. Luật De Morgan

a) $\left(\overline{x \wedge y}\right) = \overline{x} \vee \overline{y}$.

b) $\left(\overline{x \vee y}\right) = \overline{x} \wedge \overline{y}$.

1.3. Tập B={0, 1} là đại số Boole

Xét tập B = {0, 1} với hai phép toán $\vee, \wedge$ được định nghĩa: $\forall x, y \in B$

a) $x \vee y = x + y - x.y$.

b) $x \wedge y = x.y$.

Ta chứng minh được rằng tập B với hai phép toán $\vee, \wedge$ là một đại số Boole.

Ví dụ 2. Chứng minh tính giao hoán:

a) $x \vee y = y \vee x$.

b) $x \wedge y = y \wedge x$.

Chứng minh

a) $x \vee y = x + y - x.y = y + x - y.x = y \vee x$.

b) $x \wedge y = x.y = y.x = y \wedge x$.

Luyện tập 2. Chứng minh tính kết hợp:

a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

Chú ý. Đại số Boole đưa ra các phép toán và qui tắc làm việc với tập B ={0, 1} như sau:

1) **Phần bù của một phần tử** được định nghĩa bởi:

$\bar{0} = 1, \ \bar{1} = 0;$

2) **Tổng Boole**, ký hiệu là (+) hoặc *OR* (hoặc), được xác định:

$1 + 1 = 1; \ 1 + 0 = 1; \ 0 + 1 = 1; \ 0 + 0 = 0;$

3) **Tích Boole,** ký hiệu là (.) hoặc *AND* (và), được xác định:

$1.1 = 1; \ 1.0 = 0; \ 0.1 = 0; \ 0.0 = 0.$

Chú ý

a) Ký hiệu (.) có thể bỏ đi như các tích đại số thông thường.

b) Thứ tự thực hiện các phép toán Boole

+ Phép lấy phần bù.

+ Phép lấy tích Boole.

+ Phép lấy tổng Boole.

Phép lấy phần bù, lấy tổng và tích Boole tương ứng với các toán tử logic $\neg, \vee, \wedge$; trong đó 0 tương ứng với chân trị "sai", và 1 tương ứng với chân trị " đúng". Các kết quả của đại số Boole có thể được dịch trực tiếp thành các kết quả về mệnh đề. Ngược lại, các kết quả về mệnh đề cũng có thể dịch thành các khẳng định của đại số Boole.

Ví dụ 3

Tìm giá trị của biểu thức: $1.0+\overline{(0+1)}$

Giải

Ta có:

$$1.0+\overline{(0+1)}=0+\bar{1}=0+0=0$$

Luyện tập 3

Tính giá trị của biểu thức:

$$\overline{(0.1)}+\overline{(0+1)}+1.1+1.0$$

Qua định nghĩa trên ta thấy các tập hợp cùng với các phép toán kèm theo sau đây thỏa mãn tất cả tính chất đó:

a) Tập B ={0,1}với các phép toán tổng Boole (OR), tích Boole (AND) cùng với phép toán bù.

b) Tập hợp các dạng mệnh đề với các phép toán $\vee, \wedge$ và phép toán phủ định.

c) Tập hợp các tập con của tập hợp vũ trụ U với các phép toán hợp, giao cùng với phép toán lấy phần bù của tập hợp.

Do đó, để thiết lập các kết quả cho mỗi một biểu thức Boole, cho các mệnh đề hoặc tập hợp ta chỉ cần chứng minh các kết quả cho đại số Boole trừu tượng.

1.4. Các luật trên đại số Boole B = {0, 1}

Các phép toán " + " và ". " trên đại số Boole B = {0, 1} thỏa mãn các luật sau:

1. Luật thống trị

a) $x.0 = 0$.

b) $x + 1 = 1$.

2. Luật lũy đẳng.

a) $x.x = x$.

b) $x + x = x$.

3. Luật đồng nhất

a) $x + 0 = x$.

b) $x.1 = x$.

4. Luật bù kép

$\overline{\overline{x}} = x$.

5. Luật bù đơn

a) $x + \overline{x} = 1$.

b) $x.\overline{x} = 0$.

6. Luật hấp thụ.

a) $x.(x + y) = x$.

b) $x + x.y = x$.

7. Luật giao hoán

a) $x + y = y + x$.

b) $x.y = y.x$.

8. Luật kết hợp.

a) $(x+y)+z = x+(y+z)$.

b) $(x.y).z = x.(y.z)$.

9. Luật phân bố

a) $(x+y).z = (x.z)+(y.z)$.

b) $x.y+z = (x+z).(y+x)$.

10. Luật De Morgan

a) $(\overline{x+y}) = \overline{x}.\overline{y}$.

b) $(\overline{x.y}) = \overline{x}.\overline{y}$.

Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $x.\overline{y}.z + x.\overline{y}.\overline{z}$;

b) $x.y.z + x.y.t + x.y$;

c) $x.y(\overline{x} + z)$;

d) $\overline{\overline{\overline{x}} + \overline{\overline{yz}}}.\overline{x}$.

Giải

a) $x.\overline{y}.z + x.\overline{y}.\overline{z} = x\overline{y}(z + \overline{z}) = x\overline{y}.1 = x.\overline{y}$;

b) $x.y.z + x.y.t + x.y = xy(z + t + 1) = xy.1 = xy$;

c) $x.y(\overline{x} + z) = x\overline{x}y + xyz = 0 + xyz = xyz$;

d) $\overline{\overline{\overline{x}} + \overline{\overline{yz}}}.\overline{x} = (\overline{\overline{x}}.\overline{\overline{yz}}).\overline{x} = xyz.\overline{x} = 0$.

Luyện tập 4. Rút gọn biểu thức: $A = xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z$

2. Hàm Boole và biểu thức Boole

2.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1

Xét một tập hợp có thứ tự $(A,\prec)$ và *x,y* là hai phần tử bất kỳ của A

i) Nếu ta nói y là trội của x hay x được trội bởi y.

ii) *y* là trội trực tiếp của *x* nếu *y* trội *x* và không tồn tại một trội *z* của *x* sao cho: $x \prec z \prec y \,\&\, x \neq z \neq y$.

Định nghĩa 2

Giả sử B là một tập hợp con của tập hợp sắp thứ tự $(A,\prec)$. Khi ấy

i) + Một phần tử $c \in A$ được gọi là chặn trên chung của B nếu:

$\forall b \in B, b \prec c$

+ Một phần tử $c \in A$ được gọi là chặn dưới chung của B nếu:

$\forall b \in B, c \prec b$

ii) + Phần tử bé nhất của tập hợp {$c \in A \,/\, c$ là chặn trên chung của B}, được ký hiệu bởi sup B.

+ Phần tử lớn nhất của tập hợp {$c \in A \,/\, c$ là chặn dưới chung của B}, được ký hiệu bởi inf B.

Ví dụ 5. Giả sử $B = \{\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n\}$ là một tập con hữu hạn của $\wp(\mathrm{E})$.

Khi ấy $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ chính là supB và $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$ chính là infB.

Luyện tập 5. Trên tập hợp M các dạng mệnh đề với thứ tự $\Rightarrow$, xét một tập con hữu hạn $\varepsilon = \{\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n\}$. Khi ấy $E_1 \vee E_2 \vee \ldots. \vee E_n$ là $\sup \varepsilon$ và $E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots. \wedge E_n$ là $\inf \varepsilon$.

Định nghĩa 3

Trong một đại số Boole A, một trội trực tiếp của phần tử bé nhất được gọi là một nguyên tử của A.

2.2. Hàm Boole

2.2.1. Định nghĩa hàm Boole

Định nghĩa 1

Cho $B=\{0;1\}$. Một ánh xạ

$$\begin{aligned} &f: B^n \to B \\ &(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

Gọi là hàm Boole bậc *n* theo biến $x_1, x_2, ..., x_n$. Ký hiệu tập hợp các hàm Boole n biến là F_n.

Chú ý

a) Các hàm Boole còn gọi là hàm logic hay hay hàm nhị phân.

b) Các biến xuất hiện trong hàm Boole được gọi là biến Boole.

c) Mỗi hàm Boole được liên kết với một bảng cho biết sự phụ thuộc của hàm Boole theo giá trị của biến Boole, gọi là bảng chân trị của hàm Boole.

Ví dụ 6. Hàm Boole hai biến *f(x,y)* với giá trị bằng 1 khi *x = 1, y = 0* và bằng 0 với mọi khả năng còn lại của *x,y*. Hãy xác định bảng chân trị của hàm Boole.

Giải

Hàm Boole có thể xác định bởi bảng chân trị sau:

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	0

1	0	1
1	1	0

Luyện tập 6. Các cử tri A_1, A_2, A_3 tham gia bỏ phiếu trong cuộc bầu cử có ứng cử viên D. Các biến Boole tương ứng là x_1, x_2, x_3, với $x_j = 1$ nếu A_j bầu phiếu cho D; $x_j = 0$ nếu A_j không bầu phiếu cho D $(1 \le j \le 3)$.

Đặt: $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ nếu D trúng cử (D được ít nhất hai phiếu).

$f(x_1, x_2, x_3) = 0$ nếu D không trúng cử (D được ít hơn hai phiếu).

Hãy xác định bảng chân trị của hàm Boole.

Định nghĩa 2

Hai hàm Boole *f* và *g* được gọi là bằng nhau, ký hiệu f = g, nếu:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(x_1, x_2, ..., x_n); \forall x_1, x_2, ..., x_n \in B$$

Định nghĩa 3

Phần bù của hàm Boole *f*, ký hiệu là $\overline{f}$, được xác định như sau:

$$\overline{f}(x_1, x_2, x_3) = \overline{f(x_1, x_2, x_3)}$$

Định nghĩa 4

Tổng f + g và tích Boole f.g, được xác định như sau:

$$(f+g)(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + g(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$(f.g)(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n).g(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Chú ý

Số hàm Boole *n* biến khác nhau là 2^{2^n}.

2.2. 2.Biểu thức Boole

Định nghĩa: Các biểu thức Boole với các biến $x_1, x_2,..., x_n$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- $0, 1, x_1, x_2,..., x_n$ là các biểu thức Boole.
- Nếu $E_1 \& E_2$ là các biểu thức Boole thì $\overline{E_1}$; $E_1.E_2$; $E_1 + E_2$ cũng là các biểu thức Boole.

Chú ý

a) Mỗi biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole. Các giá trị của hàm này nhận được bằng cách thay 0 và 1 cho các biến trong biểu thức đó.

b) Hai biểu thức Boole cùng biểu diễn một hàm Boole thì tương đương với nhau.

Ví dụ 7. Tìm giá trị của hàm Boole được biểu diễn bởi: $F(x,y,z) = xy + \overline{z}$.

Giải. Các giá trị của hàm được cho trong bảng sau:

x	y	z	xy	$\overline{z}$	$F(x,y,z) = xy + \overline{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

Luyện tập 7.Tìm giá trị của hàm Boole được biểu diễn bởi:

$F(x,y,z)=\overline{x}.y+xz+yz$

2.2.3. Biểu diễn các hàm Boole

Đặt vấn đề

Cho các giá trị của một hàm Boole n biến $x_1,x_2,...,x_n$. Làm thế nào để tìm được biểu thức Boole biểu diễn hàm đó?

Định nghĩa 1

a) Một biến Boole hoặc phần bù của nó được gọi là một từ đơn (tục biến).

b) Tích Boole $y_1,y_2,...,y_n$ trong đó $y_i=x_i$ hoặc $y_i=\overline{x_i}$ với $x_1,x_2,...,x_n$ là các biến Boole được gọi là một từ tối tiểu (tiểu hạng).

Ghi chú

a) Từ tối tiểu (Tiểu hạng) $y_1,y_2,...,y_n$ có giá trị 1 khi và chỉ khi mọi $y_i=1$ khi và chỉ khi $y_i=\begin{cases} x_i, khi \ \ x_i=1 \\ \overline{x_i}, khi \ \ x_i=0 \end{cases}$.

b) Tổng các từ tối tiểu (tiểu hạng) biểu diễn hàm Boole được gọi là khai triển tổng các tích hay dạng tuyển chuẩn tắc của hàm Boole. Hàm Boole như vậy bằng 1 tại các tổ hợp của các giá trị của các biến Boole ở đó các từ tối tiểu bằng 1 và bằng 0 tại các giá trị khác của biến Boole. Hơn nữa, bởi vì mỗi hàm Boole tương ứng với một bảng chân trị, nên chúng ta có thể dễ dàng biểu diễn một hàm Boole bằng một tổng của các từ tối tiểu (mỗi từ tối tiểu ứng với một tổ hợp biến mà giá trị hàm Boole bằng 1 trong bảng chân trị), gọi là dạng tuyển chính tắc (normal disjunctive form) của hàm Boole

c) Một hàm Boole là tổng của các từ tối tiểu chỉ bằng 1 khi một trong các từ tối tiểu bằng 1. Nghĩa là $x_1 = x_3 = 0 \,\&\, x_2 = x_4 = x_5$.

Ví dụ 8. Biết $x_1 = x_3 = 0 \,\&\, x_2 = x_4 = x_5$. Viết tiểu hạng có giá trị bằng 1.

Giải

Từ tối tiểu chỉ có giá trị bằng 1 nếu $x_1 = x_3 = 0 \,\&\, x_2 = x_4 = x_5 = 1$ là $\overline{x}_1.x_2.\overline{x}_3.x_4.x_5$.

Luyện tập 8

Tìm biểu thức Boole biểu diễn hàm Boole f(x,y) xác định bởi bảng sau:

x	*y*	f*(x,y)*
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Định nghĩa 2

Các nguyên tử trong F_n là các hàm Boole chỉ khác 0 tại 1 điểm duy nhất, hay nói cách khác, bảng chân trị của nó chỉ có một dòng duy nhất ở đó hàm khác 0, các hàm này được gọi là các từ tối tiểu của F_n.

Định nghĩa 3. Dạng nối rời chính tắc của f

Một hàm Boole bất kỳ f có thể viết như là tổng Boole của các từ tối tiểu trội bởi f, và mỗi từ tối tiểu này được viết như là tích của đủ n biến. Công thức này gọi là dạng nối rời chính tắc của f.

Định nghĩa 4. Đơn thức và công thức đa thức

i) Một đơn thức là một tích khác 0 của các từ đơn.

ii) Một công thức đa thức của hàm Boole f là công thức biểu diễn f dưới dạng tổng Boole của các đơn thức.

Ví dụ 9. Tìm các biểu thức Boole biểu diễn các hàm f(x,y,z) và g(x, y,z) Xác định theo bảng sau:

x	*y*	*z*	f*(x,y,z)*	g*(x,y,z)*
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Giải.

+ Biểu diễn hàm f: Biểu thức Boole của f là $f(x,y,z) = x\overline{y}z$.

+ Biểu diễn hàm g: g là tổng của hai từ tối tiểu tương ứng với hai dòng của bảng có giá trị 1. Biểu thức Boole của g là $g(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$.

Luyện tập 9. Tìm khai triển tổng các tích của hàm

$$f(x,y,z) = (x+y)\overline{z}$$

---------ଔଔ✪ꕤꕤ----------

Bài 11. So sánh các công thức của hàm Bool:

+ Công thức đa thức tối tiểu.

Phương pháp biểu đồ Karnaugh:

+ Bảng mã, tế bào, tế bào lớn.

+ Các họ phủ tối tiểu của Kar(f) bằng tế bào lớn.

1. So sánh các công thức của hàm Bool

1.1. Định nghĩa phép so sánh các công thức của hàm Boole

Xét hai công thức đa thức của hàm Boole f:

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_p \quad (1)$$

$$f = M_1 \vee M_2 \vee \ldots \vee M_q \quad (2)$$

Ta nói (1) đơn giản hơn (2) nếu tồn tại một đơn ánh $\sigma: \{1,2,\ldots,p\} \to \{1,2,\ldots,q\}$ sao cho với $1 \le i \le p$ thì số thừa số là từ đơn của m_i không nhiều hơn số thừa số từ đơn của $m_{\sigma(i)}$.

Chú ý

1) Nếu (1) đơn giản hơn (2) thì ta có $p \le q$.

2) Quan hệ " đơn giản hơn" giữa các công thức đa thức của f có tính phản xạ và bắc cầu. Tuy nhiên quan hệ này không phản xứng.

3) Nói rằng (1) đơn giản hơn (2) và (2) đơn giản hơn (1) khi đó σ là song ánh và m_i và $m_{\sigma(i)}$ có số thừa số là từ đơn bằng nhau. Khi đó, quan hệ " đơn giản hơn" là quan hệ tương đương.
4) Khi chuyển qua lớp tương đương thì quan hệ " đơn giản hơn" trở thành một thứ tự. **Tuy nhiên ta cũng có thể khảo sát trực tiếp các quan hệ chỉ có 2 tính chất phản xạ và bắc cầu. Ta gọi chúng là các quan hệ tiền thứ tự.**
5) Đối với các quan hệ tiền thứ tự, khái niệm phần tử tối tiểu và tối đại vẫn còn ý nghĩa.

1.2. Định nghĩa công thức đa thức tối tiểu

+ Một công thức đa thức (F) của hàm Boole f được gọi là tối tiểu nếu với bất kỳ công thức đa thức (G) của f "đơn giản hơn" (F) thì (G) và (F) "đơn giản như nhau".
+ Do tập hợp các công thức đa thức của hàm Boole là hữu hạn, một công thức đa thức (F) của f sẽ tồn tại một công thức đa thức tối tiểu (G) của f sao cho (G) đơn giản hơn (F). Một hàm Boole có thể có nhiều công thức đa thức tối tiểu.

6). Đơn thức tối đại trội

Mệnh đề

Trong một công thức đa thức tối tiểu, các số hạng là đơn thức tối đại trội bởi f.

Bổ đề

Nếu g và h là hai hàm Boole thì $g\overline{h} \vee h = g \vee h$.

Chứng minh

Ta có: $g\overline{h} \vee h = g\overline{h}(gh \vee h) = g(\overline{h} \vee h) \vee h = g \vee h$.

Định nghĩa

Công thức (1) của hàm f được gọi là rút gọn nếu với $1 \le i \ne j \le p$ thì m_i không phải là ước thật sự của m_j.

Ví dụ 1

Tìm công thứ đa thức tối tiểu của hàm sau:

$f = xyz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \quad (F_1)$.

Giải

Từ F_1 ta được:

$$
\begin{aligned}
f &= xyz \vee x(y \vee \overline{y})\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} = \\
&= xyz \vee x\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} && (F_2) \\
&= xyz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee y\overline{z} && (F_3) \\
&= xy \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} && (F_4)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow f = x(yz \vee \overline{z}) \vee \overline{x}y\overline{z}$$

$$
\begin{aligned}
f &= x(y \vee \overline{z}) \vee \overline{x}y\overline{z} \\
&= xy \vee x\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} && (F_5) \\
&= xyz \vee x\overline{z} \vee y\overline{z} && (F_6) \\
&= xy \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee y\overline{z} && (F_7)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow f = xy \vee x\overline{z} \vee y\overline{z}$$

Công thức cuối cùng là công thức đa thức tối tiểu duy nhất nên cũng là công thức đơn giản nhất.

Luyện tập 1. Rút gọn biểu thức: $A = x.y + \overline{x}.z + y.z$.

Định nghĩa. Một đơn thức tối đại trội bởi hàm Boole f được gọi là một tiền đề nguyên tố của f.

Nhận xét. Để tìm công thức đa thức tối tiểu của một hàm Boole f, ta hạn chế tìm kiếm trong số các công thức đa thức mà các số hạng là những tiền đề nguyên tố đôi một khác nhau.

2. **Cực tiểu hóa hàm Boole bằng phương pháp biểu đồ Karnaugh**

2.1. **Khái niệm cực tiểu hóa hàm Boole**

Cực tiểu hóa hàm Boolean là việc tối ưu hóa số lượng phần tử và số hạng để tạo ra một mạch với số lượng phần tử ít hơn.

Mỗi hàm Boole có thể biểu diễn bằng một số biểu thức Boole tương đương. Vấn đề đặt ra là tìm một biểu diễn hàm Boole đơn giản nhất còn gọi là cực tiểu hóa hàm Boole, nhằm tối ưu hóa các mạch logic thực hiện hàm Boole.

Bởi vì một hàm Boole luôn luôn được biểu diễn bằng một tổng của các tích của các từ đơn, nên hàm Boole đơn giản nhất là hàm Boole được biểu diễn bởi một tổng ít tích của các từ đơn nhất, đồng thời trong mỗi tích lại ít từ đơn nhất. Lúc này mạch logic tính toán hàm Boole chứa ít cổng logic nhất. Đây là bài toán tối ưu về tính toán đồng thời tối ưu về kinh tế.

Gọi mỗi tích các từ đơn là một đơn thức hay một số hạng. Hàm Boole cực tiểu là hàm biểu diễn một tổng ít số hạng nhất, mỗi số hạng chứa ít từ đơn nhất.

Có nhiều phương pháp cực tiểu hóa hàm Boole. Phần này giới thiệu phương pháp biểu đồ **Karnaugh.**

2.2. Phương pháp biểu đồ Karnaugh

Để làm giảm số các số hạng trong một biểu thức Boole biểu diễn một mạch, ta cần phải tìm các số hạng để tổ hợp lại. Có một phương pháp đồ thị, gọi là biểu đồ Karnaugh, được dùng để tìm các số hạng tổ hợp được đối với các hàm Boole có số biến tương đối nhỏ. Phương pháp mà ta mô tả dưới đây đã được Maurice Karnaugh đưa ra vào năm 1953. Phương pháp này dựa trên một công trình trước đó của E.W. Veitch. Các biểu đồ Karnaugh cho ta một phương pháp trực quan để rút gọn các khai triển tổng các tích.

2.2.1.Bảng mã - tế bào- tế bào lớn

Bảng mã của hàm Boole là bảng xếp các phần tử theo thứ tự từ điển. Chẳng hạn, với hàm Boole 4 biến theo cách của Veitch và Karnaugh, có thể xếp như sau:

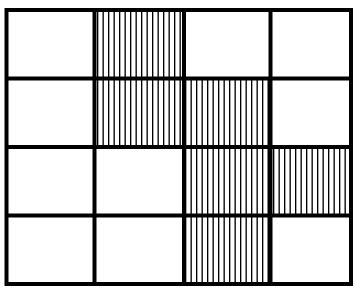
	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$	
z	1 0 1 0	1 1 1 0	0 1 1 0	0 0 1 0	$\overline{t}$
z	1 0 1 1	1 1 1 1	0 1 1 1	0 0 1 1	t
$\overline{z}$	1 0 0 1	1 1 0 1	01 0 1	0 0 0 1	t
$\overline{z}$	1 0 0 0	1 1 0 0	0 1 0 0	0 0 0 0	$\overline{t}$
	$\overline{y}$	y	y	$\overline{y}$	

Ở đây ký hiệu *x* chỉ cột ở đó biến đầu tiên *x* lấy giá trị 1, chỉ cột ở đó biến x lấy giá trị 0. Tương tự cho biến thứ hai y. Các biến thứ ba và thứ tư z, t được gán với các dòng. Ví dụ ở 2 dòng đầu biến z lấy giá trị 1 và 2 dòng sau biến z lấy giá trị 0. Tương tự cho biến t. Cách biểu diễn trên của B^4 rất thuận tiện cho việc biểu diễn các đơn thức. Thật vậy ta thấy rằng 2 ô liên tiếp nhau chỉ khác nhau một thành phần, ví dụ ô ở dòng 2 cột 2 và ô ở dòng 2 cột 3 chỉ khác nhau ở thành phần đầu tiên: 1111 và 0111. Mặt khác ô ở dòng 1 cột 1 và dòng 1 cột 4 cũng biểu diễn 2 phần tử chỉ khác nhau 1 thành phần: 1010 và 0010. Ta qui ước rằng các ô này cũng được xem như như kề nhau theo nghĩa rộng: 2 ô được gọi là kề nhau theo nghĩa rộng nếu sau khi ta cuốn hình chữ nhật lớn theo chiều dọc4 biến hay theo chiều ngang tạo thành hình trụ thì 2 ô ban đầu sẽ trở thành kề nhau trên hình trụ. Với qui ước trên thấy 2 ô kề nhau (theo nghĩa thông thường hay nghĩa rộng) khi và chỉ khi chúng biểu diễn 2 phần tử của B^4 chỉ khác nhau 1 thành phần.

Bây giờ để biểu diễn 1 hàm Boole 4 biến f, ta sẽ gạch chéo các ô của hình chữ nhật lớn tương ứng với các điểm của B^4 ở đó f bằng 1.Ta nói hình vẽ ấy là biểu đồ **Karnaugh** của hàm Boole f.

Ví dụ hình vẽ dưới đây là biểu đồ **Karnaugh** của hàm Boole:

$$f = xyzt \vee xyz\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{z}t$$



Nhận xét rằng hàm Boole f chính là hàm đặc trưng của tập hợp gạch chéo trong biểu đồ **Karnaugh.**

Mệnh đề 1: Với mọi hàm Boole 4 biến f, g:

a) Biểu đồ **Karnaugh** của hàm f là tập hợp con của biểu đồ **Karnaugh** của hàm g khi và chỉ khi $f \prec g$

b) Biểu đồ **Karnaugh** của hàm $f \vee g$ (tương ứng $f \wedge g$) là hợp (tương ứng giao) của các biểu đồ **Karnaugh** của hàm f và g.

c) Biểu đồ **Karnaugh** của hàm $\overline{f}$ là phần bù của biểu đồ **Karnaugh** của hàm f.

1) Sử dụng mệnh đề 1 ta có thể vẽ được Biểu đồ **Karnaugh** của một hàm Boole nếu biết bảng chân trị của nó, hoặc nếu biết một công thức biểu diễn hàm Boole dưới dạng một biểu thức theo các biến và các phép toán: $\vee, \wedge, \neg$.

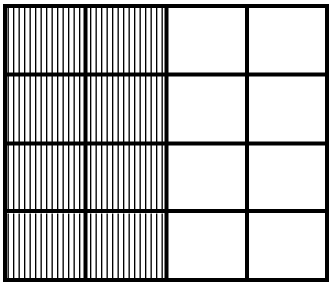
2) Ngược lại, nếu biết được biểu đồ **Karnaugh** của hàm Boole f, ta có thể đọc ngay từ đó **dạng nối rời chính tắc**: Các từ tối tiểu trội bởi f chính là hàm đặc trưng của mỗi ô nằm trong biểu đồ **Karnaugh.** Hơn nữa, công thức cho từ tối tiểu như là tích của 4 từ đơn đọc được ngay trên Biểu đồ **Karnaugh** khi xem các dòng và các cột chứa ô đang xét: Ví dụ như từ đơn ứng với ô ở dòng 3 cột 2 là $xy\overline{z}t$ vì các dòng và cột chứa ô này là x, y, $\overline{z}$ và t.

3) Hai từ tối tiểu ứng với hai ô kề nhau (theo nghĩa thông thường hoặc nghĩa rộng) chỉ khác nhau một thừa số là từ đơn, nên ta có thể dùng luật phân bố để đặt thừa số chung trong tổng Boole của chúng và đượcmột đơn thức có 3 thừa số là từ đơn.

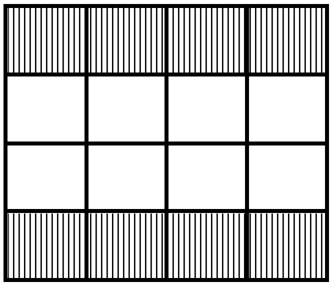
Ví dụ như: $xyzt \vee xyz\overline{t} = xyz(t \vee \overline{t}) = xyz$ Có biểu đồ **Karnaugh** là một hình chữ nhật theo nghĩa rộng gồm 2 ô liên tiếp nhau 1110 và 1111.

Mệnh đề 2. Biểu đồ **Karnaugh** của một đơn thức có dạng tích của $p(1 \leq p \leq 4)$ từ đơn là một hình chữ nhật (theo nghĩa rộng) gồm 2^{4-p} ô, mà ta gọi là **các tế bào.**

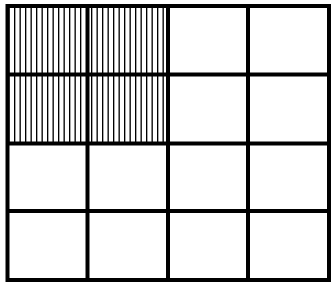
Ví dụ.



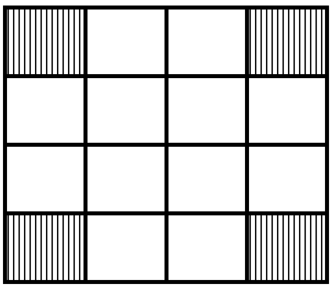
x



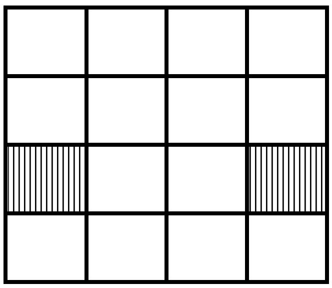
$\overline{t}$



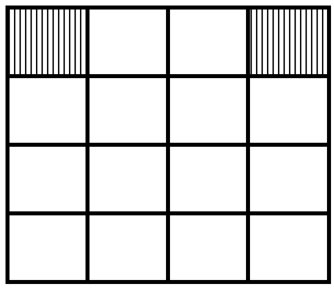
xz



$\overline{y}\overline{t}$



$\overline{y}\overline{z}t$



$\overline{y}z\overline{t}$

Do mệnh đề 1 và mệnh đề 2 **các tiền đề nguyên tố** của một hàm Boole 4 biến có biểu đồ **Karnaugh** là một tế **bào tối đại** nằm trong biểu đồ **Karnaugh** của hàm f, nghĩa là không được bao hàm thực sự bởi một tế bào khác nằm trong biểu đồ **Karnaugh** của hàm f. Ta nói các tế bào này **là tế bào lớn** của biểu đồ **Karnaugh** của hàm f.

2.2.2. Các họ phủ tối tiểu của Kar(f) bằng tế bào lớn

Để tìm công thức đa thức tối tiểu của hàm f cần giải quyết hai vấn đề:

Vấn đề 1. Tìm tất cả các tế bào lớn nằm trong biểu đồ **Karnaugh** của hàm f.

Vấn đề 2.Tìm một phép phủ tối tiểu biểu đồ **Karnaugh** của hàm f bằng **các tế bào lớn,** nghĩa là một họ tế bào lớn có hợp là biểu đồ **Karnaugh** của hàm f sao cho khi rút bớt một tế bào lớn trong số đó thì họ còn lại không phủ kín biểu đồ **Karnaugh** của hàm f.

Từ đó ta được **thuật toán tìm công thức đa thức tối tiểu gồm 3 bước sau:**

Bước 1. Chỉ ra tất cả các tế bào lớn của biểu đồ **Karnaugh** của hàm f.

Sau bước 1, ta sẽ phủ dần biểu đồ **Karnaugh** bằng các tế bào lớn cho đến khi phủ kín.

Bước 2. Nếu tồn tại một ô chỉ nằm trong một tế bào lớn duy nhất, ta chọn ra tế bào này để phủ.Trong phần còn lại của biểu đồ **Karnaugh,** nếu có một ô chỉ nằm trong một tế bào lớn duy nhất, ta chọn ra tế bào này để phủ, và lặp lại Bước 2 cho đến khi không còn ô nào có tính chất trên.

Nếu các tế bào lớn chọn trong bước 2 đã phủ kín biểu đồ **Karnaugh** của hàm f ta qua thẳng bước 3. Nếu không chọn ra một ô còn lại. Trong số các tế bào lớn chứa ô này ta chọn ra một tế bào tùy ý để thêm vào phép phủ, và cứ tiếp tục như trên cho phần còn lại cho đến khi phủ kín biểu đồ **Karnaugh** của hàm f.

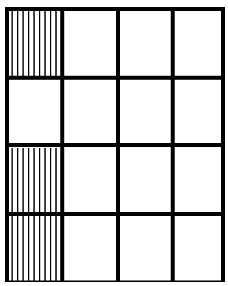
Bước 3. Chọn được một số tế bào lớn phủ kín biểu đồ **Karnaugh** của hàm f. Do trong bước 2 có sự lựa chọn tùy ý tế bào lớn chứa một ô, ta thường có nhiều hơn một phép phủ. Trong số các phép phủ nhận được, loại bỏ các phép phủ không tối tiểu. Sau cùng, các phép phủ còn lại cho ta một công thức đa thức của f mà ta còn phải so sánh chúng, loại bỏ những công thức có chứa một công thức khác thực sự đơn giản hơn nó. Các công thức còn lại chính là công thức đa thức tối tiểu phải tìm.

Chú ý

1) Nếu Bước 2 được bỏ qua thì không có sự lựa chọn tùy ý. Trong trường hợp này ta được một phép phủ duy nhất tương ứng với công thức đa thức tối tiểu duy nhất.

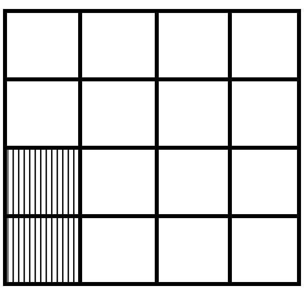
2) Để tiện xem xét, ta sẽ gạch chéo mỗi tế bào lớn được chọn cho đến khi phần gạch chéo trùng với biểu đồ **Karnaugh** của hàm f. Đương nhiên hai cách chọn khác nhau sẽ dẫn đến hai quá trình phủ khác nhau và cho ta hai công thức khác nhau.

Ví dụ 2. Tìm phép phủ và công thức đa thức tối tiểu của hàm f có biểu đồ **Karnaugh** như sau:



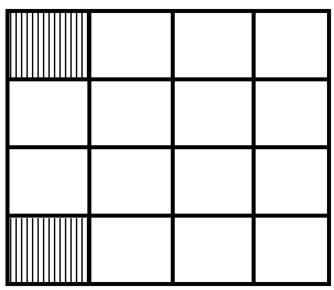
Giải

Bước 1: Biểu đồ **Karnaugh** của hàm f có 2 tế bào lớn:



$\bar{y}z$

$x\bar{y}\,\bar{t}$



Bước 2: Ô (3,1) nằm duy nhất trong $\overline{y}\overline{z}$

Ô (1, 1) nằm duy nhất trong $x\overline{y}\,\overline{t}$.

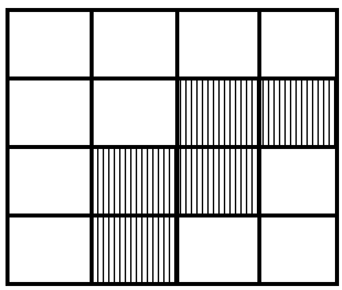
Hai tế bào lớn này đã phủ kín biểu đồ **Karnaugh** của hàm f nên ta qua bước 3.

Bước 3: Ta chỉ có duy nhất một phép phủ ứng với công thức đa thức tối tiểu duy nhất của f:

$$f(x,y,z,t) = x\overline{y}\overline{z} + x\overline{y}\overline{t}$$

Chú ý. Sử dụng công thức trên để tổng hợp hàm Boole f bằng một mạng các cổng, ta cần 4 cổng AND và 1 cổng OR (không kể cổng NOT)

Luyện tập 2. Tìm phép phủ và công thức đa thức tối tiểu của hàm f có biểu đồ **Karnaugh** như sau:



Chú ý. Sử dụng các công thức này để tổng hợp hàm f bằng một mạng các cổng, ta cần 6 cổng AND và 2 cổng OR

2.2.2. Dùng biểu đồ Karnaugh cực tiểu hóa các hàm Boole hai biến

Bản đồ **Karnaugh** của hàm Boole 2 biến là một hình chữ nhật gồm 4 ô biểu diễn 4 từ tối tiểu có thể có của hàm Boole. Nói cách khác Có bốn hội sơ cấp khác nhau trong khai triển tổng các tích của một hàm Boole có hai biến x và y.

	y	$\overline{y}$
x	xy	$x\overline{y}$
$\overline{x}$	$\overline{x}y$	$\overline{x}\,\overline{y}$

Một bản đồ Karnaugh đối với một hàm Boole hai biến là hình chữ nhật gồm bốn ô, trong đó các ô biểu diễn từ tối tiểu (hội sơ cấp) có mặt trong khai triển được ghi số 1. Hai ô trong biểu đồ được gọi là kề nhau nếu các từ tối tiểu (các hội sơ cấp) tương ứng với hai ô này chỉ khác nhau một từ đơn (một biến). Chẳng hạn hai ô tương ứng với xy và $x\overline{y}$ là kề nhau. Khi kết hợp các từ tối tiểu trong hai ô kề nhau theo phép lấy tổng Boole thì được một từ đơn tương ứng với hình chữ nhật có được bằng cách ghép hai ô đó. Chẳng hạn $xy + x\overline{y} = x(y + \overline{y}) = x$ là từ đơn tương ứng với hình chữ nhật được ghép từ hai ô chứa xy và $x\overline{y}$. Chúng ta sẽ dùng nguyên tắc này, kết hợp các biến và các từ tối tiểu để được hàm Boole cực tiểu trên bản đồ Karnaugh của nó.

Để đơn giản, ta ghi số 1 vào các ô tương ứng với các tích Boole trong hàm Boole và kết hợp các tích tương ứng với các ô chứa số 1 kề nhau để được các từ đơn tương ứng với các hình chữ nhật lớn hơn, từ đó có được hàm Boole cực tiểu.

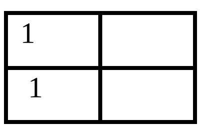
Nếu tất cả các ô của biểu đồ Karnaugh của hàm Boole đều ghi số 1 thì kết quả kết hợp là hàm Boole bằng 1, đó cũng là hàm Boole cực tiểu hóa.

Ví dụ 3. Dùng bản đồ Karnaugh để cực tiểu hóa các hàm Boole sau:

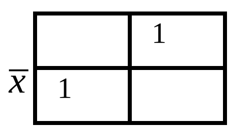
a) $xy + \overline{x}y$.　　　　b) $\overline{x}y + x\overline{y}$.

Giải

Ta ghi số 1 vào ô vuông khi hội sơ cấp được biểu diễn bởi ô đó có mặt trong khai triển tổng các tích. Ba bản đồ Karnaugh được cho trên hình sau.



Hình 1



Hình 2

Việc nhóm các hội sơ cấp được chỉ ra trong hình trên bằng cách sử dụng bản đồ Karnaugh cho các khai triển đó.

Hình 1: Nhóm các tiểu hạng $xy + \bar{x}y = y(x + \bar{x}) = y$ ta được: *y*.

Hình 2: Không tồn tại các ô kề nhau, do vậy hàm đã cực tiểu hóa.

Vậy, khai triển cực tiểu của tổng các tích này tương ứng là:

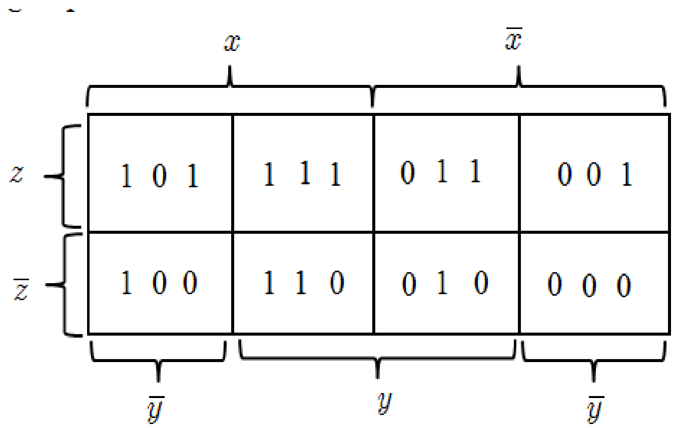
a) y . b) $\bar{x}y + x\bar{y}$.

Luyện tập 3. Dùng bản đồ Karnaugh để cực tiểu hóa hàm Boole sau:

$$f(x,y) = \bar{x}y + x\bar{y} + \bar{x}\,\bar{y} \ .$$

2.2.4. Dùng biểu đồ Karnaugh cực tiểu hàm Boole ba biến:

Trường hợp hàm 3 biến, ta sử dụng hình chữ nhật có 8 ô. Khi ấy, tế bào, tế bào lớn hoàn toàn tương tự:



Tổng quát.

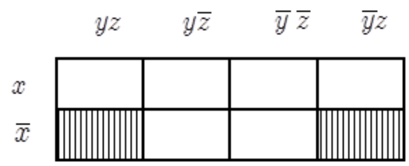
Biểu đồ Karnaugh của hàm Boole ba biến là một hình chữ nhật được chia thành tám ô biểu diễn 8 từ tối tiểu có thể có của hàm Boole.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\,\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{x}\,\bar{y}z$

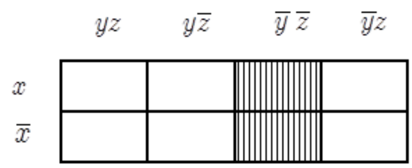
Hai ô được gọi là kề nhau nếu các từ tối tiểu (hội sơ cấp) mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một từ đơn (biến). Như vậy, hai ô tương ứng với $xyz\,\&\,x\overline{y}z$ là kề nhau. Tương tự, hai ô tương ứng với $\overline{x}yz\,\&\,\overline{x}\,\overline{y}z$ cũng kề nhau. Như vậy, chúng ta cũng có thể coi biểu đồ **Karnaugh** của hàm Boole 3 biến là một hình trụ tròn với 8 ô tạo thành mặt xung quanh biểu diễn 8 từ tối tiểu có thể có của hàm Boole.

Khi kết hợp các từ tối tiểu trong hai ô kề nhau theo phép lấy tổng Boole thì được một tích hai từ đơn tương ứng với hình chữ nhật có được bằng cách ghép hai ô đó. Chẳng hạn, $\overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}z = \overline{x}(y + \overline{y}) = \overline{x}z$ là tích hai từ đơn tương ứng với hình chữ nhật được ghép từ hai ô chứa $\overline{x}yz\,\&\,\overline{x}\,\overline{y}z$.

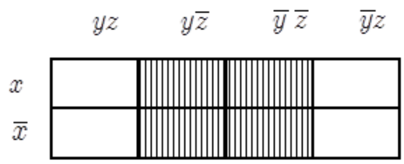
Một cách khái quát, khi chúng ta kết hợp các từ tối tiểu trong một hình chữ nhật gồm 1 ô, 2 ô hoặc 4 ô bằng phép lấy tổng Boole thì được một tích gồm 3, 2 hoặc 1 từ đơn. Một hình chữ nhật gồm 1 ô, 2 ô hoặc 4 ô trên biểu đồ **Karnaugh** của hàm Boole được gọi là một khối và tương ứng biểu diễn một tích 3, 2 hoặc 1 từ đơn. Khối gồm toàn bộ 8 ô biểu diễn hàm Boole bằng 1 với mọi x, y, z. Hình sau biểu diễn một số khối ứng với tích các từ đơn trên biểu đồ **Karnaugh** của hàm Boole ba biến.



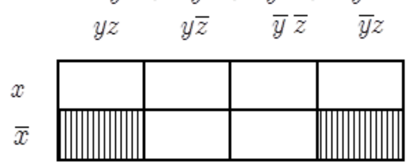
$\overline{x}z = \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}\,z$



$\overline{y}\,\overline{z} = x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$



$\overline{z} = xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$



$\overline{x} = \overline{x}yz + \overline{x}y\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z$

Như vậy, nếu một hàm Boole chỉ được biểu diễn bởi một khối trên biểu đồ **Karnaugh** của nó thì khối càng lớn hàm Boole càng đơn giản.

Chúng ta sẽ áp dụng nguyên lý này để xác định các khối lớn nhất có thể có trong biểu đồ của hàm Boole ba biến và tổ hợp các khối này để được hàm Boole cực tiểu.

Để tìm hàm Boole cực tiểu ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Ghi số 1 vào các ô trong các khối trên biểu đồ **Karnaugh** tương ứng với các tích Boole trong hàm Boole.

Bước 2. Tìm tất cả các khối lớn nhất bao gồm các ô chứa số 1.

Bước 3. Xác định hàm Boole cực tiểu bằng cách lấy tổng các tích tương với các khối lớn nhất phủ kín các ô chứa số 1 trên biểu đồ **Karnaugh** của nó.

Chú ý. Một khối bao gồm các ô chứa số 1 được gọi là lớn nhất nếu nó không bị chứa trong bất kỳ một khối nào bao gồm các số 1 khác.

Ví dụ 4: Dùng bản đồ Karnaugh ba biến cực tiểu hóa các hàm Boole sau:

a) $f(x,y,z) = xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$.

b) $f(x,y,z) = x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$.

Giải.

Bản đồ Karnaugh cho những khai triển tổng các tích này được cho trong hình sau:

a).

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x		1	1	
$\overline{x}$	1		1	

Hình 1

b).

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x			1	1
$\overline{x}$	1		1	1

Hình 2.

Có hai khối lớn nhất tương ứng với các tích Boole biểu diễn như hình 3 và hình 4.

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x				
$\overline{x}$	1			1

Hình 3

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x			1	1
$\overline{x}$			1	1

Hình 4

Việc nhóm thành các khối cho thấy rằng các khai triển cực tiểu thành các tổng Boole của các tích Boole là:

a) $f(x,y,z) = x\overline{z} + \overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz\,;$ b) $f(x,y,z) = \overline{y} + \overline{x}z\,.$

Luyện tập 4. Dùng bản đồ Karnaugh cực tiểu hóa hàm Boole sau:

$$f(x,y,z) = xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,.$$

2.2.5.Dùng biểu đồ Karnaugh cực tiểu hóa hàm Boole bốn biến:

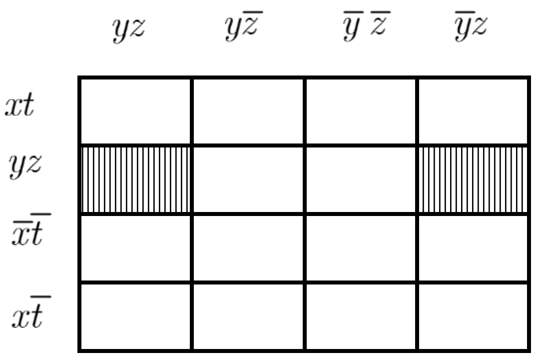
Bản đồ Karnaugh của hàm Boole bốn biến là một hình chữ nhật được chia làm 16 ô. Các ô này biểu diễn 16 từ tối tiểu (hội sơ cấp) có được. Một trong những cách lập bản đồ Karnaugh bốn biến được cho trong hình dưới đây.

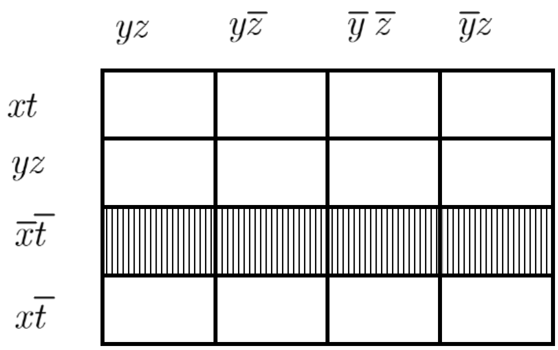
	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
xt	$xyzt$	$xy\overline{z}t$	$x\overline{y}\,\overline{z}t$	$x\overline{y}zt$
yz	$\overline{x}yzt$	$\overline{x}y\overline{z}t$	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}t$	$\overline{x}\,\overline{y}zt$
$\overline{x}\overline{t}$	$\overline{x}yz\overline{t}$	$\overline{x}y\overline{z}\,\overline{t}$	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$	$\overline{x}\,\overline{y}z\overline{t}$
$x\overline{t}$	$xyz\overline{t}$	$xy\overline{z}\,\overline{t}$	$x\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$	$x\overline{y}z\overline{t}$

Hai ô được gọi là kề nhau nếu hai từ tối tiểu (các hội sơ cấp) mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một từ đơn (biến). Với chẳng hạn, hai ô tương ứng với $\overline{x}yzt \,\&\, \overline{x}y\overline{z}t$ là kề nhau. Tương tự hai ô tương ứng với $\overline{x}yzt \,\&\, \overline{x}\overline{y}zt$ cũng kề nhau. Chúng ta có thể coi biểu đồ **Karnaugh** của hàm Boole 4 biến là một hình trụ tròn với 16 ô tạo thành mặt xung quanh biểu diễn 16 từ tối tiểu có thể có của hàm Boole.

Khi kết hợp các từ tối tiểu trong hai ô kề nhau theo phép lấy tổng Boole thì được một tích ba từ đơn tương ứng với hình chữ nhật có được bằng cách ghép hai ô đó. Chẳng hạn $\overline{x}yzt + \overline{x}y\overline{z}t = \overline{x}y(z+\overline{z})t = \overline{x}yt$ là tích ba từ đơn tương ứng với hình chữ nhật được ghép từ hai ô chứa $\overline{x}yzt \,\&\, \overline{x}y\overline{z}t$.

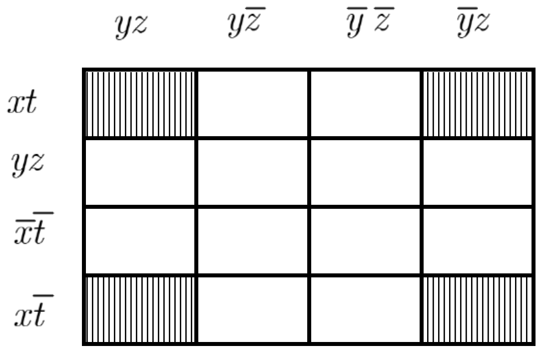
Một cách khái quát, khi chúng ta kết hợp các từ tối tiểu trong một hình chữ nhật gồm 1 ô, 2 ô, 4 ô hoặc 8 ô bằng phép lấy tổng Boole thì được một tích gồm 4,3,2 hoặc 1 từ đơn. Một hình chữ nhật gồm 1 ô, 2 ô, 4 ô hoặc 8 ô trên biểu đồ **Karnaugh** của hàm Boole được gọi là một khối và tương ứng biểu diễn một tích 4, 3, 2 hoặc 1 từ đơn. Khối gồm toàn bộ 16 ô biểu diễn hàm Boole bằng 1 với mọi x, y, z, t. Các hình sau biểu diễn một số khối ứng với tích các từ đơn trên biểu đồ **Karnaugh** của hàm Boole bốn biến.



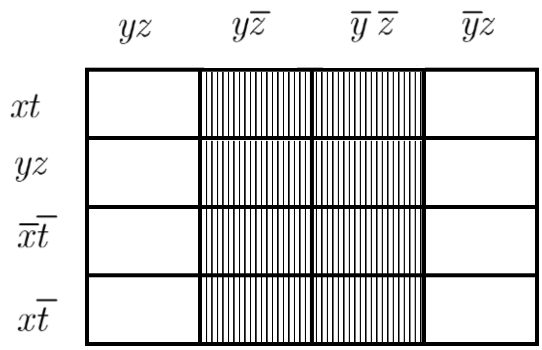


$\overline{x}zt = \overline{x}yzt + x\overline{y}zt$ $\qquad$ $\overline{x}\overline{t} = \overline{x}yz\overline{t} + \overline{x}y\overline{z}\overline{t} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}\overline{y}z\overline{t}$

T



$$xz = xyzt + \overline{x}\,\overline{y}zt + xyz\overline{t} + x\overline{y}z\overline{t}$$



$$\overline{z} = xy\overline{z}t + x\overline{y}\,\overline{z}t + \ldots + x\overline{y}\,\overline{z}\overline{t} + x\overline{y}z\overline{t}$$

Tương tự như khối trong biểu đồ **Karnaugh** của hàm Boole ba biến, khối trong biểu đồ **Karnaugh** của hàm Boole bốn biến càng lớn thì tích Boole tương ứng càng đơn giản.

Chúng ta sẽ áp dụng nguyên lý này để xác định các khối lớn nhất có thể có trong biểu đồ của hàm Boole bốn biến và tổ hợp các khối này để được hàm Boole cực tiểu.

Để tìm hàm Boole cực tiểu ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Ghi số 1 vào các ô trong các khối trên biểu đồ **Karnaugh** tương ứng với các tích Boole trong hàm Boole.

Bước 2. Tìm tất cả các khối lớn nhất bao gồm các ô chứa số 1.

Bước 3. Xác định hàm Boole cực tiểu bằng cách lấy tổng các tích tương với các khối lớn nhất phủ kín các ô chứa số 1 trên biểu đồ **Karnaugh** của nó.

Chú ý. Một khối bao gồm các ô chứa số 1 được gọi là lớn nhất nếu nó không bị chứa trong bất kỳ một khối nào bao gồm các số 1 khác.

Ví dụ 5. Cực tiểu hòa hàm Boole 4 biến sau:

$$f(x,y,z,t) = x\overline{y}\overline{z}t + \overline{x}yzt + \overline{x}y\overline{z}t + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}t + x\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}y\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$$

Với các ô chứa số 1 tương ứng với các tích Boole cho bởi hình sau:

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x			1	
$\overline{x}$	1	1	1	
$\overline{x}\,\overline{t}$		1	1	
$x\overline{t}$			1	

Giải. Có ba khối lớn nhất tương ứng với các tích Boole biểu diễn bởi hình sau:

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x				
$\overline{x}$	1	1		
$\overline{x}\,\overline{t}$				
$x\overline{t}$				

Khối lớn nhất ứng với $\overline{x}yt$

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x				
$\overline{x}$		1	1	
$\overline{x}\,\overline{t}$		1	1	
$x\overline{t}$				

Khối lớn nhất ứng với $\overline{x}\,\overline{z}$

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x			1	
$\overline{x}$			1	
$\overline{x}\,\overline{t}$			1	
$x\overline{t}$			1	

Khối lớn nhất ứng với $\overline{y}\,\overline{z}$

Từ các tích Boole ứng với các khối lớn nhất phủ biểu đồ **Karnaugh** của hàm Boole f, ta có hàm Boole cực tiểu của hàm Boole f đã cho là:

$\overline{x}yt + \overline{x}\,\overline{z} + \overline{y}\,\overline{z}$.

Luyện tập 5. Dùng biểu đồ **Karnaugh,** cực tiểu hòa hàm Boole 4 biến sau: $f(x, y, z, t) = xyzt + x\overline{y}zt + x\overline{y}\overline{z}t + \overline{x}y\overline{z}t + \overline{x}\,\overline{y}zt$.

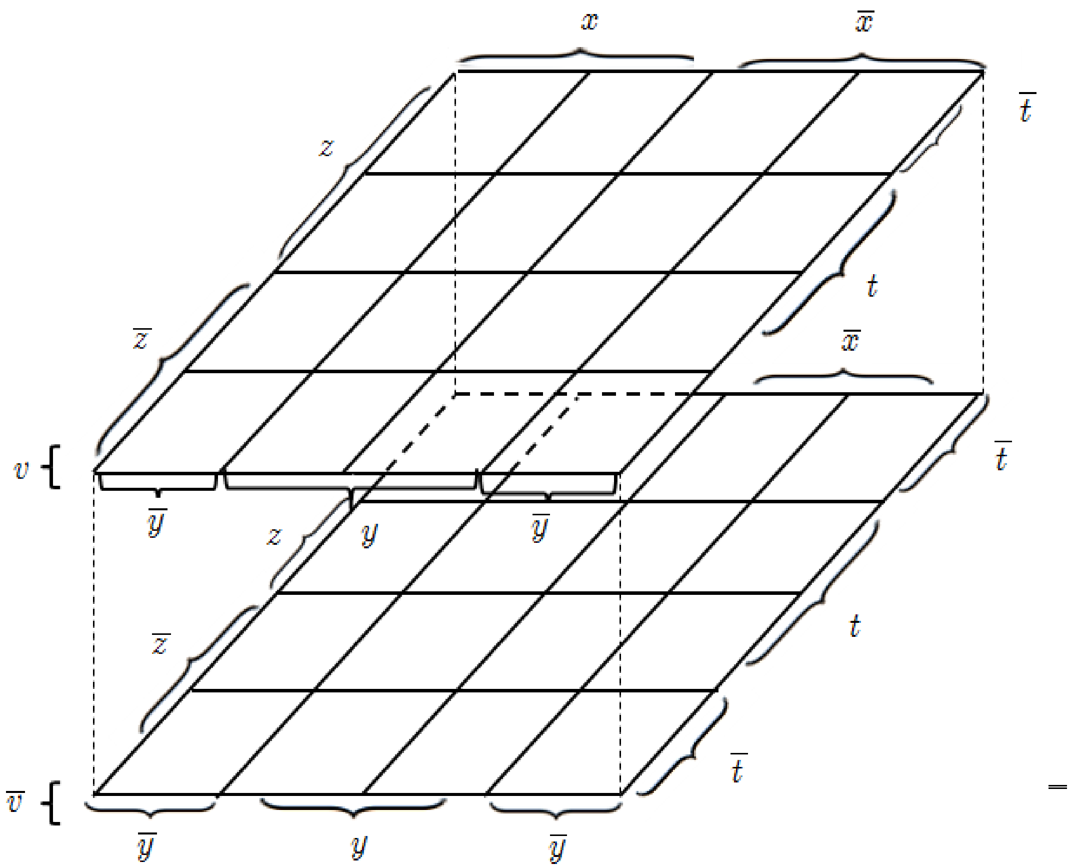
2.2.6. Dùng biểu đồ Karnaugh cực tiểu hóa hàm Boole năm biến, sáu biến.

2.2.6.1. Hàm Boole 5 biến.

Đối với hàm Boole 5 biến, ta dùng 2 lớp hình chữ nhật 16 ô v = 0 và lớp ứng với v = 1.để biểu diễn 32 ô của B^5, một lớp ứng với giá trị của biến thứ 5 v = 0 và lớp ứng với v = 1.

2.2.6.2. Hàm Boole 6 biến.

Để xử lý trường hợp hàm 6 biến ta sẽ sử dụng 4 lớp 16 ô thay vì 2 lớp.

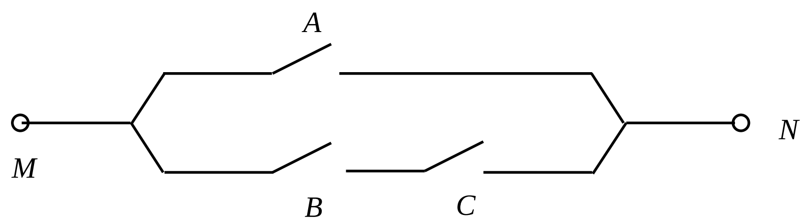


---------ଓଓ✪ଷଷ----------

Bài 12. Hàm Bool của các mạch điện: Cổng thiết kế. Mạng các cổng dựa theo công thức đa thức tối tiểu của hàm Bool.

1. Sơ đồ mạch điện và sự hình thành hàm Boole

Xét sơ đồ mạch điện gồm 3 ngắt điện:



Tùy theo các ngắt điện A, B, C được đóng hay mở, sẽ có dòng điện đi qua từ M đến N hay không.

Để biết các ngắt điện điều khiển việc cho dòng điện đi qua hay không, ta vẽ ra sơđồ cho tất cả mọi trường hợp. Tuy nhiên điều này không thể thực hiện được nếu số ngắt điện rất lớn. Ví dụ, nếu có 110 ngắt điện sẽ có tất cả sơ đồ khác nhau.

Để khắc phục điều này, ta có thể liên kết với mỗi ngắt điện một biến lấy giá trị 1 nếu ngắt điện đóng và lấy giá trị 0 nếu ngắt điện mở. Trong ví dụ trên có ba ngắt điện tương ứng 3 biến a, b, c. Ngoài ra toàn mạch điện còn liên kết với biến d lấy giá trị 1 nếu có dòng điện đi từ M đến N và lấy giá trị 0 trong trường hợp không có dòng điện nào đi từ M đến N.

Với tương ứng như vậy, ta có thể liệt kê tất cả các trường hợp trong bảng giá trị sau:

a	b	c	d
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Trong trường hợp số ngắt điện lớn thì việc thiết lập các bảng giá trị không thực tế.

Để khắc phục khó khăn này, ta tìm công thức cho phép biểu diễn hàm d(a, b, c) theo các biến a, b, c như các hàm đa thức trong trường hợp biến thực.

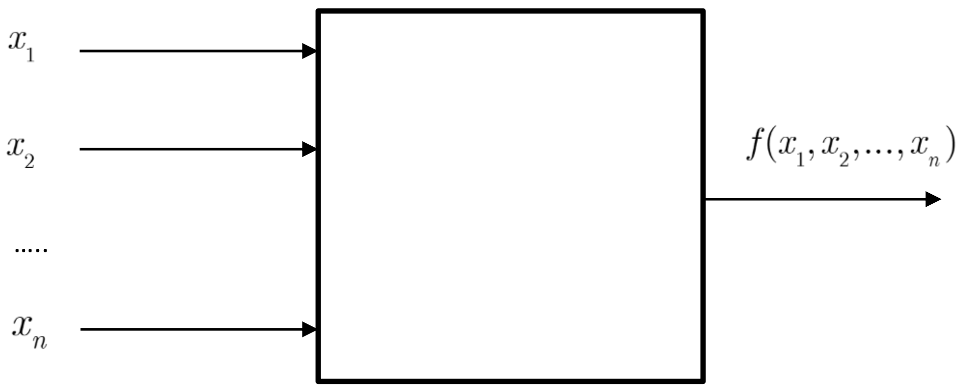
Mặt khác, ta thấy rằng bảng trên rất giống bảng chân trị của các dạng mệnh đề, do vậy, có thể đồng nhất dạng mệnh đề E(p, q, r,…) với bảng chân trị của nó, với chú ý E cũng chỉ lấy hai giá trị {0, 1}, nghĩa là E chính là hàm Boole đã trình bày ở trên.

2. Thiết kế mạng các cổng lôgic

2.1. Khái niệm mạch logic

Xét một thiết bị như hình trên, có một số đường vào (dẫn tín hiệu vào) và chỉ có một đường ra (phát tín hiệu ra). Giả sử các tín hiệu vào x_1, x_2, …, x_n (ta gọi là đầu vào hay input) cũng như tín hiệu ra f (đầu ra hay output) đều chỉ có hai trạng thái khác nhau, tức là mang một bit thông tin, mà ta ký hiệu là 0 và 1.

Ta gọi một thiết bị với các đầu vào và đầu ra mang giá trị 0, 1 như vậy là một mạch lôgic.



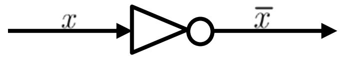
Đầu ra của một mạch lôgic là một hàm Boole f của các đầu vào x_1, x_2, …, x_n. Ta nói mạch lôgic trong hình trên thực hiện hàm f.

Các mạch lôgic được tạo thành từ một số mạch cơ sở, gọi là cổng lôgic. Các cổng lôgic sau đây thực hiện các hàm phủ định, hội và tuyển.

2.2. Các cổng logic

1) **Cổng NOT:** Cổng NOT thực hiện hàm Boole f(x) là phần bù của biến Boole x. Cổng NOT còn được gọi là bộ đảo (inverter). Cổng chỉ có một đầu vào. Đầu ra f(x) là phủ định của đầu vào *x*.

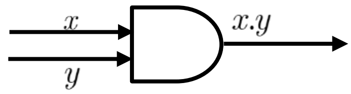
$$f(x) = \overline{x} = \begin{cases} 0 & khi \quad x = 1 \\ 1 & khi \quad x = 0 \end{cases}$$



Chẳng hạn, xâu bit 100101011 qua cổng NOT cho xâu bit 011010100.

2) **Cổng AND:** Cổng AND thực hiện hàm hội. Đầu ra f*(x,y)* là hội (tích) của các đầu vào của hai biến x và y. Đầu ra là tích Boole của các giá trị đó.

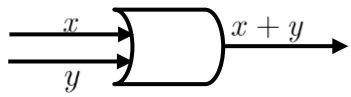
$$f(x,y) = x.y = \begin{cases} 1 & khi \quad x = y = 1 \\ 0 & khi \quad x \neq y \,\&\, x \neq 1 \,\&\, y \neq 1 \end{cases}$$



Chẳng hạn, hai xâu bit 101001101 và 111010110 qua cổng AND cho 101000100.

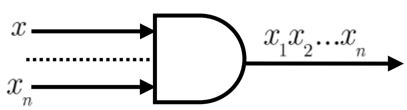
3). Cổng OR: Cổng OR thực hiện hàm tuyển (tổng). Đầu ra **f***(x,y)* là tuyển (tổng) của các đầu vào

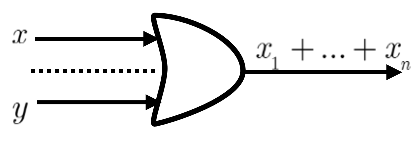
$$f(x,y) = x + y = \begin{cases} 0 & khi \quad x = y = 0 \\ 1 & khi \quad x.y \neq 1 \end{cases}$$



Chẳng hạn, hai xâu bit 101001101 và 111010100 qua cổng OR cho 111011101.

2.3. Chú ý 1. Ngoài cổng **AND** và **OR** với hai đầu vào, để thuận lợi trong mô hinh2 hóa các mạch logic, chúng ta còn cho phép các cổng AND và OR có nhiều đầu vào như hình sau:





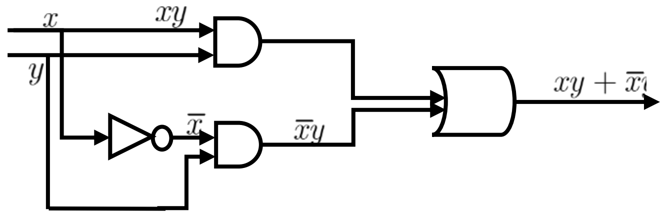
Các mạch logic có thể được xây dựng bằng cách tổ hợp các cổng NOT, AND và OR như những phần cơ sở nhằm thực hiện việc tính toán hàm Boole bất kỳ.

Ví dụ 1.1. Hãy thiết kế một mạch tổ hợp, có đầu ra là biểu thức Boole:

$$f(x,y) = xy + \bar{x}y$$

Giải

Ta thấy *xy* là cổng AND, $\overline{x}$ là bộ đảo và $\overline{x}y$ là cổng AND. Hình vẽ ở hình sau có đầu vào là *x*, *y* và đầu ra là: $f(x,y) = xy + \overline{x}y$.



Ví dụ 1.2. Thiết kế mạch logic thực hiện hàm Boole được cho bởi bảng 1 sau:

x	*y*	*z*	f(*x, y, z)*
0	0	0	0
1	1	0	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

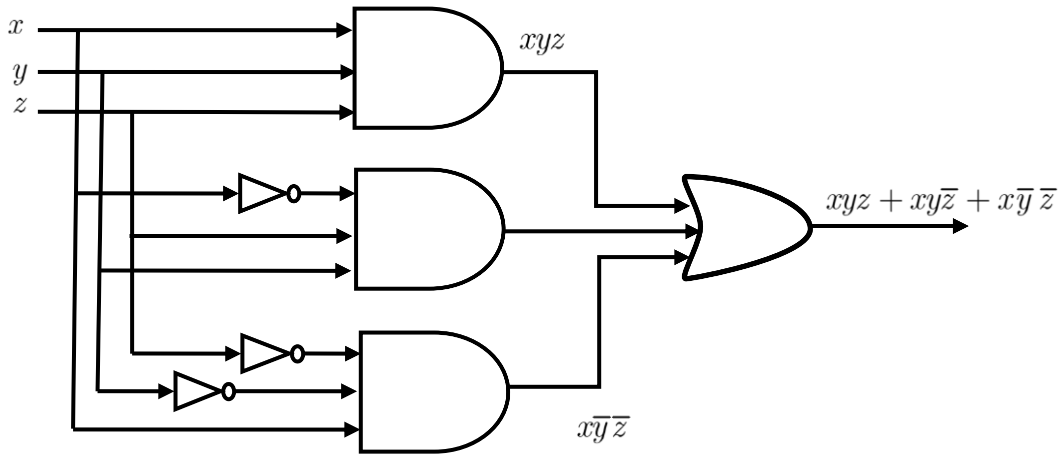
Bảng 1

Giải

Dựa trên giá trị của hàm f(x, y, z) được cho trong bảng 1, ta có thể xác định được dạng nối rời chính tắc của hàm f là:

$$f(x,y,z)=xy\overline{z}+x\overline{y}\,\overline{z}+xyz$$

Mạch logic thực hiện hàm Boole được tổ hợp bởi các cổng logic và được thể hiện như hình sau:



Luyện tập 1. 1. Thiết kế mạch tổ hợp có đầu ra là biểu thức của Boole $f(x,y)=xy+\overline{x}\,\overline{y}$

Luyện tập 1. 2. Xây dựng một mạch lôgic thực hiện hàm Boole cho bởi bảng sau.

x	*y*	*z*	F(*x*,*y*,*z*)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

3.Cực tiểu hóa hàm Boole và mạch tổ hợp

3.1.Cực tiểu hóa hàm Boole bằng phương pháp biến đổi đại số

Phương pháp biến đổi đại số dựa trên định nghĩa, tính chất của các phép toán, các luật, các hằng đẳng thức của đại số Boole để viết lại hàm Boole một cách tương đương sao cho giảm được số các tích Boole cunng4 như các từ đơn so với hàm Boole ban đầu.

Ví dụ 2.Cực tiểu hóa hàm Boole:

$$f(x,y,z) = xyz + x\overline{y}z.$$

Giải

Ta có:

$$f(x,y,z) = xyz + x\overline{y}z = xz(y+\overline{y}) = xz.1 = xz$$

Mạch logic thực hiện hàm Boole ban đầu cần bốn cổng logic trong khi mạch thực hiện hàm Boole được cực tiểu hóa chỉ cần một cổng logic.

Bổ đề 1. Nếu f và g là các hàm Boole thì:

$$f\overline{g} + g = f + g$$

Chứng minh.

Áp dụng luật hấp thụ, ta có:

$$f\overline{g} + g = f\overline{g} + (fg + g) =$$
$$= f(g + \overline{g}) + g = f + g$$

Luyện tập 2. Cực tiểu hóa hàm Boole:

$$f(x,y,z) = xyz + x\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$$

3.2. Cực tiểu hóa hàm Boole và mạch tổ hợp

Ví dụ 3.

a) Cực tiểu hóa hàm Boole sau: $f(x,y,z) = xyz + x\overline{y}z$.

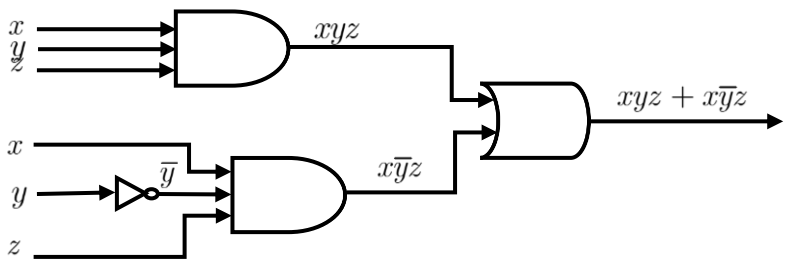
b) Thiết kế mạch tổ hợp của hàm Boole $f(x,y,z) = xyz + x\overline{y}z$ mà mạch tổ hợp của dạng cực tiểu hóa của nó.

Giải

a) Ta có:

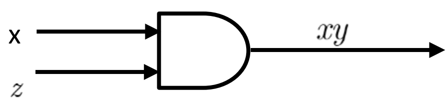
$$f(x,y,z) = xyz + x\overline{y}z = \left(y + \overline{y}\right)xz = 1.xz = xz$$

b) + Mạch tổ hợp của hàm Boole $f(x,y,z) = xyz + x\overline{y}z$ có dạng:



Nhận xét: Mạch này dùng 3 cổng và một bộ đảo.

+ Mạch tổ hợp của dạng cực tiểu hóa f(x, y, z) =xz là:



Nhận xét: Mạch này chỉ dùng 1 cổng

Luyện tập 3.

a) Cực tiểu hóa hàm Boole sau: $f(x,y) = x\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}y$.

b) Thiết kế mạch tổ hợp của hàm Boole $f(x,y) = x\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}y$ và mạch tổ hợp của dạng cực tiểu hóa của nó.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 4

Bài 1. Tìm giá trị của các biểu thức sau

a) $1.\overline{0}$ b) $1+\overline{1}$ c) $\overline{0}.0$ d) $\overline{(1+0)}$

Bài 2. Tìm giá trị của các hàm Boole dưới đây khi các biến *x*, *y*, *z* và *t* lấy các giá trị 1, 1, 0 và 0.

a) $x\overline{y}+\overline{x}.\overline{y}$ b) $t+\overline{x}y$ c) $tx+\overline{y}+yz$ d) $tx+xy+yz$

Bài 3.Tìm tất cả các giá trị của *y* và *z* để các biểu thức dưới đây luôn luôn lấy giá trị *1*, biết rằng *x = 1*.

a) $\overline{x}y+xz$ b) $xy+z$

Bài 4. Tìm tích Boole của các biến *x*, *y*, *z* hoặc phần bù của chúng, biết rằng tích đó có giá trị 1 nếu và chỉ nếu:

a) $x=0, y=1, z=0;$ b) $x=0; y=z=1.$

Bài 5. Tìm khai triển tổng các tích của các hàm Boole sau:

a) $f(x,y,z)=x+y+z$ b) $g(x,y,z)=x\overline{y}$

Bài 6. Dùng biểu đồ **Karnaugh** để cực tiểu hóa hàm Boole hai biến sau:

$a).f(x,y)=xy+x\overline{y};...b).g(x,y)=xy+x\overline{y}+\overline{x}y+\overline{x}\overline{y}$

Bài 7. Dựng các mạch gồm các bộ đảo, các cổng AND và OR để tạo các đầu ra sau:

a) $f(x,y,z)=\overline{x}\,\overline{y}+(\overline{z}+x)$. b) $g(x,y,z)=\overline{x}\overline{(y+\overline{z})}$.

Bài 8. Vẽ biểu đồ **Karnaugh** của những khai triển tổng các tích Boole ba biến sau:

a) $f(x,y,z)=x.\overline{y}.\overline{z}$. b) $g(x,y,z)=\overline{x}.y.z+\overline{x}.y.z+\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$.

Bài 9. Dùng biểu đồ **Karnaugh** để cực tiểu hóa hàm Boole ba biến sau:

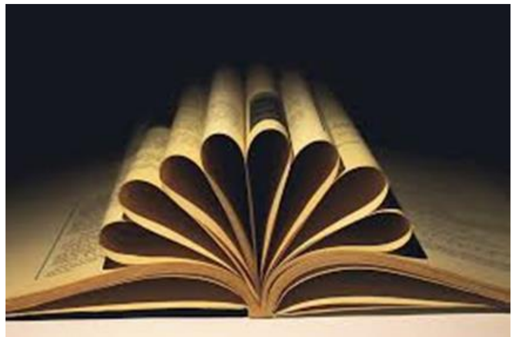
a) $f(x,y,z)=\overline{x}.y.z+\overline{x}.\overline{y}.z$. b) $g(x,y,z)=xyz+xy\overline{z}+\overline{x}yz+\overline{x}y\overline{z}$.

Bài 10.Tìm dạng tuyển chuẩn tắc cực tiểu của hàm Boole sau bằng 2 phương pháp:

$$f(x,y,z,t)=\overline{x}.\overline{y}.z.\overline{t}+\overline{x}.\overline{y}.z.t+x.\overline{y}.z.t+x.y.\overline{z}.\overline{t}+x.y.\overline{z}.t+x.y.z.t.$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VĂN LANG

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN



CÁC BÀI GIẢNG TOÁN RỜI RẠC

Biên soạn: PGS.TS. NGUYỄN VĂN LỘC- TS. TRẦN NGỌC VIỆT

TP.HỒ CHÍ MINH .THÁNG 2 NĂM 2020

Chương 5. ĐỒ THỊ

Bài 13.Các khái niệm cơ bản : + Biểu diễn ma trận của đồ thị.+ Sự đẳng cấu của các đồ thị.

1. 1.Định nghĩa đồ thị.

+ Giả sử X là tập không rỗng các phần tử nào đó và $U \subseteq X \times X$, ở đây $U = \{(a,b): a,b \in X\}$ gồm các cặp (a,b) sắp thứ tự, mỗi cặp (a,b) là một ***cung***. Trong trường hợp này bộ G = <X, U > được gọi là ***đồ thị có hướng***, với X là tập các đỉnh, U là tập các cung.

+ Trường hợp $U = \{(a,b): a,b \in X\}$ gồm các cặp (a,b) không sắp thứ tự, mỗi cặp (a,b) gọi là một ***cạnh*** và trong trường hợp này bộ G = <X, U> được gọi là đồ ***thị vô hướng***, với X là tập các đỉnh, U là tập các cạnh.

+ Đồ thị G = <X, U> được gọi là đồ thị hữu hạn nếu X là tập hữu hạn.

+ Hai đỉnh $a,b \in X\,(a \neq b)$ được gọi là hai đỉnh kề nhau nếu (a,b) là một cạnh (một cung)của đồ thị .

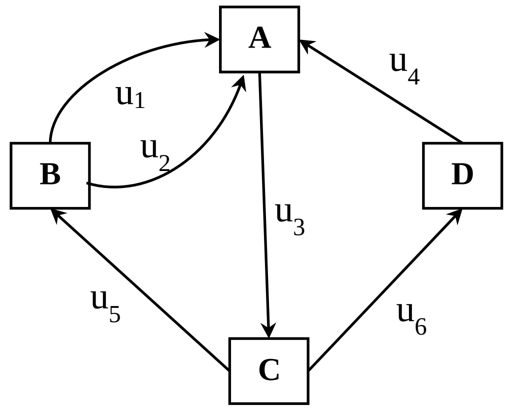
+ Hai cạnh (hai cung) được gọi là hai cạnh (hai cung) kề nhau nếu chúng có một đỉnh chung.

+ Một cạnh (một cung) có thể bắt đầu và kết thúc tại cùng một đinh được gọi là nút hay khuyên.

+Nếu cung đi từ đỉnh *a* đến đỉnh *b* thì *a* gọi là đỉnh đầu, còn *b* bội là đỉnh cuối của cung.

+ Nếu cặp đỉnh (a,b) có từ hai cạnh (hai cung cùng hướng) thì cặp (a,b) gọi là cạnh (cung) bội.

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng đồ thị hình 1 là đồ thị có hướng.



Hình 1

Giải.

Hình 1 minh họa đồ thị có hướng gồm có:

+ Tập đỉnh là { A, B, C, D}

+ Tập cạnh là $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

+ Ánh xạ liên kết cạnh đỉnh định nghĩa như sau :

* Cặp cạnh $u_1 \& u_2$ liên kết với cặp đỉnh (A, B).

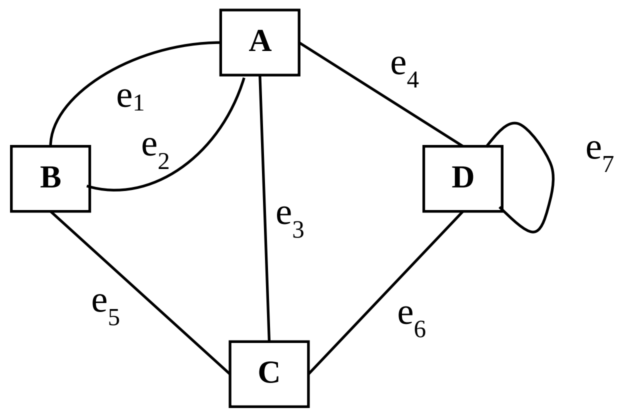
* Cạnh u_3 liên kết với cặp đỉnh (A, C).

* Cạnh u_4 liên kết với cặp đỉnh (D, A).

* Cạnh u_5 liên kết với cặp đỉnh (C, B).

*Cạnh u_6 liên kết với cặp đỉnh (C, D)

Luyện tập 1. Chứng tỏ rằng đồ thị hình 2 là đồ thị vô hướng



Hình 2

1.2. Một số dạng đồ thị thường gặp.

a).Đơn đồ thị, đơn đồ thị có hướng, đa đồ thị, đa đồ thị có hướng và giả đồ thị.

Cho đồ thị vô hướng *G* = <*X*, *U* >:

1) *G là đồ thị đơn (hay đơn đồ thị)* khi và chỉ khi đồ thị G không có khuyên, và bất kì 2 đỉnh nào cũng được nối với nhau bởi không quá một cạnh.

2) *G là đa đồ thị* khi và chỉ khi đồ thị G không có khuyên và trong G có tồn một cặp đỉnh phân biệt được nối với nhau bởi nhiều hơn một cạnh.

3) *G là giả đồ thị* khi và chỉ khi đồ thị G là đa đồ thị có khuyên, Giả đồ thị là một đồ thị vô hướng tổng quát nhất.

Chú ý. Cặp đỉnh được nối với nhau bởi nhiều hơn 1 cạnh, hoặc nhiều hơn 1 cung (cùng chiều) được gọi là cạnh bội (cung bội).

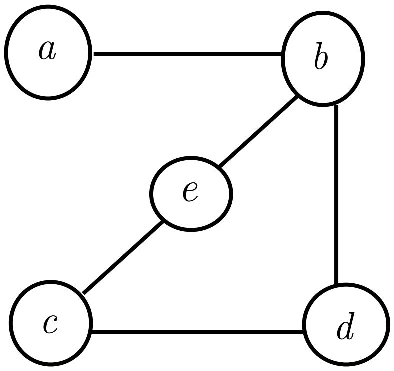
Cho đồ thị có hướng *G* = <*X*, *U* >:

4) *G là đơn đồ thị có hướng* khi và chỉ khi trong G đối với mỗi cặp đỉnh khác nhau có không quá một cung nối với nhau và có thể có khuyên

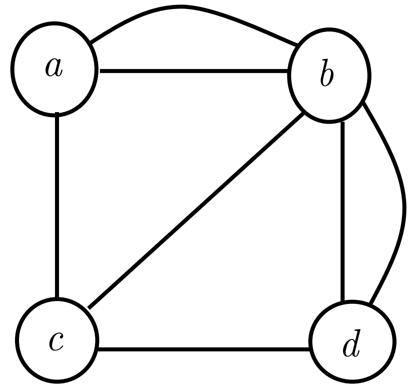
5) *G là đa đồ thị có hướng* khi và chỉ khi trong G có một cặp đỉnh khác nhau được nối với nhau bởi nhiều hơn một cung (cùng chiều)và có thể có khuyên.

Ví dụ 2.Cho các đồ thị có hướng và vô hướng $G_i(i=1,2,3,4)$ sau:

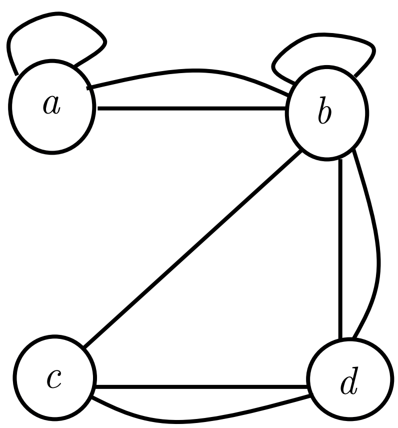
G_1 :



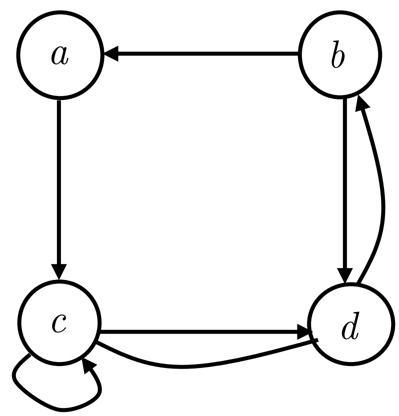
G_2 :



G_3 :



G_4 :



a) . Trong các đồ thị trên , hãy chỉ ra đồ thị nào là đơn đồ thị? Đơn đồ thị có hướng? Đa đồ thị ? Giả đồ thị? Đa đồ thị có hướng?

b) Trong các đồ thị vô hướng đã cho không là đơn đồ thị, hãy tìm tập các cạnh mà nếu bỏ đi chúng sẽ nhận được đồ thị đơn.

Giải.

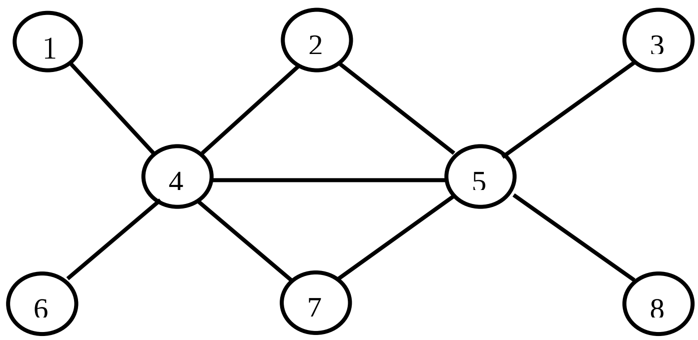
a) . G_1 là đồ thị đơn G_4 là đồ thị đơn có hướng, G_2 là đa đồ thị, G_3 là giả đồ thị.

b) . $G_2 \& G_3$ là các đồ thị không đơn. Trong G_2 bỏ đi cạnh (a, b) và cạnh (d, c) ; Trong G_3 bỏ đi các khuyên (a, a) , (b, b) và bỏ đi các cạnh (a, b), (b, d) , (d, c) ta sẽ nhật được hai đồ thị đơn mới.

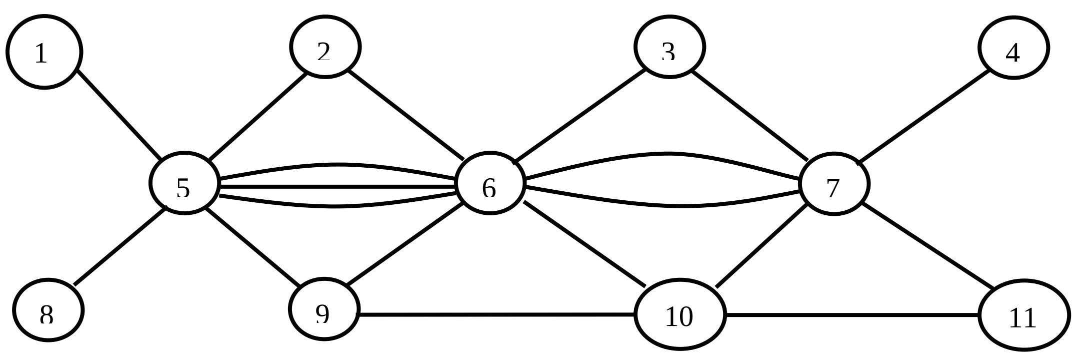
L

Luyện tập 2. Cho các mạng máy tính có dạng đồ thị H_1, H_2, H_3 .Mỗi đỉnh là một trung tâm máy tính , cạnh nối hai đỉnh là đường truyền thông giữa hai trung tâm máy tính ở hai đỉnh đó.

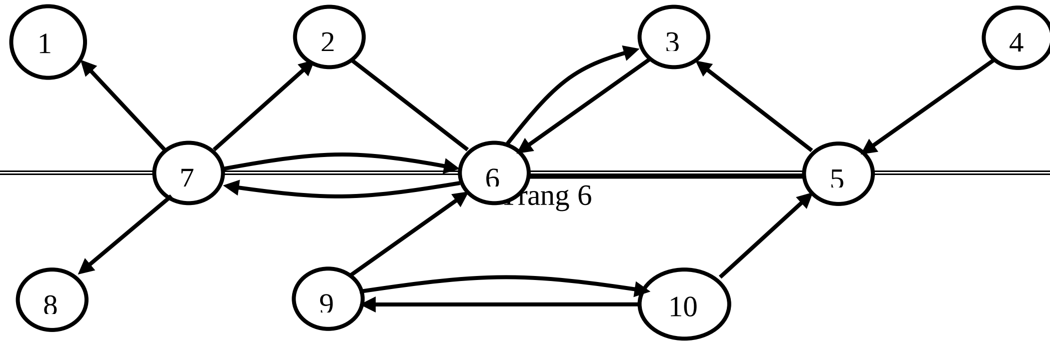
H_1:



H_2:



H_3:



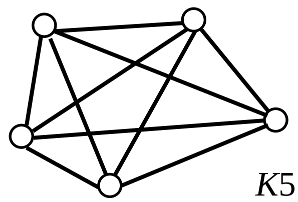
Ba mạng máy tính trên thuộc dạng đồ thị có tên là gì ? Ý nghĩa của mỗi mạng đó?

b).Đồ thị đầy đủ và đồ thị k- đầy đủ.

6). Đồ thị G = <X, U > là đầy đủ chỉ khi mỗi cặp đỉnh khác nhau có đúng 1 cạnh (1 cung) nối với nhau.Đồ thị đầy đủ n đỉnh ký hiệu là $K_n(n \geq 1)$.

7). Đồ thị G = <X, U > là k- đầy đủ khi và chỉ khi mỗi đỉnh có đúng k cạnh (k cung có chiều tùy ý) nối với nhau.Đôi khi đồ thị k-đầy đủ còn **gọi là đồ thị k-chính quy.**

Ví dụ 3. Chứng tỏ rằng: Hình 3 minh họa đầy đủ đồ thị K5 gồm 5 đỉnh và 10 cạnh.



$K5$

Hình 3

Luyện tập 3. Tìm số đỉnh của đồ thị chính quy bậc 4 có 10 cạnh. Vẽ đồ thị đó.

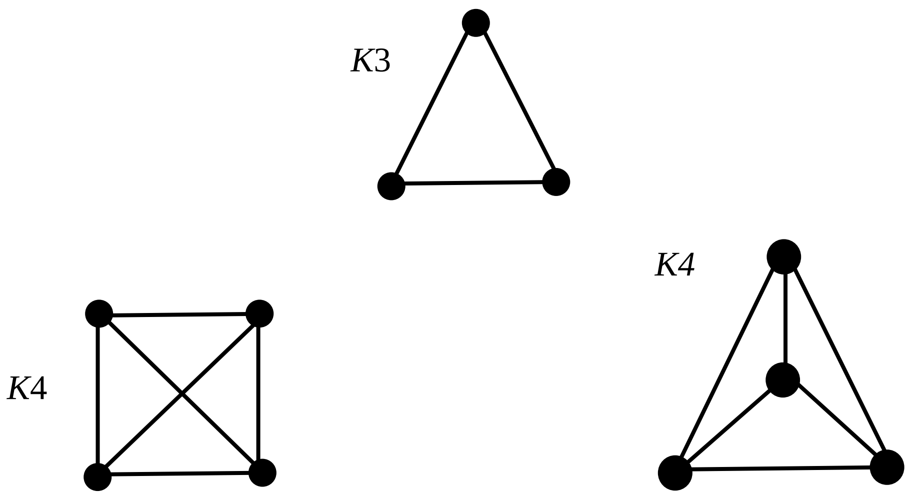
c).Đồ thị phân đôi và đồ thị phân đôi đầy đủ.

8).Đồ thị đơn G = <X, U > là đồ thị phân đôi khi và chỉ khi $X \neq \phi, X = X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = \phi$ và với mỗi cạnh $u = (a,b) \in U$ ta luôn có đỉnh $a \in X_1$ còn $b \in X_2$ hoặc ngược lại.Đồ thị phân đôi ký hiệu là $G =< X_1 \cup X_2, U >$

9). Đồ thị phân đôi $G =< X_1 \cup X_2, U >$ được gọi là đồ thị phân đôi đầy đủ khi và chỉ khi với mỗi cặp đỉnh $a \in X_1$ và $b \in X_2$ ta luôn có $(a,b) \in U$. Đôi khi đồ thị phân đôi đầy đủ $G =< X_1 \cup X_2, U >$ với $|X_1| = n, |X_2| = m$ được ký hiệu là $K_{n,m}$.

Ví dụ 4. Chứng tỏ rằng : **Hình 4** minh họa một số đồ thị đủ và đồ thị phân đôi đầy đủ.

$K2 \equiv K1,1$

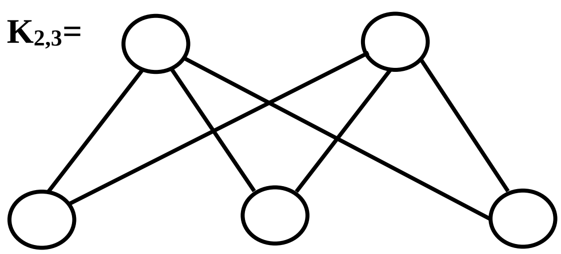


Hình 4

Nhận xét : Các đồ thị K2 và K1-1 y hệt nhau , còn K4 có thể vẽ bằng nhiều cách khác nhau.

Luyện tập 4.1.Đồ thị phân đôi đầy đủ K2,3 sau có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh?

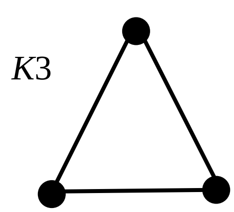
$K_{2,3}$=



d). Đồ thị phẳng. Đồ thị vô hướng G = <X, U > gọi là đồ thị phẳng nếu G = <X, U > có thể biểu diễn trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó chỉ cắt nhau ở các đỉnh mà thôi. Cách vẽ như vậy gọi là một biểu diễn phẳng của đồ thị G = <X, U > ký hiệu G_p là đồ thị biểu diễn phẳng của đồ thị G = <X, U > .

e).Đồ thị chu trình đơn. Đồ thị chu trình đơn n đỉnh (ký hiệu Cn) là một đa giác khép kín gồm n đỉnh.

Ví dụ 5. Chứng tỏ rằng : Đồ thị K3 cũng chính là C3



Luyện tập 5. Cho biết các đỉnh của đồ thị có bậc là 4, 3, 3, 2, 2. Tìm số cạnh của đồ thị và vẽ đồ thị này.

e). Đồ thị bù . Đồ thị bù của đồ thị đơn G = <X, U > ta định nghĩa là đồ thị $\overline{G} = < X, \overline{U} >$, ở đây $\overline{U} = \{u = (a,b) \mid a,b \in X \ \& \ (a,b) \notin U\}$

Cách khác:

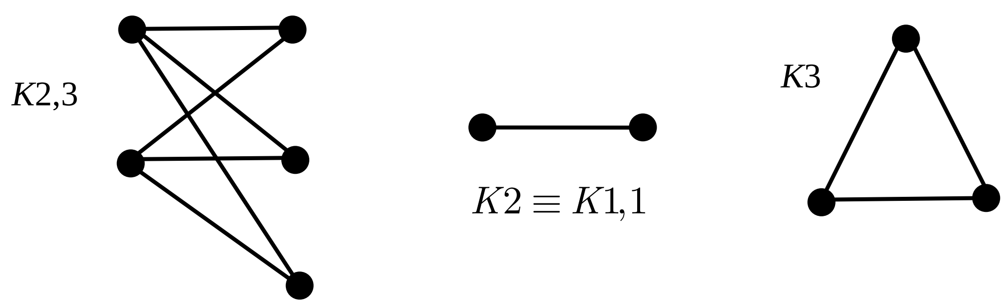
Cho G = < X, U >, là một đồ thị vô hướng đơn gồm n đỉnh. Đồ thị bù của G, ký hiệu là $\overline{G}$, là đồ thị :

+ Có tập đỉnh là X

+ Với mọi $x, y \in X$ thì có cạnh của $\overline{G}$ nối x,y khi và chỉ khi và trong G không có cạnh nối x , y.

Chú ý rằng: Số cạnh (G) + Số cạnh ($\overline{G}$) = $\frac{n(n-1)}{2}$

Ví dụ 6 . đồ thị bù của đồ thị K2,3 là một đồ thị gồm K2 và K3.



1.3. Bậc của đồ thị- Đồ thị con

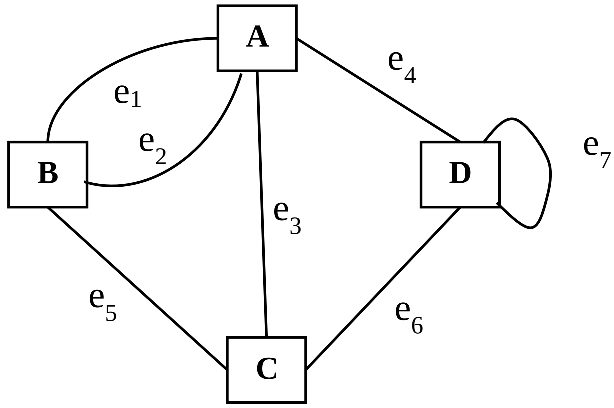
1.3.1. Bậc của đồ thị.

+ Cho đồ thị vô hướng G = < X, U> , với $x \in X$, ta ký hiệu m(x) là số các cạnh thuộc đỉnh x và m(x) gọi là bậc của đỉnh x (nếu đỉnh x có khuyên thì được tính là 2), nếu --m(x) = 0 thì x được gọi là đỉnh **cô lập và**

--nếu m(x) =1 thì x được gọi là **đỉnh treo**.

Bậc của đồ thị vô hướng G = <X, U> được ký hiệu là $m(G) = \sum_{x \in X} m(x)$.

Ví dụ 7. Cho đồ thị vô hướng.



Tính d(B), d(D)?

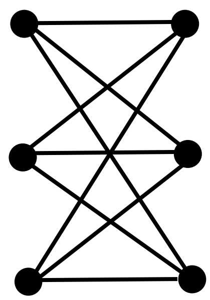
Giải.

d(B) = 3; D(d) =4.

Luyện tập 7.1.

Xác định bậc của đồ thị K3,3.

*K*3,3



+Cho đồ thị có hướng G = <X, U> , Với $x \in X$ là một đỉnh của đồ thị. Ta ký hiệu $m^{+}(x)$ là số các cung vào của đỉnh x, còn $m^{-}(x)$ là bậc ra của đỉnh x. khi đó ta gọi $m^{+}(x)$ là bậc vào của đỉnh x, còn $m^{-}(x)$ là bậc ra của đỉnh x. Bậc của đồ thị có hướng G = < X, U> được ký hiệu là $m(G) = \sum_{x \in X} m^{+}(x) + \sum_{x \in X} m^{-}(x)$. Với $x \in X$ mà $m^{+}(x) + m^{-}(x) = 0$ thì ta nói x là đỉnh cô lập, còn nếu có $m^{+}(x)$ = 0 và $m^{-}(x)$=1 hoặc $m^{+}(x) = 1$ và $m^{-}(x) = 0$ thì x được gọi là đỉnh treo.

Các tính chất của bậc của đồ thị.

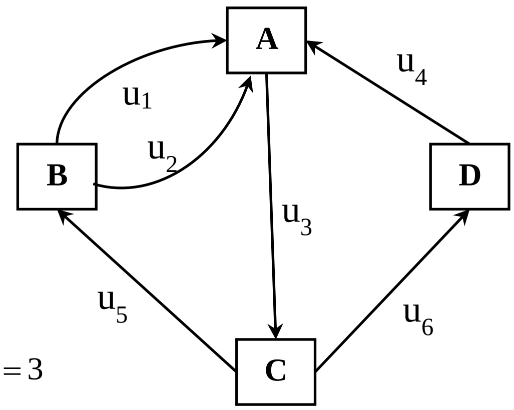
Định lý 1.(Định lý bắt tay). Cho G = < X, U> là đồ thị bất kỳ (có hướng hoặc vô hướng). Khi đó ta luôn có bậc của G bằng hai lần số cạnh (số cung) của nó: $m(G) = 2|U|$.

Hệ quả. Đối với đồ thị có hướng G = < X, U > ta luôn có

$$\sum_{x \in X} m^{+}(x) = \sum_{x \in X} m^{-}(x) = |U|$$

Định lý 2. Trong một đồ thị bất kỳ (có hướng hoặc vô hướng) G = < X, U>, số đỉnh bậc lẻ trong đồ thị luôn luôn là một số chẵn.

Ví dụ 8. Cho đồ thị có hướng :

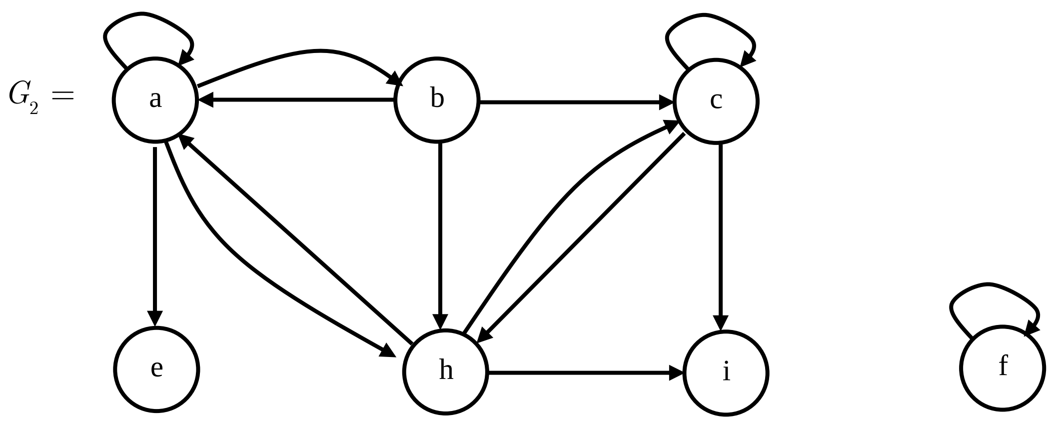


Tính $m^{+}(A), m^{-}(A)$.

Giải.

$m^{+}(A) = 1; m^{-}(A) = 3$

Luyện tập 8. Cho đồ thị có hướng G2.



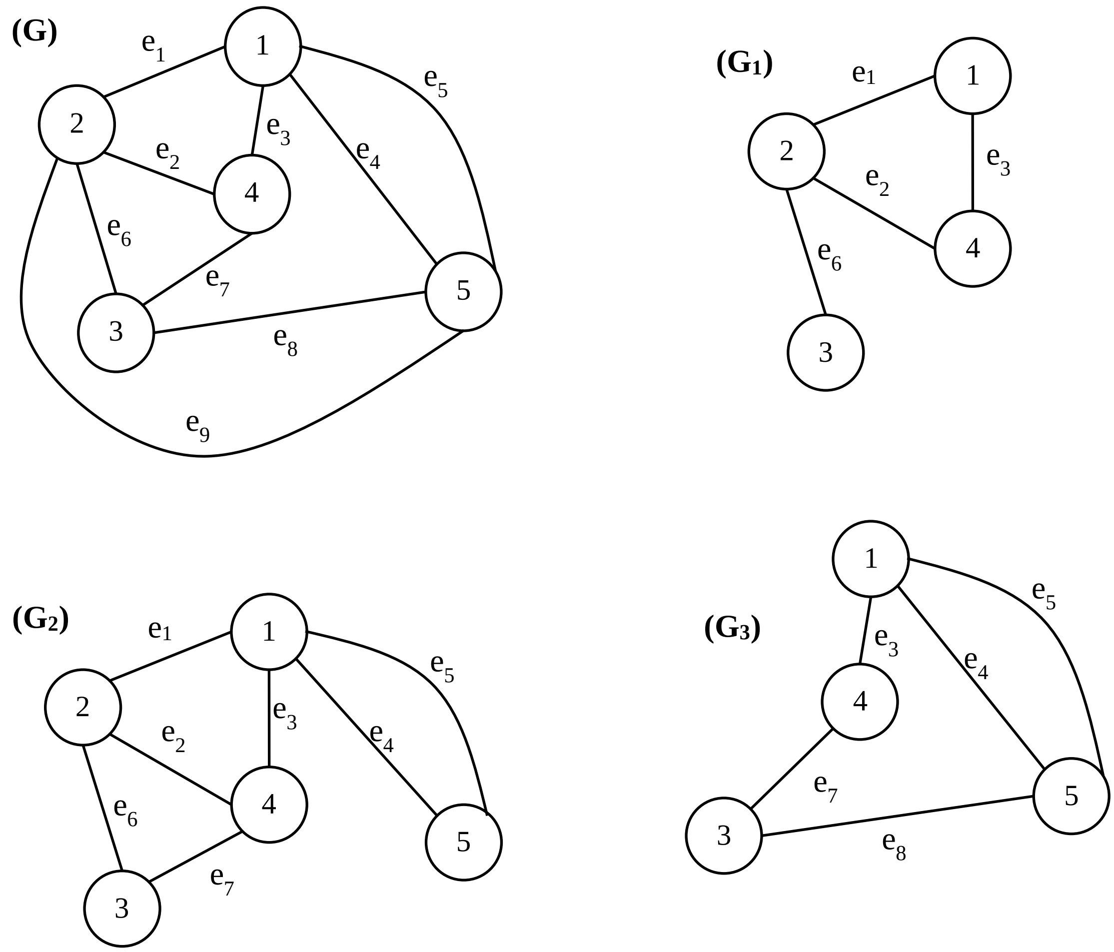
Tìm bậc của đồ thị G2 và kiểm tra tính đúng đắn của định lý 1 và định lý 2.Chỉ ra đỉnh cô lập và đỉnh treo của đồ thị trên , đồng thời kiểm tra bậc vào có bằng bậc ra trong G2 không.

1.3.2. Đồ thị con.

+ Nếu trong G = < X, U > ta bỏ đi một số đỉnh nào đó và các cạnh liên quan tới các đỉnh đó thì phần còn lại của đồ thị được gọi là đồ thị con của đồ thị G đã cho.

+ Nếu trong G = < X, U > ta bỏ đi một số cạnh , giữ nguyên các đỉnh thì phần còn lại của đồ thị được gọi là đồ thị bộ phận của đồ thị G đã cho.

Ví dụ 9. Hình sau cho 4 đồ thị liên hệ với nhau:



Xác định mối liên hệ giữa các đồ thị đã cho?

Giải.

Trong các đồ thị trên, tất cả các đồ thị G1, G2, G3 đều là đồ thị con của đồ thị G. Trong đó G2 là đồ thị bộ phận của G, G3 là đồ thị con của G sinh bởi tập đỉnh { 1, 3, 4, 5}; G1 không phải là đồ thị bộ phận (vì không lấy hết đỉnh của G) và cũng không sinh bởi tập đỉnh {1, 2, 3, 4} vì thiếu e7.

1.4. Biểu diễn đồ thị

1.4.1. Phương pháp hình học

Biểu diễn đồ thị G = <X, U> dưới dạng hình học theo nguyên tắc sau đây:

+ Với mỗi $x \in X$ đặt tương ứng với một điểm trên mặt phẳng hay một điểm trong không gian, đồng thời dùng ngay ký hiệu *x* để ghi nhãn cho chính điểm đó và gọi nó là đỉnh của đồ thị.

+ Nếu $u = (x, y) \in U$ là một cạnh từ đỉnh *x* đến đỉnh *y* được nối với nhau bởi một đoạn thẳng hay một đoạn cong *u* mà không đi qua các đỉnh trung gian khác .

+ Nếu $u = (x, y) \in U$ là một cung với đỉnh đầu là *x* và đỉnh cuối là *y* thì từ đỉnh đầu *x* đến đỉnh cuối *y* được nối với nhau bởi một đoạn thẳng hay một đoạn cong có hướng từ *x* đến *y* và không đi qua bất kỳ một đỉnh trung gian nào khác .

+ Nếu $u = (x, y) \in U$ thì tại đỉnh *x* có một khuyên. Trường hợp $x \in X$ nhưng $(x, x) \notin U$ hoặc không có $y \in X$ nào để $(x, y) \in U$ thì đỉnh *x* được gọi là đỉnh cô lập.

1.4.2. Phương pháp ma trận kề

1) Trường hợp G = <X, U> là đồ thị vô hướng với $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ thì đồ thị *G* có thể biểu diễn bằng ma trận vuông cấp *n* (ký hiệu là $M_G^{n \times n}$), mà phần tử δ_{ij} ở hàng *i* cột *j* được xác định như sau:

+ Nếu cặp đỉnh có *d* cạnh nối với nhau thì $\delta_{ij} = d$; khi cặp đỉnh (x_i, x_j) không có cạnh nào nối với nhau thì $\delta_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, ..., n)$. Bằng cách đó ta sẽ nhận được ma trận kề biểu diễn đồ thị đã cho.

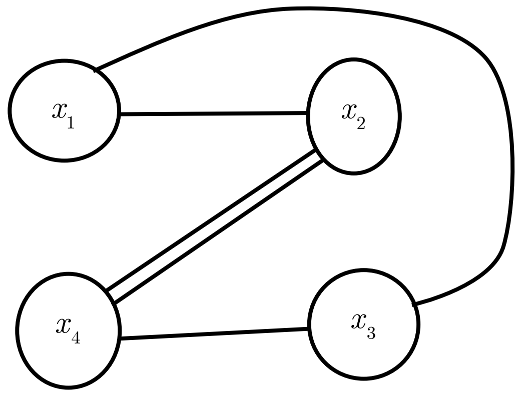
Ma trận của đồ thị vô hướng là **ma trận đối xứng**, tức là các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo chính sẽ tương ứng bằng nhau.

2) Trường hợp G = <X, U> là đồ thị có hướng với $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ thì đồ thị *G* có thể biểu diễn bằng ma trận vuông cấp *n* ($M_G^{n \times n}$) mà phần tử ở hàng i cột j của nó là δ_{ij} được xác định như sau:

Đối với mỗi cặp đỉnh (x_i, x_j), từ x_i đến x_j nếu có d cung (cùng hướng)thì $\delta_{ij} = d$; trong trường hợp ngược lại thì $\delta_{ij} = 0$. Nói chung ma trận biểu diễn đồ thị có hướng là ma trận không đối xứng .

Chú ý. Ma trận kề của đồ thị đơn là ma trận logic.

Ví dụ 10.1. Cho đồ thị vô hướng $G_1 =< X_1, U_1 >$ như hình vẽ dưới đây:



Giải.

Ta có thể biểu diễn G_1 dưới dạng ma trận đối xứng như sau:

$$M_{G_1}^{4\times4} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (1)$$

Chú ý: Để cho gọn ta viết $M_{G_1}^{4\times4}$ trong (1) bởi

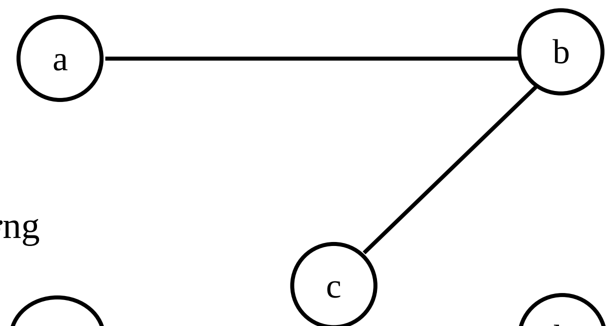
$$M_{G_1}^{4\times4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 10.2. Vẽ đồ thị của các ma trận kề sau:

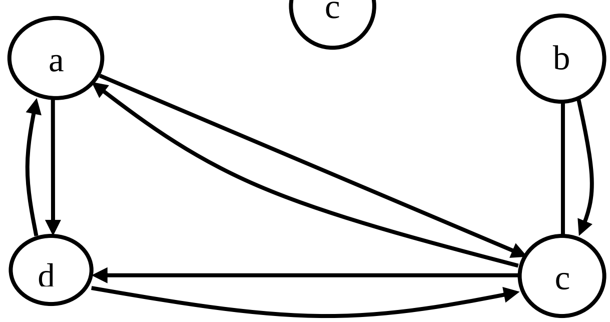
a) $M_G^{3\times 3} = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 \end{array}$; b) $M_{G_4}^{4\times 4} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$;

Giải.

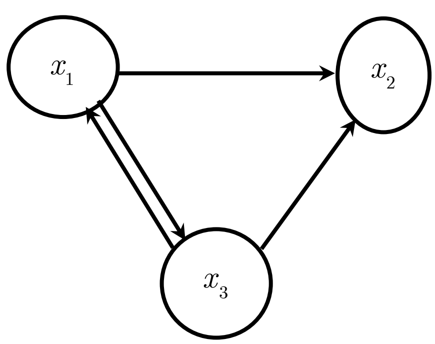
a) . G là đồ thị đơn có dạng:



b). G' là đồ thị đơn có hướng



Luyện tập 10.1. Lập ma trận kề của đồ thị có hướng $G_2 = < X_2, U_2 >$ cho bởi hình vẽ sau :



Giải.

Ma trận kề của đồ thị có hướng đã cho là:

$$M_{G_2}^{3\times 3} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Đối với ma trận kề của đồ thị ta có định lý sau:

Định lý 1. Nếu $G =< X, U >$ là một đồ thị với $M_G = (a_{ij})$ là ma trận kề, thì số các đường khác nhau đi từ đỉnh x_i đến đỉnh x_j có độ dài l bằng phần tử Pij của ma trận tích

Chứng minh: $M_G.M_G...M_G = M_G^l = (P_{ij})$

Quy nạp theo $l \geq 1$ và dựa vào định nghĩa phép nhân ma trận.

Hệ quả

Trong đồ thị G = < X, U > ta luôn có :

G chứa độ dài l từ đỉnh x_i sang đỉnh x_j khi và chỉ khi $M_G^l \neq \theta$, ở đây θ là ma trận gồm toàn các phần tử 0.

1.4.3. Phương pháp ma trận liên thuộc (ma trận liên kết)

Định nghĩa 1. Nều G là đồ thị vô hướng, ma trận liên thuộc (hay liên kết đỉnh cạnh) của đồ thị G, ký hiệu A(G), là ma trận nhị phân cấp nxm được định nghĩa

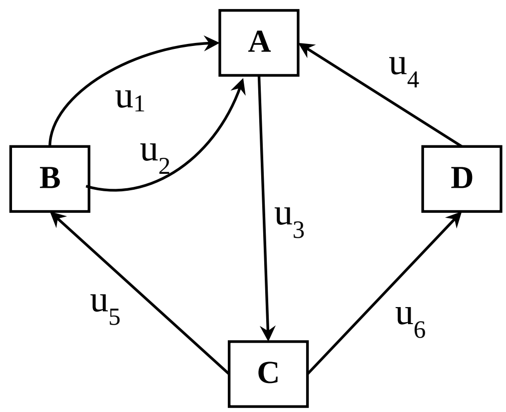
là $A = (A_{ij})$ với :

$$\begin{cases} A_{ij} = 1, neu..dinh..x \\ A_{ij} = 0,..neu..nguoc.lai \end{cases}$$

Định nghĩa 2. Nếu G là đồ thị có hướng không có khuyên, ma trận liên thuộc của đồ thị G ký hiệu A(G), là ma trận n x m được định nghĩa là $A = (A_{ij})$ với :

$$A_{ij} = 1, neu..canh..u_j..huong..ra..khoi..dinh..x_i$$
$$A_{ij} = -1, neu..canh..u_j..huong..vao..dinh..x_i,$$
$$A_{ij} = 0, neu..canh..u_j..khong..ke..dinh..x_i$$

Ví dụ 12. Cho đồ thị G như hình dưới đây.



Nếu ta sắp thứ tự các đỉnh của G là X = {A, B, C, D} và thứ tự các cạnh là U = { u1, u2, u 3, u 4, u 5, u6}.

a) .Xác định ma trận biểu diễn đồ thị B(G), A(G).

b) . Gọi H là đồ thị có được từ đồ thị G bằng cách bỏ đi hướng các cạnh và ta sắp thứ tự các đỉnh, cạnh như trên. Hãy lập các ma trận B(H), A(H).

Giải

a) . Nếu ta sắp thứ tự các đỉnh của G là X = {A, B, C, D} và thứ tự các cạnh là U = { u1, u2, u 3, u 4, u 5, u6}, thì các ma trận biểu diễn đồ thị như sau:

$$B(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A(G) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) .Gọi H là đồ thị có được từ đồ thị G bằng cách bỏ đi hướng các cạnh và ta sắp thứ tự các đỉnh, cạnh như trên, thì các ma trận B(H), A(H) biểu diễn đồ thị là :

$$B(H)=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix};A(H)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

Đồ thị đủ Kn có ma trận kề gồm hầu hết các phần tử 1, ngoại trừ các phần tử trên đường chéo chính có giá trị bằng 0.

1.4. Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

1.4.1. Định nghĩa 1

Các đồ thị đơn $G_1=(X_1,U_1)\&G_2=(X_2,U_2)$ là đẳng cấu nếu có hàm song ánh $f:X_1\to X_2$ sao cho các đỉnh *a* và *b* là liền kề trong G_1 nếu và chỉ nếu *f(a)* và *f(b)* là liền kề trong G_2 với mọi *a* và *b* trong G_2 . Hàm *f* gọi là một đẳng cấu.

Nhận xét

Hai đồ thị G_1 và G_2 được gọi là đẳng cấu với nhau, ký hiệu là $G_1\cong G_2$ nếu có thể vẽ lại (bằng cách dời đỉnh,dời cạnh…) sao cho hai đồ thị này có hình vẽ y hệt nhau.

1.4.2. Đẳng cấu đồ thị vô hướng

Cho hai đồ thị vô hướng $G_1=(X_1,U_1)\&G_2=(X_2,U_2)$. Hai đồ thị này được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại hai song ánh $\psi\,\&\,\delta$ thỏa mãn điều kiện sau:

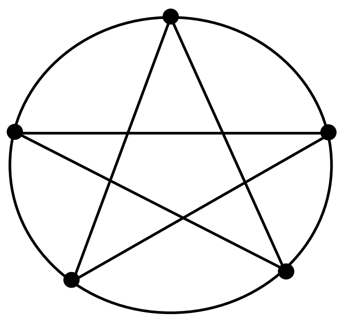
- $\psi:X_1\to X_2\,\&\,\delta:U_1\to U_2$
- Nếu cạnh $u\in X_1$ liên kết với cặp đỉnh $\{a,b\}\subseteq X_1$ xét trong đồ thị G_1 thì cạnh $\delta(u)$ sẽ liên kết với cặp đỉnh $\{\psi(a);\psi(b)\}$ xét trong đồ thị G_2 (điều này được gọi là phép tương ứng cạnh).

1.4.3.Đẳng cấu của đồ thị có hướng

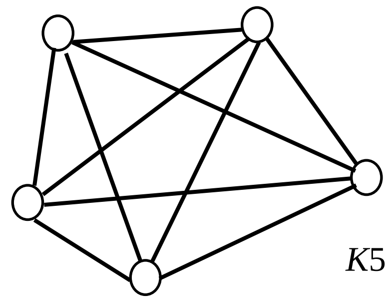
Cho hai đồ thị có hướng $G_1=(X_1,U_1)\&G_2=(X_2,U_2)$. Hai đồ thị này được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại hai song ánh $\psi\,\&\,\delta$ thỏa mãn điều kiện sau:

- $\psi : X_1 \to X_2 \,\&\, \delta : U_1 \to U_2$
- Nếu cạnh $u \in X_1$ liên kết với cặp đỉnh $\{a,b\} \subseteq X_1$ xét trong đồ thị G_1 thì cạnh $\delta(u)$ sẽ liên kết với cặp đỉnh $\{\psi(a);\psi(b)\}$ xét trong đồ thị G_2(điều này được gọi là phép tương ứng cạnh).

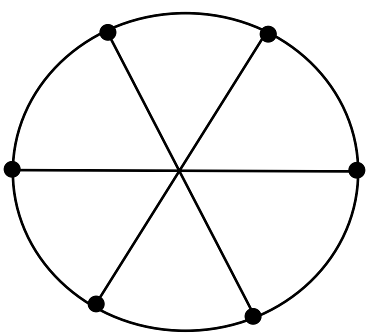
Ví dụ 13. Cho các đồ thị sau:



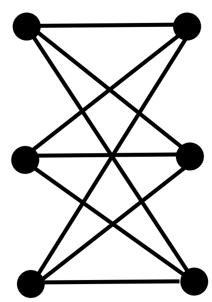
Đồ thị G1



$K5$



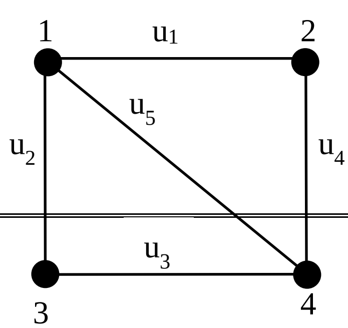
$K3,3$



Đồ thị G2

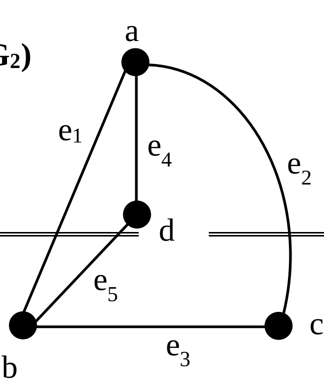
Chứng tỏ rằng G1 và K5 , G2 và K3-3 là các cặp đồ thị đẳng cấu.

Luyện tập .1. Cho hai đồ thị (G1) và (G2) như hình vẽ dưới đây.



(G_1)

(G_2)



a) .Hãy thiết lập sự tương ứng giữa đỉnh, cạnh của hai đồ thị để chứng tỏ hai đồ thị đẳng cấu.

b) . Hãy lập ma trận kề của hai đồ thị.

Bài 14. Đường và chu trình--Cây.

1.5.Đường đi và chu trình

1.5.1. Dây chuyền: Một dây chuyền trong đồ thị G là một dãy luân phiên các đỉnh và cạnh : $x_1u_1x_2u_2....x_{m-1}u_{m-1}x_m$ (x_i là đỉnh và u_i là cạnh).

Trong đồ thị thỏa mãn điều kiện u_i liên kết với cặp đỉnh (x_i, x_{i+1}) không phân biệt thứ tự, nghĩa là :

$$\begin{cases} \mathrm{u_i} = (x_i, x_{i+1}) \text{ hay } \mathrm{u_i} = (x_{i+1}, x_i) \text{ nếu đồ thị có hướng,} \\ \mathrm{u_i} = \{x_i, x_{i+1}\} \text{ nếu đồ thị vô hướng.} \end{cases}$$

Khi đó ta gọi x_1 là đỉnh đầu và x_m là đỉnh cuối của dây chuyền.

1.5.2. Đường đi

Một đường đi trong G là một dãy luân phiên các đỉnh và cạnh: $x_1\ u_1\ x_2\ u_2....\ x_{m-1}\ u_{m-1}\ x_m$

(x_i là đỉnh và u_i là cạnh) trong đồ thị thỏa mãn điều kiện u_i liên kết với cặp đỉnh (x_i, x_{i+1}), nghĩa là :

$$\begin{cases} \mathrm{u_i} \text{ liên kết với } (x_i, x_{i+1}) \text{ nếu đồ thị có hướng} \\ \mathrm{u_i} \text{ liên kết với } \{x_i, x_{i+1}\} \text{ nếu đồ thị vô hướng} \end{cases}$$

Khi đó ta gọi x_1 là đỉnh đầu và x_m là đỉnh cuối của đường đi.

1.5.3. Tính chất " đơn" và "sơ cấp"

- Tính chất "đơn" của dây chuyền hay đường đi yêu cầu không có cạnh nào xuất hiện 2 lần trong dây chuyền hay đường đi.
- Tính chất "sơ cấp" (hay cũng gọi là "thứ cấp") yêu cầu không có đỉnh nào xuất hiện hai lần.

1.5.4. Chu trình và mạch

+ **Một chu trình trong đồ thị** là một dây chuyền đơn mà có đỉnh đầu trùng đỉnh cuối, tức là dây chuyền có dạng:

$$x_1\ u_1\ x_2\ u_2 \ldots .\ x_{m-1}\ u_{m-1}\ x_m\ u_m\ x_1$$

Sao cho các cạnh $u_1, u_2, u_3, \ldots . u_m$ đôi một khác nhau.

+ **Một mạch trong đồ thị** là một đường đi đơn mà có đỉnh đầu trùng đỉnh cuối, tức là đường đi có dạng :

$$x_1\ u_1\ x_2\ u_2 \ldots .\ x_{m-1}\ u_{m-1}\ x_m\ u_m\ x_1$$

Sao cho các cạnh $u_1, u_2, u_3, \ldots . u_m$ đôi một khác nhau.

+ **Dây chuyền sơ cấp** là dây chuyền không có đỉnh lặp lại.

+ **Đường đi sơ cấp** là đường đi không có đỉnh lặp lại.

+**Chu trình sơ cấp** là chu trình không có đỉnh lặp lại (ngoại trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối).

+ **Mạch sơ cấp** là mạch không có đỉnh lặp lại (ngoại trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối)

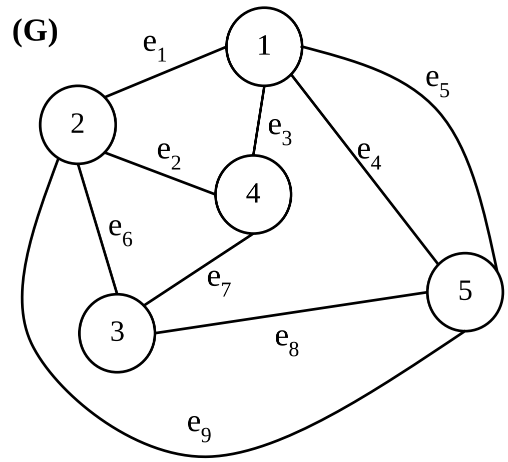
Ghi chú.

Trong đồ thị vô hướng thì :

Hai khái niệm dây chuyền và đường đi là đồng nhất ; chu trình và mạch là đồng nhất.

Do đó trong chúng ta dùng thuật ngữ đường đi cho đồ thị vô hướng.

Ví dụ 1. Cho đồ thị có hướng (G) như hình sau:



Trong đồ thị (G) , hãy xác định dây chuyền sơ cấp , chu trình, đường đi sơ cấp, mạch sơ cấp.

Giải. Trong đồ thị có hướng (G):

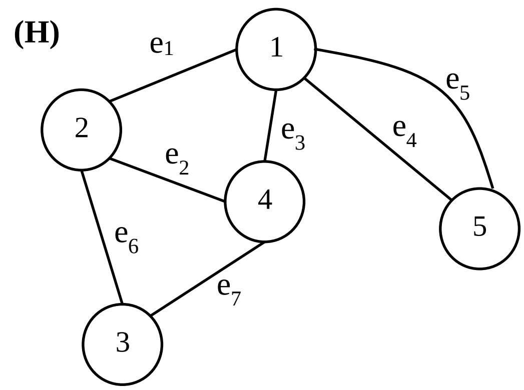
+ Dãy các đỉnh cạnh: $1e_1 2e_6 3e_8 5$ là một dây chuyền sơ cấp (nhưng không phải đường đi vì cạnh e_6 ngược hướng).

+ Dãy các đỉnh cạnh: $1e_1 2e_6 3e_8 5e_4 1$ là một chu trình (nhưng không phải mạch vì cạnh e_6 ngược hướng).

+ Dãy các đỉnh cạnh: $1e_3 4e_7 3e_6 2e_9 5$ là một đường đi sơ cấp.

+Dãy các đỉnh cạnh: $1e_3 4e_7 3e_6 2e_9 5e_4 1$ là một mạch sơ cấp.

Luyện tập 1. Cho đồ thị vô hướng (H) như hình sau:



Trong đồ thị (H) , hãy xác định dây chuyền sơ cấp , chu trình, đường đi sơ cấp, mạch sơ cấp.

Giải. Trong đồ thị vô hướng (H):

+ Dãy các đỉnh cạnh: $5e_4 1e_3 4e_2 2e_1 1$ là một dây chuyền không sơ cấp

+ Dãy các đỉnh cạnh: $5e_4 1e_3 4e_7 3e_6 2$ là một dây chuyền không sơ cấp và cũng là một đường đi sơ cấp

+ Dãy các đỉnh cạnh: $1e_4 5e_5 1$ là một chu trình sơ cấp.

+Dãy các đỉnh cạnh: $1e_1 2e_6 3e_7 4e_3 1$ là một chu trình sơ cấp.

1.5.5. Liên thông.

Định nghĩa.

Cho đồ thị *G = (X, U)* vô hướng hay có hướng. Ta định nghĩa một quan hệ tương đương ~ như sau trên tập đỉnh *X*:

$$\forall i, j \in X,\ i \sim j \Leftrightarrow \left(\text{i = j hay có dây chuyền nối i với j}\right)$$

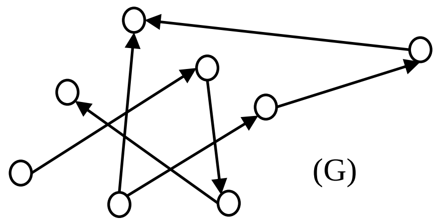
Quan hệ này có ba tính chất: Phản xạ, đối xứng và bắc cầu nên nó là quan hệ tương đương. Do đó tập *X* được phân hoạch thành các lớp tương đương.

+ Một thành phần liên thông của đồ thị là một lớp tương đương được xác định bởi quan hệ ~ nói trên,

+ Số thành phần liên thông của đồ thị là số lượng các lớp tương đương.

+ Một đồ thị liên thông là một đồ thị chỉ có một thành phần liên thông.

Ví dụ 2: Xác định số thành phần liên thông trong đồ thị (G)

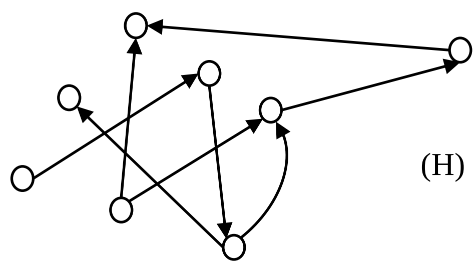


(G)

Giải.

Đồ thị (G) có hai thành phần liên thông

Luyện tập 2. Xác định số thành phần liên thông trong đồ thị (H)



(H)

Ghi chú. Khi một đồ thị G gồm p thành phần liên thông $G_1, G_2, \ldots, G_P$ thì các đồ thị G_i cũng là các đồ thị con của G và chúng ta có $d_G(x) = d_{G_i}(x)$ với mọi đỉnh x của G_i

1.5.6. Các tính chất liên quan tới đường đi và chu trình trong đồ thị.

Cho G = < X, U> , với $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ là đồ thị bất kỳ có hướng hoặc không có hướng . $M_G^{n\times n} = \left[\sigma_{i,j}\right]_{i,j=\overline{1,n}}$ Là ma trận kề của G.

Định lý 3.(Đếm số các đường khác nhau có độ dài k giữa các đỉnh).

Số các đường đi khác nhau độ dài k từ đỉnh xi đến đỉnh xj trong đồ thị G bằng giá trị phần tử ở hàng I cột j là aij trong ma trận

$$M_G^K = \underbrace{M_G^{n.n}.M_G^{n.n}...M_G^{n.n}}_{k..lan} = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$$

Từ định lý 3 ta có hai hệ quả dưới đây:

Hệ quả 1. Nếu phần tử ở hàng I cột j trong ma trận M_G^K khác không, nhưng trước đó các phần tử hàng i cột j trong các ma trận $M_G^1.M_G^2...M_G^{k-1}$ đều bằng không, thì từ đỉnh xi đến đỉnh xj trong đồ thị G = < X, U> có đường đi ngắn nhất độ dài k.

Hệ quả 2. Đồ thị G = <X, U> có $|X| = n$ đỉnh là liên thông khi và chỉ khi mọi phần tử không nằm trên đường chéo chính trong ma trận tổng

$$M_G^+ = M_G^1 + M_G^2 + ... + M_G^{n-1}$$

đều khác không .

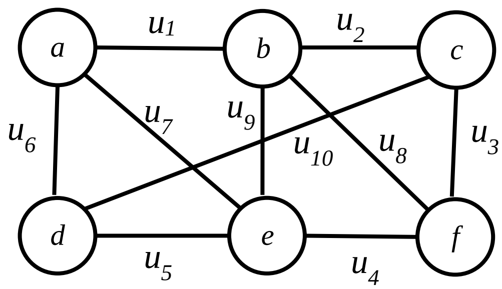
BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT.

Ví dụ 3. 1. Hãy giải thích cách dùng định lý 3 (đếm đường đi giữa các đỉnh) để tìm độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh x đến đỉnh y trong đồ thị G = <X, U>.

Giải

Giả sử G = < X, U> có $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là một đồ thị bất kỳ có hướng hoặc không có hướng . Ma trận kề của G là ma trận vuông cấp n, ta ký hiệu là $M_G^{n.n} := M = [\sigma_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$. Lập ma trận tích $M^k = M.M...M(k..lan) = [m_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$, ở đây $m_{i,j}$ là phần tử ở hàng I cột j của M^k và $m_{i,j}$ = số đường đi độ dài k từ đỉnh xi đến đỉnh xj trong đồ thị G = <X, U>. Đây là các đường đi ngắn nhất từ xi đến xj với độ dài k khi và chỉ khi phần tử $m_{ij} \neq 0$ trong ma trận M^k , nhưng phần tử ở hàng i cột j trong các ma trận M^k đều bằng 0 (Hệ quả 1) .

Ví dụ 3.2. Dùng định lý 3 tìm độ dài đường đi ngắn nhất giữa đỉnh a và đỉnh f trong đồ thị sau :



Giải.

Với G đã cho thì

$$M_G^{6\times 6} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \text{M} \quad ;$$

Từ M ta khẳng định không có đường đi độ dài ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh f trong đồ thị G (vì phần tử hàng 1 cột 6 là 0) . Ta tính tiếp $M^2 = M.M$:

$$M^2 = M.M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad ;$$

Phần tử hàng 1, cột 6 trong M^2 là 2. Chứng tỏ có 2 đường đi ngắn nhất độ dài 2 từ đỉnh a đến đỉnh f là au_1bu_8f & au_7eu_4f và cũng là đường ngắn nhất đi từ a đến c

Định lý 4. Nếu đồ thị vô hướng G = <X, U> có $|X| = n \geq 3$ và với mọi $x \in X$ mà bậc $m(x) \geq 2$ thì trong đồ thị tồn tại chu trình sơ cấp .

Định lý 5.Nếu đồ thị vô hướng G = <X, U> có $|X| = n \geq 4$ và với mọi $x \in X$ mà bậc $m(x) \geq 3$ thì trong đồ thị tồn tại chu trình sơ cấp có độ dài chẵn.

1.5.7.Các tính chất liên quan tới tính liên thông của đồ thị.

Định lý 6. Đơn đồ thị liên thông G = <X, U> là đồ thị phân đôi khi và chỉ khi nó không chứa chu trình có độ dài lẻ.

Định lý 7. Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị đơn liên thông luôn luôn có đường đi đơn.

Định lý 8. Nếu đồ thị đơn có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì hai đỉnh bậc lẻ này phải liên thông.

Định lý 9. Nếu G = <X, U> với $|X| = n \geq 2$ là đồ thị đơn và tổng bậc của hai đỉnh tùy ý không nhỏ hơn n thì đồ thị G = < X, U> là đồ thị liên thông.

Định lý 10. Điều kiện cần và đủ để đồ thị G = <X, U> liên thông là đồ thị G = <X, U> có đúng một thành phần liên thông.

Định lý 11. Giả sử G = <X, U> có $|X| = n$ đỉnh , $|U| = m$ cạnh và k thành phần liên thông. Khi đó ta có bất đẳng thức : $m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$

BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH TÍNH LIÊN THÔNG CỦA ĐỒ THỊ

Ví dụ 4.1. Hãy giải thích cách dùng định lý 3 (đếm đường đi giữa các đỉnh) để xác định một đồ thị có liên thông hay không?

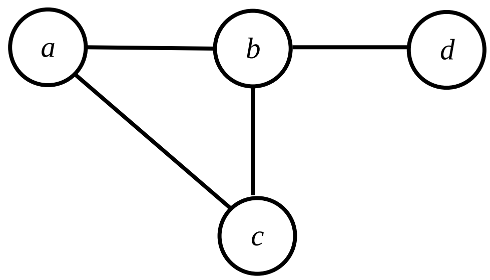
Giải.

Giả sử G = <X, U> với $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là một đồ thị có hướng hoặc không có hướng nào đó. $M_G^{n.n} = [\sigma_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ Là ma trận kề của G và ký hiệu là M.Lập ma trận tích (k lần M) $M^k = \underbrace{M.M...M}_{k..lan} = [m_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} (1 \leq k \leq n-1)$

Khi đó đồ thị G = <X, U> là đồ thị liên thông khi và chỉ khi mọi phần tử (không năm trên đường chéo chính của ma trận tổng $M^+ := M + M^2 + ... + M^{n-1}$ đều là các phần tử dương khác 0 (Hệ quả 2)).

Ví dụ 4.2. Áp dụng định lý 3 để kiểm tra xem đồ thị G1 dưới đây có liên thông không?

G_1:



Giải.

Đối với đồ thị G1 ta có :

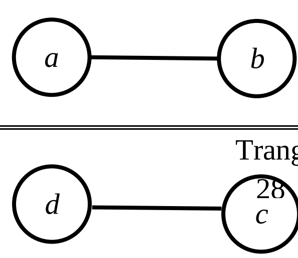
$$M_{G_1}^{4\times4} := M_1 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} ; \qquad M_1^2 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} ;$$

$$M_1^3 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} ; \quad M_1^+ = M_1 + M_1^2 + M_1^3 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} .$$

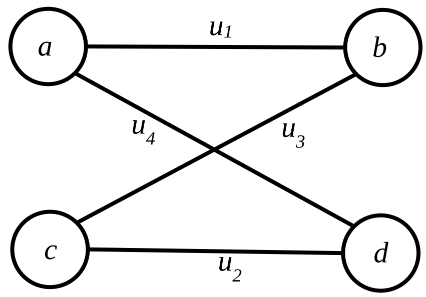
Vậy đồ thị G1 liên thông.

Luyện tập 4.2. Áp dụng định lý 3 để kiểm tra xem đồ thị G2 dưới đây có liên thông không?

G_2:



Ví dụ 5. Cho đồ thị G = <X, U> dưới dạng



a) .Xây dựng ma trận kề của đồ thị trên.

b) . Xác định chu trình sơ cấp của đồ thị.

c) .Chứng tỏ rằng đồ thị đã cho là liên thông và thỏa mãn bất đẳng thức : $m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$ với G = <X, U> có $|X| = n$ đỉnh , $|U| = m$.

d) .Tìm số các đường đi độ dài 1, 2, 3 và 4 từ đỉnh a đến đỉnh c trong đồ thị trên.

Giải.

a) .Ma trận kề của đồ thị là :

$$M_G^{4\times4} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

vô

b).Chu trình sơ cấp của đồ thị : Đồ thị thỏa các điều kiện của định lý 4 là đồ thị hướng G = <X, U> có $|X| = n \geq 3$ và với mọi $x \in X$ mà bậc $m(x) \geq 2$ nên có chu trình sơ cấp là : $au_1bu_3cu_2du_4a$

- c). Theo định lý 10, đồ thị đã cho là liên thông vì nó chỉ có một thành phần liên

$|X| = 4, |U| = 4$

thông . Theo định lý 11, đồ thị G = < X, U> có một thành

phần liên thông . Ta có :

$$|U| = 4 \leq \frac{1}{2}(|X|-1).|X| = \frac{1}{2}.3.4 = 6$$

e) .+ Số đường đi độ dài 1 từ a đến c chính là phần tử hàng 1 cột 3 trong ma trận trên. Vì phần tử đó bằng 0 nên không có đường độ dài 1 đi từ a đến c.

+ Số đường đi từ a đến c độ dài 2 chính là phần tử ở hàng 1 cột 3 của ma trận

$$M_G^{4\times4}.M_G^{4\times4} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 2 & 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 2 & 0 & 2 \\ c & 2 & 0 & 2 & 0 \\ d & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}$$

$au_4du_2c \;\&\; au_1bu_3c.$

Mà phần tử này là 2 , nên đường đi từ a đến c độ dài 2 là hai đường :

+ Số đường đi từ a đến c độ dài 3 chính là phần tử hàng 1 cột 3 trong ma trận

$$M_G^{4\times4}.M_G^{4\times4}.M_G^{4\times4} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Mà phần tử này là 0 nên không có đường đi độ dài 3 từ a đến c trong đồ thị .

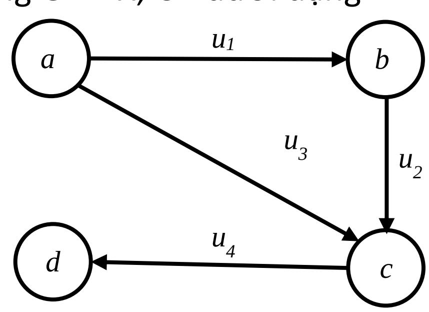
+ Vì

$$M_G^{4\times4}.M_G^{4\times4}.M_G^{4\times4}.M_G^{4\times4} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nên số đường đi độ dài 4 từ a đến c là 8 đường :

$$au_1bu_1au_1bu_3c; au_4du_4au_4du_2c; au_1bu_3cu_3bu_3c; au_4du_2cu_2du_2c; au_1bu_3cu_2du_2c;...$$

Luyện tập 5. Cho đồ thị có hướng G = <X, U> dưới dạng



a) . Tìm ma trận kề của G

b) . Tìm số đường đi độ dài 3 từ a đến d.

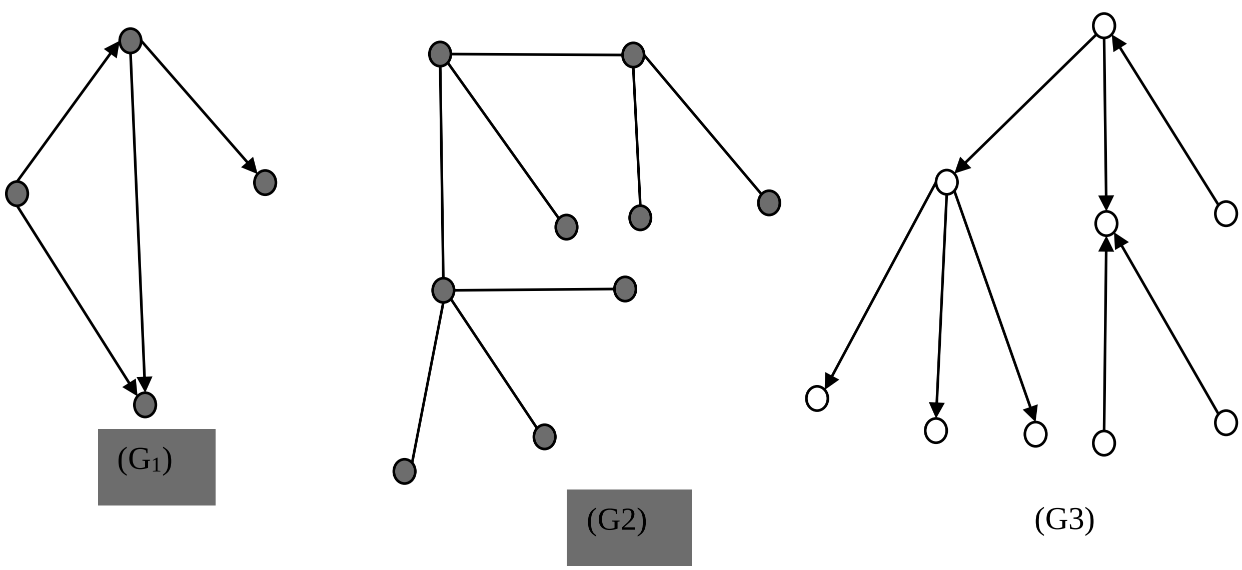
c) .Chứng minh đồ thị đơn có hướng G không có chu trình bằng cách chỉ ra có một số tự nhiên k để với mọi $m \geq k$ ta luôn có $M_G^K = [0]$.

1.6. Đồ thị dạng cây

1.6.1. Định nghĩa

Đồ thị dạng cây (hay gọi vắn tắt là cây) là đồ thị liên thông và không có chu trình.

Ví dụ 6: Trong các đồ thị sau, đồ thị nào là đồ thị dạng cây:



Giải.

Đồ thị (G1) không là cây, đồ thị (G2), (G3) là cây.

Ghi chú.

Định nghĩa cây hàm ý rằng mọi cây đều không chứa khuyên cũng không chứa cạnh song song.

Định lý về sự tồn tại các đỉnh treo

Nếu một cây T gồm n đỉnh với $n \geq 2$ thì T chứa ít nhất hai đỉnh treo.

1.6.2. Các định nghĩa tương đương.

Xét một đồ thị G gồm n đỉnh, các mệnh đề sau đây tương đương:

(a). Đồ thị G là cây.

(b) . Giữa hai đỉnh bất kỳ của G, tồn tại duy nhất một dây chuyền nối chúng với nhau.

(c).Đồ thị G liên thô ng tối tiểu cạnh (nghĩa là G liên thông và nếu xóa đi bất kỳ một cạnh nào của G thì nó không còn liên thông nữa)

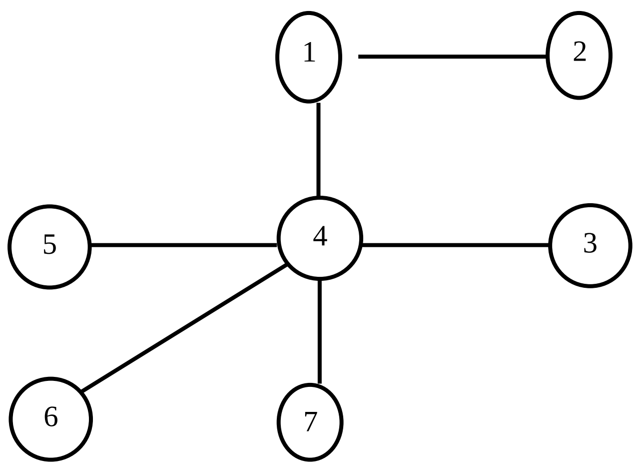
(d) . Thêm một cạnh nối hai đỉnh bất kỳ của G thì G sẽ chứa một chu trình duy nhất .

(e).G liên thông và có n-1 cạnh.

(f). G không có chu trình và có n-1 cạnh.

Các điều kiện tương đương như trên cũng đặc trưng các tính chất cơ bản của cây. Trong số các đồ thị có n đỉnh cho trước thì cây có n đỉnh là cấu trúc có tính chất : " tiết kiệm cạnh nhất mà vẫn duy trì được tính liên thông ".Tuy nhiên cây lại là một cấu trúc liên thông kém bền vững: bỏ đi một cạnh bất kỳ thì cây sẽ không còn liên thông nữa.

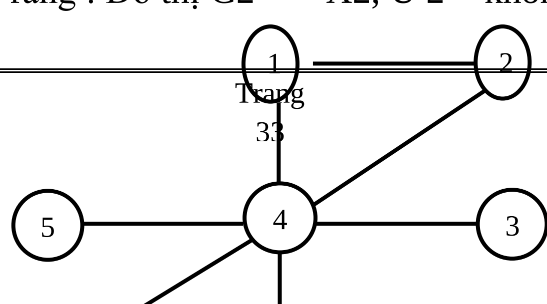
Ví dụ 7. Chứng tỏ rằng : Đồ thị G1 = < X1, U 1> là cây



Giải.

Đồ thị G1 = < X1, U 1> là cây, vì G1 là đồ thị đơn, liên thông không có chu trình

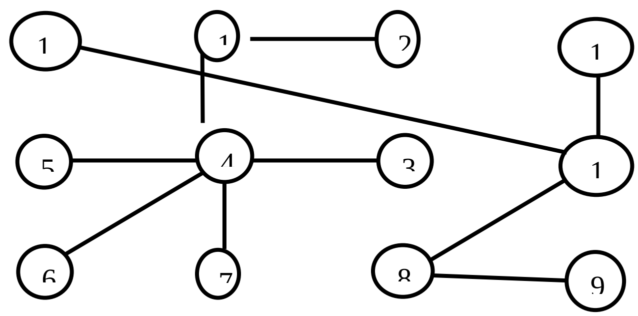
Luyện tập 7.1. Chứng tỏ rằng : Đồ thị G2 = < X2, U 2> không phải là cây



1.6.3. Đồ thị dạng rừng (hay gọi vắn tắt là rừng) là đồ thị không có chu trình.

Nói cách khác: Một đồ thị vô hướng gồm k thành phần liên thông mà mỗi thành phần liên thông là một cây được gọi là rừng cây.

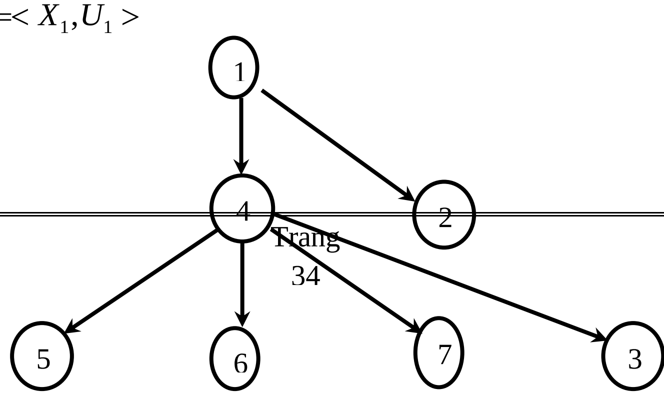
Ví dụ 8 . Chứng minh rằng : Đồ thị G = <X, U> có hai thành phần liên thông dưới đây là một rừng.



1.6.4. Cây có gốc.

Trong một cây, nếu ta lấy một đỉnh nào đó làm gốc thì ta có thể gán cho mỗi cạnh của cây một hướng đi từ gốc ra. Cây như vậy gọi là cây có gốc. Cây có gốc là một đồ thị có hướng mà gốc là một đỉnh không có bậc vào, còn lá là đỉnh không có bậc ra. Thường cây có gốc có đỉnh gốc nằm phía tre6ncon2 các lá nằm phía dưới . Đỉnh của cây có gốc không phải là gốc cũng không phải là lá gọi là đỉnh trong.Nếu trong cây có gốc ta lấy một đỉnh trong làm gốc thì cây đó gọi là cây con có gốc của cây có gốc ban đầu. Đôi khi trong cây có gốc có thể bỏ hướng mũi tên đi từ gốc đến các lá , vì khi chọn gốc tức là hướng của các cạnh đã được xác định.

Ví dụ 9. Cho cây $G_1 =< X_1, U_1 >$

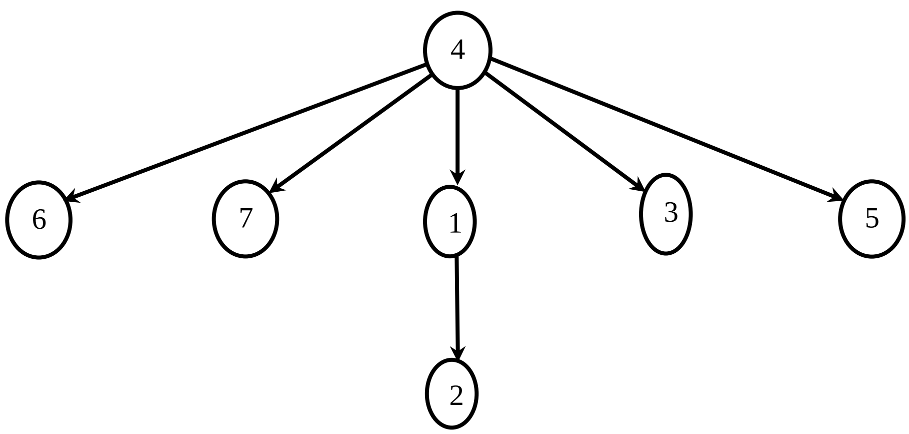


Chọn đỉnh 1 làm gốc. Hãy xác định các lá và đỉnh trong.

Giải.

Nếu gốc là đỉnh 1, thì các lá là các đỉnh 2, 3, 5, 6, 7 , còn đỉnh trong là đỉnh 4.

Luyện tập 9. Cho cây



Với đỉnh gốc là 4. Hãy xác định các lá và đỉnh trong.

Chiều cao h của cây là mức cao nhất trong cây, hay là độ dài của đường đi lớn nhất từ gốc đến lá của cây.

1.7. Cây m- phân, cây m- phân đầy đủ và cây nhị phân.

Định nghĩa 1.

Cây có gốc được gọi là cây m- phân nếu tất cả các đỉnh của cây có không quá m- con.

Định nghĩa 2.

Cây m- phân đày đủ là cây m- phân với mọi đỉnh trong (kể cả gốc) có đúng m con.

Định nghĩa 3.

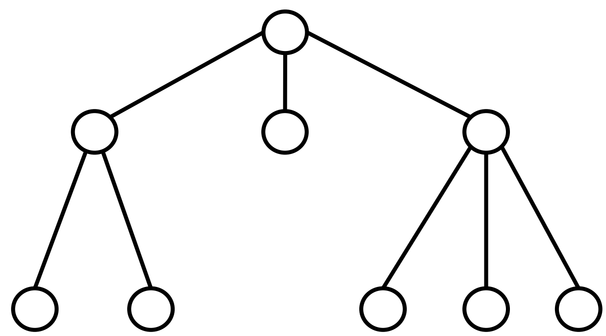
Cây m- phân có gốc và độ cao h được gọi là cây cân đối nếu tất cả các lá đều ở mức h hoặc h-1.

Định nghĩa 4.

Cây m- phân với m = 2 gọi là cây nhị phân.

Ví dụ 10.

Xác định loại cây của cây m - phân sau đây.



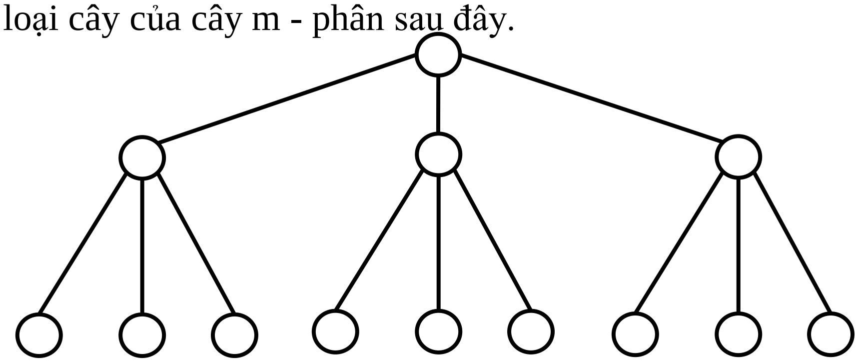
Cây H1

Giải.

Cây H1 là cây 3- phân.

Luyện tập 10.1.

Xác định loại cây của cây m - phân sau đây.



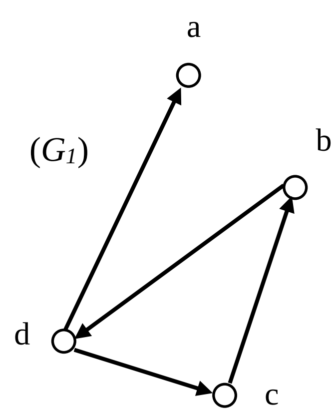
Cây H2

1.8. Cây có hướng (cây ngoài- out tree)

1.8.1.Định nghĩa 1.

Cho G = (X, U) là một đồ thị có hướng.Ta nói G là một đồ thị có gốc nếu tồn tại đỉnh sao cho từ r có đường đi đến tất cả các đỉnh của đồ thị.

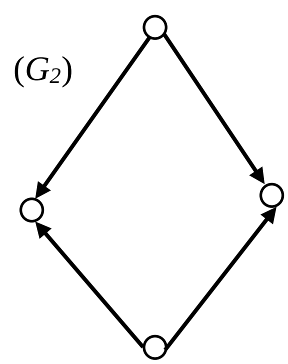
Ví dụ 11. Hãy xác định các đỉnh là gốc trong đồ thị G1 sau.



Giải.

Trong đồ thị G1 , các đỉnh b,c,d đều là gốc, đỉnh a không phải là gốc.

Luyện tập 11. Hãy xác định các đỉnh là gốc trong đồ thị G2 sau.



Giải.

Đồ thị G2 không phải là đồ thị có gốc (không có bất kỳ đỉnh nào là gốc) .

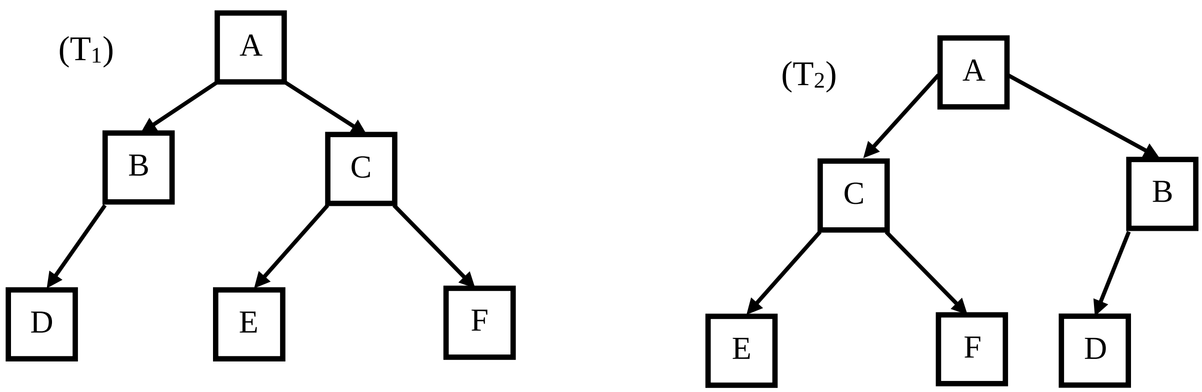
1.8.2.Định nghĩa 2. (Định nghĩa cây có hướng).

Cho G = (X, U) là một đồ thị có hướng. G được gọi là cây có hướng nếu thỏa mãn cả hai tính chất:

a) . G không có chu trình.

b) . G có gốc**.**

Ví dụ 12. Chứng tỏ rằng hai cây có hướng T1 và T2 trong hình sau là tương đương.



Bài 15. Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất --Dijkstra-- Ôn tập cuối kỳ

1.7. Đường đi ngắn nhất trong đồ thị.

Trong thực tiễn ứng dụng, bài toán đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị liên thông có một ý nghĩa quan trọng, chẳng hạn : bài toán lập lịch thi công các công đoạn trong một công trình thi công lớn, bài toán lựa chọn đường truyền tin với chi phí truyền tin nhỏ nhất trong mạng, bài toán chọn một hành trình tiết kiệm nhất trên một mạng giao thông đường bộ…Dựa trên cơ sở lý thuyết đồ thị có nhiều phương pháp giải quyết các bài toán như vậy. Ở đây, chỉ trình bày 2 thuật toán : Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trong đồ thị không có trọng số và thuật toán Dijkstra tìm đương đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trong đồ thị có trọng số không âm.

1.7.1.Đường đi ngắn nhất trong đồ thị không có trọng số .

a). Định nghĩa 1.

Đồ thị không có trọng số là đồ thị trên các cạnh không gán trọng số.

b). Bài toán . Cho đồ thị không có trọng số G = <X, U> và hai đỉnh $a,b \in X$ đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b , tức là đường từ a đến b có số các cạnh (cung) là ít nhất.

Thuật toán.

Bước 1. Ghi chỉ số ở các đỉnh bằng quy nạp theo số bước :

+ Đỉnh a ghi nhãn 0: A(0) = {a },

+ Các đỉnh có cạnh đi từ a đến ghi số 1.

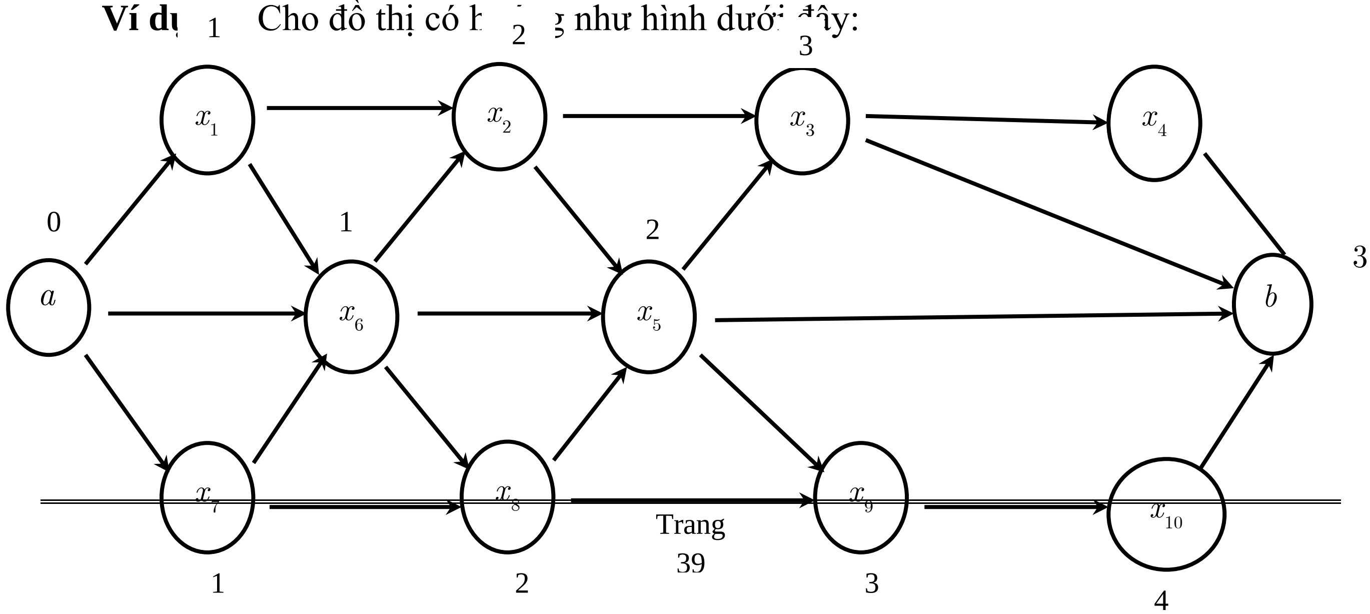
+Giả sử đã ghi nhãn tới bước thứ i : A(0), A(1), …, A(i). Khi đó tập nhãn thứ i +1 xác định như sau: A(i +1) = { x: $x \in X, x \notin A(k), (0 \le k \le i$ và $\exists y \in A(i)$ sao cho y có cạnh (cung) tới x}, ở đây, bước 1 chỉ dừng lại khi đã xác định được tập A(m) các đỉnh , trong đó có đỉnh b được gán nhãn m (do đồ thị hữu han).

Bước 2. Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến b . Bước này xuất phát từ đỉnh b đi ngược về đỉnh a theo các nguyên tắc sau:

+ Tìm tất cả các cạnh (cung) tới b được gán nhãn m - 1, tức là . Với mỗi tìm tất cả các đỉnh có cạnh (cung) tới x được ghi nhãn m - 2. Thủ tục này sau một số bước sẽ gặp đỉnh có nhãn 0, đó chính là đỉnh a.

+ Tất cả các đường xác định được trong bước 1 và bước 2 là các đường đi ngắn nhất từ a đến b có độ dài m.

Ví dụ Cho đồ thị có h g như hình dướ đây:



a) .Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến b.

b) . Tìm đường đi ngắn nhất từ x_8 đến x_{10} .

Giải.

a) **.** Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến b.

Bước 1: Đỉnh a được đánh số 0 và có A(0) = {a }.

$$A(1) = \{x_1, x_6, x_7\};$$
$$A(2) = \{x_2, x_5, x_8\};$$
$$A(3) = \{x_3, b, x_9\}.$$

Bước 2. Từ bước 1 ta có $b \in A(3)$ nên từ a đến b là đường ngắn nhất có 3 cung. Tiếp theo ta xác định tất cả các đường đi ngắn nhất có độ dài 3:

+ Đỉnh có cung tới b được đánh số 2 là x_5

+ Đỉnh có cung tới x_5 được đánh số 1 là x_6

+ Đỉnh có cung tới x_6 được đánh số 0 là a.

Đường cần tìm là ax_6x_5b

b). Tìm đường đi ngắn nhất từ x_8 đến x_{10} .

Bước 1. Đánh số các đỉnh.

$$A(0) = \{x_8\}$$
$$A(1) = \{x_5, x_9\}$$
$$A(2) = \{x_3, b, x_{10}\}$$

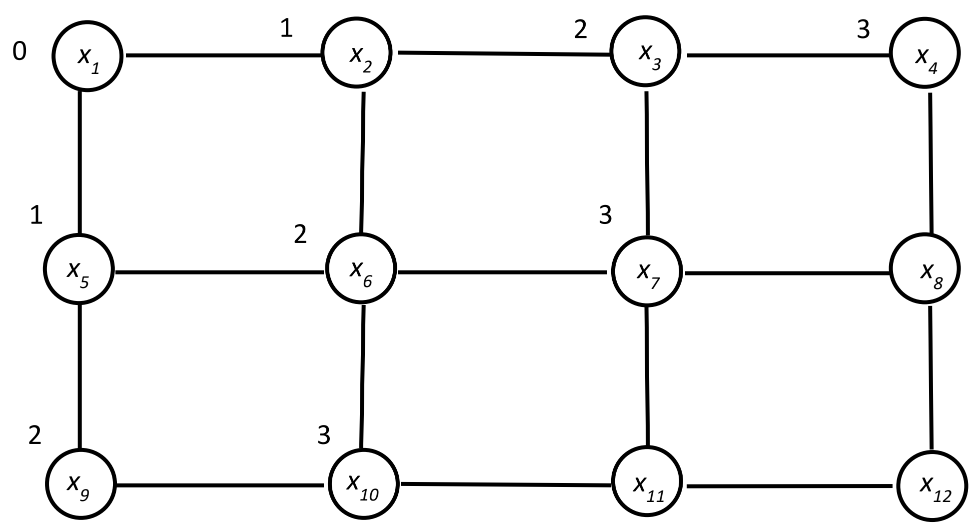
Bước 2. Từ bước 1 ta có $x_{10} \in A(2)$, chứng tỏ đường đi từ đỉnh x_8 đến đỉnh x_{10} có độ dài bằng 2 là đường đi ngắn nhất. Ta xác định các đường đi đó:

+ Đỉnh có cung tới x_{10} được đánh số 1 là x_9

+ Đỉnh có cung tới x_9 được đánh số 0 là x_8

Đường cần tìm là $x_8x_9x_{10}$

Luyện tập 1. Cho đồ thị vô hướng không trọng số



Áp dụng thuật toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai cặp đỉnh dưới đây:

a) . Từ đỉnh x1 đến đỉnh x4.

b) . Từ đỉnh x1 đến đỉnh x10.

Giải.

a) .Bước 1: Gán nhãn các đỉnh, bắt đầu từ đỉnh xuất phát x1 Đến đỉnh kết thúc x4:

$A(0)=\{x_1\}, A(1)=\{x_2,x_8\}, A(2)=\{x_3,x_7,x_9\}, A(3)=\{x_4,x_6,x_{10}\}$. Dừng lại vì đỉnh $x_4 \in A(3)$

Bước 2: Xác định đường đi ngắn nhất độ dài 3 từ đỉnh x1 đến đỉnh x4 : Chỉ có duy nhất một đường độ dài 3 từ đỉnh x1 đến đỉnh x4 là : $x_1x_2x_3x_4$.

b) . Bước 1:

$A(0)=\{x_1\}, A(1)=\{x_2,x_8\}, A(2)=\{x_3,x_7,x_9\}, A(3)=\{x_4,x_6,x_{10}\},$ dừng lại vì $x_{10}\in A(3)$

Bước 2: có 3 đường đi ngắn nhất độ dài 3 từ đỉnh x1 đến đỉnh x10 là : $x_1x_2x_7x_{10}; x_1x_8x_9x_{10}; x_1x_8x_7x_{10};$

1.7.2. Đường đi ngắn nhất trong đồ thị có trọng số

Định nghĩa

Đồ thị G = < X, U > được gọi là đồ thị có trọng số khi và chỉ khi mỗi cạnh (cung) $u\in U$ đều được gán một số thực l(u), l(u) gọi là trọng số của cạnh (cung) u. Trọng số của đồ thị G ta ký hiệu là $l(G):=\sum_{u\in U} l(u)$. Nếu $l(u)\geq 0$ với mọi $u\in U$ thì ta nói đồ thị G là đồ thị có trọng số không âm.

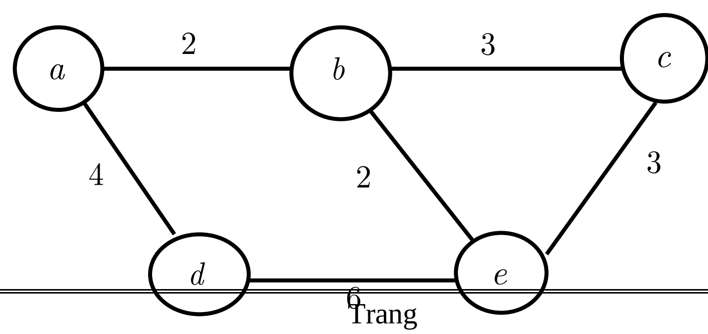
Giả sử $a=x_1u_1x_2u_2\ldots x_ku_kx_{k+1}=b$ là đường đi từ a đến b trong đồ thị có trọng số G. Độ dài đường đi trên là $l(a,b):=\sum_{i=1}^{k} l(u_i)$ và gọi là trọng số của đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b. Ký hiệu D(a, b) là tập tất cả các đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b trong đồ thị có trọng số G. Đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b là đường thỏa mãn

$$l(a,b)\min\{l(\omega)/\,\omega\in D(a,b)\}$$

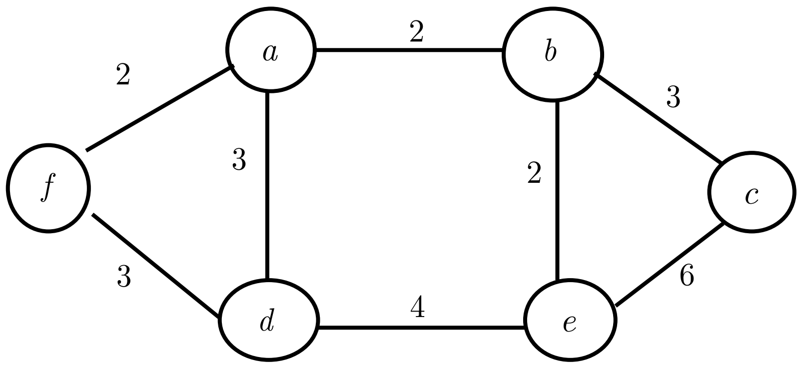
Ý tưởng của thuật toán tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b trong đồ thị G.

Lần lượt gán (và thay đổi) tại mỗi đỉnh i giá trị v(i) như sau : Nếu có (i, j) mà i đã được gán và j chưa được gán hoặc j đã được gán nhưng $v(i)<v(j)$ thì gán (hoặc thay đổi lại) v(j) = v(i) +l(i,,j). Khi nào không gán hoặc không thay đổi được nữa thì dừng.

Ví dụ 2. Chứng tỏ rằng đồ thị sau là đồ thị có trọng số:



Luyện tập 2. Chứng tỏ rằng đồ thị sau là đồ thị có trọng số:



Ký hiệu trọng số: Ký hiệu D(a, b) là tập tất cả các đường nối đỉnh a với đỉnh b trong đồ thị G =<X, U >, gọi α là một đường nào đó trong G và giả sử

$$\alpha = x_{i1}u_{i1}x_{i2}u_{i2}\ldots x_{in-1}u_{in-1}x_{in}, x_{ij} \in X, u_{ij} \in U\left(j = 1,2,\ldots n\right)$$

Khi đó ta ký hiệu $l(\alpha) = \sum_{j=1}^{n-1} l(u_{ij})$ và gọi là trọng số của đường α

Bài toán. Cho đồ thị đơn liên thông có trọng số G = < X, U> và $a,b \in X$ là hai đỉnh trong đồ thị . Tìm các đường α từ đỉnh a đến đỉnh b trong đồ thị G = < X, U > có trọng số bé nhất , tức là tìm α phải thỏa mãn :

$$l(\alpha) = \min\{l(\beta) : \beta \in D(a,b)\}$$

Sau đây, ta trình bày thuật toán **Dijkstra** giải bài toán này.

1.7.1. Thuật toán Dijkstra.(do E Dijkstra , nhà toán học người Hà Lan, đề xuất năm 1959)

Bài toán.

Cho đồ thị đơn liên thông G = < X, U> và $a, b \in X$ là hai đỉnh trong đồ thị. Tìm các đường α từ đỉnh *a* đến đỉnh *b* trong đồ thị *G* = <*X*, *U*> có trọng số bé nhất, tức là α phải thỏa mãn

$$l(\alpha) = \min\{l(\beta) : \beta \in D(a,b)\}$$

Sau đây ta trình bày thuật toán ***Dijkstra*** giải bài toán này.

Mô tả thuật toán *Dijkstra*

Thuật toán **Dijkstra** áp dụng trong trường hợp trọng số không âm .Thuật toán được xây dựng trên cơ sở gán cho các đỉnh các nhãn tạm thời. Nhãn của mỗi đỉnh cho biết cận trên của độ dài đường đi từ đỉnh *a* (đỉnh xuất phát) đến nó. Các nhãn này sẽ được biến đổi theo một thủ tục lặp, mà ở mỗi bước lặp có một nhãn tạm thời trở thành nhãn cố định. Nếu ở một nhãn của đỉnh nào trở thành nhãn cố định thì nó sẽ cho ta độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh *a* đến nó. Thuật toán gồm các bước sau:

Bước 1. Đánh trọng số các đỉnh.

+ Trọng số của đỉnh xuất phát a là $\sigma(a) = 0$.

+ Tại các đỉnh còn lại ta ghi một trọng số dương σ đủ lớn sao cho nó lớn hơn trọng số của các đỉnh từ *a* tới.

Bước 2. Thực hiện việc giảm trọng số các đỉnh.

Giả sử tại đỉnh *x* được ghi trọng số $\sigma(x)$. Nếu tồn tại đỉnh *y* có trọng số $\sigma(y)$ từ *y* sang *x* mà $\sigma(x) > \sigma(y) + l(y,x)$ thì ta thay trọng số của $\sigma(x)$ bởi trọng số $\sigma(x) > \sigma(y) + l(y,x)$.Trong trường hợp ngược lại thì giữ nguyên trọng số $\sigma(x)$. Quá trình thực hiện cho tới khi trọng số của tất cả các đỉnh trong *G* =<*X*, *U*> đạt cực tiểu, tức là $\forall x \in X$ không tồn tại $y \in X$ kề với x mà $\sigma(x) > \sigma(y) + l(y,x)$.

Bước 3. Xác định đường đi từ *a* đến *b* có trọng số bé nhất.

+ Từ bước 2 ta xác định được trọng số của đỉnh *b*. Xuất phát từ *b* đi về đỉnh kề với *b*, chẳng hạn đó là đỉnh x_{in} có tính chất $\sigma(b) = \sigma(x_{in}) + l(x_{in}, b)$.

Nếu không có đỉnh kề x_{in} như vậy thì ta đi về đỉnh kề với *b* có trọng số cạnh (cung) từ đỉnh đó về *b* là bé nhất.

+ Từ đỉnh x_{in} ta đi ngược về đỉnh x_{in-1} có tính chất

$$\sigma(x_{in}) = \sigma(x_{in-1}) + l(x_{in-1}, x_{in})$$

Nếu không đi về đỉnh kề với x_{in} mà trọng số cạnh (cung) giữa chúng là bé nhất.

Bằng cách đó ta sẽ đi về đỉnh x_{i1} mà đỉnh kề là *a* sao cho

$$\sigma(x_{i1}) = \sigma(a) + l(a, x_{i1}) = l(a, x_{i1}) \text{ với } \sigma(a) = 0$$

Đường $\alpha = ax_{i1}x_{i2}...x_{in-1}x_{in}b$ là đường đi từ *a* đến *b* có trọng số bé nhất trong tất cả các đường đi từ *a* đến *b*.

Thật vậy.

$$\begin{aligned}
&l(\alpha) = l(a, x_{i1}) + l(x_{i1}, x_{i2}) + ... + l(x_{in-1}, x_{in}) + l(x_{in}, b) \\
&= [\sigma(x_{i1}) - \sigma(a)] + [\sigma(x_{i2}) - \sigma(x_{i1})] + ... + [\sigma(x_{in}) - \sigma(x_{in-1})] + [\sigma(b) - \sigma(x_{in})] = \sigma(b)
\end{aligned}$$

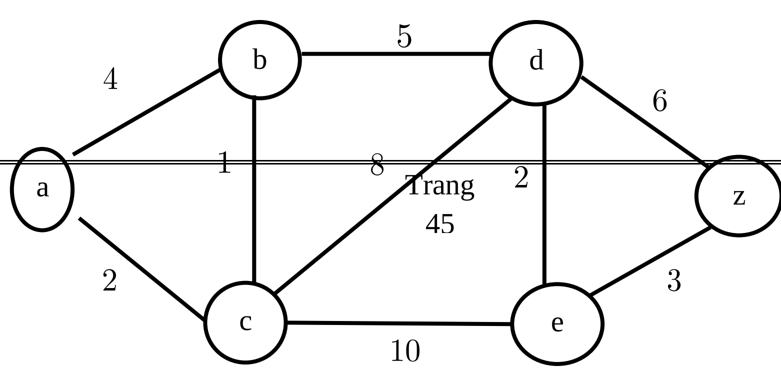
Giả sử $\beta \in D(a,b)$ là một đường đi bất kỳ từ *a* đến *b* và có dạng

$$\beta = ax_{j1}x_{j2}...x_{jk-1}x_{jk}b.$$

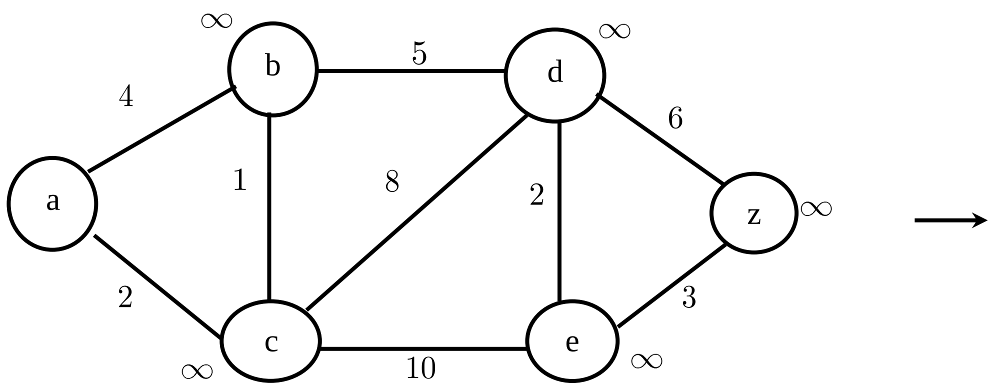
Theo bước 2 ta có bất đẳng thức sau:

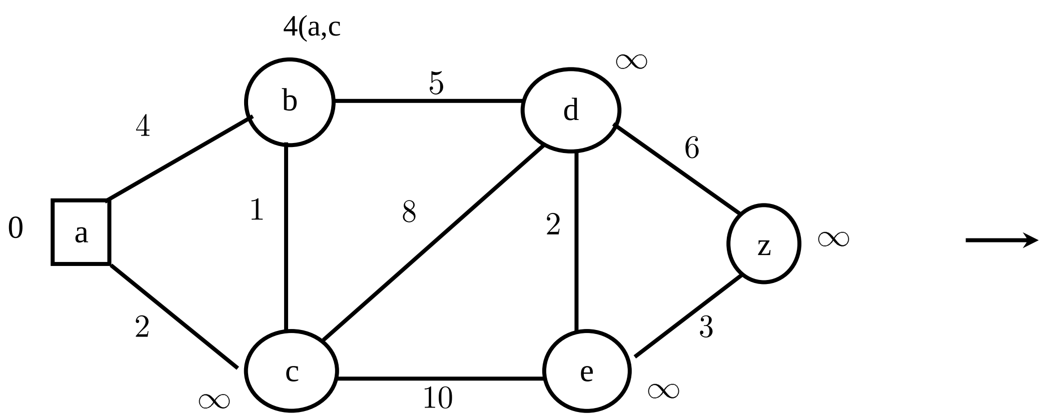
$$\begin{aligned}
&l(a, x_{j1}) \geq \sigma(x_{j1}) - \sigma(a) = \sigma(x_{j1}) \\
&l(x_{j1}, x_{j2}) \geq \sigma(x_{j2}) - \sigma(x_{j1}) \\
&.... \\
&l(x_{jk-1}, x_{jk}) \geq \sigma(x_{jk}) - \sigma(x_{jk-1}) \\
&l(x_{jk}, b) \geq \sigma(b) - \sigma(x_{jk}) \\
&\Rightarrow l(\beta) = l(a, x_{j1}) + l(x_{j1}, x_{j2}) + ... + l(x_{jk-1}, x_{jk}) + l(x_{jk}, b) \geq \sigma(b) \\
&\Rightarrow l(\alpha) = \min\{l(\beta) : \beta \in D(a,b)\}
\end{aligned}$$

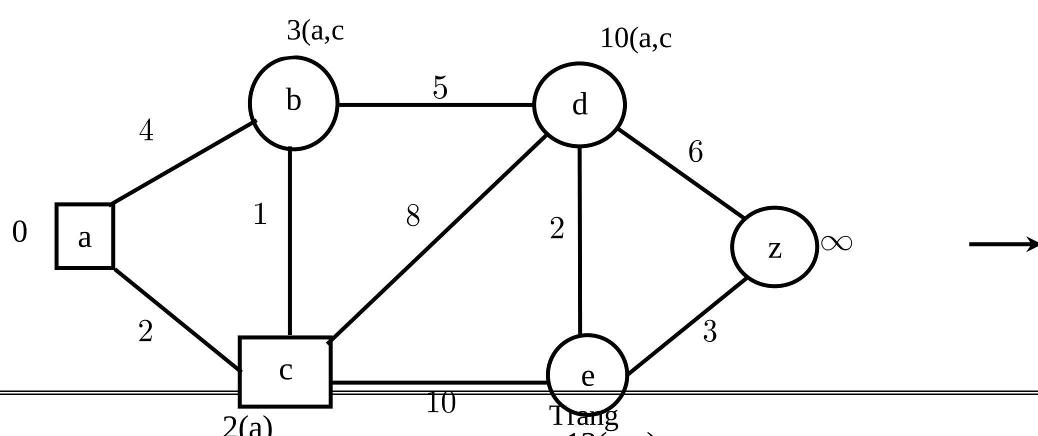
Ví dụ 3. 1. Dùng thuật toán **Dijkstra** tìm đường đi độ dài ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh z của đồ thị *G* = <*X*, *U*> có trọng số cho dưới dạng:

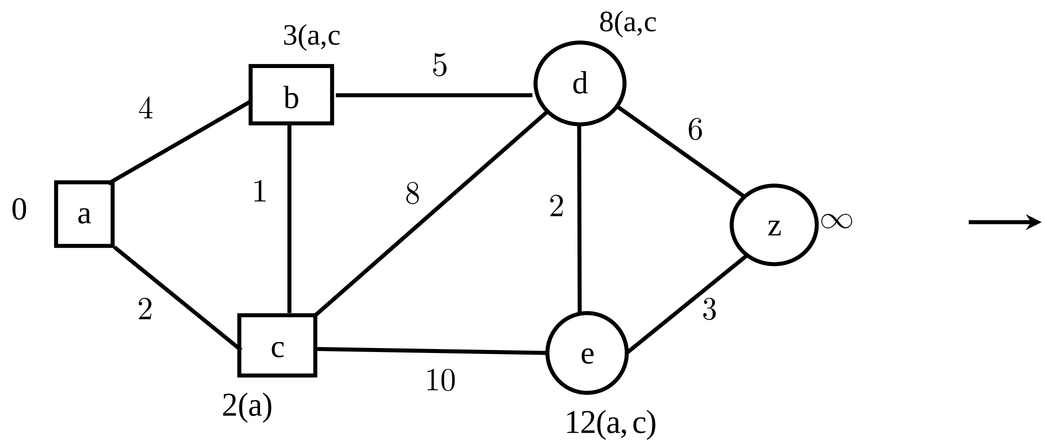


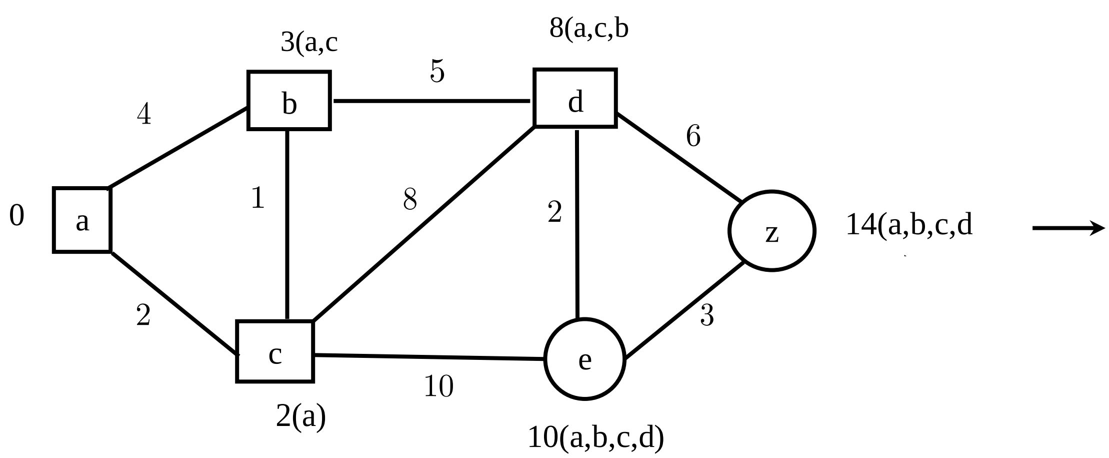
Giải. Các bước dùng thuật toán **Dijkstra** tìm độ dài đường đi ngắn nhất giữa đỉnh a và đỉnh z được thể hiện bởi các hình dưới đây:

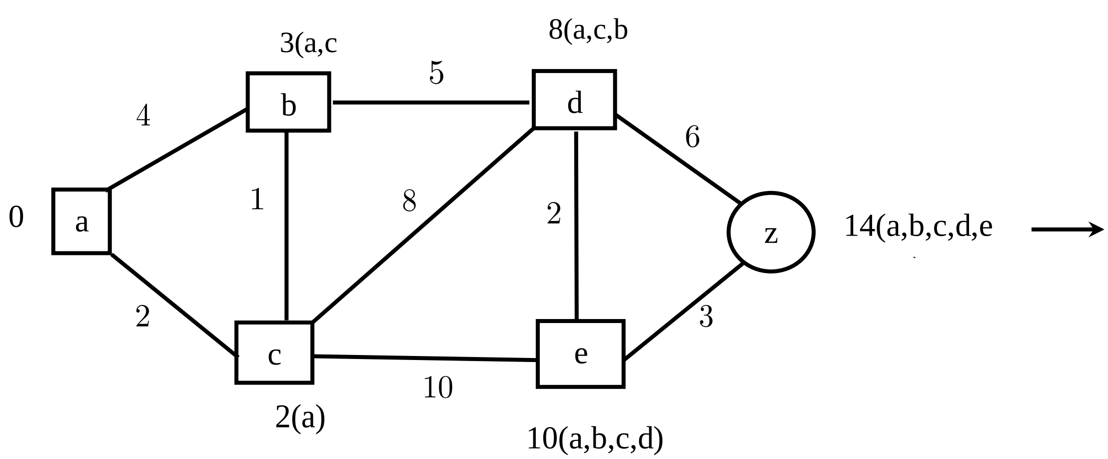


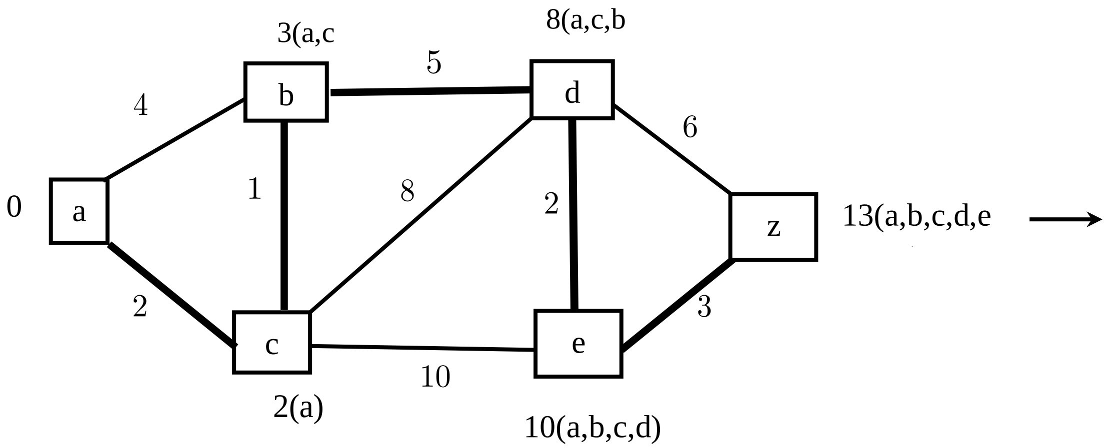





3(a,c
8(a,c
5
4
b
d
6
0
a
1
8
2
z
∞
2
c
e
3
10
2(a)
12(a, c)

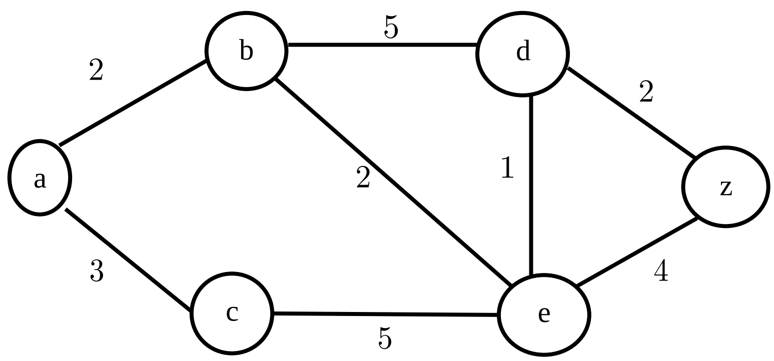

3(a,c
8(a,c,b
5
4
b
d
6
0
a
1
8
2
z
14(a,b,c,d
2
c
e
3
10
2(a)
10(a,b,c,d)


3(a,c
8(a,c,b
5
4
b
d
6
0
a
1
8
2
z
14(a,b,c,d,e
2
c
e
3
10
2(a)
10(a,b,c,d)



Tại mỗi bước lặp của thuật toán, các đỉnh của S được khoanh thành hình vuông. Đường đi ngắn nhất chỉ chứa các đỉnh đã thuộc vào tập S_k. Thuật toán kết thúc khi *y* được khoanh thành hình vuông, ta nhận được đường đi ngắn nhất từ *x* đến *y* là : xcbdey với độ dài 13.

Luyện tập 3.1. Dùng thuật toán Dijkstra hãy tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh a và z của đồ thị có trọng số sau.

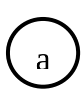


(*)

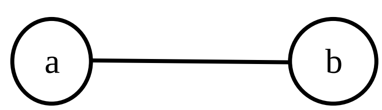
ÔN TẬP CHƯƠNG 5

Bài 1. Cho các đồ thị đầy đủ K_n (n là chỉ số đỉnh) với $1 \le n \le 6$:

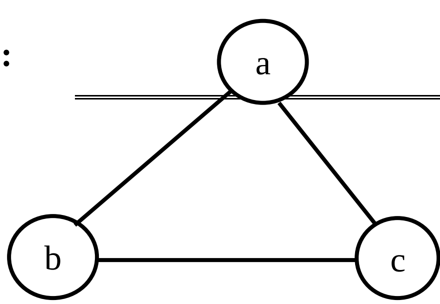
K$_1$:



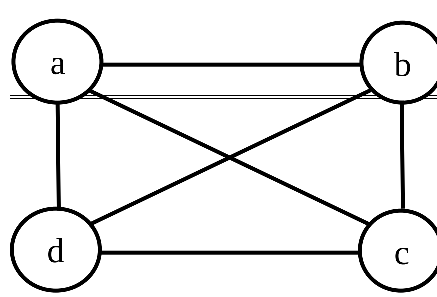
K2:



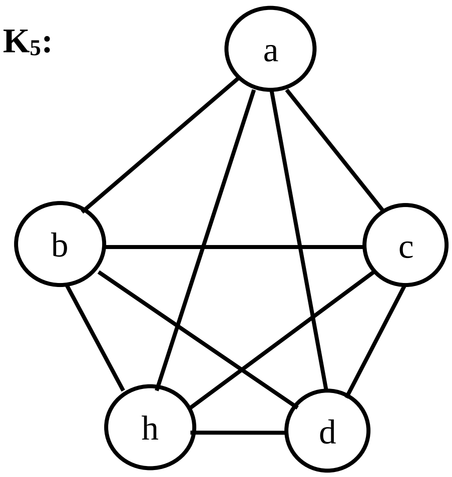
K$_3$:



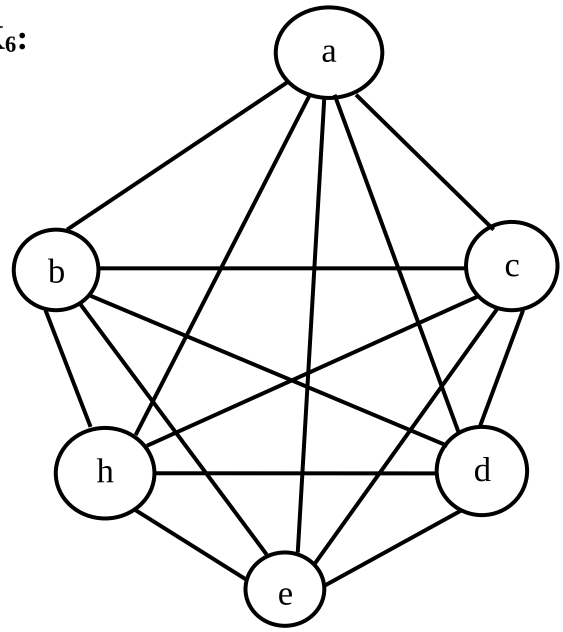
K$_4$:



K_5:



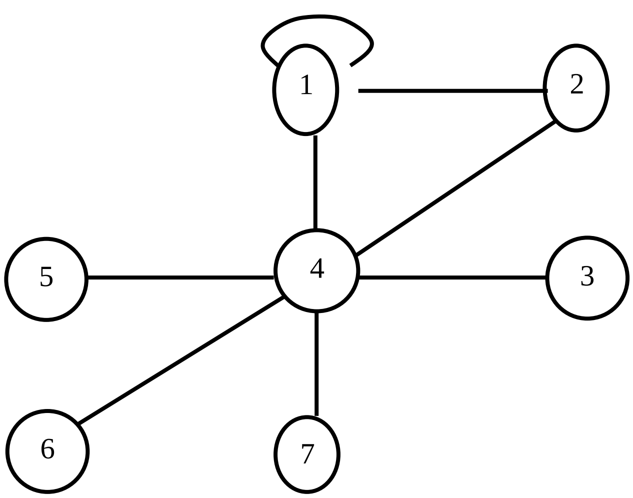
K_6:



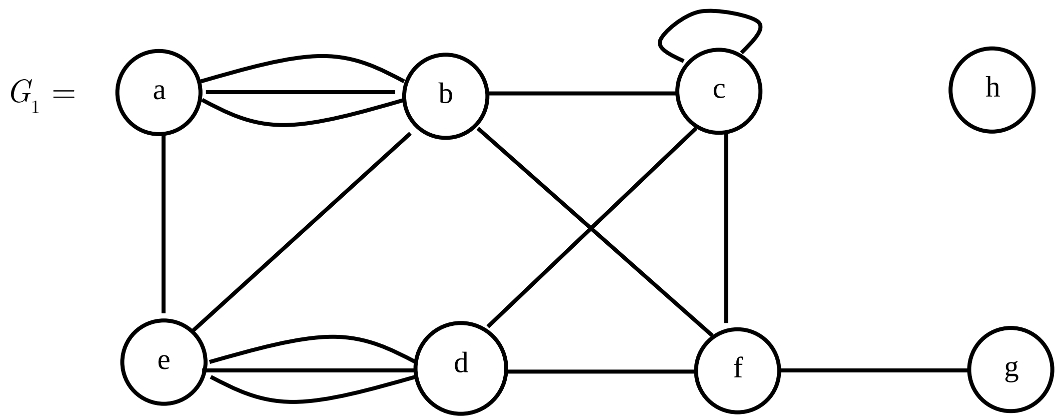
a) . Hãy biểu diễn K_n bằng ma trận kề.

b) .Tìm số cạnh của đồ thị đầy đủ K_n .

Bài 2. Chứng tỏ rằng : Đồ thị $G_5 =< X_5, U_5 >$: không phải là cây



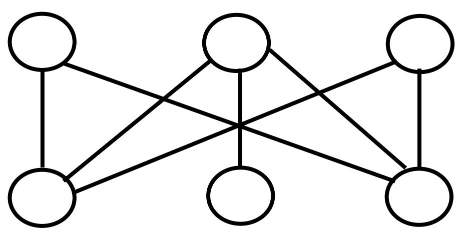
Bài 3. Cho đồ thị vô hướng G1



Tìm bậc của đồ thị G2 và kiểm tra tính đúng đắn của định lý 1 và định lý 2.Chỉ ra đỉnh cô lập và đỉnh treo của đồ thị trên , đồng thời kiểm tra bậc vào có bằng bậc ra trong G2 không.

Bài 4. Đồ thị phân đôi đầy đủ K3,3 sau có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh?

$K_{3,3}$=



Bài 5.

a) . Có bao nhiêu cạnh trong đồ thị 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc là 6?

b) . Có thể tồn tại đồ thị đơn 5 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc là 5 không?

c) . Chỉ ra đồ thị có 5 đỉnh với các bậc là : 3, 3, 3, 3, 2 là tồn tại.

Bài 6. Tìm số cạnh, số đỉnh, số bậc của đồ thị Kn và với m, n như thế nào thì đồ thị Kn là chính quy?

Bài 7. Trong một cuộc họp, có đúng hai đại biểu không quen nhau và mỗi đại biểu trong hai đại biểu này có đúng một số lẻ người quen đến dự . Chứng minh rằng luôn có thể sắp xếp một số đại biểu ngồi chen giữa hai đại biểu nói trên, để mỗi đại biểu ngồi giữa hai người mà họ quen.

Bài 8. Dùng thuật toán Dijkstra hãy tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh a và z của đồ thị có trọng số sau.