BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
DỰ ÁN ĐÀO TẠO GIÁO VIÊN THCS
LOAN No 1718 - VIE (SF)

PHẠM VĂN KIỀU

XÁC SUẤT THỐNG KÊ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM VĂN KIỀU

XÁC SUẤT THỐNG KÊ

(Giáo trình Cao đẳng Sư phạm)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc ĐINH NGỌC BẢO
Tổng biên tập LÊ A

Người nhận xét:
PGS. TSKH ĐINH QUANG LƯU
TS NGUYỄN HẮC HẢI

Biên tập nội dung:
NGUYỄN TIẾN TRUNG

Trình bày bìa:
PHẠM VIỆT QUANG

Kĩ thuật vi tính:
TRẦN THỊ PHƯƠNG

Mã số: 01.01. 127/411 ĐH-2005

XÁC SUẤT THỐNG KÊ

In 3100 cuốn, khổ 17 × 24cm tại Công ti In Thái Nguyên.
Giấy phép xuất bản số 127-452/XB-QLXB, kí ngày 1/4/2005.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2005.

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Lí thuyết Xác suất và Thống kê toán học ra đời vào thế kỉ XVII gắn liền với tên tuổi của một số nhà toán học như Huyghens, Pascal, Bernoulli v.v... Đến năm 1933, với sự ra đời của hệ tiên đề về Lí thuyết Xác suất của Kolmogrov (nhà toán học Liên Xô cũ), Xác suất và Thống kê toán học đã trở thành một ngành toán học phát triển như vũ bão cả về lí thuyết cũng như ứng dụng. Nó được sử dụng rộng rãi trong hầu hết các ngành khoa học tự nhiên, khoa học xã hội, trong kinh tế và kĩ thuật v.v...

Lí thuyết Xác suất thống kê được đưa vào giảng dạy ở hầu hết các trường Đại học và Cao đẳng trên thế giới và trong nước. Từ năm 1960 trở đi nhiều nước trên thế giới đã đưa một số yếu tố xác suất và thống kê vào dạy cho học sinh phổ thông. Ở nước ta trong những năm gần đây, đặc biệt là trong chương trình cải cách giáo dục đợt này, Xác suất thống kê cũng được đưa vào giảng dạy ở THCS và THPT.

Trong khuôn khổ của chương trình hệ Cao đẳng Sư phạm, giáo trình này chứa đựng nội dung vừa phải, phù hợp với trình độ sinh viên Cao đẳng và yêu cầu của cải cách giáo dục Phổ thông.

Giáo trình gồm 6 chương:

Chương I: Đề cập tới khái niệm xác suất và các tính chất của xác suất.

Chương II: Trình bày về biến ngẫu nhiên và hàm phân phối.

Chương III: Đề cập tới khái niệm các số đặc trưng và những tính chất của nó.

Chương IV: Trình bày một số kết quả cơ bản về luật số lớn và định lí giới hạn trung tâm.

Chương V: Đề cập một số kết quả về ước lượng tham số, bài toán kiểm định giả thiết và hồi quy.

Sau mỗi chương đều có phần bài tập và đáp số đủ giúp cho sinh viên hiểu tốt phần lí thuyết và ứng dụng.

Giáo trình không tránh khỏi những thiếu sót, tác giả mong được các độc giả xa gần góp ý.

Tác giả xin chân thành cám ơn hội đồng phản biện, các thầy cô và các bạn trong ban dự án đã giúp đỡ và tạo điều kiện tốt để cuốn sách được ra đời kịp thời.

TÁC GIẢ

Chương chuẩn bị

CÁC KIẾN THỨC BỔ TRỢ

I. TẬP HỢP

Ta sẽ trình bày một số các khái niệm và một số ý tưởng cơ bản của lí thuyết tập hợp nhằm phục vụ cho việc nghiên cứu xác suất ở các chương sau.

1.1. Tập hợp và phần tử của tập hợp

Tập hợp là khái niệm nguyên thuỷ không định nghĩa mà ta chỉ mô tả nó. Tập hợp là một toàn thể các đối tượng cùng loại (theo nghĩa chúng có một đặc tính hay một dấu hiệu chung). Ta thường kí hiệu tập hợp bằng chữ in A, B, C,..., X, Y v.v...

Phần tử của tập hợp: những đối tượng thiết lập nên tập hợp được gọi là phần tử của tập hợp, được kí hiệu bằng chữ a, b, ..., x, y,...

a là phần tử của tập hợp A, được kí hiệu là: $a \in A$ (đọc là a thuộc A); b không là phần tử của tập hợp A, được kí hiệu là: $b \notin A$ (đọc là b không thuộc A).

Ví dụ

- Tập hợp các học sinh lớp 3A của trường Tiểu học Quang Trung.
- Tập hợp các quả bóng trong thùng đựng bóng.
- Tập hợp các con bò trong một trại nuôi bò v.v...

Quan hệ giữa các tập hợp:

- *Tập hợp con*

Tập hợp A được gọi là bao hàm trong tập hợp B, được kí hiệu là $A \subset B$, nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B.

Ví dụ. $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$. Ta có $A \subset B$.

Nếu $A \subset B$ thì A được gọi là tập hợp con của B.

• *Tập hợp bằng nhau*

Hai tập hợp A và B được gọi là bằng nhau nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ và được kí hiệu là A = B.

• *Tập rỗng*

Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập rỗng và được kí kiệu là $\varnothing$.

Ví dụ.

• Tập các nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$.

• Tập S = {x: x là những số nguyên dương mà $x^2 = 3$}.

Không gian (tập hợp vũ trụ)

Tập lớn nhất cố định mà mọi tập hợp được xét đều chứa trong nó, được gọi là không gian (tập vũ trụ). Kí hiệu là U.

Ví dụ

• Trong hình học, tập tất cả những điểm trên mặt phẳng là không gian (tập vũ trụ), kí hiệu là $\mathbf{R}^2$.

• Tập tất cả các điểm trên đường thẳng là không gian (tập vũ trụ).

Cách mô tả một tập hợp:

Ta có thể liệt kê tất cả các phần tử của nó (ví dụ: A = {1, 3, 4, 6}) hoặc nêu một tính chất chung của các phần tử của nó (ví dụ: B = {tập các số chẵn}), C = {tập các số lẻ}, v.v...).

Tập hữu hạn và tập vô hạn

Tập hợp có số hữu hạn phần tử được gọi là tập hữu hạn, còn tập gồm vô hạn phần tử được gọi là tập hợp vô hạn.

Tập hợp vô hạn được chia làm 2 loại: tập vô hạn đếm được và tập vô hạn không đếm được. Tập vô hạn đếm được là các phần tử của nó có thể đánh số được theo dãy số tự nhiên, trường hợp ngược lại là tập vô hạn không đếm được.

Ví dụ

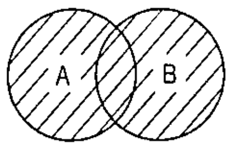
• Tập số tự nhiên, tập số nguyên, tập số hữu tỉ là tập vô hạn đếm được.

• Tập số vô tỉ, tập những điểm trên [0, 1] là vô hạn không đếm được.

1.2. Các phép toán trên tập hợp

a. *Hợp*

Định nghĩa 1. Hợp của tập hợp A với tập hợp B được kí hiệu là $A \cup B$ là tập hợp mà mỗi phần tử của nó thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B.



$A \cup B$

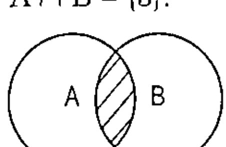
Hình 1

Ví dụ. Cho hai tập hợp A = {1, 2, 3} và B = {3, 4, 5}. Khi đó: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b. *Giao*

Định nghĩa 2. Giao của tập hợp A với tập hợp B là tập hợp được kí hiệu là $A \cap B$, mà mỗi phần tử của nó thuộc đồng thời cả tập hợp A và tập hợp B.

Trở về ví dụ trên ta có: $A \cap B = \{3\}$.



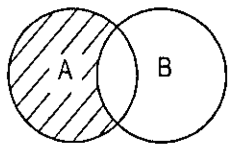
$A \cap B$

Hình 2

Định nghĩa này có thể mở rộng cho trường hợp giao của nhiều tập hợp.

c. *Hiệu*

Định nghĩa 3. Hiệu của tập hợp A và tập hợp B là tập hợp được kí hiệu là $A \setminus B$, mà mỗi phần tử của nó thuộc tập hợp A và không thuộc tập hợp B.



$A \setminus B$

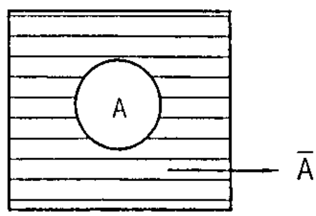
Hình 3

Ví dụ. Cho hai tập hợp $A = \{1, 2, 4\}$ và $B = \{2, 3, 5\}$. Khi đó: $A \setminus B = \{1, 4\}$; $B \setminus A = \{3, 5\}$.

Phần bù của tập hợp

Giả sử U là không gian (tập hợp vũ trụ), $A \subset U$. Ta nói $U \setminus A$ là phần bù của tập hợp A đối với U kí hiệu là $\overline{A}$.

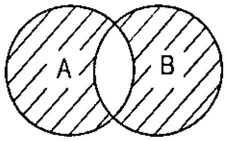
$$\overline{A} = U \setminus A$$



Hình 4

d. *Hiệu đối xứng*

Định nghĩa 4. Gọi $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ là hiệu đối xứng của hai tập hợp A và B. Kí hiệu là: $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.



$A \Delta B$

Hình 5

Ví dụ. Cho các tập hợp U = {1, 2, 3,...}, A = {1, 2, 3, 4}; B = {3, 4, 5, 6, 7}; C = {2, 3, 8, 9}; E = {2, 4, 6,...}. Tìm: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{E}$, A\B, A\C, B\C, A\E, B\A, C\A, C\B, E\A, $A \Delta B, B \Delta C$.

Giải:

$\overline{A} = U \setminus A = \{5, 6, 7, ...\}$;

$\overline{B} = \{1, 2, 8, 9, ...\}$;

$\overline{C} = \{1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, ...\}$;

$\overline{E} = \{1, 3, 5, 7, ...\}$;

A\B = {1, 2};

A\C = {1, 4};

B\C = {4, 5, 6, 7};

A\E = {1, 3};

B\A = {5, 6, 7};

C\A = {8, 9};

C\B = {2, 8, 9};

E\A = {6, 8, 10, ...}.

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$; BDC = {4, 5, 6, 7, 2, 8, 9}.

Các tính chất của các phép toán trên tập hợp:

1 – Luật luỹ đẳng: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.

2 – Luật kết hợp: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3 – Luật giao hoán: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

4 – Luật phân phối: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

5 – Luật đồng nhất: $A \cup \varnothing = A$; $A \cap U = A$.

$A \cup U = U$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.

6 – Luật phủ định của phủ định (luật đối hợp): $\overline{\overline{A}} = A$.

7 – Luật thành phần: $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

$\overline{U} = \varnothing$; $\overline{\varnothing} = U$.

8 – Luật DeMorgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

e. *Tích Đề các (Descartes)*

Cho hai tập hợp A và B.

Định nghĩa 5. Tích Đề các của A và B là một tập hợp mà phần tử của nó là các cặp dạng (a, b), $a \in A$, $b \in B$ và kí hiệu là $A \times B$. Nếu một trong hai tập A, B là tập rỗng thì qui ước tích Đề các $A \times B$ là tập rỗng.

Hai phần tử (a, b) = (c, d) khi và chỉ khi a = c và b = d.

Ví dụ. Cho A = {1, 2, 3}; B = {2, 5}. Ta có:

$A \times B = \{(1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\}$.

1.3. Đếm các phần tử của tập hợp hữu hạn (Bản số của tập hợp hữu hạn)

Định nghĩa 6. Bản số của tập hợp hữu hạn A là số phần tử của tập hợp A và kí hiệu là n(A).

Định lí 1. *Giả sử A và B là hai tập hợp hữu hạn. Khi đó* $A \cup B$ *cũng hữu hạn và*

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Hệ quả 1. Nếu $A \cap B = \varnothing$ và A, B là hai tập hợp hữu hạn thì:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Hệ quả 2. Giả sử A và B là hai tập hợp hữu hạn. Khi đó:

$$n(A\setminus B) = n(A) - n(A \cap B).$$

Đặc biệt nếu $A \supset B$ thì $n(A\setminus B) = n(A) - n(B)$.

Hệ quả 3. Giả sử U là không gian (tập vũ trụ) và $A \subset U$ là tập hợp hữu hạn thì:

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A).$$

Ví dụ. Giả sử cho các tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ và $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Khi đó ta có:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 5 - 2 = 8;$$

$$n(A\setminus B) = n(A) - n(A \cap B) = 5 - 2 = 3.$$

Giả sử $\overline{A}$ là phần bù của A đối với U. Ta có:

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A) = 10 - 5 = 5;$$

$$n(\varnothing) = 0.$$

Định lí 2. Giả sử A và B là hai tập hợp hữu hạn. Khi đó:

$$n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B).$$

Chứng minh

$$n(A \Delta B) = n\big((A\setminus B) \cup (B\setminus A)\big) = n(A\setminus B) + n(B\setminus A).$$

Theo hệ quả 2 ta có:

$$n(A\Delta B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B).$$

Ví dụ. Cho hai tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Khi đó $n(A) = 4$, $n(B) = 4$, $n(A \cap B) = 2$.

Vậy $n(A \Delta B) = 4 + 4 - 2\times 2 = 4$.

Định lí 3. Giả sử A và B là hai tập hợp hữu hạn. Khi đó $A\times B$ cũng là tập hợp hữu hạn và $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$. (*)

Chứng minh

Bằng phương pháp chứng minh quy nạp ta suy ra công thức trên. Thực vậy: Giả sử tập A có một phần tử là $A = \{a\}$, còn $B = \{b_1, b_2,..., b_n\}$.

Ta có: $A \times B = \{(a, b_1), (a, b_2), ..., (a, b_n)\}$.

Vậy: $A \times B = 1 \times n(B) = n(A) \times n(B)$.

Giả sử công thức (*) đúng cho trường hợp $A_{n(A)-1}$ có $n(A) - 1$ phần tử.

Ta có: $A = A_{n(A)-1} \cup \{a_{n(A)}\}$

$$
\begin{aligned}
\text{Suy ra: } n(A \times B) &= n\left[(A_{n(A)-1} \cup \{a_{n(A)}\}) \times B\right] \\
&= n(A_{n(A)-1} \times B) + n(\{a_{n(A)}\} \times B \\
&= (n(A) - 1)n(B) + 1n(B) = n(A) \times n(B).
\end{aligned}
$$

Định lí được chứng minh.

Công thức này có thể mở rộng trong trường hợp tích Đề các của một số hữu hạn các tập hữu hạn.

Định lí 4. Giả sử $A_1, A_2, ..., A_m$ là những tập hữu hạn. Khi đó:

$$n(A_1 \times A_2 \times ... \times A_m) = n(A_1)n(A_2)...n(A_m).$$

1.4. Luỹ thừa tập hợp, phân hoạch, σ – đại số các tập con

a. *Luỹ thừa tập hợp*

Cho tập hợp S.

Định nghĩa 7. Tập hợp tất cả các tập hợp con của S được gọi là luỹ thừa tập hợp của S và kí hiệu là $\rho(S)$.

Người ta chứng minh được rằng:

Số các phần tử của $\rho(S)$ là $n(\rho(S)) = 2^{n(S)}$

Với n(S) là số phần tử của S.

Ví dụ. $S = \{1, 2, 3\}$

$\rho(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, S\}$.

Ta biết $n(S) = 3$, $\rho(S) = 2^3 = 8$.

Nhìn trong danh sách liệt kê các phần tử của tập $\rho(S)$ ta cũng thấy có 8 phần tử.

b. *Phân hoạch của tập hợp*

Cho S là tập khác rỗng. Ta nói phân hoạch của tập S là tập các tập $A_1, A_2,\ldots, A_n,\ldots$ khác tập rỗng sao cho:

i. Mỗi $a \in S$ ta suy ra $a \in A_i$ nào đó, $i = \overline{1, n}$

ii. $A_i \bigcap_{i \neq j} A_j = \varnothing$, $i, j = 1, 2,\ldots, n$.

Ví dụ. Cho $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Ta chọn phân hoạch: $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{4\}$.

Tất nhiên ta có thể thiết lập được nhiều cách chia tập S.

c. *Đại số (σ – đại số)*

Giả sử Ω là tập khác tạp rỗng $\varnothing$.

Kí hiệu $\mathscr{A}$ là tập các tập con của Ω được gọi là một đại số (σ – đại số) các tập con của Ω nếu thoả mãn các điều kiện sau:

i. $\Omega \in \mathscr{A}$

ii. Nếu $A \in \mathscr{A}$ thì $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$

iii. Nếu $A_1, A_2,\ldots, A_n \in \mathscr{A}$ thì $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{A}$

(nếu $A_1, A_2,\ldots, A_n,\ldots \in \mathscr{A}$ thì $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$).

Nghĩa là một đại số thì đóng kín đối với phép hợp hữu hạn còn σ – đại số thì đóng kín với phép hợp vô hạn đếm được.

II. GIẢI TÍCH TỔ HỢP

2.1. Hoán vị

Định nghĩa 8. Cho $M = \{1, 2,.., n\}$. Phép tương ứng 1 – 1, $P: M \to M$ sao cho $M \ni i \mapsto P(i) = a_i \in M$ được gọi là một hoán vị của n phần tử.

(Nói cách khác, mỗi cách xắp xếp của n phần tử (của M) theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử).

Người ta chứng minh được rằng:

Định lí 4. Số các hoán vị khác nhau của n phần tử bằng n! (1)

Ví dụ. Có bao nhiêu số khác nhau gồm 4 chữ số được thiết lập từ 4 chữ số 1, 2, 3, 4?

Giải:

Mỗi cách xắp xếp 4 chữ số 1, 2, 3, 4 theo một thứ tự nào đó ta được 1 số gồm 4 chữ số. Nó chính là 1 hoán vị của 4 chữ số đó.

Vậy số các số khác nhau gồm 4 chữ số là 4! = 24.

2.2. Chỉnh hợp không lặp

Cho tập M = {1, 2, 3}. Lập các tập hợp con có thứ tự gồm hai phần tử trong ba phần tử đã cho:

{1, 2}, {2, 1}, {2, 3}, {3, 2}, {1, 3}, {3, 1}.

Mỗi tập con có thứ tự gồm 2 phần tử trên được gọi là 1 chỉnh hợp không lặp chập 2 của 3 phần tử đã cho.

Tổng quát: Cho M = $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Định nghĩa 9. Một chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử đã cho là một tập hợp con có thứ tự gồm k phần tử trong n phần tử.

Hai chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử đã cho được gọi là khác nhau nếu có ít nhất một phần tử khác nhau hoặc có thứ tự khác nhau.

Ví dụ. {1, 2} khác {1, 1} hoặc {1, 2} $\neq$ {2, 1}.

Ký hiệu số các chỉnh hợp chập k khác nhau của n phần tử là P(n, k).

Định lí 5. Số các chỉnh hợp không lặp chập k khác nhau của n phần tử đã cho bằng:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad 0 \le k \le n. \tag{2}$$

Ví dụ. Cho năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số khác nhau gồm 3 chữ số lấy từ 5 chữ số ở trên?

Giải:

Số các số khác nhau gồm 3 chữ số bằng số các chỉnh hợp không lặp chập 3 của 5 phần tử, tức là:

$$P(5,\ 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 4 \times 5 = 20.$$

2.3. Chỉnh hợp lặp

Cho tập hợp M gồm n phần tử, chẳng hạn $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Định nghĩa 10. Ta gọi chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của M là 1 tập có thứ tự gồm k phần tử lấy từ n phần tử của M, mà phần tử của tập đó có thể có mặt nhiều nhất là k lần. Kí hiệu số các chỉnh hợp lặp chập k khác nhau của n phần tử là A(n; k).

Ví dụ. Cho M = {1, 2, 3}. Khi đó: {1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 1}, {2, 2}, {2, 3}, {3, 1}, {3, 2}, {3, 3} là những chỉnh hợp lặp chập 2 của 3 phần tử đã cho {1, 2, 3}.

Định lí 6. Số các chỉnh hợp lặp chập k khác nhau từ n phần tử đã cho bằng

$$A(n; k) = n^k. \tag{3}$$

Ví dụ. Có bao nhiêu cách phân ngẫu nhiên 12 hành khách lên 3 toa tàu?

Giải:

Lời giải của bài toán này là số các chỉnh hợp lặp chập 12 của 3 phần tử đã cho. Bởi vì mỗi hành khách có thể có 3 cách chọn lên toa I, hoặc toa II, hoặc toa III. Vậy có $3 \times 3 \times \dots \times 3 = 3^{12}$ cách phân ngẫu nhiên 12 hành khách lên 3 toa tàu.

2.4. Tổ hợp

Cho tập hợp M = {1, 2, 3}.

Lập các tập con gồm 2 phần tử không kể thứ tự của tập hợp M ta có: {1, 2}, {2, 3}, {1, 3} tập con khác nhau.

Mỗi tập con gồm 2 phần tử ở trên được gọi là 1 tổ hợp chập 2 của 3 phần tử.

Tổng quát, ta định nghĩa như sau:

Cho $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Định nghĩa 11. Gọi một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho của M là một tập con của tập M gồm k phần tử không kể thứ tự. Kí hiệu số các tổ hợp chập k khác nhau của n phần tử là: C_n^k.

Định lí 7. Số các tổ hợp chập k của n phần tử đã cho khác nhau là:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{4}$$

Ví dụ. Có mấy cách cử 3 người trong một tổ gồm 12 người đi lao động.

Giải:

Số cách phân công 3 người trong 12 người đi lao động bằng số các tổ hợp chập 3 khác nhau của 12.

Ta có: $C_{12}^3 = \frac{12!}{3!9!} = \frac{10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times 3 \times} = 220.$

Từ công thức (4) ta suy ra các đẳng thức sau:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1} \tag{5}$$

và $C_n^k = C_n^{n-k}$, $1 \le k \le n$. (6)

2.5. Nhị thức Newton

Ta đã biết các hằng đẳng thức sau:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

và $$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ta có thể viết lại dưới dạng:

$$(a + b)^2 = C_2^0a^2b^0 + C_2^1ab + C_2^2a^0b^2$$

và $$(a + b)^3 = C_3^0a^3b^0 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3a^0b^3.$$

Bằng phương pháp quy nạp ta cũng chứng minh được đẳng thức sau:

$$(a + b)^n = C_n^0a^nb^0 + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^na^0b^n$$

hay $$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^kb^ka^{n-k}. \qquad (7)$$

Công thức (7) được gọi là khai triển nhị thức Newton.

Nếu a = 1, b = 1 từ (7) ta có: $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

BÀI TẬP CHƯƠNG CHUẨN BỊ

Bài tập về tập hợp

1. Giả sử cho không gian (tập vũ trụ) $U = \{1, 2, ..., 9\}$ và

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

$D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $E = \{2, 4, 6, 8\}$; $F = \{1, 5, 9\}$.

Tìm:

a. $A \cup B$; $A \cap B$; $B \cup D$; $B \cap D$ $A \cup C$; $A \cap C$ $D \cup E$; $D \cap E$; $E \cup F$;

$E \cap F$; $D \cup F$; $D \cap F$;

b. $\overline{A}, \overline{B}, \overline{D}, \overline{E}$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $D \backslash E$, $E \backslash D$, $A \Delta B$, $C \Delta D$, $E \Delta F$.

2. Cho các tập hợp:

$A = [-3; 5)$; $B = (3; 8)$; $C = [0; 4]$; $D = (-7; -3]$.

Tìm $A \cap B$; $A \cap C$; $A \cap D$; $B \cap C$; $B \cap D$; $D \cap C$.

3. Giả sử $A = \{x: -3 \le x < 8\}$; $B = \{x: 3 < x < 12\}$. Tính $A \cup B$; $A \cap B$; $A \Delta B$; $A \times B$?

4. Chứng minh các mệnh đề sau:.

a. $A \subseteq B$ khi và chỉ khi $A \cap \overline{B} = \varnothing$;

b. $A \subseteq B$ khi và chỉ khi $\overline{A} \cup B = U$;

c. $A \subseteq B$ khi và chỉ khi $\overline{B} \subseteq \overline{A}$;

d. $A \subseteq B$ khi và chỉ khi $A \backslash B = \varnothing$.

Trong đó U là không gian (tập vũ trụ).

5. Chứng minh:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

6. Cho tập B và dãy các tập $\{A_i, i \in I\}$. Chứng minh rằng:

a. $B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$;

b. $B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

7. Hãy chỉ ra rằng mỗi họ các tập hợp sau là một đại số các tập con của U:

a. $A = \{\varnothing, U\}$;

b. $B = \{\varnothing, A, \overline{A}, U\}$

8. Giả sử A và B là 2 đại số các tập con của U. Chứng minh rằng $A \cap B$ là đại số các tập con của U.

9. Chứng minh định lí 0.1, hệ quả 1, hệ quả 2.

10. Chứng minh rằng:

a. $C_n^r = C_n^{n-r}$;

b. $C_{n+1}^r = C_n^{r-1} + C_n^r$, $1 \le r \le n$.

11. Chứng minh rằng: $C_n^r = \sum_{k=0}^{n} C_{n-m}^k C_m^{r-k}$.

12. Tìm n từ các phương trình sau:

a. $C_n^2 = 45$;

b. $\dfrac{P(n,4)}{C_{n-1}^3} = 60$;

c. $C_n^8 = C_n^{12}$.

13. Có mấy cách phân phối 16 tặng phẩm cho 4 người sao cho:

a. Người thứ nhất được 4 tặng phẩm?

b. Mỗi người được 4 tặng phẩm?

14. Trên mặt phẳng có 20 điểm (không có 3 điểm nào cùng nằm trên một đường thẳng). Qua mỗi cặp điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng như vậy?

15. Một học sinh phải thi bốn môn trong 10 ngày (mỗi ngày chỉ thi một môn). Có bao nhiêu cách lập chương trình thi?

16. Có bao nhiêu số khác nhau gồm 5 chữ số, nếu chữ số đầu tiên khác không được lập từ các chữ số từ 0 đến 9?

17. Có bao nhiêu cách lập hội đồng gồm 3 người lấy trong 4 cặp vợ chồng, nếu:

a. Mỗi người đều có thể tham gia trong hội đồng?

b. Trong hội đồng phải có hai nữ, một nam?

18. Các số 1, 2, ..., n lập thành một hàng ngang. Hỏi có mấy cách sắp xếp sao cho:

a. Hai chữ số 1 và 2 đứng cạnh nhau.

b. Ba chữ số 1, 2, và 3 đứng cạnh nhau theo thứ tự lớn dần?

19. Trong hộp có 100 sản phẩm gồm 90 sản phẩm tốt và 10 sản phẩm xấu.

a. Có bao nhiêu cách lấy từ 100 sản phẩm đó ra 10 sản phẩm?

b. Có bao nhiêu khả năng lấy từ 100 sản phẩm đó ra 10 sản phẩm trong đó có 8 sản phẩm tốt?

20. a. Có bao nhiêu cách phân ngẫu nhiên 15 hành khách lên 3 toa tàu?

b. Có bao nhiêu cách phân ngẫu nhiên 15 hành khách lên 3 toa tàu mà toa thứ nhất có đúng 3 hành khách?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – TRẢ LỜI

1. a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $A \cap B = \{4, 5\}$;

$B \cup D = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$; $B \cap D = \{5, 7\}$;

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A \cap C = \{4, 5\}$;

$D \cup E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $D \cap E = C$;

$E \cup E = \{2, 4, 6, 8\} = E$; $E \cap E = \{2, 4, 6, 8\} = E$;

$D \cup F = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D \cap F = \{1, 5, 9\} = F$.

b. $\overline{A} = \{6, 7, 8, 9\}$; $\overline{B} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$; $\overline{D} = \{2, 4, 6, 8\} = E$;

$\overline{E} = \{1, 3, 5, 7, 9\} = D$; $A \backslash B = \{1, 2, 3\}$; $B \backslash A = \{6, 7\}$;

$D \backslash E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $F \backslash D = \varnothing$;

$A \Delta B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$; $C \Delta D = \{1, 3, 8, 9\}$;

$E \Delta F = \{2, 4, 6, 8, 1, 5, 9\}$.

2. $A \cap B = [-3; 8]$; $A \cap C = [-3, 5)$; $A \cap D = \{-3\}$; $B \cap C = [0, 8)$;

$B \cap D = \varnothing$; $C \cap D = \varnothing$.

3. $A \cup B = \{x: -3 \le x < 12\}$; $A \cap B = \{x: 3 < x < 8\}$;

$A \Delta B = \{x : -3 \le x \le 3\} \cup \{x : 8 \le x < 12\}$;

$A \times B = \{(x, y) : -3 \le x < 8;\ \ 3 < y < 12\}$.

7. A, B đều là đại số các tập con của U (nghiệm lại 3 tiên đề về đại số các tập con của A, B).

11. Kết quả thu được bằng cách khai triển 2 vế của đẳng thức sau: $(1 + t)^n = (1 + t)^{n-m}(1 + t)^m$.

12. a. $n(n - 1) = 90$, vậy $n = 10$; b. $n = 10$; c. $n = 20$.

13. a. $C_{16}^{3} \times 3^{13}$;

b. $C_{16}^{4} \times C_{12}^{4} \times C_{8}^{4} \times C_{4}^{4} = \dfrac{16!}{(4!)^{4}}$.

14. Số đường thẳng vẽ được là $C_{20}^{2} = 190$.

15. Số cách lập chương trình thi là $P(10,4) = \dfrac{10!}{6!}$.

16. $P(10, 5) - P(9, 4)$

17. a. $C_{8}^{3} = 56$;

b. $C_{4}^{2} \times C_{4}^{1} = 24$.

18. a. $(n - 1)!$;

b. $(n - 2)!$.

19. a. C_{100}^{10};

b. $C_{90}^{8} \times C_{10}^{2}$.

20. a. 3^{15};

b. $C_{15}^{3} \times 2^{12}$.

Chương I

BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN VÀ XÁC SUẤT

Nội dung chính:

- Khái niệm biến cố ngẫu nhiên và xác suất;
- Quy tắc tính xác suất của tổng các biến cố;
- Xác suất có điều kiện và quy tắc tính xác suất của một tích các biến cố;
- Sự độc lập của các biến cố, của các phép thử;
- Xác suất nhị thức.

Những kiến thức chuẩn bị:

- Một số vấn đề về tập hợp;
- Giải tích tổ hợp.

1. BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN BIẾN CỐ

1.1. Đặt vấn đề

Trong nhiều trường hợp việc lặp đi lặp lại một thí nghiệm với những điều kiện bên ngoài giống hệt nhau nhưng không dẫn tới cùng một kết quả.

Ví dụ. Gieo một con xúc xắc, ta không đoán trước được sẽ xuất hiện mấy chấm ở mặt trên.

Hiện tượng khi biết các điều kiện ban đầu của một thí nghiệm không xác định được kết quả của nó, gọi là hiện tượng ngẫu nhiên.

Rất nhiều hiện tượng trong sinh học, kinh tế và kĩ thuật, v.v... là các hiện tượng ngẫu nhiên (các qui luật của Menden là một ví dụ quan trọng). Tất cả các phép đo lường đều chứa đựng sai số ngẫu nhiên. Việc nghiên cứu một đám đông dựa vào một mẫu với kích thước hạn chế cũng chứa đựng sai sót ngẫu nhiên. Bởi vì mẫu không phải là hình ảnh chính xác của một đám đông, thành phần của mẫu phụ thuộc vào việc chọn một cách ngẫu nhiên các cá thể trong đám đông.

Việc nghiên cứu các hệ thống những hiện tượng ngẫu nhiên để từ đó rút ra được các quy luật ngẫu nhiên là đối tượng của môn Xác suất và Thống kê toán học. Lí thuyết xác suất và thống kê toán học thuộc vào lí thuyết toán học hiện đại. Nó có rất nhiều ứng dụng trong nhiều ngành khoa học, ví dụ như: Sinh học, Kinh tế học, Khoa học Giáo dục và Quân sự v.v...

1.2. Khái niệm biến cố ngẫu nhiên và các phép toán trên biến cố

1.2.1. Biến cố ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên là sự thực hiện một nhóm các điều kiện xác định (có thể được lặp lại nhiều lần) và kết quả của nó ta không có thể đoán định được trước. Kí hiệu phép thử là G.

Ví dụ

• Một bà mẹ sinh một người con được xem như là thực hiện một phép thử "sinh một con". Kết quả của phép thử này là $\Omega = \{\text{Trai, Gái}\}$.

• Gieo một lần con xúc xắc được xem như tiến hành một phép thử "gieo con xúc xắc". Kết quả của phép thử này là mặt trên của nó có thể có một chấm (B_1), hai chấm (B_2), hoặc ba chấm (B_3), hoặc bốn chấm (B_4), hoặc năm chấm (B_5) hoặc sáu chấm (B_6). Tập các kết quả của phép thử đó là:

$$\Omega = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}.$$

• Bắn 1 viên đạn vào 1 mục tiêu được xem như tiến hành một phép thử "bắn một viên đạn". Kết quả của phép thử là $\Omega = \{\text{trúng đích, không trúng đích}\}$.

• Gieo một hạt đậu tương được xem như tiến hành 1 phép thử "gieo một hạt đậu". Kết quả của phép thử là $\Omega = \{\text{nảy mầm, không nảy mầm}\}$.

• Một học sinh làm 1 bài thi được xem như tiến hành 1 phép thử. Kết quả của phép thử là: $\Omega = \{$đạt, không đạt$\}$.

Trong ví dụ thứ nhất, kết quả sinh con trai được gọi là biến cố sơ cấp. Sự kiện sinh con gái cũng được gọi là biến cố sơ cấp. Tập Ω các kết quả của phép thử được gọi là không gian mẫu hoặc không gian các biến cố sơ cấp.

Không gian mẫu: Tập hợp tất cả các kết quả (loại trừ nhau) trong một phép thử được gọi là không gian mẫu hay còn gọi là không gian biến cố sơ cấp và kí hiệu là Ω.

Biến cố ngẫu nhiên: Biến cố ngẫu nhiên là sự kiện có thể xảy ra hoặc không xảy ra trong kết quả của một phép thử. Kí hiệu biến cố ngẫu nhiên bằng chữ in hoa A, B, C,...

Phần tử của không gian mẫu Ω được gọi là điểm mẫu.

Biến cố sơ cấp: Biến cố $\{a\}$ được thiết lập từ 1 điểm mẫu $a \in \Omega$ được gọi là biến cố sơ cấp.

Chú ý

• Về mặt lí thuyết tập hợp, biến cố ngẫu nhiên A là một tập hợp con của không gian biến cố sơ cấp Ω.

• Biến cố chắc chắn là sự kiện nhất định xảy ra trong một phép thử và kí hiệu là Ω.

• Biến cố không thể có là sự kiện không xảy ra trong một phép thử và kí hiệu là $\varnothing$.

Quan hệ giữa các biến cố:

• Biến cố A được gọi là kéo theo biến cố B, kí hiệu là $A \subset B$ nếu sự xảy ra của A dẫn đến sự xảy ra của B.

• Biến cố A và biến cố B được gọi là bằng nhau nếu biến cố A kéo theo biến cố B và ngược lại.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A.$$

1.2.2. Các phép toán trên biến cố

Cho hai biến cố A và B.

• Phép cộng: Tổng của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A \cup B$, là biến cố chỉ xảy ra nếu ít nhất một trong 2 biến cố A, B xảy ra.

• Phép nhân: Tích của 2 biến cố A và B, kí hiệu là $A \cap B$, là biến cố chỉ xảy ra nếu biến cố A và biến cố B đồng thời xảy ra.

• Phép trừ: Hiệu của biến cố A trừ cho biến cố B, kí hiệu là $A \backslash B$, là biến cố chỉ xảy ra nếu A xảy ra và B không xảy ra.

Định nghĩa 1.1. Gọi $\overline{A} = \Omega \backslash A$ là biến cố đối lập của biến cố A.

Những tính chất của các phép toán cộng, nhân và hiệu của các biến cố giống như các tính chất của phép hợp, giao, hiệu của các tập hợp.

Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc với nhau nếu $A \cap B = \varnothing$.

Chú ý. Hai biến cố đối lập với nhau thì chúng xung khắc với nhau. Nhưng điều ngược lại thì nói chung không đúng. Ví dụ gieo một lần con xúc xắc: Biến cố B_1 và B_2 xung khắc với nhau, nhưng B_2 không là biến cố đối lập của B_1 mà biến cố đối lập của B_1 là:

$$\overline{B}_1 = \{B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}.$$

Hệ đầy đủ các biến cố

Định nghĩa 1.2. Dãy n biến cố $B_1, B_2, \ldots, B_n$ lập thành hệ đầy đủ các biến cố nếu nó thoả mãn các điều kiện sau:

1. $B_1 \cup B_2 \ldots \cup B_n = \Omega$;

2. $B_i \bigcap_{i \neq j} B_j = \varnothing$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Ví dụ

• Gieo một lần một đồng tiền. Gọi A là biến cố xuất hiện mặt sấp, $\overline{A}$ là biến cố xuất hiện mặt ngửa. Khi đó A, $\overline{A}$ lập thành hệ đầy đủ.

• Gieo một lần 1 con xúc xắc. Gọi B_i là biến cố mặt trên của con xúc xắc có i chấm, $i=\overline{1,6}$. Khi đó B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 lập thành hệ đầy đủ các biến cố.

• Gieo đồng thời 2 đồng tiền cân đối và đồng chất. Khi đó các biến cố {NN, SN, NS, SS} lập thành hệ đầy đủ các biến cố.

Bây giờ ta có thể chính xác hoá các khái niệm biến cố ở trên bằng định nghĩa theo tiên đề.

Định nghĩa 1.3. I. Cho tập $\Omega \neq \varnothing$; Ω được gọi là không gian biến cố sơ cấp. Phần tử $\omega \in \Omega$ được gọi là biến cố sơ cấp.

II. Cho $\sigma-$ đại số $\mathcal{F}$ các tập con của Ω. Phần tử $A \in \mathcal{F}$ được gọi là biến cố ngẫu nhiên.

2. CÁC ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

2.1. Định nghĩa cổ điển 1.4

Nếu biến cố A được phân tích thành tổng của m biến cố trong hệ đầy đủ gồm n biến cố đồng khả năng $B_1, B_2, ..., B_n$, nghĩa là:

$$A = B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup ... \cup B_{i_m},\ 1 \le i_1, ..., i_m \le n$$

thì tỉ số $\frac{m}{n}$ được gọi là xác suất của biến cố A và kí hiệu:

$$P(A) = \frac{m}{n},\quad 0 \le m \le n.$$

Tính đồng khả năng của n biến cố $B_1, B_2, ..., B_n$ được hiểu như là khả năng xảy ra của $B_1, ..., B_n$ là như nhau. Ví dụ "gieo một lần con xúc xắc cân đối và đồng chất", các biến cố B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 là đồng khả năng. Vì tính cân đối và đồng chất của con xúc xắc nên khả năng xuất hiện của các biến cố đó là như nhau.

Từ định nghĩa này ta nhận thấy rằng sự xảy ra của các biến cố $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_m}$ dẫn đến sự xảy ra của A. Ta gọi m là số khả năng thuận lợi cho A. Còn n biến cố $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là số khả năng có thể. Ta có thể viết lại định nghĩa như sau:

$$P(A) = \frac{\text{Số khả năng thuận lợi cho A}}{\text{Số khả năng có thể}}$$

Ví dụ 1.1. Một đợt xổ số phát hành 10^6 vé số, trong đó có 1 giải nhất, 3 giải nhì và 10 giải ba và 20 giải khuyến khích. Một người mua ngẫu nhiên một vé. Tìm xác suất để:

a. Được giải nhất;

b. Được giải nhì;

c. Được giải ba;

d. Được giải khuyến khích;

e. Được giải.

Giải:

a. Có 1 khả năng được giải nhất trong 10^6 khả năng. Vậy xác suất phải tìm là: $P(A) = \frac{1}{10^6} = 0,000001;$

b. Tương tự, xác suất để nhận giải nhì là: $P(B) = \frac{3}{10^6};$

c. Xác suất để được giải ba là: $P(C) = \frac{10}{10^6} = 0,00001;$

d. Xác suất để được giải khuyến khích là: $P(D) = \frac{20}{10^6} = 0,00002;$

e. Xác suất để được giải là $P(E) = \frac{34}{10^6} = 0,000034.$

Ví dụ 1.2. Gieo một lần 1 đồng tiền cân đối và đồng chất. Tìm xác suất để xuất hiện mặt sấp.

Giải:

Gieo 1 lần 1 đồng tiền cân đối và đồng chất. Kết quả có 2 khả năng xảy ra là sấp hoặc ngửa. Vì đồng tiền cân đối và đồng chất nên hai khả năng này là như nhau. Trong hai khả năng này chỉ có 1 khả năng xuất hiện mặt sấp. Vậy xác suất xuất hiện mặt sấp là $P(A) = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 1.3. Xét một đặc tính do một cặp gen A và a gây ra. Trong việc lai tạo thì bố mẹ mỗi người cho một gen. Nếu cả hai người đều là dị hợp tử, nghĩa là cả hai đều là hợp tử Aa thì các hợp tử của con sẽ là một trong 4 loại sau: AA, Aa, aA, aa. Tìm xác suất để con có kiểu gen:

a. [aa]; b. [Aa]; c. [AA].

Giải:

a. Vì 4 biến cố AA, Aa, aA, aa là đồng khả năng nên $P([aa]) = \frac{1}{4}$;

b. Tương tự ta có: $P([aA]) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (Vì người ta xếp Aa, aA là cùng kiểu gen);

c. Xác suất để con có kiểu gen [AA] là $P([AA]) = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 1.4. Một lô sản phẩm gồm N sản phẩm, trong đó có M sản phẩm tốt và (N – M) sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên s sản phẩm từ lô hàng. Tìm xác suất để trong s sản phẩm lấy ra có đúng k sản phẩm tốt.

Giải:

Số khả năng có thể lấy s sản phẩm từ N sản phẩm là: C_N^s.

Số khả năng chọn k sản phẩm tốt trong M sản phẩm tốt là: C_M^k.

Số khả năng lấy s – k sản phẩm xấu trong N – M sản phẩm xấu là: C_{N-M}^{s-k}.

Số khả năng chọn s sản phẩm trong đó có đúng k sản phẩm tốt là: $C_M^k \times C_{N-M}^{s-k}$.

Xác suất để trong s sản phẩm lấy ra có đúng k sản phẩm tốt là:

$$P(A) = \frac{C_M^k \times C_{N-M}^{s-k}}{C_N^s}.$$

Ví dụ 1.5. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tìm xác suất để:

a. Tổng số chấm ở mặt trên 2 con xúc xắc bằng 8;

b. Hiệu các số chấm ở mặt trên hai con xúc xắc có giá trị tuyệt đối bằng 2;

c. Số chấm ở mặt trên hai con xúc xắc bằng nhau;

d. Số chấm ở mặt trên con thứ nhất là 4 và số chấm ở mặt trên con xúc xắc thứ hai nằm trong khoảng [3; 5].

Giải:

a. Nhìn vào hình bên ta có 5 khả năng mà tổng các số chấm ở mặt trên của hai con xúc xắc bằng 8. Còn số khả năng có thể là $n = 6 \times 6 = 36$.

Xác suất phải tìm là: $P(A) = \frac{5}{36}$.

b. Số khả năng mà hiệu các số chấm ở mặt trên hai con xúc xắc có giá trị tuyệt đối bằng 2 là 8.

Số khả năng có thể là $n = 36$.

Vậy xác suất phải tìm là: $P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

c. Số khả năng để số chấm ở mặt trên hai con xúc xắc là 6. Số khả năng có thể là 36.

Vậy xác suất phải tìm là: $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

II \ I	1	2	3	4	5	6
1			⊗			
2				⊗		*
3	⊗				⊗*	
4		⊗		*		⊗
5			⊗*			
6		*		⊗		

Hình 1.1

d. Số khả năng thuận lợi cho biến cố này là (4, 3); (4, 4); (4, 5). Vậy xác suất phải tìm là: $P(D) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Ví dụ 1.6. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 3 chữ số từ tập gồm 5 chữ số {0, 1, 2, 3, 4} xếp thành hàng ngang từ trái sang phải. Tìm xác suất để nhận được một số gồm 3 chữ số (không kể chữ số 0 đứng đầu).

Giải:

Số các số gồm 3 chữ số (kể cả chữ số 0 đứng đầu) có thể lập được là số các chỉnh hợp không lặp chập 3 của 5.

$$P(5; 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 3 \times 4 \times 5 = 60.$$

Số các số gồm 3 chữ số mà có chữ số 0 đứng đầu là:

$$P(4; 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = 3 \times 4 = 12.$$

Số các số có 3 chữ số mà không có chữ số 0 đứng đầu là:

$$P(5; 3) - P(4; 2) = 60 - 12 = 48.$$

Vậy xác suất phải tìm là:

$$P(A) = \frac{P(5;\ 3) - P(4;\ 2)}{P(5;\ 3)} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}.$$

2.2. Định nghĩa xác suất theo tần suất

Trong định nghĩa cổ điển có điều hạn chế là không gian biến cố sơ cấp có một số hữu hạn biến cố sơ cấp và lại đồng khả năng. Vì vậy, để khắc phục hai điều trên ta đưa ra định nghĩa sau:

Ta lặp lại độc lập n lần một phép thử ngẫu nhiên, biến cố A xuất hiện m lần. Tỉ số $\frac{m}{n}$ được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A. Nếu số lần thực nghiệm n càng lớn thì tần suất càng gần tới một số cố định nào đó.

Ví dụ. Các nhà toán học Pearson và Buffon đã làm thực nghiệm gieo nhiều lần một đồng tiền cân đối và đồng chất. Kết quả cho ở bảng sau:

Người làm thí nghiệm	Số lần gieo	Số lần xuất hiện mặt ngửa	Tần suất
Bupphông	4040	2048	0,508
Pearson.K (lần 1)	12000	6019	0,5016
Pearson.K (lần 2)	24000	12012	0,5005

Nhìn vào kết quả thí nghiệm ta thấy số lần gieo đồng tiền càng lớn thì tần suất $\frac{m}{n}$ càng gần $\frac{1}{2}$. Số $\frac{1}{2}$ được gọi là xác suất của biến cố "xuất hiện mặt ngửa".

Định nghĩa 1.5. Nếu số phép thử n càng lớn, tần suất $\frac{m}{n}$ của biến cố A càng tiến gần đến một số cố định p thì ta nói rằng biến cố A ổn định ngẫu nhiên và số p được gọi là xác suất của biến cố A.

Định nghĩa này được gọi là định nghĩa xác suất theo tần suất hay định nghĩa theo thống kê. Định nghĩa này có ưu điểm là giải quyết được trường hợp không gian biến cố sơ cấp gồm vô hạn biến cố sơ cấp và các biến cố sơ cấp này xuất hiện không đồng khả năng. Song định nghĩa này cũng có nhược điểm là nó không phản ánh được nhiều về đặc trưng của biến cố trong khi tỉ số $\frac{m}{n}$ có tính ổn định.

2.3. Định nghĩa xác suất hình học

Cho miền Ω đo được (trong mặt phẳng, đường thẳng, không gian 3 chiều,...) và miền con đo được S của Ω. Lấy ngẫu nhiên một điểm M trong miền Ω. Đặt A = [M $\in$ S].

Định nghĩa 1.6. Xác suất để điểm M rơi vào miền S (biến cố A) được xác định như sau:

$$P(A) = \frac{\text{độ đo S}}{\text{độ đo } \Omega}.$$

(Miền Ω chính là không gian biến cố sơ cấp).

Chú ý. Khái niệm "độ đo" của Ω ta hiểu như sau:

• Nếu Ω là đường cong hay đoạn thẳng thì "độ đo" của Ω là độ dài của nó.

• Nếu Ω là hình phẳng thì "độ đo" của Ω là diện tích của nó.

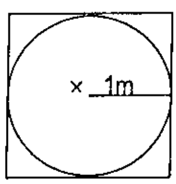
• Nếu Ω là hình khối trong không gian thì "độ đo" của Ω là thể tích của nó.

Ví dụ 1.7. Tìm xác suất để một điểm M rơi vào hình tròn nội tiếp hình vuông có cạnh 2m.

Giải:

Xác suất phải tìm là:

$$P(A) = \frac{\text{diện tích hình tròn}}{\text{diện tích hình vuông}} = \frac{\pi.1^2}{2^2} = \frac{\pi}{4}.$$



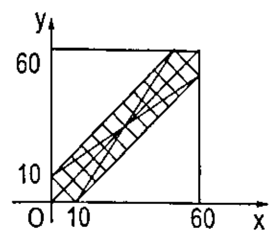
Hình 1.2

Ví dụ 1.8. Hai cậu bé hẹn gặp nhau ở một địa điểm xác định vào khoảng từ 8 giờ đến 9 giờ. Người đến trước sẽ đợi người kia 10 phút; sau đó nếu không gặp thì sẽ đi. Hãy tìm xác suất để hai cậu bé gặp nhau. Biết rằng mỗi cậu bé có thể đến chỗ hẹn trong khoảng thời gian qui định một cách ngẫu nhiên và không tuỳ thuộc vào người kia đến vào lúc nào.

Giải:

Kí hiệu x là thời điểm mà cậu bé thứ nhất đến điểm hẹn; y là thời điểm mà cậu bé thứ hai đến điểm hẹn. Hai cậu bé gặp nhau khi và chỉ khi: $|x-y| \le 10$.

Ta biểu diễn x, y như tọa độ các điểm trên mặt phẳng tọa độ Descartes vuông góc, đơn vị ở mỗi trục là phút. Không gian biến cố sơ cấp ở đây là hình vuông cạnh 60, còn biến cố sơ cấp thuận lợi cho việc gặp nhau là miền có gạch như hình vẽ dưới đây (H 1.3).



Hình 1.3

Vậy xác suất phải tìm là:

$$P(A) = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} = \frac{11}{36}.$$

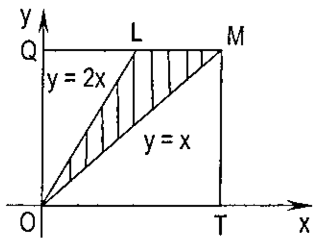
Ví dụ 1.9. Trên đoạn thẳng OA ta lấy một cách ngẫu nhiên hai điểm B, C có tọa độ tương ứng OB = x, OC = y ($y \ge x$). Tìm xác suất sao cho độ dài của đoạn BC bé hơn độ dài của đoạn OB.

Giải:

Các tọa độ x, y phải thoả mãn điều kiện:

$$0 \le x \le T;\ 0 \le y \le T;\ y > x \qquad (1)$$

trong đó T là độ dài đoạn OA.



Hình 1.4

Ta biểu diễn x, y lên hệ trục tọa độ vuông góc. Các điểm có tọa độ thoả mãn điều kiện (1.1) thuộc tam giác vuông OMQ. (Tam giác OMQ xem như không gian biến cố sơ cấp). Theo giả thiết của bài toán ta có $y - x < x$, tức là:

$$y < 2x. \tag{2}$$

Những điểm có tọa độ (x, y) thoả mãn (1) và (2) thuộc tam giác gạch OML (H 1.4). Miền thuận lợi cho biến cố cần tìm là tam giác OML. Vậy xác suất cần tìm là:

$$P = \frac{\text{diện tích } \Delta OML}{\text{diện tích } \Delta OMQ} = \frac{\dfrac{T^2}{4}}{\dfrac{T^2}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Để khắc phục những nhược điểm của các định nghĩa trên và đảm bảo độ chính xác về mặt toán học, Kolmogorov đã đưa ra định nghĩa xác suất bằng phương pháp tiên đề.

2.4. Định nghĩa xác suất theo tiên đề

Định nghĩa 1.7. Hàm P xác định trên $\sigma -$ đại số $\mathcal{F}$ và lấy giá trị trong $R = (-\infty; +\infty)$ được gọi là xác suất nếu thoả mãn các điều kiện sau:

1. $\mathcal{F} \ni A \mapsto P(A) \geq 0$

2. $P(\Omega) = 1$

3. Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}$ và $A_i \cap A_j = \varnothing$ với $i \neq j$ thì:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + ...$$

P(A) được gọi là xác suất của biến cố A. Bộ ba $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ được gọi là không gian xác suất.

Các định nghĩa ở phần trên là trường hợp riêng của định nghĩa xác suất theo tiên đề. Ở đây ta chỉ kiểm tra lại trường hợp định nghĩa cổ điển.

Thực vậy, đặt $\Omega = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ và $\mathcal{F}$ là tập hợp tất cả các tập con của Ω. Ta suy ra $\mathcal{F}$ là một $\sigma-$ đại số. Ta nghiệm lại các tiên đề I, II và III.

Tiên đề I thoả mãn vì $P(A) = \frac{m}{n} \geq 0; \quad 0 \leq m \leq n.$

Tiên đề II cũng thoả mãn, vì $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$.

Để nghiệm lại tiên đề III, ta giả sử rằng $A, B \in \mathcal{F}$ và $A \cap B = \varnothing$. Ta sẽ chứng minh: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Thực vậy, gọi m_A là số khả năng thuận lợi cho A;

và m_B là số khả năng thuận lợi cho B.

Vì $A \cap B = \varnothing$ nên số khả năng thuận lợi cho biến cố tổng $A \cup B$ là $m_A + m_B$.

Ta có: $P(A \cup B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B)$.

Đó là điều phải chứng minh.

3. TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

3.1. Nếu $A, B \in \mathcal{F}$ và $A \subset B$ thì $P(A) \leq P(B)$.

Chứng minh

Vì $A \subset B$ nên ta có thể viết $B = A \cup \overline{A}B$. A, $\overline{A}B$ xung khắc với nhau. Theo tiên đề III, ta có:

$$P(B) = P(A) + P(\bar{A}B).$$

Vì $P(\bar{A}B) \geq 0$ nên $P(B) \geq P(A)$. Đó là điều phải chứng minh.

Từ định nghĩa xác suất và tính chất trên ta có: $0 \leq p(A) \leq 1$.

Hệ quả 1. $P(\varnothing) = 0$.

Thực vậy, $\Omega = \Omega \cup \varnothing$.

Ta có: $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) \Leftrightarrow 1 = 1 + P(\varnothing)$

Vậy $P(\varnothing) = 0$.

Hệ quả 2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Thực vậy, $A \cup \bar{A} = \Omega$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Vậy: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

3.2. Với A, B $\in \mathcal{F}$ ta có

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

và $$P(A \setminus B) = (A) - P(AB).$$

Chứng minh

Ta biết rằng $A \cup B = A \cup \bar{A}B$; vì A, $\bar{A}B$ là xung khắc, nên

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A}B).$$

Mặt khác $B = AB \cup \bar{A}B$.

Ta có: $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$.

Thay $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$ vào biểu thức của $P(A \cup B)$ ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Bây giờ ta chứng minh ý thứ hai của tính chất này.

Ta có $A \setminus B = A\overline{B}$. Ta suy ra $P(A \setminus B) = P(A\overline{B})$.

Mặt khác $A = AB \cup A\overline{B}$. Vậy $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$.

Từ đó ta suy ra $P(A\setminus B) = P(A) - P(AB)$.

Đó là điều phải chứng minh.

• *Mở rộng công thức xác suất của một tổng:*

Với bất kỳ $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ có:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} P(A_iA_j) +$$
$$+ \sum_{1 \le i < j \le k \le n}^{n} P(A_iA_jA_k) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1...A_n).$$

Chứng minh

Chứng minh bằng quy nạp:

Ở trên ta đã chứng minh công thức đó đúng với n = 2. Giả sử công thức đó đúng đến n – 1. Ta sẽ chứng minh nó đúng đến n bất kỳ.

Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$P(\bigcup_{i=2}^{n} A_i) = \sum_{i=2}^{n} P(A_i) - \sum_{2 \le i < j \le n}^{n} P(A_iA_j) +$$
$$+ \sum_{2 \le i < j \le n}^{n} P(A_iA_jA_k) + ... + (-1)^{n-2} P(A_2...A_n).$$

Tính:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1 \cup (\bigcup_{i=2}^{n} A_i))$$
$$= P(A_1) + P(\bigcup_{i=2}^{n} A_i) - P(\bigcup_{i=2}^{n} A_1A_i). \qquad (1.1)$$

Theo giả thiết quy nạp ta lại có:

$$P\left(\bigcup_{i=2}^{n} A_1A_i\right) = \sum_{i=2}^{n} P(A_1A_i) - \sum_{2\le i<j\le n}^{n} P(A_1A_iA_j) +$$

$$+ \sum_{2\le i<j<k\le n}^{n} P(A_1A_iA_jA_k) - \ldots.. + (-1)^{n-2} P(A_1A_2\ldots A_n).$$

Từ kết quả trên ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.10. Gieo một lần con xúc xắc cân đối và đồng chất. Ký hiệu:

A là biến cố $\{1, 2, 4\}$;

B là biến cố $\{2, 5, 6\}$;

C là biến cố $\{1, 2, 6\}$.

Tính các xác suất P(A); P(B); P(C); $P(A \cup B)$; P(AB); P(AC); P(BC); P(ABC); $P(A \cup B \cup C)$.

Giải:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};\ P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};\ P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$P(AB) = \frac{1}{6};\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$P(AC) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ P(BC) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ P(ABC) = \frac{1}{6}.$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) -$$

$$-P(AC) + P(ABC) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Ví dụ 1.11. Có ba bức thư và ba phong bì thư có ghi địa chỉ sẵn. Cho ngẫu nhiên ba bức thư vào ba bì thư đó. Tìm xác suất để trong ba bức thư đó có ít nhất một bức thư gửi đúng địa chỉ.

Giải:

Đặt A = biến cố "trong ba bức thư có ít nhất một bức thư gửi đúng địa chỉ"

A_i = biến cố "bức thư thứ i gửi đúng địa chỉ", $i = 1, 2, 3$.

Ta có: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_1A_2) -$$

$$- P(A_1A_3) - P(A_3A_2) + P(A_1A_2A_3)$$

Trong 3 bì thư có ghi địa chỉ sẵn thì có một cái có địa chỉ của bức thư gửi đi. Vậy $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$ (do tính đối xứng).

Ta tiếp tục tính $P(A_1A_2)$.

Khả năng có thể cho biến cố tích A_1A_2 là 1. Vậy $P(A_1A_2) = \frac{1}{6}$.

Do tính đối xứng ta có: $P(A_1A_2) = P(A_3A_2) = P(A_1A_3) = \frac{1}{6}$.

Tương tự ta có số khả năng có thể cho biến cố tích $A_1A_2A_3$ là $3 \times 2 \times 1 = 6$. Số khả năng thuận lợi cho nó là 1. Vậy $P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{6}$.

Từ đó ta suy ra: $P(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

4. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN. CÔNG THỨC XÁC SUẤT CỦA TÍCH. SỰ ĐỘC LẬP CỦA CÁC BIẾN CỐ

4.1. Xác suất có điều kiện, công thức xác suất của tích các biến cố

Trước hết ta xét ví dụ sau đây:

Ví dụ 1.12. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Ký hiệu A là biến cố "Tổng số chấm ở mặt trên của hai con xúc xắc bằng 8", và B là biến cố "Tổng số chấm ở mặt trên hai con xúc xắc là số chẵn".

Tính xác suất của A, của B, của AB.

Giải:

Khi gieo đồng thời hai con xúc xắc thì số các cặp có số chấm ở mặt trên của hai con xúc xắc bằng 8 gồm 5 cặp (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2).

Số khả năng có thể xảy ra là $n = 6 \times 6 = 36$.

Theo định nghĩa xác suất cổ điển ta có:

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

Số các cặp mà có tổng là những số chẵn là 18.

Xác suất của biến cố B là:

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Ta thấy, nếu biến cố B xảy ra có nghĩa là số các cặp có thể xảy ra mà tổng của chúng là số chẵn bằng 18.

Nếu kí hiệu xác suất của A với điều kiện biến cố B đã xảy ra là $P(A / B)$ thì xác suất này bằng:

$$P(A / B) = \frac{5}{18}$$

Hơn nữa ta cũng thấy biến cố tích $A \cap B$ là tập có 5 cặp.

Vậy $P(A \cap B) = \frac{5}{36}$.

Từ kết quả trên ta suy ra:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{5}{18}.$$

Từ đó suy ra $P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Từ ví dụ trên ta đưa đến định nghĩa xác suất có điều kiện như sau:

Định nghĩa 1.8. Giả sử A, B là hai biến cố bất kỳ và $P(B) > 0$. Gọi tỉ số $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ là xác suất có điều kiện của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra và kí hiệu: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Nếu $P(A) > 0$ thì gọi tỉ số $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A)$ là xác suất có điều kiện của biến cố B với điều kiện biến cố A đã xảy ra.

Từ định nghĩa xác suất có điều kiện ta suy ra công thức xác suất của biến cố tích:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Công thức này có thể mở rộng cho trường hợp tích của n biến cố

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A)P(A_2/A_1) \ldots P(A_n/A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}).$$

Ví dụ 1.13. Một hộp gồm có 12 bi, trong đó có 7 bi đỏ và 5 bi trắng.

a. Lấy ngẫu nhiên liên tiếp không hoàn lại hai bi. Tìm xác suất để hai bi lấy ra đều là bi đỏ.

b. Lấy ngẫu nhiên 1 bi từ hộp và không để ý tới màu của nó, sau đó lại lấy tiếp 1 bi nữa. Tìm xác suất để viên bi lấy ra lần thứ hai là bi đỏ.

Giải:

a. Đặt A = biến cố "Viên bi lấy ra lần thứ nhất là bi đỏ".

B = biến cố "Viên bi lấy ra lần hai là bi đỏ".

Xác suất phải tìm là xác suất của biến cố tích AB.

(Hai bi đồng thời là bi đỏ chính là biến cố tích $A \cap B$).

Ta có: $P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$;

$$P(A) = \frac{7}{12};\ P(B/A) = \frac{6}{11}$$

Vậy $\quad P(AB)=\frac{7}{12}\times\frac{6}{11}=\frac{7}{22}$.

b. Ta có thể viết: $B=B\cap\Omega=B\left(A\cup\overline{A}\right)=AB\cup\overline{A}B$.

Khi đó: $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$

$$=P(A)P(B/A)+P(\overline{A})P(B/\overline{A}).$$

Lại có: $P(A)=\frac{7}{12}$; $P(\overline{A})=\frac{5}{12}$; $P(B/A)=\frac{6}{11}$; $P(B/\overline{A})=\frac{7}{11}$.

Vậy $P(B)=\frac{7}{12}\times\frac{6}{11}+\frac{7}{11}\times\frac{5}{12}=\frac{42+35}{132}=\frac{77}{132}=\frac{7}{12}$.

Ví dụ 1.14. Một lô sản phẩm gồm có 100 sản phẩm, trong đó có 10% phế phẩm. Kiểm tra liên tiếp không hoàn lại 4 sản phẩm từ lô hàng. Nếu có ít nhất một phế phẩm trong 4 sản phẩm kiểm tra thì không nhận lô hàng. Tính xác suất để nhận lô hàng.

Giải:

Đặt A = biến cố "nhận lô hàng".

Và B_i = biến cố "sản phẩm kiểm tra thứ i là sản phẩm tốt", i = 1, 2, 3, 4.

Từ định nghĩa các biến cố trên ta có: $A=B_1\cap B_2\cap B_3\cap B_4$.

Xác suất của biến cố A là:

$$P(A)=P(B_1)P(B_2/B_1)P(B_3/B_1B_2)P(B_4/B_1B_2B_3);$$

$$P(A)=\frac{90}{100}\times\frac{89}{99}\times\frac{88}{98}\times\frac{87}{97}\approx 0,65.$$

4.2. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

Định lí 1.1. Giả sử A là biến cố bất kỳ, dãy $B_1, B_2, ..., B_n$ lập thành hệ đầy đủ các biến cố. Khi đó:

a. Nếu $P(B_i) > 0,\ i = \overline{1,n}$ thì $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)$ (1.2)

(Công thức (1.2) được gọi là công thức xác suất toàn phần).

b. Nếu thêm giả thiết $P(A) > 0$ thì $P(B_k/A) = \dfrac{P(B_k)P(A/B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}$ (1.3)

(Công thức (1.3) được gọi là công thức Bayes).

Chứng minh

a. Ta có:

$$A = A \cap \Omega = A\left(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n\right) = AB_1 \cup AB_2 \cup \ldots \cup AB_n.$$

Vì $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là xung khắc từng đôi nên $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ cũng xung khắc từng đôi.

Vậy $P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_n)$

$$P(A) = P(B_1).\ P(A / B_1) + P(B_2)P(A / B_2) + \ldots + P(B_n)P(A / B_n).$$

Đó là điều phải chứng minh.

b. Xét xác suất của tích hai biến cố $A \cap B_k$, ta có:

$$P(AB_k) = P(A)P(B_k / A) = P(B_k)P(A / B_k).$$

Từ đẳng thức sau cùng ta được:

$$P(A)P(B_k / A) = P(B_k)P(A / B_k).$$

Suy ra: $P(B_k / A) = \dfrac{P(B_k)P(A / B_k)}{P(A)} = \dfrac{P(B_k)P(A / B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A / B_i)}.$

Công thức (1.3) được chứng minh.

Xác suất $P(B_i)$ được gọi là xác suất tiên nghiệm.

Xác suất $P(B_k/A)$ được gọi là xác suất hậu nghiệm.

Ví dụ 1.15. Cho 2 lô sản phẩm. Lô I có 50 sản phẩm, trong đó có 20 phế phẩm. Lô II có 40 sản phẩm, trong đó có 15 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên một lô và từ lô đó lấy hú họa 1 sản phẩm.

a. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt.

b. Sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt. Tìm xác suất để sản phẩm đó thuộc lô II.

Giải:

a. Gọi A là biến cố "Sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt",

B_1 là biến cố "Sản phẩm lấy ra từ lô I"

B_2 là biến cố "Sản phẩm lấy ra từ lô II".

Ta suy ra dãy B_1, B_2 lập thành hệ đầy đủ các biến cố.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2).$$

Theo đầu bài ta có: $P(B_1) = P(B_2) = \dfrac{1}{2}$.

$$P(A/B_1) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5};\ P(A/B_2) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}.$$

Vậy $P(A) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{49}{80}$.

b. Xác suất để sản phẩm tốt lấy ở lô thứ II là:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{8}}{\dfrac{49}{80}} = \frac{25}{49}.$$

Ví dụ 1.16. Hai máy cùng sản xuất ra cùng một loại linh kiện. Các linh kiện này được đóng chung vào một lô hàng. Năng suất của máy thứ II gấp đôi năng suất của máy thứ I. Máy thứ I sản xuất trung bình được

64% linh kiện loại tốt, còn máy thứ II được 80% linh kiện loại tốt. Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng một linh kiện thì được linh kiện loại tốt.

a. Tìm xác suất để linh kiện đó do máy thứ I sản xuất.

b. Tìm xác suất để linh kiện đó do máy thứ II sản xuất.

Giải:

Gọi A là biến cố "linh kiện lấy ra thuộc loại tốt".

B_i là biến cố "linh kiện do máy thứ i sản xuất", i = 1, 2.

Ta suy ra từ định nghĩa của biến cố B_1, B_2 rằng: B_1, B_2 lập thành hệ đầy đủ các biến cố. Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2).$$

Ta có: $P(B_1) = \frac{1}{3}$; $P(B_2) = \frac{2}{3}$ (vì máy thứ II có năng suất gấp đôi năng suất của máy I).

Theo giả thiết của bài toán ta có: $P(A/B_1) = 0{,}64$ và $P(A / B_2) = 0{,}80$.

Vậy $P(A) = 0{,}64 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0{,}8 = \frac{11{,}2}{15} \approx \frac{11}{15}$.

a. Xác suất để linh kiện tốt đó do máy I sản xuất là:

$$P(B_1 / A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times 0{,}64}{\frac{11}{15}} = \frac{16}{55}.$$

b. Xác suất để linh kiện tốt đó do máy thứ hai sản xuất là:

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \times 0{,}8}{\frac{11}{15}} = \frac{8}{11}.$$

Ví dụ 1.17. Người ta biết rằng một cặp trẻ sinh đôi có thể là một cặp sinh đôi thật hoặc sinh đôi giả (không thật). Một cặp sinh đôi thật chúng do cùng một trứng sinh ra, trong trường hợp đó chúng bao giờ cũng cùng giống. Còn sinh đôi giả thì chúng do hai trứng khác nhau sinh ra. Xác suất để chúng cùng giống bằng $\frac{1}{2}$. Giả sử cặp trẻ sinh đôi thật với xác suất bằng p $(0 < p < 1)$. Tìm xác suất để cặp trẻ sinh đôi cùng giống là cặp sinh đôi thật.

Giải:

Gọi: A là biến cố "Cặp trẻ sinh đôi cùng giống",

B_1 là biến cố "Cặp trẻ sinh đôi là sinh đôi thật",

B_2 là biến cố "Cặp trẻ sinh đôi là sinh đôi giả".

Ta suy ra: dãy B_1, B_2 lập thành hệ đầy đủ các biến cố. Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A) = P(B_1)P(A / B_1) + P(B_2)P(A / B_2)$$

Theo giả thiết ta có:

$$P(B_1) = p;\ P(B_2) = 1 - p;\ P(A/B_1) = 1;\ P(A / B_2) = \frac{1}{2}.$$

Vậy: $P(A) = p \times 1 + (1-p) \times \frac{1}{2} = \frac{1+p}{2}$.

Xác suất để cặp trẻ sinh đôi cùng giống là cặp sinh đôi thật là:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{1 \times p}{\frac{1+p}{2}} = \frac{2p}{1+p}.$$

Ví dụ 1.18. Một nhà máy sản xuất đồ hộp xuất khẩu có ba phân xưởng. Sản phẩm của phân xưởng 1 chiếm 40%, phân xưởng II chiếm 25% và phân xưởng III chiếm 35% tổng số sản phẩm của nhà máy đó. Trong số sản phẩm xuất xưởng, tỉ lệ thứ phẩm của phân xưởng I chiếm 0,5%, phân xưởng II chiếm 1,15% và phân xưởng III chiếm 0,7%.

a. Tìm xác suất để khi lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm của nhà máy ta được chính phẩm.

b. Sản phẩm lấy là chính phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm đó do phân xưởng I sản xuất.

Giải:

a. Đặt A = biến cố "sản phẩm lấy ra là chính phẩm"

B_i = biến cố "sản phẩm lấy ra do phân xưởng thứ i sản xuất", i = 1, 2, 3.

Từ đó suy ra dãy các biến cố B_1, B_2, B_3 lập thành hệ đầy đủ các biến cố.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3).$$

Theo giả thiết ta có:

$$P(B_1) = 0{,}40;\; P(B_2) = 0{,}25;\; P(B_3) = 0{,}35;$$

$$P(A/B_1) = 0{,}995;\; P(A/B_2) = 0{,}9885;\; P(A/B_3) = 0{,}993.$$

Vậy $P(A) = 0{,}40 \times 0{,}995 + 0{,}25 \times 0{,}9885 + 0{,}35 \times 0{,}993 = 0{,}992675$.

b. Xác suất để sản phẩm do phân xưởng I sản xuất là:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}995}{0{,}9927} \approx 0{,}400.$$

4.3. Sự độc lập của các biến cố

Định nghĩa 1.9. Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu:

$$P(AB) = P(A)\,P(B).$$

Từ định nghĩa này ta có một số tính chất sau:

Tính chất 1. Hai biến cố A và B là độc lập với nhau khi và chỉ khi:

$$P(A/B) = P(A) \text{ hoặc } P(B/A) = P(B).$$

Chứng minh

Điều kiện cần: Nếu A, B là độc lập ta có $P(AB) = P(A)P(B)$. (a)

Mặt khác ta lại có: $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$. (b)

Từ hai đẳng thức (a) và (b) ta rút ra $P(B/A) = P(B)$ và $P(A/B) = P(A)$.

Điều kiện đủ: Từ $P(A/B) = P(A)$ và (b) ta rút ra (a).

Tính chất 2. Hai biến cố A và B là độc lập với nhau thì điều kiện cần và đủ là $A, \overline{B}$ độc lập hoặc $\overline{A}, B$ độc lập hoặc $\overline{A}, \overline{B}$ độc lập.

Chứng minh

Ta chỉ xét 1 trường hợp, phần còn lại coi như bài tập (độc giả tự chứng minh).

Điều kiện cần: Nếu A, B là độc lập thì $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$.

Thực vậy, ta có: $B = \overline{A}B \cup AB$. Vì $\overline{A}B, AB$ là xung khắc nên:

$$P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB)$$

Giả thiết A, B độc lập ta suy ra:

$$P(B) = P(\overline{A}B) + P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow P(\overline{A}B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A}).$$

Vậy $\overline{A}, B$ là độc lập.

Điều kiện đủ: Nếu $\overline{A}, B$ là độc lập nghĩa là $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$ ta suy ra A, B độc lập. Thực vậy:

Từ đẳng thức $P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB)$ ta có:

$$P(AB) = P(B) - P(\overline{A}B) = P(B) - P(\overline{A})P(B)$$
$$= (1 - P(\overline{A}))P(B) = P(A)P(B).$$

Điều đó chứng tỏ rằng A, B là độc lập.

Định nghĩa 1.10. Ba biến cố A, B, C được gọi là độc lập (độc lập trong toàn thể) nếu chúng thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $P(AB) = P(A)P(B)$;

2. $P(AC) = P(A)P(C)$;

3. $P(BC) = P(B)P(C)$;

4. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

Ta có thể phát biểu như sau:

Ba biến cố A, B, C được gọi là độc lập với nhau nếu ta lấy ra một dãy con bất kỳ các biến cố trong ba biến cố A, B, C thì xác suất của tích các biến cố đó bằng tích các xác suất của từng biến cố.

Định nghĩa được phát biểu bằng câu trên còn đúng cho trường hợp n biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Bằng kí hiệu toán học, ta có thể phát biểu định nghĩa n biến cố độc lập như sau:

Định nghĩa 1.11. n biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ được gọi là độc lập (độc lập trong toàn thể) nếu: $P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i)$ với I bất kỳ thoả mãn:

$$I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}.$$

Định nghĩa 1.12. Dãy n phép thử $G_1, G_2, \dots, G_n$, trong đó mỗi phép thử G_i tương ứng với không gian biến cố sơ cấp $\Omega_i = (A_1, A_2, \dots, A_r)$ được gọi là độc lập với nhau nếu:

$$P(A_{i_1}^1 A_{i_2}^2 \dots A_{i_n}^n) = P(A_{i_1}^1)P(A_{i_2}^n)\dots P(A_{i_n}^n),$$

trong đó $A_{i_1}^1$ là biến cố bất kỳ trong r biến cố $A_1, A_2, \dots, A_r$ ứng với phép thử G_1.

....

$A_{i_n}^n$ là biến cố bất kỳ trong r biến cố $A_1, A_2, \dots, A_r$ ứng với phép thử G_n.

Ví dụ:

• Gieo ngẫu nhiên đồng thời 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất, được xem như tiến hành 2 phép thử độc lập.

• Bắn ngẫu nhiên liên tiếp độc lập 10 viên đạn vào mục tiêu được xem như thực hiện 10 phép thử độc lập.

• Phỏng vấn ngẫu nhiên 5 em học sinh liên tiếp. Phỏng vấn được xem như tiến hành 1 phép thử. Các lần phỏng vấn là độc lập. Vậy 5 lần phỏng vấn (mỗi lần 1 em) được xem như tiến hành 5 phép thử độc lập.

Chú ý. Nếu dãy n biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ là độc lập trong toàn thể thì đôi một chúng độc lập với nhau.

Ngược lại, nếu dãy biến cố trên từng đôi một độc lập với nhau thì nói chung chúng không độc lập trong toàn thể.

Ví dụ 1.19. Gieo đồng thời 2 đồng tiền cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố đồng tiền thứ nhất xuất hiện mặt sấp, B là biến cố đồng tiền thứ hai xuất hiện mặt ngửa, C là biến cố cả hai đồng tiền cùng xuất hiện mặt sấp hoặc ngửa. Xét tính độc lập của 3 biến cố A, B, C.

Giải:

Ta nhận thấy: $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(b) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{1}{2}$.

Vì hai đồng tiền gieo độc lập với nhau nên A và B độc lập, nghĩa là:

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Gọi C_1 là biến cố "cả hai đồng tiền cùng xuất hiện mặt sấp"

và C_2 là biến cố "cả hai đồng tiền cùng xuất hiện mặt ngửa".

Ta có: $C = C_1 \cup C_2$.

Vậy $AC = AC_1 \cup AC_2$.

Vì AC_1 và AC_2 là xung khắc với nhau nên: $P(AC) = P(AC_1) + P(AC_2)$.

AC_2 không thể xảy ra. Do đó $P(AC_2) = 0$.

Từ đó suy ra $P(AC) = P(AC_1) = P(C_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Vậy $P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4}$

và $P(AB) = P(A)P(B)$;

$P(AC) = P(A)P(C)$;

$P(BC) = P(B)P(C)$.

Điều đó có nghĩa là từng đôi một trong 3 biến cố A, B, C là độc lập. Song biến cố tích ABC là biến cố không có thể, $P(ABC) = 0$.

Mặt khác $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Từ đó suy ra $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$, nghĩa là A, B, C không độc lập trong toàn thể.

5. DÃY PHÉP THỬ BERNOULLI, XÁC SUẤT NHỊ THỨC

Định nghĩa 1.13. Dãy phép thử $G_1, G_2, \ldots, G_n$ mà trong mỗi phép thử tương ứng với không gian biến cố sơ cấp có 2 biến cố A và $\overline{A}$ được gọi là dãy phép thử Bernoulli nếu thoả mãn các điều kiện sau:

a. Dãy phép thử đó là độc lập;

b. Xác suất để biến cố A xảy ra trong mọi phép thử là không đổi và bằng p.

Bài toán. Tìm xác suất để trong dãy n phép thử Bernoulli biến cố A xuất hiện đúng k lần.

Giải:

Xét biến cố tích của n biến cố dạng: $AA\bar{A}\bar{A}...A\bar{A}$ (1.4)

Trong tích này có k nhân tử A và (n – k) nhân tử $\bar{A}$. Mỗi biến cố trong tích (1.4) lấy từ các phép thử khác nhau trong n phép thử.

Ta có: $P(AA\bar{A}\bar{A}...A\bar{A}) = P(A)P(A)P(\bar{A})P(\bar{A})...P(A)P(\bar{A})$

$$= P(A)^k P(\bar{A})^{n-k} = P(A)^k(1 - P(A))^{n-k}$$
$$= p^k(1 - p)^{n-k}.$$

Ta nhận thấy rằng: biến cố "trong dãy n phép thử, biến cố A xuất hiện đúng k lần" bằng tổng của C_n^k các biến cố tích dạng (1.4) xung khắc từng đôi. Mỗi hạng tử của tổng này đều có xác suất như nhau và bằng $p^k(1-p)^{n-k}$.

Vậy nếu kí hiệu xác suất phải tìm là $P_n(k)$ thì ta có:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n. \qquad (1.5)$$

Nếu đặt q = 1 – p thì $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Xác suất cho dưới dạng (1.5) được gọi là xác suất nhị thức.

Ví dụ 1.20. Gieo ngẫu nhiên liên tiếp 10 lần 1 đồng tiền cân đối và đồng chất. Tìm xác suất để:

a. Có đúng hai lần xuất hiện mặt sấp.

b. Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp.

Giải:

a. 10 lần gieo 1 đồng tiền được xem như tiến hành dãy 10 phép thử Bernoulli. Xác suất xuất hiện mặt sấp trong mọi lần gieo không đổi và bằng $p = \frac{1}{2}$. Theo công thức xác suất nhị thức ta có:

$$P_{10}(k) = C_{10}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-k} = C_{10}^{k} \times \frac{1}{2^{10}}.$$

Khi k = 2 ta có: $P_{10}(2) = C_{10}^{2} \times \frac{1}{2^{10}}$

b. $P[k \geq 1] = 1 - P[k = 0]$

và $\quad P[k = 0] = C_{10}^{0} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{2^{10}}.$

Vậy xác suất phải tìm trong câu b là:

$$P[k \geq 1] = 1 - \frac{1}{2^{10}}.$$

Ví dụ 1.21. Một bà mẹ sinh 2 người con, mỗi lần sinh 1 con. Giả sử xác suất sinh con trai là 0,5. Tìm xác suất để trong 2 người con đó:

a. Có đúng 1 con trai.

b. Có 2 con trai.

c. Không có con trai.

Từ kết quả đó rút ra nhận xét gì?

Giải:

Về mặt sinh học, người ta chứng minh được giới tính của trẻ em trong các lần sinh là độc lập. Vì vậy ta có thể xem 2 lần sinh như là tiến hành 2 phép thử Bernoulli. Xác suất sinh con trai trong mọi lần sinh là không đổi và bằng p = 0,5.

Theo công thức xác suất nhị thức ta có:

$$P_2(k) = C_2^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2-k} = C_2^{k} \times \frac{1}{4}.$$

a. Với k = 1 ta có: $P_2(1) = C_2^1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

b. Với k = 2 ta có: $P_2(2) = C_2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

c. Với k = 0 ta có: $P_2(0) = C_2^0 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Từ kết quả trên ta thấy xác suất để trong hai người con có một con trai và một con gái là lớn nhất $\left(= \frac{1}{2}\right)$, điều đó có nghĩa là trong số những gia đình có hai con thì số gia đình có một con trai, một con gái là đông hơn cả.

Ví dụ 1.22. Một lô hàng chứa rất nhiều sản phẩm với tỉ lệ phế phẩm p = 0,02. Cần phải lấy một mẫu với cỡ bằng bao nhiêu, sao cho xác suất để có ít nhất một phế phẩm trong mẫu đó không bé hơn r = 0,95.

Giải:

Gọi A là biến cố "trong mẫu có ít nhất một phế phẩm". Gọi n là cỡ mẫu phải tìm. Đặt q = 1 – p.

Ta có: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - C_n^0 p^0 q^n = 1 - q^n \geq r = 0{,}95$.

Từ đó suy ra $(0{,}98)^n \leq 0{,}05$.

$$n \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}98)}.$$

Bây giờ ta tạm thời cố định n và cho k biến thiên từ 0 đến n để khảo sát sự biến thiên của xác suất $P_n(k)$. Muốn vậy, ta xét tỉ số:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{(n-k)p}{(k+1+q} \geq 1.$$

Ta suy ra $(n-k)p \geq kq + q$ hay $k \leq np - q$.

Điều đó có nghĩa là xác suất $P_n(k)$ tăng khi k tăng từ 0 đến $np - q$.

Tương tự ta suy ra $\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)} < 1$ với những $k > np - q$.

Từ đó suy ra khi k tăng từ $np - q$ đến n thì xác suất $P_n(k)$ lại giảm. Ta nhận thấy rằng khi $k = np - q$ thì $\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = 1$, nghĩa là $P_n(k+1) = P_n(k)$. Song k chỉ nhận giá trị nguyên.

Vậy:

- Nếu $np - q$ là số nguyên thì k có 2 giá trị $k_0 = np - q$ và $k_1 = np - q + 1$ mà tại đó xác suất $P_n(k)$ đạt cực đại.

- Nếu $np - q$ là không nguyên thì k có 1 giá trị $k_0 = [np - q] + 1$ mà tại đó xác suất $P_n(k)$ đạt cực đại; trong đó [a] kí hiệu là phần nguyên của a.

Ví dụ 1.23. Một xạ thủ bắn ngẫu nhiên độc lập 14 viên đạn vào 1 mục tiêu với xác suất trúng đích của mỗi viên đạn là 0,2. Tìm số viên đạn trúng đích với khả năng lớn nhất.

Giải:

Xem việc bắn 14 viên đạn độc lập vào 1 mục tiêu như là tiến hành một phép thử Bernoulli. Xác suất trúng đích của mỗi viên đạn là $p = 0{,}2$.

Ta nhận thấy $np - q = 14.0{,}2 - 0{,}8 = 2$ là số nguyên. Vậy có 2 giá trị $k_0 = 2$ và $k_1 = 3$ để xác suất $P_n(k)$ đạt cực đại, nghĩa là số viên đạn trúng đích là 2 hoặc 3 là có khả năng nhất.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1. Ta kiểm tra theo thứ tự một lô hàng gồm n sản phẩm. Các sản phẩm đều thuộc một trong hai loại tốt hoặc xấu. Kí hiệu A_k, k = 1, 2,.., n là biến cố sản phẩm kiểm tra thứ k thuộc loại xấu.

Viết bằng kí hiệu các biến cố sau:

a. Cả n sản phẩm đều xấu.

b. Có ít nhất một sản phẩm xấu.

c. m sản phẩm kiểm tra đầu là tốt, còn các sản phẩm còn lại là xấu.

d. không gian biến cố sơ cấp có mấy phần tử.

2. Chứng minh các hệ thức:

a. $A \setminus B = A\overline{B}$;

b. $\overline{A}B \cup A\overline{B} \cup AB = \overline{\overline{A}\overline{B}}$.

3. Bắn vào một bia (Số lần bắn không hạn chế) cho tới khi đạn trúng bia thì thôi bắn. Giả sử mỗi lần bắn chỉ có hai khả năng trúng bia (biến cố A) hoặc chệch bia $(\overline{A})$.

a. Hãy mô tả không gian biến cố sơ cấp.

b. Hãy nêu một hệ đầy đủ các biến cố (hoặc nhóm đầy đủ các biến cố).

4. Một dụng cụ điện tử gồm 3 bóng đèn loại I và 4 bóng đèn loại II Gọi A_k (k = 1, 2, 3) là biến cố chỉ bóng đèn loại I thứ k tốt, còn B_j (j = 1, 2, 3, 4) là bóng đèn loại II thứ j tốt.

Dụng cụ tiếp tục làm việc nếu có ít nhất 1 bóng đèn loại I tốt và không ít hơn ba bóng đèn loại II tốt.

a. Hãy biểu diễn biến cố C là biến cố chỉ dụng cụ vẫn làm việc được qua các A_k và B_j và các biến cố đối của chúng.

b. Biểu diễn biến cố D là biến cố có một và chỉ một bóng đèn loại I tốt và có đúng 2 bóng đèn loại II tốt.

5. Cho 2 biến cố A, B. Xét các biến cố A, $\overline{A}$, $\overline{A \cup B}$.

a. Các biến cố đó có xung khắc từng đôi không?

b. Các biến cố đó có lập nên một hệ đầy đủ các biến cố không?

c. Các biến cố $A \backslash B$, AB, $\overline{A}B$, $A \cup B$ có lập thành hệ đầy đủ không?

6. Chọn ngẫu nhiên một công nhân trong số các công nhân có mặt ở xí nghiệp. Gọi A là biến cố xảy ra khi người công nhân được chọn là nam; B là biến cố người công nhân được chọn ở trong khu tập thể; C là biến cố người công nhân được chọn không hút thuốc lá.

a. Hãy mô tả biến cố $AB\overline{C}$.

b. Với điều kiện nào ta có: $A\overline{B}C = A$?

c. Khi nào ta có $C = \overline{A}$?

7. Cho 3 biến cố A, B, C. Viết biểu thức chỉ biến cố:

a. Chỉ có A xảy ra.

b. A và B xảy ra nhưng C không xảy ra.

c. Cả ba biến cố cùng xảy ra.

d. Có ít nhất một trong ba biến cố A, B, C xảy ra.

e. Có ít nhất hai biến cố cùng xảy ra.

g. Có một và chỉ một trong ba biến cố A, B, C xảy ra.

h. Chỉ có hai trong ba biến cố đó xảy ra.

i. Không có biến cố nào trong ba biến cố đó xảy ra.

k. Có không quá 2 biến cố trong ba biến cố đó xảy ra.

8. Có 5 cuốn sách khác nhau A, B, C, D, E đặt trên giá sách. Rút lần lượt (không hoàn lại) 3 cuốn.

a. Không gian biến cố sơ cấp có mấy phần tử.

b. Số biến cố thuận lợi cho biến cố rút được cuốn sách A và biến cố không rút được cuốn sách A là bao nhiêu?

c. Có mấy biến cố sơ cấp thuận lợi cho biến cố rút được cả hai cuốn sách A và C?

9. Người mẹ sinh 2 người con (mỗi lần sinh 1 con hoặc trai hoặc gái).

a. Không gian biến cố sơ cấp có mấy phần tử?

b. Có bao nhiêu biến cố sơ cấp thuận lợi cho biến cố 2 con có một con trai và một con gái?

Bài tập sử dụng định nghĩa xác suất

10. Một lô hàng 1000 sản phẩm, trong đó có 30 sản phẩm xấu. Lấy hú hoạ 1 sản phẩm từ lô hàng. Tìm xác suất để cho sản phẩm lấy ra là tốt.

11. Một hộp chứa 30 bi trắng, 7 bi đỏ và 15 bi xanh. Một hộp khác chứa 10 bi trắng, 6 bi đỏ và 9 bi xanh. Ta lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 bi. Tìm xác suất để 2 bi rút ra cùng màu.

12. Gieo đồng thời 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tìm xác suất sao cho:

a. Tổng số chấm ở mặt trên hai con xúc xắc bằng 6.

b. Hiệu số chấm ở mặt trên hai con xúc xắc có trị số tuyệt đối bằng 3.

c. Số chấm ở mặt trên hai con xúc xắc không bằng nhau.

13. Một lô hàng có 50 sản phẩm trong đó có 40 sản phẩm tốt, 10 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng 8 sản phẩm. Tìm xác suất để trong 8 sản phẩm lấy ra có đúng 5 sản phẩm tốt.

14. 12 hành khách lên ngẫu nhiên 3 toa tầu. Tìm xác suất để:

a. Toa thứ nhất có đúng 3 hành khách.

b. Mỗi toa có 4 hành khách.

15. Một khoá chữ lập nên bởi 6 vành ghép liên tiếp nhau quay quanh một trục. Mỗi vành đều chia thành 10 phần bằng nhau, trên mỗi phần có ghi 1 chữ số. Khoá được mở khi mỗi vành đặt đúng một vị trí đã xác định trước.

Tìm xác suất để mở được khoá. (Giả sử các chữ số được lắp ghép một cách tuỳ ý).

16. Một loạt vé xổ số với tổng số tiền vé là n đồng, giá mỗi vé là 300 đồng. Số vé trúng thưởng loại q_1 đồng là m_1, loại q_2 đồng là m_2 ($q_1 > q_2$).

a. Tìm xác suất trúng thưởng không quá q_1 đồng của 1 vé.

b. Tìm xác suất trúng thưởng q_2 đồng của 1 vé.

17. Một khách sạn có 6 phòng phục vụ khách, nhưng có tất cả 10 khách đến xin nghỉ trọ, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Khách sạn phục vụ theo nguyên tắc "ai đến trước phục vụ trước và mỗi phòng nhận 1 người".

a. Tìm xác suất để cho cả 6 nam đều được nghỉ trọ.

b. Tìm xác suất để 4 nam và 2 nữ được nghỉ trọ.

c. Tìm xác suất sao cho ít nhất có 2 trong 4 nữ được nghỉ trọ.

Xác suất hình học

18. Cho một hình vuông cạnh a. Lấy ngẫu nhiên một điểm M trong hình vuông đó. Tìm xác suất để điểm M rơi vào hình tròn nội tiếp hình vuông đó.

19. Trên đường tròn tâm O bán kính r người ta lấy 1 điểm A cố định.

a. Lấy ngẫu nhiên điểm M trên đường tròn đó. Tìm xác suất để khoảng cách từ M đến A không vượt quá r.

b. Lấy ngẫu nhiên điểm N trong hình tròn đó. Tìm xác suất để khoảng cách từ N đến A không vượt quá r.

20. Cắt ngẫu nhiên đoạn dây dài 1 mét thành 3 đoạn. Tìm xác suất để từ ba đoạn đó ta dựng được một tam giác.

21. Các hệ số a, b, c của các phương trình:

a. $x^2 + ax + b^2 = 0$

b. $(a + 1)x^2 + 2bx - a + 1 = 0$

được lấy ngẫu nhiên giá trị trong đoạn $[-1, 1]$. Tìm xác suất để mỗi phương trình trên có nghiệm thực.

22. Trên đoạn thẳng OA có độ dài s của trục Ox, đặt hú hoạ hai điểm B(OB = x) và C(OC = y). Tìm xác suất sao cho độ dài BC bé hơn $\frac{s}{2}$.

Bài tập về phần xác suất tổng, tích, xác suất điều kiện

23. Bắn 3 viên đạn độc lập và cùng 1 bia. Xác suất trúng đích của viên thứ nhất, viên thứ hai và viên thứ ba tương ứng bằng 0,3; 0,5; 0,7.

a. Tìm xác suất sao cho trong 3 viên đạn có đúng 1 viên trúng đích.

b. Tìm xác suất để có ít nhất 1 viên đạn trúng đích.

24. Một lô hàng gồm 150 sản phẩm có chứa 6% phế phẩm. Người ta dùng phương pháp chọn mẫu để kiểm tra lô hàng và quy ước rằng: kiểm tra lần lượt 6 sản phẩm, nếu có ít nhất 1 trong 6 sản phẩm đó là phế phẩm thì loại lô hàng. Tìm xác suất để chấp nhận lô hàng.

25. Bắn liên tiếp vào một mục tiêu cho đến khi nào có 1 viên đạn đầu tiên rơi vào mục tiêu thì ngừng bắn. Tìm xác suất sao cho phải bắn đến viên thứ 6. Biết rằng xác suất trúng đích của mỗi viên đạn là 0,2 và các lần bắn là độc lập.

26. Một máy bay gồm 3 bộ phận có tầm quan trọng khác nhau. Muốn bắn rơi được máy bay thì chỉ cần có 1 viên đạn trúng vào bộ phận thứ nhất hoặc 2 viên đạn trúng bộ phận thứ hai hoặc ba viên đạn trúng vào bộ phận thứ ba. Xác suất để 1 viên đạn trúng bộ phận

thứ I, thứ II, thứ III, với điều kiện đạn đó đã trúng máy bay, tương ứng bằng 0,15; 0,30; 0,55. Tìm xác suất để máy bay bị bắn rơi khi:

a. Có 1 viên đạn trúng máy bay.

b. Có 2 viên đạn trúng máy bay.

c. Có 3 viên đạn trúng máy bay.

d. Có 4 viên đạn trúng máy bay.

27. Một nhà máy sản xuất bóng đèn. Máy A sản xuất 25% số bóng đèn, máy B sản xuất 35% số bóng đèn, còn máy C sản xuất 40%. Tỉ lệ sản phẩm hỏng của các máy đó trên tổng số sản phẩm do nhà máy đó sản xuất tương ứng bằng 5% (máy A), 4% (máy B), 2% (máy C). Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm thì được sản phẩm xấu. Tìm xác suất để cho sản phẩm đó là do:

a. Máy A sản xuất.

b. Máy B sản xuất.

c. Máy C sản xuất.

28. Hai đấu thủ A và B thi đấu một số lần, trong mỗi lần hoặc đấu thủ A thắng, hoặc đấu thủ B thắng. Xác suất thắng của A trong mỗi lần đều bằng p. Trước lúc vào thi đấu đều có quy ước là mỗi đấu thủ phải thắng mấy lần mới được xem là thắng cuộc. Trò chơi bị huỷ nếu không có đấu thủ nào thắng đủ số lần quy định để thắng cuộc.

a. Tìm xác suất để A thắng cuộc, nếu giả sử A cần có 2 lần thắng, còn B phải có 3 lần thắng.

b. Tìm xác suất thắng cuộc của A, nếu giả sử A cần thắng m lần, còn B cần n lần thắng.

29. Một học sinh khi vào thi, chỉ thuộc 18 trong 25 câu hỏi thi. Tìm xác suất để học sinh trả lời được 3 câu hỏi mà học sinh đó rút được.

30. Ba cậu bé chơi trò chơi gieo đồng tiền liên tiếp. Ai gieo được mặt sấp đầu tiên sẽ thắng cuộc. Tìm xác suất thắng cuộc của mỗi cậu bé.

Bài tập về công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

31. Giả sử có 3 kiện hàng với số sản phẩm tốt tương ứng của mỗi kiện là 20, 15, 10. Lấy ngẫu nhiên 1 kiện hàng (giả sử 3 kiện có cùng khả năng bị rút) rồi từ đó lấy hú họa 1 sản phẩm. Biết rằng 3 kiện hàng đó đều có 20 sản phẩm.

a. Tìm xác suất để sản phẩm chọn ra là sản phẩm tốt.

b. Giả sử sản phẩm chọn ra là tốt. Tìm xác suất để sản phẩm đó thuộc kiện hàng thứ 2.

32. Với 3 kiện hàng như trong bài 31, ta chọn ngẫu nhiên 1 kiện và từ kiện đó lấy hú hoạ 1 sản phẩm thấy là sản phẩm tốt. Trả sản phẩm đó lại kiện hàng vừa lấy ra, sau đó lại lấy tiếp 1 sản phẩm thì được sản phẩm tốt. Tìm xác suất để các sản phẩm được lấy từ kiện hàng thứ 3.

33. Tỉ số ô tô tải và ô tô con đi qua đường có trạm bơm dầu là $\frac{5}{2}$. Xác suất để cho 1 ô tô tải qua đường được nhận dầu là 0,1; xác suất để cho 1 ô tô con qua đường được nhận dầu là 0,2. Có một ô tô đến trạm để nhận dầu. Tìm xác suất để ô tô đó là ô tô tải.

34. Có 2 kiện hàng gồm 12 sản phẩm và 10 sản phẩm. Trong mỗi kiện hàng có 1 sản phẩm xấu. Lấy hú hoạ 1 sản phẩm ở kiện thứ nhất cho vào kiện hàng thứ hai, rồi từ kiện hàng thứ hai rút ngẫu nhiên 1 sản phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm rút ra lần thứ hai là sản phẩm xấu.

35. Cho n hộp bi, mỗi hộp chứa m bi trắng và k bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 1 bi từ hộp thứ nhất và bỏ vào hộp thứ hai sau đó lấy ngẫu nhiên 1 bi ở hộp thứ hai bỏ vào hộp thứ ba,..., làm như thế cho tới hộp thứ n.

Tìm xác suất sao cho viên bi cuối cùng rút ra từ hộp thứ n là bi trắng.

36. Tiến hành 3 phép thử độc lập. Xác suất xuất hiện biến cố A trong mỗi phép thử là p = 0,1. Xác suất xuất hiện biến cố B tuỳ thuộc vào số lần xuất hiện của A. Nếu A xuất hiện i lần (i = 1, 2, 3) thì xác suất xuất hiện tương ứng của B là $p_i = 0,i$; còn nếu A không xuất hiện thì B không xảy ra.

Tìm số (chỉ số lần xuất hiện của xuất hiện của biến cố A) có khả năng nhất nếu giả sử rằng biến cố B đã xuất hiện.

Phép thử Bernoulli – công thức xác suất nhị thức

37. Một lô hàng chứa rất nhiều sản phẩm với tỉ lệ phế phẩm p = 0,02. Cần phải lấy một mẫu với cỡ bằng bao nhiêu, sao cho xác suất để có ít nhất một phế phẩm trong mẫu đó không bé hơn R = 0,95.

38. Một gia đình có 3 con (mỗi lần sinh 1 con). Tìm xác suất sao cho trong số đó:

a. Có 2 con trai.

b. Có không quá 1 con trai.

c. Không ít hơn 1 con trai. Giả sử xác suất sinh con trai bằng 0,5.

39. Tỉ lệ học sinh trong trường bị cận thị là 1%. Hỏi cần lấy mẫu cỡ bao nhiêu (chọn bao nhiêu học sinh) sao cho với xác suất không bé hơn 0,95, trong mẫu đó có ít nhất 1 học sinh bị cận thị.

40. Một nữ công nhân quản lí 12 máy dệt. Xác suất để mỗi máy dệt trong khoảng thời gian t cần đến sự chăm sóc của nữ công nhân bằng $\frac{1}{3}$. Tìm xác suất để:

a. Trong khoảng thời gian t có 4 máy cần đến sự chăm sóc của nữ công nhân.

b. Trong khoảng thời gian t số máy cần đến sự chăm sóc của nữ công nhân không bé hơn 3 và không lớn hơn 6.

41. Người ta trồng 2 hàng cây trong đó mỗi hàng có 4 cây. Xác suất của mỗi cây sống là 0,8. Trồng lần thứ I nếu cây nào chết thì trồng lại cây đó. Tìm xác suất để không phải trồng cây quá 2 lần.

42. Bắn độc lập 14 viên đạn vào một mục tiêu với xác suất trúng đích của mỗi viên đạn bằng 0,2.

a. Tìm xác suất để mục tiêu bị phá huỷ nếu biết rằng muốn phá huỷ mục tiêu cần không ít hơn 2 viên đạn trúng đích.

b. Tìm xác suất để mục tiêu bị phá huỷ một phần, tức là chưa bị phá huỷ hoàn toàn mà chỉ bị hư hỏng.

43. Trong một kiện hàng có chứa N sản phẩm. Mỗi sản phẩm trong kiện hàng đó là tốt hoặc xấu với xác suất như nhau và bằng 0,5. Chọn ngẫu nhiên từ kiện hàng đó n sản phẩm (chọn hoàn lại) và thấy có m sản phẩm tốt ($0 \le m \le n$). Xác định xác suất sao cho trong kiện hàng trên có đúng l phế phẩm.

44. Một quả cầu được đánh dấu ở hộp I với xác suất p và ở hộp thứ II với xác suất $1 - p$. Xác suất rút được quả cầu đánh dấu từ hộp chứa quả cầu này bằng P ($P \neq 1$). Rút liên tiếp có hoàn lại n quả cầu từ hai hộp đó. Hỏi cần rút từ mỗi hộp bao nhiêu quả cầu để xác suất rút được quả cầu được đánh dấu, dù chỉ một lần, là lớn nhất.

45. Một tổng đài có liên lạc với 10 địa điểm, ở mỗi địa điểm có đặt một máy điện thoại. Các máy điện thoại này được sử dụng một cách độc lập và thường xuyên như nhau với thời gian trung bình mỗi lần nói chuyện là 6 phút. Tìm xác suất sao cho một trong các máy điện thoại ở các địa điểm đã cho khi cần gọi thì tổng đài đang bận.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – TRẢ LỜI

1. a. $B = A_1A_2...A_n$.

b. $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ biến cố.

c. $C = \overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_m A_{m+1}...A_n$.

d. Không gian biến cố sơ cấp có 2^n phần tử.

2. a. Không gian biến cố sơ cấp gồm các phần tử:

$A, \overline{A}A, \overline{A}\overline{A}A, ..., \overline{A}\overline{A}...\overline{A}A$.

b. Gọi B_1 là biến cố xảy ra khi số lần bắn là lẻ,

và B_2 là biến cố xảy ra khi số lần bắn là chẵn.

B_1, B_2 lập thành hệ đầy đủ các biến cố.

3. a. $C = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\begin{bmatrix}\overline{B}_1B_2B_3B_4 + B_1\overline{B}_2B_3B_4 + \\ B_1B_2\overline{B}_3B_4 + B_1B_2B_3\overline{B}_4 + B_1B_2B_3B_4\end{bmatrix}$

b. $D = \left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\right)\left[B_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4 + ... + \overline{B}_1\overline{B}_2B_3B_4\right]$

4. a. Các biến cố đó xung khắc từng đôi.

b. Chúng lập thành một hệ đầy đủ.

c. Nó lập thành hệ đầy đủ các biến cố.

5. a. $AB\overline{C}$ là biến cố người công nhân được chọn là nam trong khu tập thể không hút thuốc.

b. Khi $A \subset \overline{B}$, $A \subset C$ thì $A\overline{B}C = A$.

c. Các nữ công nhân trong đại hội không hút thuốc: $\overline{A} = C$.

6. a. $A\overline{B}\overline{C}$;

b. $AB\overline{C}$;

c. $A \cup B \cup C$;

d. ABC;

e. $AB \cup AC \cup BC \cup ABC$;

g. $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$;

h. $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$;

i. $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

k. $\overline{ABC}$.

7. a. Có $5 \times 4 \times 3 = 60$ phần tử.

b. $C_1^1 C_4^2 \times 6 = 36$. Có 24 khả năng thuận lợi không rút được A.

c. $C_3^1 \times 6 = 18$ phần tử tương ứng với biến cố rút được cả B và C.

8. a. Không gian biến cố sơ cấp có 4 phần tử.

b. Có 2 biến cố sơ cấp thuận lợi cho biến cố trong 2 người con có 1 người con trai, 1 người con gái.

9. $p = 0,97$.

10. $p = \dfrac{207}{625}$.

11. a. $p = \dfrac{5}{36}$;

b. $p = \dfrac{1}{6}$;

c. $p = \dfrac{5}{6}$.

12. $p = \dfrac{C_{40}^5 \times C_{10}^3}{C_{50}^8}$.

13. a. $p = \dfrac{C_{12}^3 \times 2^9}{3^{12}}$;

b. $p = \dfrac{12!}{(4!)^3.3^{12}}$.

14. $p = \dfrac{1}{10^6}$.

15. a. $p = \dfrac{300(m_1 + m_2)}{n}$;

b. $p = \dfrac{300m_2}{n}$.

16. a. $p = \dfrac{1}{210}$;

b. $p = \dfrac{3}{7}$;

c. $p = \dfrac{37}{42}$.

17. $p = 0{,}785$.

18. a. $p = \dfrac{1}{3}$;

b. $p = 0{,}391$.

19. $p = 0{,}25$.

Hướng dẫn: Gọi độ dài các đoạn cắt là x, y – x, 1 – y với $0 \leq x < y \leq 1$. Từ độ dài 1 cạnh của tam giác nhỏ hơn tổng của hai cạnh kia và tính đối xứng ta suy ra đáp số trên.

20. a. $p = 0,25$;

b. $p = 0,78$.

21. $p = 0,25$.

Hướng dẫn: Gọi (x, y) là tọa độ của điểm M. M có thể chạy tuỳ ý trên hình vuông cạnh s. Những điểm M có tọa độ cần thoả mãn $|y - x| \le \frac{s}{2}$.

Từ đó suy ra: $p = \dfrac{s^2 - \dfrac{s^2}{4}}{s^2} = \dfrac{3}{4}$.

22. a. $p = 0,36$;

b. $p = 0,91$.

23. $p(A) = \frac{141}{150} \times \frac{140}{149} \times \frac{139}{148} \times \frac{137}{146} \times \frac{136}{145}$.

24. $p = (0,8)^5 \times 0.2$.

25. a. p(A/1 viên trúng) = 0,15;

b. p(A/2 viên trúng) = 0,368;

c. p(A/3 viên trúng) = 0,728;

d. p(A/4 viên trúng) = 1.

26. a. $p(A/H) = \frac{25}{69}$;

b. $p(B/H) = \frac{28}{69}$;

c. $p(C/H) = \frac{16}{69}$

H là biến cố "sản phẩm lấy ra là sản phẩm xấu".

27. a. Đặt $q = 1 - p$, $p(A) = p^2(1 + 2q + 3q^2)$;

b. $p(A) = p^m(1 + C_m^1 q + C_{m+q}^2 q^2 + ... + C_{m+n-1}^{m-1} q^{n-1})$.

28. $p = \frac{18}{25} \times \frac{17}{24} \times \frac{16}{23} = \frac{204}{575}$.

29. $p_1 = \frac{4}{7}$; $p_2 = \frac{2}{7}$; $p_3 = \frac{1}{7}$.

30. a. $p(A) = \frac{3}{4}$;

b. $p(B_2 / A) = \frac{1}{3}$.

31. $p(B_3 / A) = \frac{4}{29}$; A là biến cố "các sản phẩm lấy ra đều là tốt".

32. A là biến cố "có 1 ô tô đến nhận dầu".

B_1 là biến cố "ô tô tải đi qua đường có trạm bán dầu".

B_2 là biến cố "ô tô con đi qua đường có trạm bán dầu".

$p(B_1 / A) = \frac{5}{9}$.

33. $p = \frac{13}{132}$.

34. $p = \frac{m}{m + k}$.

35. Áp dụng công thức xác suất toàn phần và Bayes. Đặt B_i là biến cố "A xuất hiện i lần". Do B_0, B_1, B_2, B_3 lập thành hệ đầy đủ các biến cố. So sánh 4 xác suất $p(B_0/B)$, $p(B_1/B)$, $p(B_2/B)$, $p(B_3/B)$. Số có khả năng nhất là 1.

36. $n \ge \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,98)}$.

37. a. $p_1 = C_3^2 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$;

b. $p_2 = C_3^0 \times \dfrac{1}{8} + C_3^1 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}$;

c. $p_3 = 1 - C_3^0 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$.

38. $n \ge 300$.

39. a. $P_{12}(4) \approx 0,238$;

b. $P_{12}(3 \le m \le 6) = 0,751$.

40. A là biến cố "không phải trồng quá 2 lần".

B_i là biến cố "trồng lần thứ I có i cây sống", $i = \overline{0, 8}$.

$$P(A) = \sum_{i=0}^{8} P(B_i)P(A/B_i) = \sum_{i=0}^{8} C_8^i (0,2)^i (0,8)^{8-i} (0,8)^i$$

$$= (0,8)^8 \sum_{i=0}^{8} C_8^i (0,2)^i.$$

41. a. $P_{14}(m \ge 2) \approx \dfrac{73}{91}$;

b. $P_{14}(1) = C_{14}^1 (0,2)(0,8)^{13} \approx \dfrac{2}{13}$.

42. Gọi H_i là biến cố trong N sản phẩm có l phế phẩm.

A là biến cố "trong n sản phẩm có đúng m phế phẩm".

$$P(H_l / A) = \frac{C_N^l \left(\frac{l}{N}\right)^m \left(1-\frac{l}{N}\right)^{n-m}}{\sum_{l=1}^{n+1} C_N^l \left(\frac{l}{N}\right)^m \left(1-\frac{l}{N}\right)^{n-m}}.$$

43. $m = \frac{n}{2} + \frac{\ln\frac{1-p}{p}}{2\ln(1-p)}.$

44. Mỗi máy điện thoại khi gọi được xem như một phép thử Bernoulli với xác suất $p = 0,1$. Xác suất cần tìm là $P_1 = 1 - P_{10}(0) = 0,651$.

45. Xác suất cần tìm là $p = 1 - P_{10}(0) \approx 0,651$.

Chương II

BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ HÀM PHÂN PHỐI

Nội dung chính:

- Khái niệm về biến ngẫu và hàm phân phối.
- Các tính chất của hàm phân phối.
- Sự độc lập của các biên ngẫu nhiên.
- Phân phối xác xuất của hàm của biến ngẫu nhiên.

Những kiến thức chuẩn bị:

- Các kiến thức về giải tích.
- Các kiến thức ở chương I.

1. KHÁI NIỆM BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ HÀM PHÂN PHỐI

1.1. Khái niệm biến ngẫu nhiên

Một trong những khái niệm quan trọng trong lí thuyết xác xuất là khái niệm biến ngẫu nhiên. Trước khi đưa vào định nghĩa chính xác của biến ngẫu nhiên, ta xét một số ví dụ sau đây.

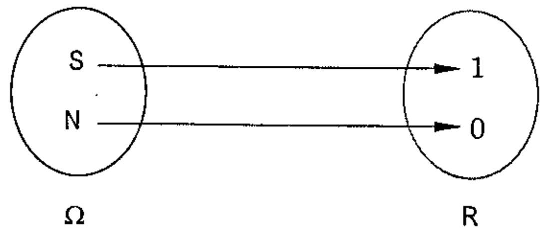
Ví dụ 2.1. Gieo ngẫu nhiên một lần đồng tiền cân đối và đồng chất.

Ta xem 1 lần gieo đồng tiền đó như là tiến hành 1 phép thử ngẫu nhiên. Không gian biến cố sơ cấp tương ứng với phép thử này là $\Omega = \{S, N\}$. Gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp trong một lần gieo đó. Ta thấy rằng X có thể nhận 2 giá trị.

$X = 0$ nếu đồng tiền xuất hiện mặt ngửa;

$X = 1$ nếu đồng tiền xuất hiện mặt sấp.

Điều này có nghĩa là ứng với phần tử N $\in \Omega$ cho số 0 với xác suất $P(\{N\}) = \frac{1}{2}$ và ứng phần tử S $\in\Omega$ cho số 1 với xác xuất $P(\{S\}) = \frac{1}{2}$ trên trục số **R**.



Hình 2. 1

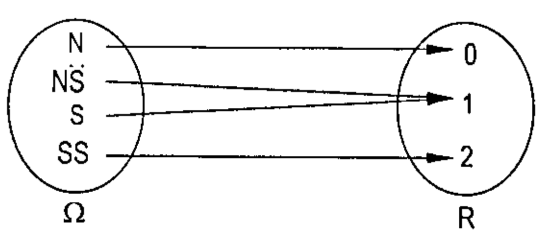
Ví dụ 2.2. Gieo đồng thời 2 đồng tiền cân đối và đồng chất (1 lần). Ta xem lần gieo 2 đồng tiền như thực hiện 1 phép thử. Không gian biến cố sơ cấp ứng với phép thử này là $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$. Kí hiệu X là số mặt sấp xuất hiện khi gieo 2 đồng tiền đó. X có thể nhận 3 giá trị:

X = 1 nếu biến cố SN hoặc NS xảy ra;

X = 0 nếu biến cố NN xảy ra; X = 2 nếu biến cố SS xảy ra.

Điều đó có nghĩa là X nhận giá trị 0 với xác xuất $P[NN] = \frac{1}{4}$; X nhận giá trị 1 với xác xuất $P(\{SN, NS\}) = \frac{1}{2}$ và X = 2 với xác xuất $P(\{SS\}) = \frac{1}{4}$.

Ta có thể biểu diễn dưới hình vẽ sau:



Hình 2.2

Và viết dưới dạng kí hiệu hàm X: $\Omega \to$ **R**.

Qua các ví dụ trên ta thấy đại lượng X liên quan với phép thử ngẫu nhiên mà ứng với mỗi kết quả của phép thử cho 1 số với một xác xuất nào đấy được gọi là giá trị của X. Đại lượng X như thế được gọi là biến ngẫu nhiên.

Bây giờ ta đưa ra định nghĩa chính xác bằng toán học. Giả sử (Ω, F, P) là không gian xác xuất, $\mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$.

Định nghĩa 2.1. Gọi biến ngẫu nhiên, kí hiệu là X, là hàm xác định trên không gian biến cố sơ cấp Ω và nhận giá trị trong **R** sao cho với $x \in \mathbf{R}$ tập hợp $\{\omega : X(\omega) < x\}$ là biến cố ngẫu nhiên (nghĩa là, tập này là phần tử của σ – đại số $\mathcal{F}$).

Biến ngẫu nhiên thường kí hiệu bằng chữ in hoa X, Y, Z... còn giá trị của nó kí hiệu bằng chữ thường x, y, z ...

Dựa trên định nghĩa này, ta chứng minh đại lượng X trong ví dụ 2.1 là biến ngẫu nhiên. Thực vậy:

Đặt $\Omega = \{S, N\}$, F là tập tất cả các tập con của Ω. Bây giờ ta biểu diễn cụ thể tập hợp $\{\omega : X(\omega) < x\}$, $x \in \mathbf{R}$. Vì X chỉ có thể nhận hai giá trị 0 hoặc 1, nên ta có:

$$\{\omega : X(\omega) < x\} = \begin{cases} \varnothing & x \le 0 \\ \{N\} & 0 < x \le 1 \\ \{S, N\} = \Omega & x > 1 \end{cases}$$

Ba tập $\varnothing$, $\{N\}$, Ω đều là tập con của Ω nên chúng là các phần tử của $\mathcal{F}$.

Vậy $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Theo định nghĩa 2.1, X là biến ngẫu nhiên.

Ví dụ 2.2 cũng được chứng minh tương tự.

Suốt giáo trình này ta chỉ xét những biến ngẫu nhiên thoả mãn điều kiện $P[\omega : X(\omega) < +\infty] = 1$.

Ta quan tâm nghiên cứu hai loại biến ngẫu nhiên.

• *Biến ngẫu nhiên rời rạc:* Biến ngẫu nhiên rời rạc là biến ngẫu nhiên chỉ nhận một số hữu hạn hoạc vô hạn đếm được các giá trị.

Trong ví dụ 2.1 và ví dụ 2.2, X là biến ngẫu nhiên rời rạc.

Ví dụ 2.3. Bắn không hạn định vào một mục tiêu. Gọi p là xác xuất bắn trúng đích của mỗi viên đạn. Gọi X là số viên đạn cần bắn để lần đầu tiên có viên trúng đích. Trong trường hợp này X có thể nhận các giá trị 1, 2, 3,..., n,... Theo định nghĩa, X là biến ngẫu nhiên rời rạc.

• *Biến ngẫu nhiên liên tục:* Biến ngẫu nhiên liên tục là biến ngẫu nhiên nhận mọi giá trị trong khoảng (a, b) nào đó, a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$.

Người ta chứng minh được rằng:

Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên thì X + Y, X, Y, kX (k là hằng số), $\frac{X}{Y}$ cũng là các biến ngẫu nhiên.

Hơn nữa, một đa thức của X, a^x ($a > 0$, $a \neq 1$), hàm liên tục h(X) của biến ngẫu nhiên X, cũng là biến ngẫu nhiên.

Nếu (X_n, $n \geq 1$) là dãy các biến ngẫu nhiên thì $\sup_k X_k$, $\inf_k X_k$ cũng là những biến ngẫu nhiên.

1.2. Hàm phân phân phối của biến ngẫu nhiên

Từ ví dụ 2.1 ta có nhận xét sau: Biến cố $\{\omega: X(\omega) < x\}$, thay đổi khi x tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$. Do đó xác xuất của biến cố đó cũng thay đổi theo x. Điều đó có nghĩa là xác xuất của biến cố này phụ thuộc vào x.

Định nghĩa 2.2. Gọi hàm $P[\omega: X(\omega) < x]$, $x \in \mathbf{R}$, là hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X và kí hiệu

$$F(x) = P[\omega: X(\omega) < x],\ x \in \mathbf{R}.$$

Trở lại ví dụ 2.1, hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X là:

$$F(x) = P[\omega : X(\omega) < x] = \begin{cases} P(\varnothing) & \text{với } x \le 0 \\ P(\{N\}) & \text{với } 0 < x \le 1 \\ P(\Omega) & \text{với } x > 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{với } 0 < x \le 1. \\ 1 & \text{với } x > 1 \end{cases}$$

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA HÀM PHÂN PHỐI

2.1. Tính chất 1

Hàm phân phối F(x) là hàm đơn điệu tăng.

Chứng minh

Với $x_1 < x_2$ ta sẽ chứng minh rằng $F(x_1) \le F(x_2)$. Vì $x < x_2$ nên ta có:

$$[\omega : X(\omega) < x_2] = [\omega : X(\omega) < x_1] \cup [\omega : x_1 \le X < x_2].$$

Xét xác suất:

$$P[\omega : X(\omega) < x_2] = P[\omega : X(\omega) < x_1] + P[\omega : x_1 \le X(\omega) < x_2].$$

Suy ra $F(x_2) = F(x_1) + P[\omega: x_1 \le X(\omega) < x_2]$.

Vì xác suất $P[\omega: x_1 \le X(\omega) < x_2] \ge 0$. Bỏ qua số hạng này ta có $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Đó là điều phải chứng minh.

Từ chứng minh tính chất trên ta rút ra công thức:

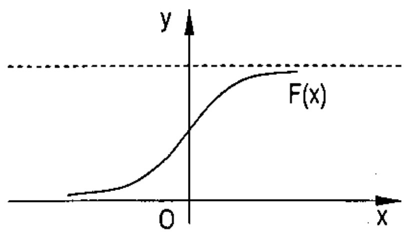
$$P[\omega: a \le X(\omega) < b] = F(b) - F(a).$$

Cho $b \to a$ ta có: $P[X(\omega) = a] = F(a + 0) - F(a)$.

2.2. Tính chất 2

Hàm phân phối F(x) là hàm liên tục bên trái, nghĩa là

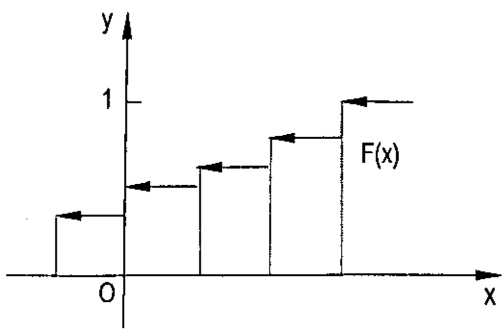
$$\lim_{x \to a-0} F(x) = F(a)$$



Hình 2.3

2.3. Tính chất 3

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ và $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$



Hình 2.4

Chú ý. Người ta chứng minh được rằng: Nếu hàm F(x) nào đó có 3 tính chất trên thì tồn tại biến ngẫu nhiên X mà hàm phân phối của nó trùng với hàm F(x).

Trở về ví dụ 2.2, ta tìm hàm phân phối của X và tính xác suất $P[-1 \le X < 1]$.

Ta có Ω = {SS, SN, NS, NN}. Vì 2 đồng tiền cân đối và đồng chất nên khả năng xảy ra các biến cố SS, SN, NS, NN là như nhau. Xác suất của mỗi biến cố đó đều bằng $\frac{1}{4}$.

$$\text{Ta có: } \{\omega: X(\omega) < x\} = \begin{cases} \varnothing & \text{với } x \le 0 \\ \{NN\} & \text{với } 0 < x \le 1 \\ \{NN, SN, NS\} & \text{với } 1 < x \le 2 \\ \Omega & \text{với } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } F(x) = P[\omega: X(\omega) < x] = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ \frac{1}{4} & \text{với } 0 < x \le 1 \\ \frac{3}{4} & \text{với } 1 < x \le 2 \\ 1 & \text{với } x > 2 \end{cases}$$

Xác suất phải tìm là $P[-1 \le X < 1] = F(1) - F(-1) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 2.4. Giả sử biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối là:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ x & \text{với } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{với } x > 1 \end{cases}$$

Tìm xác suất $P[-1 \le X < 1/2]$, $P[0 \le X < 1]$.

Giải:

Theo công thức $P[a \le X < b] = F(b) - F(\alpha)$

Ta có $P[-1 \le X < \frac{1}{2}] = F(\frac{1}{2}) - F(-1) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

và $P[0 \le X < 1] = F(1) - F(0) = 1 - 0 = 1$.

Ví dụ 2.5. Giả sử hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{với } x > 0 \end{cases}$$

Tìm xác suất $P[-1 \le X < 1]$.

Giải:

Ta có $P[-1 \le X < 1] = F(1) - F(-1) = 1 - e^{-1} - 0 = 1 - e^{-1}$.

3. PHÂN PHỐI RỜI RẠC VÀ PHÂN PHỐI LIÊN TỤC TUYỆT ĐỐI

3.1. Phân phối rời rạc

Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị x_1, x_2,..., x_n,... với xác suất tương ứng:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
$P[X = x_i]$	p_1	p_2	...	p_n	...

với $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ (2.1)

Bảng trên được gọi là bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X hay gọi tắt là phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X. Nếu ta sắp xếp các giá trị x_1, x_2,..., x_n,... theo thứ tự tăng dần, ví dụ.

Nếu ta sắp xếp các giá trị x_1, x_2,..., x_n,... theo thứ tự tăng dần, ví dụ $x_1 < x_2 <... < x_n <...$ thì hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le x_1 \\ p_1 & \text{với } x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{với } x_2 < x \le x_3 \\ \dots\dots & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k & \text{với } x_k < x \le x_{k+1} \\ \dots\dots\dots & \end{cases} \quad (2.2)$$

Tổng quát ta có thể viết: $F(x) = \sum_{x_k < x} p_k$; $x \in \mathbf{R}$.

Ví dụ 2.6. Cho phân phối xác suất của X là:

X	0	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Viết hàm phân phối của X.

Giải:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{với } 0 < x \le 1. \\ 1 & \text{với } x > 1 \end{cases}$$

Ví dụ 2.7. Một bà mẹ sinh 2 con, mỗi lần sinh 1 con. Giả sử xác suất sinh con trai bằng 0,5. Gọi X là số lần sinh con trai trong 2 con đó. Tìm phân phối xác suất của X. Viết hàm phân phối của X.

Giải:

Xem việc sinh 2 người con như trên là tiến hành dãy 2 phép thử Bernoulli. Xác suất sinh con trai bằng 0,5.

Theo công thức xác suất nhị thức ta có:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Ở đây n = 2, p = 0,5.

Ta có: $P_2(k) = C_2^k \,.\, 0{,}5^k.(1 - 0{,}5)^{2-k} = C_2^k \times \dfrac{1}{4}$.

Với $k = 0$ ta có: $P_2(0) = C_2^0 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Với $k = 1$ ta có: $P_2(1) = C_2^1 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Với $k = 2$ ta có: $P_2(2) = C_2^2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Bảng phân phối xác suất của X là:

X	0	1	2
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Hàm phân phối xác suất của X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{với } 0 < x \le 1 \\ \dfrac{3}{4} & \text{với } 1 < x \le 2 \\ 1 & \text{với } x > 2 \end{cases}$$

3.2. Một số phân phối rời rạc quan trọng

3.2.1. Phân phối nhị thức

Định nghĩa 2.3. Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối nhị thức với tham số (n, p) nếu phân phối xác suất của nó có dạng:

$$P[X = k] = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p; \; k = 0, 1, \ldots, n \qquad (2.3)$$

Hàm phân phối của X là $F(x) = \sum\limits_{k<x} C_n^n p^k q^{n-k}, \; x \in \mathbf{R}$.

Ví dụ 2.8. Bắn 5 viên đạn độc lập với nhau vào một mục tiêu (trong cùng một điều kiện như nhau). Xác suất trúng đích các lần bắn là như nhau và bằng 0,2. Gọi X là số viên đạn trúng mục tiêu. Tìm phân phối xác suất của X.

Muốn bắn hỏng bia phải có ít nhất ba viên đạn bắn trúng đích. Tìm xác suất để bia hỏng.

Giải:

Bắn 5 viên đạn độc lập vào 1 mục tiêu được xem như thực hiện dãy 5 phép thử Bernoulli với xác xuất trúng đích của mỗi viên đạn là p = 0,2.

Theo công thức xác suất nhị thức ta có

$$P_5(k) = C_5^k (0,2)^k (0,8)^{5-k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Đây chính là phân phối xác suất của X.

Biến cố "bia bị hỏng" là: $[k \ge 3]$

Vậy xác suất để bia bị hỏng là:

$$P[k \geq 3] = P[k = 3] + P[k = 4] + P[k = 5]$$

$$= C_5^3(0,2)^3(0,8)^2 + C_5^4(0,2)^4(0,8) + C_5^5(0,2)^5$$

$$= 0,0512 + 0,0064 + 0,0003 = 0,0579.$$

Ví dụ 2.9. Gieo ngẫu nhiên 1000 hạt đậu tương. Xác suất nảy mầm của mỗi hạt là p = 0,8. Gọi X là số hạt nảy mầm trong 1000 hạt đó. Tìm phân phối xác xuất của X.

Giải:

Gieo 1000 hạt coi như tiến hành dãy 1000 phép thử Bernoulli xác xuất nảy mầm của mỗi hạt p = 0,8.

Theo công thức xác suất nhị thức ta có:

$$P[X = k] = C_{1000}^{k}(0,8)^k(0,2)^{1000-k}, \; k = 0, 1, 2,..., 1000.$$

Đây là phân phối xác suất của X.

Ví dụ 2.10. Một lô sản phẩm gồm 200 sản phẩm, tỉ lệ phế phẩm là 0,05. Lấy ngẫu nhiên liên tiếp (có hoàn lại) 30 sản phẩm. Tìm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X chỉ số sản phẩm tốt trong 30 sản phẩm lấy ra.

Giải:

Lấy ngẫu nhiên liên tiếp có hoàn lại 30 sản phẩm từ lô hàng được xem như thực hiện dãy gồm 30 phép thử Bernoulli. Vì lấy có hoàn lại nên tổng số sản phẩm trong lô hàng trong các lần lấy luôn không thay đổi.

Do đó xác suất để một sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt là 1 – 0,05 = 0,95 trong mọi lần.

Theo công thức xác xuất nhị thức ta có:

$$P[X = k] = C_{30}^k(0,95)^k(0,05)^{30-k}, \; k = 0, 1, 2,..., 30.$$

Đây chính là phân phối xác suất của X.

3.2.2. Phân phối Poisson

Định nghĩa 2.4. Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối Poisson với tham số $\lambda > 0$ nếu phân phối của nó có dạng:

$$P[X = k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.4)$$

Hàm phân phối của X là:

$$F(x) = \sum_{k<x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ x \in \mathbf{R}.$$

Sự liên hệ giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson

Định lí 2.1. Nếu $n.p \to \lambda$, $p \to 0$ khi $n \to \infty$ thì

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \text{ tiến tới } \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \text{ khi } n \to \infty$$

Chứng minh

Đặt $np = \lambda$; ta suy ra $p = \frac{\lambda}{n}$.

Ta có $P_n(k) = P[X = k] = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Nếu giữ λ không đổi thì $p \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó ta có:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Định lí được chứng minh.

Từ định lí trên ta suy ra công thức xấp xỉ.

Với n khá lớn và với xác xuất p khá bé ta có:

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ trong đó } \lambda \approx np.$$

Ví dụ 2.11. Một lô bóng đèn điện tử gồm 10000 bóng. Xác suất để mỗi bóng hỏng là 0,001. Tìm xác suất để trong lô đó có:

1. đúng ba bóng hỏng.

2. nhiều nhất 10 bóng hỏng.

Giải:

Vì ở đây p = 0,001 là khá bé và n = 10000 là khá lớn ta có thể thay xấp xỉ phân phối nhị thức $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ bằng phân phối Poisson:

$$P[X = k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

trong đó $\lambda = np = 10000.0{,}001 = 10$.

1. Xác suất phải tìm là $P[X = 3] \approx \dfrac{10^3 e^{-10}}{3!}$.

2. Xác suất để có nhiều nhất 10 bóng hỏng là:

$$P[X \le 10] \approx \sum_{k=0}^{10} \frac{10^k e^{-10}}{k!}.$$

3.2.3. Phân phối siêu bội

Trước khi đưa ra định nghĩa ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.12. Một lô sản phẩm gồm có N sản phẩm trong đó có M sản phẩm tốt, còn N – M phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên một lần n sản phẩm. Tìm xác suất để trong n sản phẩm lấy ra có đúng k sản phẩm tốt.

Giải:

Gọi X là số sản phẩm tốt trong n sản phẩm

Ta có: $P[X = k] = \dfrac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ (2.5)

Kí hiệu xác suất này là q(k, N, M, n).

Định nghĩa 2.5. Biến ngẫu nhiên X có phân phối siêu bội với tham số N, M, n nếu phân phối xác suất của nó có dạng:

$$P[X = k] = \frac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = q(k, N, M, n).$$

Ta phát biểu không chứng minh định lí sau:

Định lí 2.2. Nếu n cố định, N tăng lên vô hạn và tỉ số M/N tiến tới p, $0 < p < 1$, thì phân phối siêu bội với tham số N, M, n sẽ tiến tới phân phối nhị thức với tham số (n, p). Nghĩa là:

$$q(k, N, M, n) \to P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \text{ khi } N \to \infty.$$

3.2.4. Phân phối hình học

Xét dãy n phép thử độc lập $G_1, G_2, ..., G_n, ...$ trong đó mỗi phép thử chỉ có hai biên cố A và $\overline{A}$ có thể xảy ra. Xác suất để biến cố A xuất hiện trong mỗi phép thử bằng p. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số phép thử cần thiết để lần đầu tiên biến cố A xuất hiện. Tìm phân phối xác suất của X

Giải:

Biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị 1, 2, 3,...., n,.....

Ta dễ dàng tìm được xác suất:

$$P[X = k] = q^{k-1}p, k = 1, 2, 3, ..., n, ... ; q = 1 - p$$

Định nghĩa 2.6. Biến ngẫu nhiên X có phân phối hình học nếu phân phối xác suất của nó có dạng

$$P[X = k] = q^{k-1}p, k = 1, 2, ..., n, ...$$

Ví dụ 2.13. Tiến hành bắn không hạn định vào một bia. Xác suất để mỗi viên đạn trúng đích là p = 0,2. Bắn cho tới khi nào trúng bia thì dừng bắn. Gọi X là số viên đạn cần bắn để lần đầu tiên trúng bia. Tìm phân phối xác suất của X và hàm phân phối của nó.

Giải:

X có phân phối hình học với p = 0,2. Vậy phân phối xác suất của X là:

$$P\,[X = k] = q^{k-1}p = (0,8)^{k-1}.0,2;\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

Hàm phân phối của X:

$$F(x) = \sum_{k<x}(0,8)^{k-1}.0,2;\ x \in \mathbf{R}.$$

3.2. Phân phối liên tục tuyệt đối

Định nghĩa 2.7. Biến ngẫu nhiên X có phân phối liên tục tuyệt đối nếu hàm phân phối của nó có dạng:

$$F_{(x)} = \int_{-\infty}^{x} f(u)du,\ x \in \mathbf{R}.$$

Hàm dưới dấu tích phân f(x) được gọi là hàm mật độ của X. Theo tính chất của tích phân xác định ta có f(x) = F'(x) tại điểm liên tục của f(x).

Từ tính chất của hàm phân phối ta suy ra tính chất của hàm mật độ là:

- $f(x) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
- $P[a \leq X < b] = \int_{a}^{b} f(x)dx$.

Thật vậy, ta biết rằng $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$.

Vì F(x) đơn điệu tăng nên $F(x + \Delta x) - F(x)$ và Δx có cùng dấu. Vậy tỉ số $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \geq 0$. Do đó $f(x) \geq 0$.

Từ $\lim\limits_{x \leftarrow +\infty} F(x) = 1$ ta suy ra $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Ta có $F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ và $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$.

Do đó: $P[a \leq X < b] = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$.

Ví dụ 2.14. Giả sử hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X là:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}x.$$

Tìm hàm mật độ của X và tính xác suất $P[-1 \leq X < 1]$.

Giải:

Ta có hàm mật độ $f(x) = F'(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Xác suất $P[-1 \leq X < 1] = F(1) - F(-1) =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}(1) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}(-1)\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2.15. Giả sử hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X là:

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-\lambda x} & \text{với } x > 0;\ \lambda > 0 \\ 0 & \text{với } x \leq 0 \end{cases}$$

Tìm A; tính hàm phân phối của X và tính xác suất P[0 ≤ X < 1].

Giải:

Theo tính chất của hàm mật độ ta có: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Do đó $\int_{0}^{+\infty} Ae^{-\lambda x}dx = 1 \Rightarrow A\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow \frac{A}{\lambda} = 1 \Rightarrow A = \lambda.$

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X là:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ \int_0^x \lambda e^{\lambda u}du & \text{với } x > 0, \lambda > 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{với } x > 0,\ \lambda > 0 \end{cases}$$

Xác suất $P[0 \le X < 1] = F(1) - F(0) = 1 - e^{-\lambda} - 0 = 1 - e^{-\lambda}$.

Ví dụ 2.16. Giả sử biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên đoạn [a, b]. Tìm hàm phân phối của X.

Giải:

Biến ngẫu nhiên X phân phối đều trên [a, b] nghĩa là hàm mật độ của X có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{với } a < x \le b. \\ 0 & \text{với } x > b \end{cases}$$

Hàm phân phối của X là:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{với } a < x \le b. \\ 1 & \text{với } x > b \end{cases}$$

Ví dụ 2.17. Giả sử biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối F(x). Tìm hàm phân phối của đại lượng ngẫu nhiên Y = aX + b với a > 0.

Xét trường hợp X có phân phối đều trên [0; 1].

Giải:

Hàm phân phối của Y là:

$$F_Y(y) = P[Y < y] = P[aX + b < y] = P[X < \frac{y-b}{a}] = F_X(\frac{y-b}{a}).$$

Theo giả thiết X có phân phối đều trên [0; 1], từ ví dụ 2.16, hàm phân phối của X là:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ x & \text{với } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{với } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy} \quad F_Y(y) = F_X(\frac{y-b}{a}) = \begin{cases} 0 & \text{với } \frac{y-b}{a} \le 0 \\ \frac{y-b}{a} & \text{với } 0 < \frac{y-b}{a} \le 1 \\ 1 & \text{với } \frac{y-b}{a} > 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{với } y \le b \\ \frac{y-b}{a} & \text{với } b < x \le a + b. \\ 1 & \text{với } x > a + b \end{cases}$$

Ví dụ 2.18. Giả sử biến ngẫu nhiên X có phân phối dạng mũ với hàm phân phối là:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{với } x > 0 \\ 0 & \text{với } x \le 0 \end{cases}$$

Tìm hàm phân phối của đại lượng ngẫu nhiên $Y = X^2$.

Giải:

Theo định nghĩa hàm phân phối ta có:

$$F_Y(y) = p\,[Y < y] = P[X^2 < y],\ y \in \mathbf{R}.$$

Với $y \le 0$; biết đẳng thức $X^2 < y$ không xảy ra, nghĩa là biến cố $[X^2 < y]$ là biến cố không thể có. Vậy $P[X^2 < y] = 0$.

Với $y > 0$, ta có

$$P[X^2 < y] = P[|X| < \sqrt{y}\,] = P[-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\,]$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) - P[X = -\sqrt{y}\,].$$

Theo giả thiết của hàm phân phố $F(x)$ ta có $F_x(-\sqrt{y}) = 0$ và $P[X = -\sqrt{y}\,] = 0$.

Vậy $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$ với $y > 0$.

Tóm lại hàm phân phối của $Y = X^2$ là

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{y}} & \text{với } y > 0 \\ 0 & \text{với } y \le 0 \end{cases}.$$

Định lí 2.2. Điều kiện cần và đủ để hàm f(x) xác định trên toàn trục số là hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên X nào đó là:

i_1. $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$;

i_2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Chứng minh

Điều kiện cần suy trực tiếp từ tính chất của hàm mật độ. Bây giờ ta chứng minh điều kiện đủ. Giả sử f(x) thoả mãn điều kiện i_1 và i_2.

Đặt $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u)du$

Vì $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ nên với $x_1 < x_2$ ta có:

$$\int_{-\infty}^{x_2} f(u)du = \int_{-\infty}^{x} f(u)du + \int_{x_1}^{x_2} f(u)du \geq \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

Vậy $F(x_2) \geq F(x_1)$, nghĩa là $F(x)$ là hàm đơn điệu tăng. Bây giờ ta chứng minh $F(x)$ là liên tục với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Điều này suy từ tính liên tục của hàm theo cận trên.

Cuối cùng ta chứng minh $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Thực vậy, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1,$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} f(u)du = 0.$$

Theo chú ý trên ta suy ra $F(x)$ là hàm phân phối. Theo định nghĩa phân phối liên tục tuyệt đối ta suy ra $f(x)$ là hàm mật độ.

4. PHÂN PHỐI ĐỒNG THỜI CỦA n BIẾN NGẪU NHIÊN HOẶC CỦA VECTƠ NGẪU NHIÊN n CHIỀU

4.1. Các khái niệm

Định nghĩa 2.8. Vectơ ngẫu nhiên n chiều là một bộ gồm n biến ngẫu nhiên $(X_1, X_2,..., X_n)$; X_i, $i = 1, 2,... , n$ là những biến ngẫu nhiên.

Định nghĩa 2.9. Gọi hàm $P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[\omega : X_i(\omega) < x_i]\right)$, $(x_1, x_2,..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ là hàm phân phối đồng thời của n biến ngẫu nhiên $X_1, X_2,..., X_n$ và ký hiệu $F(x_1, x_2,..., x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[\omega: X_i(\omega) < x_i]\right)$, $(x_1, x_2,..., x_n) \in \mathbf{R}^n$.

Ta xét trường hợp $n = 2$

Ta có: $F(x, y) = P([\omega : X < x] \cap [\omega : Y < y])$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Hàm phân phối đồng thời F(x, y) có các tính chất sau:

i_1. F(x, y) là hàm đơn điệu tăng theo từng biến.

i_2. F(x, y) là hàm liên tục bên trái theo các biến.

i_3. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\to+\infty}} F(x, y) = F(+\infty, +\infty) = 1$

và $\lim\limits_{x\to\infty} F(x, y) = 0$ hoặc $\lim\limits_{y\to\infty} F(x, y) = 0$.

Từ hàm phân phối đồng thời F(x, y) ta suy ra hàm phân phối riêng của các biến:

$$F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x, y) \text{ và } F_Y(y) = \lim_{x\to+\infty} F(x, y).$$

4.2. Phân phối rời rạc và phân phối liên tục tuyệt đối

4.2.1. Phân phối rời rạc

Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên rời rạc chúng nhận các giá trị

X: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

và Y: $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$

Dãy các xác suất $P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = p_{ij}$, i =1, 2...; j = 1, 2,... là phân phối xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên X, Y. Ta có thể viết được dưới dạng bảng sau:

X \ Y	y_1	y_2	.....	y_m	.....
x_1	p_{11}	p_{12}	... ...	p_{1m}	... ...
x_2	p_{21}	p_{22}	.....	p_{2m}	.....
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	....	p_{nm}	....
$\vdots$	....	....	....	....	....

với $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$ (2.7)

Từ bảng phân phối trên ta suy ra phân phối của X và của Y như sau: Phân phối xác suất của X là:

$$P[X = x_i] = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \text{ , } i = 1, 2, \ldots$$

và phân phối của Y là $P[Y = y_i] = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots$

Ví dụ 2.19. Giả sử phân phối đồng thời của vectơ ngẫu nhiên (X, Y) là

X \ Y	1	2
1	0,10	0,06
2	0,30	0,18
3	0,20	0,16

Tìm phân phối xác suất của X, Y và Z = X + Y

Giải:

$P[X = 1] = 0{,}10 + 0{,}06 = 0{,}16;$

$P[X = 2] = 0{,}30 + 0{,}18 = 0{,}48;$

$P[X = 3] = 0{,}20 + 0{,}16 = 0{,}36.$

Vậy phân phối xác suất của X là:

X	1	2	3
	0,16	0,48	0,36

Phân phối xác suất của Y là:

$P\,[Y = 1] = 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}60;$

$P\,[Y = 2] = 0{,}06 + 0{,}18 + 0{,}16 = 0{,}40.$

Vậy phân phối xác suất của Y là:

Y	1	2
	0,60	0,40

Bây giờ ta tìm phân phối xác suất của Z.

Ta nhận thấy Z có thể nhận các giá trị 2, 3, 4, 5. Ta sẽ tính xác suất của từng biến cố trên;

$$P[Z = 2] = P[X = 1; Y = 1] = 0{,}10;$$

$$P[Z = 3] = P[X = 1; Y = 2] + P[X = 2; Y = 1] = 0{,}06 + 0{,}30 = 0{,}36;$$

$$P[Z = 4] = P[X = 2; Y = 2] + P[X = 3; Y = 1] = 0{,}18 + 0{,}20 = 0{,}38;$$

$$P[Z = 5] = P[X = 3; Y = 2] = 0{,}16.$$

Vậy phân phối xác suất của Z là:

Z	2	3	4	5
P[Z = i]	0,10	0,36	0,38	0,16

Chú ý. Một trong các phân phối đồng thời rời rạc quan trọng là phân phối đa thức. Ở đây ta chỉ giới thiệu khái niệm mà không chứng minh công thức.

Bài toán: Xét dãy n phép thử độc lập G_1, G_2,.... G_n, trong mỗi phép thử G_i có r biến cố có thể xảy ra là A_1, A_2,..., A_r. Gọi p_i, $i = \overline{1, r}$, là xác suất để biến cố A_i xuất hiện trong mỗi phép thử.

Gọi X_i, $i = \overline{1, r}$, là số lần xuất hiện biến cố A_i trong n phép thử trên.

Tìm phân phối đồng thời của X_1, X_2,..., X_r.

Người ta chứng minh được rằng phân phối đồng thời của chúng là:

$$P[X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_r = k_r] = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!} \times p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}, \qquad (2.8)$$

trong đó $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$; $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$.

Ví dụ 2.20. Tìm xác suất để khi gieo ngẫu nhiên 20 lần một con xúc xắc cân đối và đồng chất có 4 lần xuất hiện mặt 1 chấm, 3 lần xuất hiện mặt 2 chấm, 5 lần xuất hiện mặt 3 chấm, 2 lần xuất hiện mặt 4 chấm, 2 lần xuất hiện mặt 5 chấm, 4 lần xuất hiện mặt 6 chấm.

Giải:

Vì con xúc xắc cân đối và đồng chất nên các mặt có 1, 2, 3, 4, 5, 6 chấm có khả năng xuất hiện như nhau và các xác suất p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 là bằng nhau và $p_1 = p_2 = ... = p_6 = 1/6$. Theo công thức (2.8) xác suất phải tìm là:

$$P[X_1 = 4, X_2 = 3, X_3 = 5, X_4 = 2, X_5 = 2, X_6 = 4]$$

$$= \frac{20!}{4!3!5!2!2!4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^4$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^{20}\frac{20!}{(4!)^2 3!5!(2!)^2}.$$

4.2.2. Phân phối liên tục tuyệt đối

Xét trường hợp vectơ ngẫu nhiên 2 chiều (X, Y).

Định nghĩa 2.10. Hai biến ngẫu nhiên X, Y được gọi là có phân phối liên tục tuyệt đối nếu hàm phân phối đồng thời của chúng có dạng:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)dudv,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Hàm dấu dưới tích phân f(x, y) được gọi là hàm mật độ đồng thời của X, Y.

Theo tính chất của tích phân xác định ta có:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Tính chất của hàm mật độ đồng thời: Dựa vào tính chất của hàm phân phối đồng thời F(x, y) ta rút ra:

$$f(x, y) \geq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1;$$

$$\int_a^b\int_c^d f(x,\ y)dxdy = P[\omega:\ a \le X < b,\ c \le Y < d].$$

Ví dụ: 2.21. Giả sử vectơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm phân phối đồng thời là:

$$F(x,\ y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)} & \text{với } x \ge 0,\ y \ge 0 \\ 0 & \text{trong trường hợp khác} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ đồng thời của (X, Y); tìm hàm phân phối của X, của Y.

Giải:

$$f(x,\ y) \doteq \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{với } x \ge 0,\ y \ge 0 \\ 0 & \text{trong trường hợp khác} \end{cases}$$

Hàm phân phối của X là

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{với } x \ge 0 \\ 0 & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

Hàm phân phối của Y là:

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & \text{với } y \ge 0 \\ 0 & \text{với } y < 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 2.22. Giả sử hàm mật độ đồng thời của vectơ ngẫu nhiên (X, Y) có dạng:

$$f(x,\ y) = \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Tìm A. Tìm hàm phân phối đồng thời của (X, Y).

Giải:

Theo tính chất của hàm mật độ ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dxdy = 1.$$

Thay biểu thức của f(x, y) vào vế trái của đẳng thức trên ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy = 1.$$

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}\right) = A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\left(\operatorname{arctg}y\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right) = A\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= A\pi\left(\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right) = A\pi^2 = 1.$$

Ta suy ra $\quad A = \dfrac{1}{\pi^2}.$

Hàm phân phối đồng thời của (X, Y) là:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\pi^2(1+u^2)(1+v^2)}dudv = \int_{-\infty}^{x}\frac{du}{p(1+u^2)}\left(\int_{-\infty}^{y}\frac{dv}{p(1+v^2)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y + \frac{1}{2}\right).$$

5. SỰ ĐỘC LẬP CỦA CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN

Định nghĩa 2.11. Dãy n biến ngẫu nhiên $X_1, X_2,..., X_n$ được gọi là độc lập nếu:

$$F(x_1, x_2,..., x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)....F_{X_n}(x_n).$$

Nghĩa là hàm phân phối đồng thời của n biến ngẫu nhiên $X_1, X_2...,$ X_n bằng tích các hàm phân phối của từng biến.

Định lí 2.3. Nếu tồn tại hàm mật độ đồng thời $f(x_1,..., x_n)$ của n biến ngẫu nhiên $X_1, ..., X_n$ và mật độ của từng biến thì điều kiện cần và đủ để n biến đó độc lập là:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)....f_{X_n}(x_n).$$

Ví dụ 2.23. a. Trở về ví dụ 2.21 hàm phân phối đồng thời của (X, Y) là:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)} & \text{với } x \ge 0, y \ge 0 \\ 0 & \text{trong trường hợp khác} \end{cases}$$

Hàm phân phối của X là:

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{với } x \ge 0 \\ 0 & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

Hàm phân phối của Y là:

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & \text{với } y \ge 0 \\ 0 & \text{với } y < 0 \end{cases}$$

Ta nhận thấy:

$$F_x(x).F_y(y) = F(x, y).$$

Vậy X, Y là độc lập.

b. Trong ví dụ 2.22, ta tìm được hàm phân phối đồng thời của X, Y là:

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}y + \frac{1}{2}\right).$$

Từ đây ta suy ra hàm phân phối của X là:

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = \frac{1}{\pi}\text{arctg}x + \frac{1}{2},$$

và hàm phân phối của Y là:

$$F_y(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = \frac{1}{\pi}\text{arctg}y + \frac{1}{2}.$$

Ta nhận thấy rằng $F_X(x).F_Y(y) = F(x, y)$.

Vậy X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập.

6. PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA HÀM CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

6.1. Trường hợp hàm một biến

Giả sử biến ngẫu nhiên X có hàm một độ là f(x).

Đại lượng ngẫu nhiên $Y = \varphi(X)$. Tìm hàm mật độ của Y. Để giải: quyết vấn đề này ta có định lí sau:

Định lí 2.4. Giả sử X có hàm mật độ f(x) và $Y = \varphi(X)$, $\varphi(X)$ có $[\varphi^{-1}]'$ liên tục. Khi đó hàm mật độ của Y là:

$$g_Y(y) = f(\varphi^{-1}(y))\,[\varphi^{-1}(y)]' \tag{2.9}$$

Ví dụ 2.24. Giả sử biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ là

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ và biến ngẫu nhiên } Y = e^X.$$

Tìm hàm mật độ của Y.

Giải:

Hàm mật độ của Y là: $g_Y(y) = f(\varphi^{-1}(y))\,[\varphi^{-1}(y)]'$.

Ở đây, $X = \ln Y$, $(\ln Y)' = \frac{1}{Y}$.

Vậy: $g_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} \times (\ln y)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{y} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$.

6.2. Trường hợp hàm của 2 biến ngẫu nhiên

Giả sử vectơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ đồng thời là f(x, y) và $U = \phi_1(X, Y)$, $V = \phi_2(X, Y)$.

Hàm mật độ đồng thời của U, V được cho bởi mệnh đề sau:

Định lí 2.5. Giả sử (X, Y) có hàm mật độ đồng thời là f(x, y) và $U = \phi_1(X, Y)$, $V = \phi_2(X, Y)$, ϕ_1, ϕ_2 là các hàm đơn trị sao cho (X, Y) được xác định duy nhất từ giá trị (U, V), $X = \psi_1(U, V)$, $Y = \psi_2(U, V)$, ψ_1, ψ_2 có đạo hàm riêng liên tục theo các biến U, V.

Khi đó hàm mật độ đồng thời của U, V là

$$g_{UV}(u,v) = f\left(\psi_1(u,v)\psi_2(u,v)\right)|J|, \qquad (2.10)$$

trong đó: $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial v} \end{vmatrix}.$

Ví dụ 2.25. Giả sử vectơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ đồng thời là f(x, y).

a. Tìm hàm mật độ của X + Y.

b. Nếu $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{với } x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{trong trường hợp khác} \end{cases}$

thì mật độ của X + Y là bao nhiêu?

Giải:

a. Đặt U = X + Y, V = Y. Ta có X = U – V và Y = V.

Từ đó suy ra:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Vậy hàm mật độ đồng thời của U, V là:

$$G_{UV}(u, v) = f(u - v; v)|J| = f(u - v, v).$$

Hàm mật độ của U = X + Y là:

$$p_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{UV}(u,v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u - v, v)dv.$$

b. Hàm mật độ đồng thời của U, V là:

$$g_{UV}(u,v) = f(u - v, v) = \begin{cases} e^{-(u-v+v)} & \text{với } u > v > 0 \\ 0 & \text{trong trường hợp khác} \end{cases}$$

Hàm mật độ của U = X + Y là:

$$p_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-v, v)dv = \begin{cases} \int_0^u e^{-u}dv & \text{với } u > 0 \\ 0 & \text{với } u \le 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ue^{-u} & \text{với } u > 0 \\ 0 & \text{với } u \le 0 \end{cases}.$$

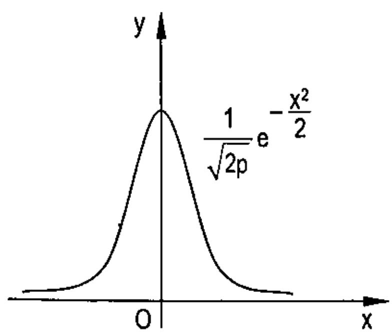
6.3. Một số phân phối liên tục quan trọng

6.3.1. Phân phối chuẩn

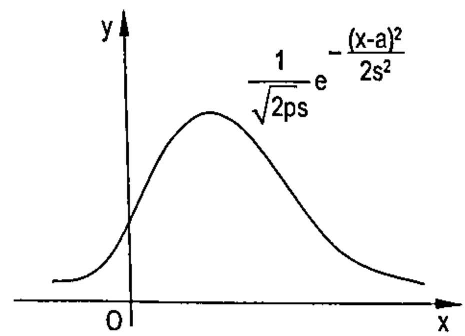
Định nghĩa 2.12. Biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn dạng tổng quát, ký hiệu $N(a, \sigma^2)$, nếu hàm mật độ của nó có dạng:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Đồ thị hình bên



Hình 2.5



Hình 2.6

Trường hợp đặc biệt nếu $a = 0, \sigma^2 = 1$ thì hàm mật độ có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

và hàm phân phối tương ứng là $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} dx,\ x \in \mathbf{R}.$

Từ dạng của F(x) ta suy ra F(–x) = 1 – F(x). Chứng minh đẳng thức này nhờ tính chất của tích phân xác định.

Định lí 2.6. Nếu biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn dạng $N(a, \sigma^2)$ thì:

a. $Y = \dfrac{X-a}{\sigma}$ có phân phối chuẩn dạng N(0; 1);

b. $$P[\alpha \le X < \beta] = F\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (2.11)$$

Chứng minh

Từ dạng của hàm phân phối của X

$$F1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du,$$

đặt $t = \dfrac{u-a}{\sigma}$, ta có: $F_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{(x-a)}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = F\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$

Mặt khác: $P[\alpha \le X < \beta] = F_1(\beta) - F_1(\alpha) = F\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right) - F\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right).$

Ví dụ 2.16. Giả sử độ cao X của trẻ em tuân theo phân phối chuẩn dạng N(0,3; 0,01). Tính xác suất để trẻ em có độ cao nằm trong khoảng (1, 2; 1, 4).

Giải:

Ta có: $$P[1{,}2 \le X < 1{,}4] = F\left(\frac{1{,}4-1{,}3}{\sqrt{0{,}01}}\right) - F\left(\frac{1{,}2-1{,}3}{\sqrt{0{,}01}}\right)$$

$$= F(1) - F(-1) = 2F(1) - 1 \approx 0{,}6826.$$

(Tra bảng phân phối chuẩn N(0, 1) ta có F(1) = 0,8413).

Dưới đây ta sẽ trình bày một số kết quả quan trọng nói lên sự liên hệ giữa phân phối nhị thức và phân phối chuẩn. Năm 1730, De.Moivre A đã tìm ra mối liên hệ này. Nội dung được thể hiện dưới dạng định lí sau.

Định lí 2.7. (Định lí Moivre). Nếu xác suất p = P(A) để biến cố A xuất hiện trong mỗi phép thử thoả mãn $0 < p < 1$ và k là số lần xuất hiện biến cố A trong n phép thử Bernoulli thì với n khá lớn, ta có:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \qquad (2.12).$$

Ví dụ 2.17. Bắn 400 phát đạn độc lập vào một mục tiêu. Xác suất bắn trúng đích của mỗi viên đạn là p = 0,02. Tính gần đúng xác suất để trong 400 viên có đúng 80 viên rơi trúng mục tiêu.

Giải:

Áp dụng công thức xấp xỉ (2.12) ta có

$$n = 400;\ p = 0,2;\ k = 80.$$

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400\times 0,2\times 0,8}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(80-400\times 0,2)^2}{2\times 400\times 0,2\times 0,8}} = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \approx 0,04986.$$

Mãi đến năm 1783, P.S Laplace mới mở rộng kết quả của Moivre và kết quả đó được mang tên định lí giới hạn tích phân Moivre – Laplace.

Định lí 2.8. (Định lí Moivre - Laplace) Giả sử k là số lần xuất hiện biến cố A trong dãy n phép thử Bernoulli, p là xác suất xuất hiện biến cố A trong mỗi phép thử và $0 < p < 1$ và k_1, k_2 ($k_1 < k_2$) là hai số nguyên đã cho.

Khi đó với n khá lớn ta có công thức xấp xỉ:

$$P[k_1 \le k < k_2] \approx F\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - F\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \qquad (2.13)$$

trong đó: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$

Ví dụ 2.17. Điều tra ngẫu nhiên 10.000 trẻ em. Giả sử xác suất sinh con trai bằng $\frac{1}{2}$. Tính gần đúng xác suất để số trẻ em là con trai nằm trong khoảng 4000 đến 6000.

Giải:

Gọi k là số con trai trong 10000 trẻ em

$$\text{Ta có: } P[4000 \le k < 6000] \approx F\left(\frac{6000 - 10^4 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{10000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}}\right) - F\left(\frac{4000 - 10^4 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{10000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}}\right)$$

$$\approx F(20) - F(-20) = 2F(20) - 1 = 1.$$

Vì $F(x) \approx 1$ với $x \ge 5$.

6.3.2. Phân phối χ^2 (khi bình phương)

Định nghĩa 2.13. Biến ngẫu nhiên X có phân phối χ^2 với n bậc tự do nếu hàm mật độ của nó có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{với } x > 0 \end{cases}$$

trong đó hàm Gama: $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$, $a > 0$.

Bằng tích phân từng phân ta có:

$$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1), \text{ nếu } a = n \text{ thì } \Gamma(n) = (n-1)!$$

6.3.3. Phân phối Student

Định nghĩa 2.14. Biến ngẫu nhiên X có phân phối Student với k bậc tự do nếu hàm mật độ của nó có dạng:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{k}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

trong đó hàm bêta: $\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, $a>0$, $b>0$.

6.3.4. Phân phối F (Fisher – Snédecor)

Định nghĩa 2.15. Biến ngẫu nhiên X có phân phối F với n, m bậc tự do nếu hàm mật độ của nó có dạng:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{với } x\le 0\\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}\dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(m+nx)^{\frac{n+m}{2}}} & \text{với } x>0\end{cases}$$

Một số tính chất:

Giả sử $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập và các X_i có phân phối chuẩn N (0,1). Khi đó $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ có phân phối $\chi^2(n)$ với n bậc tự do.

Nếu X, Y là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập, X có phân phối $\chi^2(k)$ với k bậc tự do và Y có phân phối chuẩn N(0, 1) thì $\dfrac{Y}{\sqrt{X/k}}$ có phân phối Student với k bậc tự do.

Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập và X có phân phối $\chi^2(n)$ và Y có phân phối $\chi^2(m)$ thì $\dfrac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$ có phân phối F với n, m bậc tự do.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Một lô sản phẩm gồm có N sản phẩm, trong đó có M sản phẩm tốt. Chọn ngẫu nhiên một lần n sản phẩm từ lô hàng. Gọi X là số sản phẩm tốt trong n sản phẩm lấy ra. Tìm phân phối xác suất của X.

Viết hàm phân phối của X. Tính xác suất $P[0 \le X < \frac{n}{2}]$.

2. Gieo 10 lần một đồng tiền cân đối và đồng chất. Gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp trong 10 lần gieo. Tìm phân phối xác suất của X. Tính xác suất $P[X \ge 1]$; $P[0 \le X \le 8]$.

3. Bắn không hạn chế vào một mục tiêu. Bắn cho tới khi nào trúng đích thì dừng lại. Gọi X là số viên đạn cần bắn để lần đầu tiên trúng đích. Biết rằng xác suất trúng đích của mỗi viên đạn là 0,2. Tìm phân phối xác suất của X. Viết hàm phân phối của X. Tính xác suất $P[X \ge 2]$; $P[X < 3]$.

4. Cho phân phối xác xuất của biến ngẫu nhiên X là:

X	– 2	0	2
P[X = i]	1/6	2/3	1/6

Viết hàm phân phối của X. Tính xác suất $P[-1 \le X < 1]$.

5. Gọi X là biến ngẫu nhiên bằng số kiểu gen aa thấy được trong 40 cá thể sinh ra từ sự giao hai dị hợp tử Aa (ta nhắc lại rằng trong sự giao hai dị hợp tử đó, xác suất để thu được một cá thể có kiểu gen aa bằng $\frac{1}{4}$). Tìm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X.

Tính xác suất p để cho X có giá trị lớn nhất bằng 6.

Nếu Y là biến ngẫu nhiên bằng số các kiểu gen aa thấy được trong số 400 cá thể. Tính giá trị y sao cho sự kiện $Y \le y$ có cùng xác xuất p như sự kiện $X \le 6$.

6. Ta gọi X_1 và X_2 là các biến ngẫu nhiên bằng số các kiểu gen aa thấy được trong 2 nhóm 40 cá thể từ sự giao hai dị hợp tử Aa. Tìm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $X_1 + X_2$. Tính xác suất của các biến cố: $X_1 \le 6$ và $X_2 \le 6$; $X_1 + X_2 \le 12$.

7. Trong m phiếu của một cuộc bầu cử, số người bầu cho các ứng cử viên A, B, C lần lượt bằng m_1, m_2, m_3 (tổng của $m_1 + m_2 + m_3 = m$). Ta gọi X, Y, Z là các biến ngẫu nhiên bằng số phiếu bầu cho A, B và C khi kiểm tra n phiếu đầu tiên.

   a. Hãy xác định phân phối xác xuất của biến ngẫu nhiên X và tính giá trị của xác xuất của biến cố $[X = r_1]$. Tìm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Y và Z.

   b. Hãy tìm hàm phân phối đồng thời của vectơ ngẫu nhiên (X, Y, Z).

8. Ta coi các sản phẩm do một nhà máy chế tạo ra là kết quả của các phép thử độc lập và ta cho rằng mọi sản phẩm được chế tạo có xác suất bị hỏng là q (và như vậy xác suất không bị hỏng là $p = 1 - q$).

   Hãy tính xác suất của biến cố A_r = "r – 1 sản phẩm đầu không hỏng và sản phẩm thứ r bị hỏng". Tính xác suất của biến cố A bằng hợp của tất cả các biến cố A_r. Tính xác suất của biến cố đối lập $\bar{A}$ của A.

   Các kết quả đó có nghĩa như thế nào?

   Hãy xác định xác suất của biến cố $B_{r,s}$ = "r – 1 sản phẩm đầu không hỏng, sản phẩm thứ r hỏng, s – 1 sản phẩm sau đó không hỏng và sản phẩm thứ r + s bị hỏng". Hãy chứng minh rằng X và X + Y là các số thứ tự của sản phẩm bị hỏng thứ nhất và sản phẩm bị hỏng thứ hai, thì các biến X và Y độc lập và có cùng phân phối.

   Hãy xác định phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Z là số thứ tự của sản phẩm bị hỏng thứ k. (Ở đây ta có nhận xét là biến cố $[Z = r]$ = "có k – 1 sản phẩm hỏng trong số r – 1 sản phẩm đầu và sản phẩm thứ r bị hỏng".

9. Ta giả thiết rằng số N người con trong một gia đình (chọn một cách ngẫu nhiên) là biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson với tham số $\lambda > 0$. (chẳng hạn $\lambda = 2,2$). Tìm phân phối xác suất của X (X bằng số con trai trong một gia đình chọn một cách ngẫu nhiên). Tính xác suất để $N = n$ khi ta biết $X = 3$.

10. Cho hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X là

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}x.$$

a. Tìm xác suất của biến cố [ω: 0 < X < 1].

b. Tìm hàm mật độ của X.

11. Cho hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X là:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

a. Tìm hàm mật độ của X.

b. Tính xác suất $P[0 \le X < 0{,}92]$ khi $a = 0$, $\sigma = 1$.

12. Cho hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ ax + b & \text{với } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{với } x > 1 \end{cases}$$

a. Tìm a, b để F(x) là hàm liên tục.

b. Tìm hàm mật độ của X và tính xác suất $P[0 < X < \frac{1}{2}]$.

13. Cho hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X là:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{với } x > 0,\ \theta > 0 \\ 0 & \text{với } x \le 0 \end{cases}$$

a. Tìm hàm phân phối của X.

b. Tính xác suất $P[0 \le X < \theta]$.

14. Cho hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X là $f(x) = a\,e^{-x^2}$.

a. Tìm a, viết hàm phân phối của X.

b. Tính xác suất $P[-\infty \le X < 0]$.

15. Giả sử hàm mật độ của X là:

$$f(x)=\begin{cases} Ax^n e^{-x} & \text{với } x>0 \\ 0 & \text{với } x\le 0 \end{cases}$$

a. Tìm A, viết hàm phân phối của X.

b. Tính xác suất $P[0 \le X < +\infty]$.

16. Giả sử hàm mật độ của X là

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2} \quad \text{với } -\infty < x < +\infty.$$

a. Tìm a, viết hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X.

b. Tính xác suất $P[0 < X < 1]$.

17. Giả sử hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X là

$$f(x)=\begin{cases} A|\sin x| & \text{với } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{với } x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Tìm A, viết hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X.

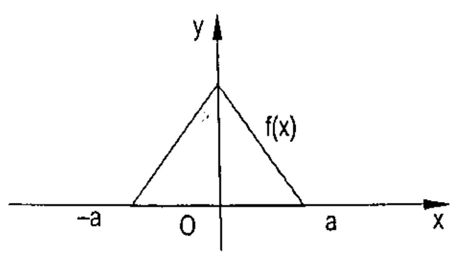
18. Cho hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X là

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{với } x>0,\ \lambda>0 \\ 0 & \text{với } x\le 0 \end{cases}$$

a. Viết hàm phân phối của X.

b. Tính xác suất $P[-1 < X < 1]$.

19. Cho đồ thị hàm mật độ như hình vẽ.



Viết biểu thức của hàm mật độ và hàm phân phối.

20. Giả sử hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X là:

$$f(x)=\begin{cases}Cx^2(1-x^3) & \text{với } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{trong trường hợp khác}\end{cases}$$

Tìm C, viết hàm phân phối của X.

21. Giả sử hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X là:

$$f(x)=\frac{4a}{e^x+e^{-x}}.$$

a. Tìm a.

b. Viết hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X.

c. Tính xác suất $P[0<X<1]$.

22. Giả sử biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên [0; 1].

Tìm hàm phân phối của các biến ngẫu nhiên sau:

a. $Y=\frac{1}{X}$, $P[X=0]=0$.

b. $Y=X^3$.

c. $Y=\text{tg}X$ (hàm tgx xác định trên $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$).

23. Giả sử biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên [0; 1]. Tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên $Y=X^2$.

24. Giả sử biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ là $f(x)=\frac{a}{e^x+e^{-x}}$.

Tìm hàm mật độ của $Y=e^X$.

25. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi X và Y là số chấm ở mặt trên của con xúc xắc thứ nhất và thứ hai tương ứng. Tìm phân phối xác suất của $X+Y=Z$. Tìm phân phối đồng thời của (X, Z).

26. Giả sử hàm phân phối đồng thời của vectơ ngẫu nhiên (X, Y) là:

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}e^{-\mu y}+e^{-(\lambda x+\mu y)} & \text{với } x>0,\ y>0,\ \lambda>0,\ \mu>0\\ 0 & \text{trong trường hợp khác.}\end{cases}$$

Tìm hàm mật độ đồng thời của X, Y. X, Y có độc lập không? Tại sao?

27. Giả sử hàm mật độ đồng thời của X, Y là:

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+5y^2\right)}$$

Tìm mật độ của X, của Y.

28. Giả sử vectơ ngẫu nhiên (X, Y) rời rạc có phân phối đồng thời là:

Y \ X	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Tìm phân phối xác suất của X, của Y.

29. Xác suất để hạt thóc giống bị lép là 0,006. Tìm xác suất sao cho trong khi chọn 1000 hạt thóc giống có:

a. Không ít hơn 3 hạt lép;

b. Có đúng 6 hạt lép;

c. Không nhiều hơn 16 hạt lép.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – TRẢ LỜI

1. Phân phối xác suất của X là:

$$P[X = k] = \frac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad \text{với } k = 0, 1, ..., n.$$

Hàm phân phối của X là:

$$F(x) = \sum_{k<x} \frac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$P[0 \le X < \frac{n}{2}] = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

2. $P[X = k] = C_{10}^k \times \frac{1}{2^{10}}, \quad k = 0, 1, ..., 10.$

$$F(x) = \frac{1}{2^{10}} \sum_{k<x} C_{10}^k, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$P[X \ge 1] = 1 - \frac{1}{2^{10}}, \quad P[0 \le X \le 8] = 1 - \frac{11}{2^{10}}.$$

3. $P[X = k] = q^{k-1}p; \ (p = 0,2, \ q = 0,8).$

$= (0,8)^{k-1}.0,2$ với $k = 1, 2,...$

Hàm phân phối của X là: $F(x) = 0,2\sum_{k<x}(0,k)^{k-1}, \quad x \in \mathbf{R}.$

$P[X \ge 2] = 1 - P[X = 1] = 1 - 0,2 = 0,8; \ P[X < 3] = 0,36.$

4. $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{với } x\le -2\\ \dfrac{1}{6} & \text{với } -2<x\le 0\\ \dfrac{5}{6} & \text{với } 0<x\le 2\\ 1 & \text{với } x>2\end{cases};$$

$$P[-1 \le X < 1] = \frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

5. $$P[X=k] = C_{40}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{40-k} \quad \text{với } k = 0, 1, 2, \ldots 40.$$

$$P[X\le 6] = P[X<7] \approx F\left(\frac{7-\frac{1}{2}-10}{\sqrt{40\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}}\right)\approx F(-1{,}277)=0{,}101.$$

$$P[Y=y] = P[Y<y+1] \approx F\left(\frac{y+\frac{1}{2}-100}{\sqrt{400\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}}\right)$$

$$\approx F(-1{,}277) \Rightarrow y = 88.$$

6. $$P[X_1+X_2=k] = C_{80}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{80-k},\ k=0, 1, 2, \ldots, 80.$$

$$P[X_1\le 6, X_2\le 6] = P[X_1\le 6]P[X_2\le 6] = 0{,}01.$$

$$P[X_1+X_2\le 12] = P[X_1+X_2<13] \approx F\left(\frac{13-\frac{1}{2}-20}{\sqrt{80\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}}\right)\approx 0{,}026.$$

7. $P[X = r_1] = \dfrac{C_{m_1}^{r_1} \times C_{m-m_1}^{n-r_1}}{C_m^n}$.

Phân phối xác suất của Y, Z cũng sẽ là siêu bội như X, nhưng chỉ khác nhau ở chỗ thay m_1 bằng m_2 hoặc m_3.

$$P[X = r_1, Y = r_2, Z = r_3] = \frac{C_{m_1}^{r_1} \times C_{m_2}^{r_2} \times C_{m_3}^{r_3}}{C_m^n}.$$

8. $P(A_r) = p^{r-1} \times q$; $P(\bigcup_{r=1}^{\infty} A_r) = 1$; $P(\bar{A}) = 1 - 1 = 0$, trong đó $A = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r$.

$$P(B_{rs}) = p^{r+s-2}q^2;\ P[Z = r] = \frac{(r-1)!}{(k-1)!(r-k)!}p^{r-k}q^k.$$

X, Y là độc lập vì $P[Y = s] = p^{s-1}q$; $P[Y = s/X = r] = p^{s-1}q$;

Suy ra $P[X = r, Y = s] = P[X = r].P[Y = s]$.

9. $P[X = r] = \sum_{n=0}^{\infty} P[N = n].P[X = r/N = n]$.

$P[N = n]$ có phân phối Poisson với tham số λ, còn:

$$P[X = r/N = n] = \begin{cases} 0 & \text{với } n < r \\ C_n^r p^r (1-p)^{n-r} & \text{với } n > r \end{cases};$$

$$P[X = r] = \sum e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{r!(n-r)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{e^{-\lambda}}{r!}\sum_{n=r}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \frac{1}{(n-r)!};$$

$$P[X = r] = \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{r!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^r;$$

$$P[N = n/X = 3] = \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{(n-3)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-3}.$$

10. a. $P[0 < X < 1] = \dfrac{\pi}{4}$;

b. $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

11. a. $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$;

b. $P[0 \le X < 0{,}92] \approx F(0{,}92) - F(0) = 0{,}3212$.

12. a. $a = 1$; $b = 0$;

b. $P[0 < X < \dfrac{1}{2}] = F(1/2) - F(0) = \dfrac{1}{2}$.

13. a. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{với } x > 0,\ \theta > 0 \end{cases}$,

b. $P[0 \le X < \theta] = 1 - e^{-1}$.

14. a. $a = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$; $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2} du$, $x \in \mathbf{R}$.

b. $P[-\infty < X < x] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0{,}5$.

15. a. $A = \dfrac{1}{n!}$, $F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x u^n e^{-u} du & \text{với } x > 0 \\ 0 & \text{với } x \le 0 \end{cases}$;

b. $P[0 \le X < +\infty] = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \dfrac{\Gamma(n+1)}{n!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$.

16. a. $a = \frac{1}{\pi}$; $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x$;

b. $P[0 < X < 1] = \frac{1}{4}$.

17. $A = \frac{1}{2}$; $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\cos x & \text{với } -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\cos x & \text{với } 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{với } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

18. a. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{với } x > 0, \lambda > 0 \end{cases}$;

b. $P[-1 < X < 1] = 1 - e^{-\lambda}$.

19. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) & \text{với } x \in (-a;\ a) \\ 0 & \text{với } x \notin (-a;\ a) \end{cases}$;

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le -a \\ \frac{1}{a}\left(x + \frac{x^2}{2a}\right) & \text{với } -a < x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{a}\left(x - \frac{x^2}{2a}\right) & \text{với } 0 < x < a \\ 1 & \text{với } x > a \end{cases}.$$

20. $A = 60$; $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ 60\int_0^x u^2(1-u)^3 du & \text{với } 0 < x \le 1. \\ 1 & \text{với } x > 1 \end{cases}$

21. a. $a = \frac{1}{2\pi}$;

b. $F(x) = \frac{2}{\pi}\text{arctg}e^x$;

c. $P[0 < X < 1] = \frac{2}{\pi}\text{arctg}e - \frac{1}{2}$.

22. a. $F_Y(y) = 1 - F_X(\frac{1}{y}) - P[X = \frac{1}{y}]$;

b. $F_Y(y) = F_X(\sqrt[3]{y})$;

c. $F_Y(y) = F_X(\text{arctg}y)$.

23. $F_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ \sqrt{x} & \text{với } 0 < x \le 1. \\ 1 & \text{với } x > 1 \end{cases}$

24. $a = \frac{2}{\pi}$; $f_Y(y) = f_X(\varphi(y)).\varphi'(y)$.

$e^x = y \Rightarrow X = \ln y$. Vậy $f_Y(y) = f_X(\ln y).(\ln y)' = \frac{2}{\pi} \times \frac{y^2}{1+y^2}$.

25. Phân phối xác suất của $Z = X + Y$ là:

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$[X = i; Z = k] = P[X = i].P[Z = k/ X = i]$;

$$\text{trong đó } P[Z = k/X = i] = \begin{cases} 0 & \text{với } k \le i \\ \frac{1}{6} & \text{với } i < k \le 6 + i; \end{cases} \quad P[X = i] = \frac{1}{6};\ i = \overline{1,6}.$$
$$\begin{cases} 0 & \text{với } k > 12 \end{cases}$$

26. $f(x, y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-(\lambda x + \mu y)} & \text{với } x > 0,\ y > 0,\ \lambda > 0,\ \mu > 0 \\ 0 & \text{trong trường hợp khác} \end{cases}$

X, Y là độc lập vì $F(x, y) = F_X(x).\ F_Y(y)$.

27. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \sqrt{\frac{2}{5\pi}} e^{-0,4x^2}$; $f_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2y^2}$.

28.

X	2	5	8
p	0,20	0,42	0,38

Y	0,4	0,8
p	0,80	0,20

29. Dùng xấp xỉ Poisson $\lambda \approx np = 6$.

a. $P[X \ge 3] \approx 0,93803$; b. $P[X = 6] \approx \frac{6^6 e^{-6}}{6!} \approx 0,160623$.

c. $P[X \le 16] \approx \sum_{k=0}^{16} \frac{6^k e^{-6}}{k!} \approx 0,99983$.