Chương 3 – KHÔNG GIAN VECTƠ

Đối tượng ban đầu của môn Đại số tuyến tính là việc giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính. Tuy vậy, để có thể hiểu thấu đáo điều kiện đảm bảo cho một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm và cấu trúc nghiệm của nó, người ta đã đưa ra khái niệm *không gian vectơ* và khái niệm này đã trở thành một trong những trụ cột của môn Đại số tuyến tính. Không gian vectơ sau đó đã được sử dụng phổ biến trong rất nhiều lĩnh vực của toán học. Ở đây chúng ta chỉ nghiên cứu một loại không gian vectơ phổ biến nhất là $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

3.1. Khái niệm không gian vectơ $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

3.1.1. Tập hợp $\mathbb{R}^n$

a. Định nghĩa tập hợp $\mathbb{R}^n$

Một bộ gồm n số $a_1, a_2, \dots, a_n$ có thứ tự được kí hiệu là $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Tập hợp tất cả các bộ n số có thứ tự được kí hiệu là $\mathbb{R}^n$. Như vậy

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

Ví dụ 1: $(1, -1), (0, 2) \in \mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

$(1, -1, 3), (0, 2, -2) \in \mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) | a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$.

Với hai phần tử $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Ta định nghĩa $\alpha = \beta$ khi và chỉ khi $a_i = b_i, \forall i = 1, \dots, n$.

Ví dụ 2: Xét $\mathbb{R}^4$ cho $\alpha = (1, x + 1, 2, -1), \beta = (1, 2, 2, y - 1)$. Tìm x, y để $\alpha = \beta$.

Đáp số: $x = 1, y = 0$.

Bộ n số 0, $(0, 0, \dots, 0)$, được gọi là *phần tử không*, kí hiệu là θ.

Cho phần tử $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ thì phần tử $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ được gọi là *phần tử đối* của α, kí hiệu $-\alpha$.

b. Hai phép toán

Xét $\mathbb{R}^n$ và hai phần tử $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$. Trong $\mathbb{R}^n$ ta xác định hai phép toán sau:

Phép cộng: $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.

Phép nhân vô hướng: $k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$.

Ví dụ 3: Cho $\alpha = (1, -1, 3), \beta = (0, 2, -2) \in \mathbb{R}^3$. Khi đó

$$\alpha + \beta = (1, -1, 3) + (0, 2, -2) = (1 + 0, -1 + 2, 3 + (-2)) = (1, 1, 1).$$

$$2\alpha = (2, -2, 6); (-1)\beta = (0, -2, 2).$$

3.1.2. Định nghĩa không gian vectơ $\mathbb{R}^n$

Tập hợp $\mathbb{R}^n$ cùng hai phép toán trên thỏa mãn 8 điều kiện đặc trưng sau:

1. Phép cộng có tính kết hợp: với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$ thì $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

2. Phép cộng có tính giao hoán: với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ thì $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

3. Phần tử không, θ có tính chất: với mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $\alpha + \theta = \theta + \alpha = \alpha$.

4. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ phần tử đối $-\alpha$ có tính chất:

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = \theta.$$

5. Với mọi $k \in \mathbb{R}$ và mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ thì $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$.

6. Với mọi $k, l \in \mathbb{R}$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$.

7. Với mọi $k, l \in \mathbb{R}$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $(kl)\alpha = k(l\alpha)$.

8. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $1\alpha = \alpha$.

Khi đó $\mathbb{R}^n$ được gọi là *không gian vectơ trên trường* $\mathbb{R}$ (hoặc đơn giản là *không gian vectơ (KGVT)*).

Chú ý: i) Hai điều kiện 5 và 6 là tính chất phép nhân phân phối với phép cộng.

ii) Khi $\mathbb{R}^n$ là một KGVT thì mỗi phần tử thuộc $\mathbb{R}^n$ được gọi là một vectơ.

3.1.3. Các tính chất cơ bản

Xét không gian vectơ $\mathbb{R}^n$.

1. Vectơ θ là duy nhất. Với mỗi vectơ α thì vectơ đối $-\alpha$ cũng là duy nhất.

2. Phép cộng có luật giản ước: với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$, nếu $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ thì $\beta = \gamma$.

3. Với mọi $k \in \mathbb{R}$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $k\theta = \theta, 0\alpha = \theta, (-1)\alpha = -\alpha$.

4. Với $k \in \mathbb{R}$ và $\alpha \in \mathbb{R}^n$ mà $k\alpha = \theta$ thì $k = 0$ hoặc $\alpha = \theta$.

5. Với $\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq \theta, k, l \in \mathbb{R}$ thì $k\alpha = l\alpha \Leftrightarrow k = l$.

6. Với mọi $k \in \mathbb{R}$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $(-k)\alpha = k(-\alpha) = -(k\alpha)$.

3.2. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

3.2.1. Định nghĩa tổ hợp tuyến tính, biểu thị tuyến tính

Xét không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các vectơ của $\mathbb{R}^n$ (còn gọi là *hệ vectơ*).

- Một *tổ hợp tuyến tính* của các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là một biểu thức có dạng

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n, k_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n.$$

- Vectơ $\beta \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *biểu thị tuyến tính* (BTTT) được qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nếu tồn tại các số $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n.$$

Tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ có nghiệm.

Ví dụ 4: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$\alpha_1 = (1,0,-1,1), \alpha_2 = (0,1,0,3), \alpha_3 = (-1,1,1,2), \beta = (0,2,0,6)$$

Khi đó $2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 0\alpha_3, 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3$ là các tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Vì $\beta = 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3$ nên β BTTT được qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (chú ý là ta còn một biểu thị tuyến tính khác của β qua hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ là $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$).

Chú ý:

1. Một đẳng thức $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$ được gọi là một *biểu thị tuyến tính* hay (*tổ hợp tuyến tính*) của β qua các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Một vectơ có thể có nhiều biểu thị tuyến tính khác nhau qua một hệ vectơ.

2. Ta nói hệ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ nếu mỗi vectơ $\alpha_i, i = 1, \dots, n$, biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$.

Ví dụ 5: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ

$$\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (0,1,1), \alpha_3 = (1,1,0), \alpha_4 = (2,-1,1)$$

a) Vectơ $\beta = (-1,2,3)$ có BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ hay không?.

b) Vectơ $\beta = (-1,2,3)$ có BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ hay không?

c) Tìm điều kiện để vectơ $u = (a_1, a_2, a_3)$ BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

d) Tìm điều kiện để vectơ $u = (a_1, a_2, a_3)$ BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$.

Bài giải

a) Xét phương trình $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Do $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm. Do đó vectơ β BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Hơn nữa ta tìm được $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -1$.

Do đó $\beta = 0\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3$.

b) Xét phương trình $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_4 = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_1 = 3 \end{cases}$.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

Do $\text{rank}\, A < \text{rank}\, \bar{A}$ nên hệ phương trình vô nghiệm. Do đó vectơ β không BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

c) Xét phương trình $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = u \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2. \\ x_1 + x_2 = a_3 \end{cases}$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 1 & 1 & 0 & a_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 1 & -1 & a_3 - a_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & -2 & a_3 - a_1 - a_2 \end{array}\right]$$

Do $\text{rank}\, A = \text{rank}\, \bar{A}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm. Do đó vectơ u luôn BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

d) Xét phương trình $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_4 = u \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = a_3 \end{cases}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 2 & -1 & 1 & a_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & -1 & -1 & a_3 - 2a_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 - 2a_1 + a_2 \end{array}\right]$$

u biểu thị tuyến tính $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ khi và chỉ khi hệ phương trình trên có nghiệm, tức là $\text{rank}\, A = \text{rank}\, \bar{A} \Leftrightarrow a_3 - 2a_1 + a_2 = 0 \Leftrightarrow 2a_1 = a_2 + a_3$.

Nhận xét: Để xét vectơ β có BTTT được qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ hay không trong $\mathbb{R}^n$ thì ta lập ma trận $\bar{A}$ với các cột là các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, cột bổ sung là vectơ β, rồi tìm $\text{rank}\, A$. Nếu $\text{rank}\, A = \text{rank}\, \bar{A}$ thì vectơ β BTTT được qua hệ, hơn nữa ta tìm được đẳng thức biểu diễn (các hệ số của $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ trong biểu diễn chính là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính).

Ví dụ 6: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ cho hệ vectơ

$$\alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (2,3,-1,0), \alpha_3 = (-1,-1,1,1), \alpha_4 = (1,2,1,-1)$$

a) Vectơ $\beta = (1,2,2,3)$ có BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ hay không?.

b) Tìm điều kiện để vectơ $u = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

c) Tìm điều kiện để vectơ $u = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Bài giải

a) $$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Do đó β biểu thị tuyến tính $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ hơn nữa $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$.

b) $\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a_1 \\ 1 & 3 & -1 & a_2 \\ 1 & -1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 - a_1 \\ 0 & -3 & 2 & a_3 - a_1 \\ 0 & -2 & 2 & a_4 - a_1 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 2 & a_3 + 3a_2 - 4a_1 \\ 0 & 0 & 2 & a_4 + 2a_2 - 3a_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 2 & a_3 + 3a_2 - 4a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 - a_3 - a_2 + a_1 \end{array}\right]$

u biểu thị tuyến tính $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ khi và chỉ khi hệ phương trình trên có nghiệm, tức là $\text{rank}\, A = \text{rank}\, \bar{A} \Leftrightarrow a_4 - a_3 - a_2 + a_1 = 0 \Leftrightarrow a_2 + a_3 = a_1 + a_4$.

c) $\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & a_1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & a_2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & a_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a_2 - a_1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & a_3 - a_1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & a_4 - a_1 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & a_3 + 3a_2 - 4a_1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & a_4 + 2a_2 - 3a_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & a_3 + 3a_2 - 4a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & a_4 - a_3 - a_2 + a_1 \end{array}\right]$

Do $\text{rank}\, A = \text{rank}\, \bar{A}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm. Do đó vectơ u luôn BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Ví dụ 7: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho hai hệ vectơ

$$\alpha_1 = (1,2,1), \alpha_2 = (2,-2,1), \alpha_3 = (3,2,2) \qquad (U)$$

$$\beta_1 = (1,1,1), \beta_2 = (1,1,0), \beta_3 = (1,0,0) \qquad (V).$$

Hệ (U) có biểu thị tuyến tính được qua hệ (V) hay không?.

Bài giải

Ta lần lượt kiểm tra 3 phương trình vectơ sau có ngiệm hay không

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_1 \text{ (Hệ 1)}$$

$$y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 = \beta_2 \text{ (Hệ 2)}$$

$$z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2 + z_3\alpha_3 = \beta_3 \text{ (Hệ 3)}.$$

Ta sẽ xét chung ma trận chia khối sau:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right].$$

Hệ 1 có nghiệm $x_3 = \frac{-1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{3}{2}$.

Hệ 2 có nghiệm $y_3 = \frac{5}{2}, y_2 = \frac{-3}{2}, y_1 = \frac{-7}{2}$.

Hệ 3 có nghiệm $z_3 = 2, z_2 = -1, z_1 = -3$.

Vậy (U) biểu thị tuyến tính được qua hệ (V). Hơn nữa

$$\beta_1 = \frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3, \beta_2 = \frac{5}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{7}{2}\alpha_3, \beta_3 = -3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3.$$

3.2.2. Định nghĩa độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

Cho $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là một hệ vectơ của $\mathbb{R}^n$.

- Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ được gọi là hệ vectơ *phụ thuộc tuyến tính* (PTTT) nếu tồn tại các số thực $k_1, k_2, \dots, k_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \theta.$$

Tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \theta$ có nghiệm khác $(0,0,\dots,0)$

- Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ được gọi là hệ vectơ *độc lập tuyến tính* (ĐTTT) nếu nó không phụ thuộc tuyến tính. Nói cách khác hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ĐLTT khi và chỉ khi:

  Nếu $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \theta$ với $k_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ thì $a_i = 0$ với mọi i. Tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \theta$ có nghiệm duy nhất là $(0,0,\dots,0)$.

Ví dụ 8: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ hệ vectơ sau là ĐLTT hay PTTT?.

$$\alpha_1 = (1,0,1,1), \alpha_2 = (0,1,2,3), \alpha_3 = (1,2,3,4).$$

Bài giải

Xét hệ phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Do $\text{rank}\, A = 3$ nên hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường $(0,0,0)$.

Vậy hệ vectơ trên ĐLTT.

Ví dụ 9: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$. Hệ vectơ sau là ĐLTT

$$\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (0,0,1).$$

Tổng quát: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$. Hệ vectơ sau là độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,0,\dots,0), \alpha_2 = (0,1,\dots,0), \dots, \alpha_n = (0,0,\dots,1)$$

Nhận xét: Để xét hệ m vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ĐLTT hay PTTT trong $\mathbb{R}^n$ ta lập ma trận A với các cột là các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ rồi tìm $\text{rank}\, A$. Nếu $\text{rank}\, A = m$ (số vectơ) thì hệ ĐLTT, nếu $\text{rank}\, A < m$ thì hệ PTTT.

Nếu A là ma trận vuông thì hệ vectơ ĐLTT khi và chỉ khi A không suy biến.

3.2.3. Các tính chất cơ bản

1. Hệ chứa vectơ θ luôn PTTT.

2. Hệ gồm 1 vectơ PTTT khi và chỉ khi đó là vectơ θ, hệ gồm 2 vectơ PTTT khi và chỉ khi 2 vectơ đó tỉ lệ.

3. Nếu một hệ ĐLTT thì hệ con của nó cũng ĐLTT.

4. Một hệ chứa hệ con PTTT thì PTTT.

5. Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ PTTT khi và chỉ khi có một vectơ có một vectơ trong hệ biểu thị tuyến tính qua các vectơ còn lại của hệ.

6. Nếu hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ĐLTT thì hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ ĐLTT khi và chỉ khi β không biểu thị tuyến tính được qua hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

3.2.4. Hạng của một hệ vectơ

a. Hệ vectơ tương đương

Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, cho hai hệ vectơ (α) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ và (β) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Ta nói hệ (α) *tương đương* với hệ (β), kí hiệu $(\alpha) \sim (\beta)$, nếu (α) BTTT được qua hệ (β) và ngược lại.

Ví dụ 10: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, xét hai hệ vectơ

$$\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (0,0,1) \qquad (\alpha)$$

$$\beta_1 = (1,1,1), \beta_2 = (1,1,0), \beta_3 = (1,0,0) \qquad (\beta).$$

Khi đó $(\alpha) \sim (\beta)$.

b. Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ

Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, cho hệ vectơ (α) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Hệ con $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$ của hệ (α) được gọi là *hệ con độc lập tuyến tính tối đại* của hệ (α) nếu $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$ ĐLTT và mọi vectơ α_i của hệ (α) đều BTTT được qua hệ $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$.

Nhận xét:

i) Một hệ vectơ có thể có nhiều hệ con độc lập tuyến tính tối đại.

ii) Hệ con độc lập tuyến tính tối đại tương đương với hệ vectơ đó.

c. Hạng của một hệ vectơ

Bổ đề (bổ đề cơ bản về sự độc lập tuyến tính): Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, cho hai hệ vectơ (α) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ và (β) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$. Nếu hệ (α) ĐLTT và BTTT được qua hệ (β) thì $n \leq m$.

Từ bổ đề trên suy ra ngay hai hệ vectơ ĐLTT tương đương thì có số vectơ bằng nhau.

Hệ (α) có thể có nhiều hệ con độc lập tuyến tính tối đại khác nhau. Tuy nhiên tất cả các hệ con độc lập tuyến tính tối đại đều tương đương với nhau. Do đó tất cả các hệ con độc lập tuyến tính tối đại đều có số vectơ bằng nhau. Số đó được gọi là hạng của hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, kí hiệu $\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Như vậy ta có

$$\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \text{Số vectơ của hệ con ĐLTT tối đại của hệ } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n.$$

d. Cách tìm hạng, hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ trong $\mathbb{R}^n$

Trong $\mathbb{R}^n$ cho hệ vectơ $\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$

$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$

$$\dots$$

$$\alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}).$$

Để tìm hạng và hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ta làm như sau:

- Lập ma trận A là ma trận dòng của các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, đưa ma trận A về dạng bậc thang. Khi đó

$$\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \text{rank}\, A.$$

Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ gồm các vectơ ứng với các dòng khác không của ma trận bậc thang.

Ví dụ 11: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^5$ cho hệ vectơ

$$\alpha_1 = (3, 2, 0, 1), \alpha_2 = (4, 1, 0, 2), \alpha_3 = (3, 1, -1, 0), \alpha_4 = (1, 0, 1, 2).$$

Tìm một hệ con độc độc lập tuyến tính tối đại và hạng của hệ vectơ trên.

Bài giải

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (2) \\ (3) \\ (1) \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (2) \\ (3) \\ (1) \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (2) \\ (3) \\ (1) \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (2) \\ (1) \\ (3) \end{matrix}$$

Vậy $\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = \text{rank}\, A = 3$.

Hệ con ĐLTT tối đại của $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ là $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ (có thể ra kết quả $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$).

3.3. Không gian vectơ con, cơ sở và số chiều

3.3.1. Định nghĩa và các ví dụ

a. Định nghĩa

Tập con L (khác ϕ) của $\mathbb{R}^n$ được gọi là *không gian vectơ con* của $\mathbb{R}^n$ nếu thỏa hai điều kiện sau:

1. Với mọi $x, y \in L$, ta có $x + y \in L$.

2. Với mọi $k \in \mathbb{R}$ và mọi $x \in L$ thì $kx \in L$.

Chú ý:

i) Điều kiện 1 được gọi là đóng kín đối với phép cộng, điều kiện 2 được gọi là đóng kín đối với phép nhân vô hướng.

ii) Hai điều kiện trên tương đương với điều kiện sau:

Với mọi $k, l \in \mathbb{R}$ và mọi $x, y \in U$ thì $kx + ly \in U$.

b. Các ví dụ

1. $\{\theta\}$ và $\mathbb{R}^n$ là các không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Được gọi là không gian vectơ con *tầm thường* của $\mathbb{R}^n$.

2. Tập hợp tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (n phương trình n ẩn) là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$.

3. Tập $A = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Tập $B = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ không là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$.

3.3.1. Cơ sở, số chiều của không gian vectơ con

Cho L là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$ và hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ của L.

- Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ được gọi là một *hệ sinh* của L nếu mọi vectơ của L đều BTTT được qua hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

- Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ được gọi là một *cơ sở* của L nếu nó là hệ sinh của L và là hệ ĐLTT.

- Từ định nghĩa thì hai cơ sở bất kì của L đều tương đương và ĐLTT, do đó chúng có số vectơ bằng nhau. Số đó được gọi là *số chiều* của L, kí hiệu là $\dim L$. Như vậy

$$\dim L = \text{Số vectơ của một cơ sở bất kì của } L.$$

Nếu $L = \{\theta\}$ ta quy ước $\dim L = 0$. Nếu $\dim L = m$ ta có thể gọi L là *không gian vectơ con m chiều*.

Ví dụ 12: Hệ vectơ $\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (0,0,1)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Do đó $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Bạn đọc thử kiểm tra hệ sau cũng là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$\beta_1 = (1,0,1), \beta_2 = (1,1,0), \beta_3 = (0,1,1).$$

Tổng quát: Xét không gian vectơ $\mathbb{R}^n$. Hệ vectơ

$$\alpha_1 = (1,0,\dots,0), \alpha_2 = (0,1,\dots,0), \dots, \alpha_n = (0,0,\dots,1)$$

là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$, gọi là cơ sở *chính tắc* của $\mathbb{R}^n$, kí hiệu E, và ta có $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Định lý (đặc trưng của cơ sở): Một hệ vectơ là cơ sở của không gian vectơ con L khi và chỉ khi mọi vectơ của L đều BTTT duy nhất qua hệ này.

Định lý: Nếu L là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$ thì $\dim L \leq \dim \mathbb{R}^n$ và $\dim L = \dim \mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi $L = \mathbb{R}^n$.

3.3.2. Tính chất cơ bản của không gian vectơ hữu hạn chiều

Cho L là một không gian vectơ con hữu hạn chiều, $\dim L = m$. Khi đó:

1. Mọi hệ vectơ có nhiều hơn m vectơ đều PTTT.

2. Mọi hệ có m vectơ ĐLTT đều là cơ sở của L.

3. Mọi hệ có m vectơ là hệ sinh của L đều là cơ sở của L.

4. Mọi hệ ĐLTT có k vectơ đều có thể bổ sung thêm $m - k$ vectơ để trở thành cơ sở.

Chú ý: Từ tính chất 2 và 3 nếu biết $\dim L = m$ thì để chứng minh một hệ m vectơ là cơ sở của L ta chỉ cần chứng minh hệ đó là hệ ĐLTT hoặc hệ sinh.

3.3.3. Một số không gian con đặc biệt

a. Không gian giao và không gian tổng

Dùng tiêu chuẩn không gian vectơ con, ta dễ dàng kiểm tra được các kết quả sau:

- Nếu A, B là các không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$ thì $A \cap B$ cũng là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Tổng quát, giao của một họ tùy ý các không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$.

- Cho A, B là các không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$, ta định nghĩa tập hợp:

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(x \in A + B \Leftrightarrow x = a + b \text{ với } a \in A, b \in B)$$

Khi đó $A + B$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$, được gọi là *không gian tổng* của các không gian con A và B.

Liên quan đến số chiều của không gian giao và không gian tổng ta có định lý sau.

Định lý: Nếu A, B là các không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$ thì

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B).$$

b. Không gian con sinh bởi một hệ vectơ

Cho $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ là một hệ vectơ của $\mathbb{R}^n$. Ta định nghĩa

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle = \{x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m | k_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Dùng tiêu chuẩn không gian vectơ con, ta thấy ngay $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$ là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Không gian này gọi là không gian con của $\mathbb{R}^n$ sinh bởi hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (hay còn gọi là bao tuyến tính của hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$).

Nhận xét:

i) Từ định nghĩa, ta có $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ chính là một hệ sinh của không gian vectơ con $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$. Bởi vậy, mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ đều là hệ sinh, do đó là cơ sở của không gian vectơ con $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$.

ii) Nếu $A = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$, $B = \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \rangle$ thì $A + B = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_k \rangle$.

Chú ý: Ta chứng minh được $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$ là không gian con bé nhất (theo quan hệ bao hàm) chứa hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

Ví dụ 13: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$\alpha_1 = (1,2,1,1), \alpha_2 = (3,6,5,7), \alpha_3 = (4,8,6,8), \alpha_4 = (8,16,12,16)$$

$$\beta_1 = (1,2,2,3), \beta_2 = (2,5,5,6), \beta_3 = (3,7,7,9), \beta_4 = (6,14,14,18)$$

Đặt $U = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle$, $W = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \rangle$.

Xác định cơ sở và số chiều của các không gian vectơ con $U, W, U + W$.

Bài giải

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 16 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 7 & 9 \\ 6 & 14 & 14 & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $U = \langle (1,2,1,1), (0,0,2,4) \rangle$, $W = \langle (1,2,2,3), (0,1,1,0) \rangle$.

$\dim U = 2$ và một cơ sở là $(1,2,1,1), (0,0,2,4)$.

$\dim W = 2$ và một cơ sở là $(1,2,2,3), (0,1,1,0)$.

Như vậy $U + W = \langle (1,2,1,1), (0,0,2,4), (1,2,2,3), (0,1,1,0) \rangle$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $\dim(U + W) = 3$ và một cơ sở là $(1,2,1,1), (0,1,1,0), (0,0,1,2)$.

c. Không gian con các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm m phương trình và n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} (I)$$

Mỗi nghiệm của hệ (I) có thể xem như là một vectơ trong không gian $\mathbb{R}^n$. Dùng tiêu chuẩn không gian vectơ con ta có thể dễ dàng chứng minh được S, tập tất cả các nghiệm của hệ (I), là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Không gian vectơ con này được gọi là *không gian con các nghiệm* của hệ (I).

Kí hiệu $r = \operatorname{rank} A$ thì $\dim S = n - r$. Cơ sở của không gian nghiệm S của hệ (I) chính là là hệ nghiệm cơ bản của hệ (I).

Ví dụ 14: Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm S của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta thấy $\operatorname{rank} A = 3$, hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số x_2, x_5. Hệ trên tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 5x_5 \\ x_3 = 4x_5 \\ x_4 = 2x_5 \\ x_2, x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$*$ Cho $x_2 = 1, x_5 = 0$, ta có $x_1 = -2, x_3 = 0, x_4 = 0$, ta được nghiệm

$$\alpha_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$$

$*$ Cho $x_2 = 0, x_5 = 1$ ta có $x_1 = -5, x_3 = 4, x_4 = 2$ ta được nghiệm

$$\alpha_2 = (-5, 0, 4, 2, 1)$$

Vậy $\dim S = 2$ và một cơ sở là $\alpha_1 = (-2, 1, 0, 0, 0), \alpha_2 = (-5, 0, 4, 2, 1)$.

Nhận xét: Nếu A là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

và B là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \cdots + b_{kn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Khi đó $A \cap B$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \cdots + b_{kn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Chú ý: Trong không gian $\mathbb{R}^n$, nếu A là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất thì sau khi tìm được cơ sở của A, ta sẽ chuyển A về dạng không gian con sinh bởi một hệ vectơ. Ngược lại, nếu $A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$, thì vectơ $x = (x_1, \dots, x_n)$ thuộc A khi và chỉ khi phương trình vectơ $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \beta$ có nghiệm. Tìm điều kiện của $x_1, \dots, x_n$ để phương trình có nghiệm (giống BTTT qua hệ vectơ), tập hợp các điều kiện này là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Khi đó A là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất này.

Ví dụ 15: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$\alpha_1 = (1, -1, 0, 1), \alpha_2 = (1, 1, 1, 0), \alpha_3 = (2, 0, 1, 1)$$

Đặt $A = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$. Hãy chuyển A về dạng không gian nghiệm.

Bài giải

Giả sử $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in A$. Xét phương trình $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + 2x_3 = x_1 \\ -k_1 + k_2 = x_2 \\ k_2 + k_3 = x_3 \\ k_1 + k_3 = x_4 \end{cases}.$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_3 - x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 + x_4 \end{array}\right]$$

Hệ phương trình trên có nghiệm, tức là $\text{rank } A = \text{rank } \bar{A} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_3 - x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Do đó điều kiện cần và đủ để $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in A$ là $\begin{cases} 2x_3 - x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Vậy A chính là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

3.4. Tọa độ của vectơ trong cơ sở

3.4.1. Định nghĩa và các ví dụ

a. Định nghĩa

Cho KGVT n chiều $\mathbb{R}^n$, (α) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Với $x \in \mathbb{R}^n$, khi đó x được viết duy nhất dưới dạng

$$x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n.$$

Bộ số $(a_1, a_2, \dots, \alpha_n)$ được gọi là *tọa độ* của x trong cơ sở (α) (a_i được gọi là tọa độ thứ i), kí hiệu ${}^{x}/_{(\alpha)} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, hoặc

$${}^{[x]}/_{(\alpha)} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

b. Ma trận đổi cơ sở

Trong KGVT $\mathbb{R}^n$, cho hai cơ sở (α) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ và (β) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Khi đó các vectơ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ được viết duy nhất dưới dạng

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n \\ \cdots \\ \beta_n = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

Ma trận các hệ số chuyển vị, kí hiệu $T_{\alpha\beta}$, được gọi là ma trận *đổi cơ sở* từ (α) sang (β). Như vậy

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Từ định nghĩa $T_{\alpha\beta}$ là ma trận khả nghịch và $T_{\beta\alpha} = T_{\alpha\beta}^{-1}$.

c. Công thức đổi tọa độ

Cho không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ và các cơ sở (α) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, (β) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Giả sử ${}^{x}/_{(\alpha)} = (a_1, a_2, \dots, a_n), {}^{x}/_{(\beta)} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Khi đó ta có ${}^{[x]}/_{(\alpha)} = T_{\alpha\beta}\, {}^{[x]}/_{(\beta)}$, viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = T_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Công thức trên cho phép tính tọa độ của x trong cơ sở (α) theo tọa độ của x trong cơ sở (β).

Ví dụ 16: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho hai cơ sở

$$\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (-1,2,1), \alpha_3 = (1,3,2) \qquad (\alpha)$$

$$\beta_1 = (1,0,1), \beta_2 = (1,1,0), \beta_3 = (0,1,1) \qquad (\beta).$$

a) Tìm ma trận đổi cơ sở từ (α) sang (β).

b) Viết công thức tính tọa độ của vectơ $x \in \mathbb{R}^3$ trong cơ sở (α) theo tọa độ của x trong cơ sở (β).

Hướng dẫn

a) Giả sử

$$\beta_1 = a_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \text{ (Hệ 1)}$$

$$\beta_2 = b_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \text{ (Hệ 2)}$$

$$\beta_3 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \text{ (Hệ 3)}.$$

Ma trận các hệ số mở rộng:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Hệ 1 có nghiệm $a_3 = -2, a_2 = 1, a_1 = 4$.

Hệ 2 có nghiệm $b_3 = 3, b_2 = -2, b_1 = -4$.

Hệ 3 có nghiệm $c_3 = -1, c_2 = 1, c_1 = 2$.

Vậy ma đổi cơ sở từ (α) sang (β) là

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Giả sử ${}^{x}/_{(\alpha)} = (x_1, x_2, x_3), {}^{x}/_{(\beta)} = (y_1, y_2, y_3)$.

Công thức tính tọa độ của x trong cơ sở (α) theo tọa độ của x trong cơ sở (β) là

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ hay } \begin{cases} x_1 = 4y_1 - 4y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_3 = -2y_1 + 3y_2 - y_3 \end{cases}.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 3

Dạng toán: Điều kiện tổ hợp tuyến tính.

1. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, m)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ

$$\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (-1,1)$$

A. $m = 2$ B. $m \neq 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

2. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, m)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ

$$\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (-1, -2)$$

A. $m = 2$ B. $m = -1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

3. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (3, m)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ

$$\alpha_1 = (1, -1), \alpha_2 = (-2, 2)$$

A. $m = 3$ B. $m = -3$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

4. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (2, m)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, -2), \alpha_2 = (-2, 4)$

A. $m = -4$ B. $m \neq -4$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

5. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (2, m)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, -2), \alpha_2 = (0, 1)$

A. $m = -4$ B. $m \neq -4$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

6. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (2, 1, m)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (0, 1, 2)$

A. $m = 0$ B. $m = 6$ C. $m = 12$ D. $m = -12$

7. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, m, -1)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, -1, 2), \alpha_2 = (1, -2, 3)$

A. $m = -1$ B. $m \neq -1$ C. $m = 2$ D. $m \neq 2$

8. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, 0, m + 1)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, 1, 3), \alpha_2 = (1, -2, 0)$

A. $m = 1$ B. $m \neq 1$ C. $m = 3$ D. $m \neq 3$

9. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, 2, m + 5)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ

$$\alpha_1 = (1, 1, 2), \alpha_2 = (2, 3, 5), \alpha_3 = (-1, 2, 1)$$

A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

10. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (2, -1, m + 6)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, -1, 2), \alpha_2 = (0, 2, 2), \alpha_3 = (1, -2, 1)$

A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

11. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, 2, m)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, 1, -1), \alpha_2 = (2, 3, -1), \alpha_3 = (1, 1, 0)$

A. $m = 0$ B. $m = -1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

12. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (0, m+1, m+1)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,1,-1), \alpha_2 = (0,1,1), \alpha_3 = (1,3,2)$

A. $m = 0$ B. $m = -1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

13. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1,2,m-3)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ

$$\alpha_1 = (-1, m, m-1), \alpha_2 = (1, -1, 1-m)$$

A. $m = 1$ B. $m = -2$ C. $m = 1 \vee m = -2$ D. $m = 1 \vee m = 2$

14. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1,0,m+4)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,-1,2), \alpha_2 = (0,1,1), \alpha_3 = (-1,3,0)$

A. $m = -1$ B. $m \neq -1$ C. $m = 1$ D. $m \neq 1$

15. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, m, 4)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,1,3), \alpha_2 = (1,0,3)$

A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

16. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (2, m+4, 3m+13)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (1,1,1), \alpha_3 = (1,3,5)$

A. $m = 0$ B. $m \neq 0$ C. $m \neq -7$ D. $m = -7$

17. Với điều kiện nào của x_1, x_2 thì vectơ $u = (x_1, x_2)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,-1), \alpha_2 = (-2,2)$

A. $x_1 = x_2$ B. $x_1 = -x_2$ C. $x_1 = -2x_2$ D. $x_2 = -2x_1$

18. Với điều kiện nào của x_1, x_2 thì vectơ $u = (x_1, x_2)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,-2), \alpha_2 = (1,2)$

A. x_1, x_2 tùy ý B. $x_1 = -x_2$ C. $x_1 = -2x_2$ D. $x_2 = -2x_1$

19. Với điều kiện nào của x_1, x_2 thì vectơ $u = (x_1, x_2)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (3,-2), \alpha_2 = (1,2)$

A. x_1, x_2 tùy ý B. $x_1 = -x_2$ C. $x_1 = -2x_2$ D. $x_2 = -2x_1$

20. Với điều kiện nào của x_1, x_2 thì vectơ $u = (x_1, x_2)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (-1,-2)$

A. $x_1 = 2x_2$ B. $x_2 = 2x_1$ C. $x_1 \neq 2x_2$ D. $x_2 \neq 2x_1$

21. Với điều kiện nào của x_1, x_2 thì vectơ $u = (x_1, x_2)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (-1,2)$

A. x_1, x_2 tùy ý B. Không có giá trị x_1, x_2 C. $x_2 = -x_1$ D. $x_2 \neq -x_1$

22. Với điều kiện nào của x_1, x_2, x_3 thì vectơ $u = (x_1, x_2, x_3)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (0,1,1), \alpha_3 = (1,1,0)$

A. $x_3 = x_1 + x_2$ B. $x_1 = x_2 = x_3$ C. $x_2 = 3x_1$ D. x_1, x_2, x_3 tùy ý

23. Với điều kiện nào của x_1, x_2, x_3 thì vectơ $u = (x_1, x_2, x_3)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (2, -1, 1)$

A. $x_3 = x_1 + x_2$ B. $x_1 = x_2 = x_3$ C. $2x_1 = x_2 + x_3$ D. x_1, x_2, x_3 tùy ý

24. Với điều kiện nào của x_1, x_2, x_3 thì vectơ $u = (x_1, x_2, x_3)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (2, 5, -1), \alpha_3 = (-3, -4, 5)$

A. $x_2 = 3x_1 + x_2$ B. $x_3 \neq x_2 - 2x_1$

C. Không có giá trị x_1, x_2, x_3 D. x_1, x_2, x_3 tùy ý

25. Với điều kiện nào của x_1, x_2, x_3 thì vectơ $u = (x_1, x_2, x_3)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, 2, 1), \alpha_2 = (0, -1, -1), \alpha_3 = (1, 3, 2)$

A. $x_2 = x_1 + x_3$ B. $x_2 \neq x_1 + x_3$

C. Không có giá trị x_1, x_2, x_3 D. x_1, x_2, x_3 tùy ý

26. Với điều kiện nào của x_1, x_2, x_3 thì vectơ $u = (x_1, x_2, x_3)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (5, 6, 7)$

A. $x_3 = x_2 - x_1$ B. $x_3 \neq x_2 - x_1$

C. Không có giá trị x_1, x_2, x_3 D. x_1, x_2, x_3 tùy ý

27. Với điều kiện nào của x_1, x_2, x_3 thì vectơ $u = (x_1, x_2, x_3)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (5, 6, 6)$

A. $x_2 = x_3$ B. $x_2 \neq x_3$

C. $x_3 = 5x_1 + x_2$ D. $x_3 \neq 5x_1 + x_2$

Dạng toán: Điều kiện độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính.

28. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (-1, m)$$

A. $m = -2$ B. $m \neq -2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

29. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (-1, 3), \alpha_2 = (1, m)$$

A. $m = -3$ B. $m \neq -3$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

30. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (m, m + 1)$$

A. $m = 1$ B. $m \neq 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

31. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 0), \alpha_2 = (-1, m)$$

A. $m = 0$ B. $m \neq 0$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

32. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (-1,1), \alpha_3 = (1,m)$$

A. $m = 2$ B. $m \neq 2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

33. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (-1,-2), \alpha_3 = (-1,m)$$

A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

34. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,-1), \alpha_2 = (-2,3), \alpha_3 = (3,m)$$

A. $m = 3$ B. $m = -3$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

35. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,-2), \alpha_2 = (-2,4), \alpha_3 = (2,m)$$

A. $m = -4$ B. $m \neq -4$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

36. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (0,1,2), \alpha_3 = (2,1,m)$$

A. $m = 0$ B. $m = 6$ C. $m = 12$ D. $m = -12$

37. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,-1,2), \alpha_2 = (1,-2,3), \alpha_3 = (1,m,-1)$$

A. $m = -1$ B. $m \neq -1$ C. $m = 2$ D. $m \neq 2$

38. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,-1,2), \alpha_2 = (0,2,2), \alpha_3 = (2,-1,m+6)$$

A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

39. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (1,m,0), \alpha_3 = (0,1,m)$$

A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

40. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (1,m,0), \alpha_3 = (2,m,1)$$

A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

41. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (-1,m,m-1), \alpha_2 = (1,-1,1-m), \alpha_3 = (1,2,m-3)$$

A. $m = 1$ B. $m = -2$ C. $m = 1 \vee m = -2$ D. $m = 1 \vee m = 2$

42. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, m, m+1), \alpha_2 = (m, -1, 1-m), \alpha_3 = (m+1, 0, m+1)$$

A. $m = -1 \wedge m = 1$ B. $m = -1 \vee m = 1$

C. $m = -1 \wedge m = 0 \wedge m = 1$ D. $m = -1 \vee m = 0 \vee m = 1$

43. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 1, 3), \alpha_2 = (1, -2, 0), \alpha_3 = (1, 0, m+1)$$

A. $m = 1$ B. $m \neq 1$ C. $m = 3$ D. $m \neq 3$

44. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 1, 2), \alpha_2 = (2, 3, 5), \alpha_3 = (1, 2, m+5)$$

A. $m = -2$ B. $m \neq -2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

45. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 1, -1), \alpha_2 = (2, 3, -1), \alpha_3 = (1, 2, m)$$

A. $m = 0$ B. $m \neq 2$ C. $m \neq 0$ D. $m = 2$

46. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, m, -1), \alpha_2 = (0, 1, m), \alpha_3 = (1, m+1, m-1)$$

A. $m = 0$ B. $m = -1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

47. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (m, -1, -1), \alpha_2 = (1, m+1, 1), \alpha_3 = (2m+1, -1, 2)$$

A. $m = 0$ B. $m = -1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

48. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, m+1, 2), \alpha_2 = (0, 1, m), \alpha_3 = (m, -1, m)$$

A. $m = 0$ B. $m \neq -1 \wedge m \neq 0$

C. $m = -1 \vee m = 0$ D. $m \neq 0$

49. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (m, 1, 1), \alpha_2 = (1, m, 1), \alpha_3 = (1, 1, m)$$

A. $m = -2 \vee m = 1$ B. $m \neq -2 \wedge m \neq 1$

C. m tùy ý D. Không có giá trị m

50. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 1, -1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 3, 2), \alpha_4 = (0, m+1, 2m+1)$$

A. $m = 0$ B. $m = -1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

51. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,-1,2), \alpha_2 = (0,1,1), \alpha_3 = (-1,3,0), \alpha_4 = (1,0,m+4)$$

A. $m = 0$ B. $m = -1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

52. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,-1,0,0), \alpha_2 = (0,1,1,-1), \alpha_3 = (-1,0,0,0), \alpha_4 = (1,0,m,2)$$

A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

53. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,1,0,2), \alpha_2 = (0,1,-1,1), \alpha_3 = (-1,0,0,m), \alpha_4 = (1,0,m,2)$$

A. $m = 2$ B. $m \neq \pm\sqrt{2}$ C. $m = \pm\sqrt{2}$ D. $m \neq 2$

54. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (-1,0,1,2), \alpha_2 = (0,1,-m,1), \alpha_3 = (1,0,0,2), \alpha_4 = (1,0,m,2)$$

A. $m = 0$ B. $m \neq 4$ C. $m = 4$ D. $m \neq 0$

55. Hệ vectơ nào sau đây phụ thuộc tuyến tính

A. $(1,-1,2), (0,1,1), (1,0,3)$ B. $(1,-1,2), (0,1,1), (0,0,1)$

C. $(1,-1,2), (0,1,1), (0,2,3)$ D. $(1,-1,2), (0,1,1), (3,2,3)$

56. Hệ vectơ nào sau đây độc lập tuyến tính

A. $(1,3,1), (-1,2,1), (0,5,2)$ B. $(1,3,1), (-1,2,1), (1,0,3)$

C. $(1,3,1), (-1,2,1), (2,1,0)$ D. $(1,3,1), (-1,2,1), (1,8,3)$

Dạng toán: Hạng của hệ vectơ.

57. Tìm hạng, kí hiệu r, của hệ vectơ $\alpha_1 = (1,-1), \alpha_2 = (1,1)$

A. $r = 0$ B. $r = 1$ C. $r = 2$ D. $r = 3$

58. Tìm hạng, kí hiệu r, của hệ vectơ $\alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (1,1,1), \alpha_3 = (1,3,5)$

A. $r = 0$ B. $r = 1$ C. $r = 2$ D. $r = 3$

59. Tìm hạng, kí hiệu r, của hệ vectơ $\alpha_1 = (1,0,-1), \alpha_2 = (1,1,1), \alpha_3 = (2,1,1)$

A. $r = 0$ B. $r = 1$ C. $r = 2$ D. $r = 3$

60. Tìm hạng, kí hiệu r, của hệ vectơ

$$\alpha_1 = (1,0,-1), \alpha_2 = (1,1,1), \alpha_3 = (2,1,1), \alpha_4 = (3,1,0)$$

A. $r = 1$ B. $r = 2$ C. $r = 3$ D. $r = 4$

61. Tìm hạng, kí hiệu r, của hệ vectơ

$$\alpha_1 = (1,0,1,-1), \alpha_2 = (1,1,3,0), \alpha_3 = (2,1,5,-1), \alpha_4 = (1,1,4,0)$$

A. $r = 1$ B. $r = 2$ C. $r = 3$ D. $r = 4$

62. Tìm hạng, kí hiệu r, của hệ vectơ

$$\alpha_1 = (1,1,1,2), \alpha_2 = (-1,0,-1,-1), \alpha_3 = (2,2,4,5), \alpha_4 = (-1,-1,1,1)$$

A. $r = 1$ B. $r = 2$ C. $r = 3$ D. $r = 4$

63. Tìm giá trị của m đê hệ vectơ sau có hạng là 2

$$\alpha_1 = (1,1,2), \alpha_2 = (1,1,m+2), \alpha_3 = (-2,-2,-4)$$

A. $m = 0$ B. $m \neq 0$ C. $m = -2$ D. $m \neq -2$

64. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau có hạng là 2

$$\alpha_1 = (1,1,2), \alpha_2 = (2,2-m,3), \alpha_3 = (1,m+1,3)$$

A. $m = 0$ B. $m \neq 0$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

65. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau có hạng là 3

$$\alpha_1 = (-1,1,0), \alpha_2 = (1,-1,m), \alpha_3 = (2,-1,m+1)$$

A. $m = 0$ B. $m \neq 0$ C. $m = -2$ D. $m \neq -2$

Dạng toán: Cơ sở của không gian vectơ.

66. Hệ vectơ nào sau đây là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$

A. $(1,-1),(0,1)$ B. $(1,-1),(-1,1)$

C. $(1,-1),(3,-3)$ D. $(1,-1),(-3,3)$

67. Hệ vectơ nào sau đây KHÔNG là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$

A. $(1,3),(3,1)$ B. $(1,3),(1,1)$

C. $(1,3),(-1,1)$ D. $(1,3),(-2,-6)$

68. Hệ vectơ nào sau đây là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

A. $(1,-1,1),(0,1,0),(1,0,1)$ B. $(1,-1,1),(0,1,0),(1,0,3)$

C. $(1,-1,1),(0,1,0),(1,1,1)$ D. $(1,-1,1),(0,1,0),(2,-3,2)$

69. Hệ vectơ nào sau đây KHÔNG là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

A. $(1,-1,-1),(-1,2,1),(0,2,3)$ B. $(1,-1,-1),(-1,2,1),(3,2,3)$

C. $(1,-1,-1),(-1,2,1),(0,1,0)$ D. $(1,-1,-1),(-1,2,1),(1,2,3)$

70. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$

$$\alpha_1 = (-1,1), \alpha_2 = (1,m)$$

A. $m = 0$ B. $m \neq 0$ C. $m = -1$ D. $m \neq -1$

71. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$

$$\alpha_1 = (-m, 1), \alpha_2 = (2, m)$$

A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

72. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 = (1, 1, 3), \alpha_2 = (1, -2, 0), \alpha_3 = (1, 3, m + 1)$$

A. $m = 12$ B. $m \neq 12$ C. $m \neq 4$ D. $m = 4$

73. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 = (1, m + 1, 3), \alpha_2 = (1, -2, 0), \alpha_3 = (1, 3, m + 1)$$

A. $m = 2 \vee m = -6$ B. $m \neq 2 \wedge m \neq -6$

C. $m \neq 2$ D. $m = -6$

74. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 = (-1, 2, 1), \alpha_2 = (m, -2, 1), \alpha_3 = (1, 0, m)$$

A. $m \neq -1 \wedge m \neq 2$ B. $m \neq 1 \wedge m \neq -2$

C. $m = -1 \vee m = 2$ D. $m = 1 \vee m = -2$

75. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 = (1, 2m, 1), \alpha_2 = (m, -2, 1), \alpha_3 = (1, 0, m)$$

A. $m = 1$ B. $m \neq -1$ C. $m \neq 1$ D. $m = -1$

76. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 = (1, 3, m), \alpha_2 = (m, 0, 1), \alpha_3 = (-1, 2, m)$$

A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

77. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 = (0, 3, m), \alpha_2 = (m, 2, m + 1), \alpha_3 = (m, -1, 1)$$

A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

78. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau KHÔNG là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$

$$\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (-1, m)$$

A. $m \neq -2$ B. $m = -2$ C. $m = 2$ D. $m \neq -2$

79. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau KHÔNG là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$

$$\alpha_1 = (m, 2), \alpha_2 = (2, m)$$

A. $m \neq 2 \wedge m \neq -2$ B. $m \neq 4$

C. $m = 2 \vee m = -2$ D. $m = 4$

80. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau KHÔNG là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (m,0,1), \alpha_3 = (1,2,m)$$

A. $m \neq 1$ B. $m \neq -1$ C. $m = 1$ D. $m = -1$

81. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau KHÔNG là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (m,-1,1), \alpha_3 = (1,2,m)$$

A. $m \neq 0 \wedge m \neq 1$ B. $m \neq 0 \wedge m \neq -1$

C. $m = 0 \vee m = -1$ D. $m = 0 \vee m = 1$

82. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau KHÔNG là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 = (m,1,1), \alpha_2 = (m,-1,1), \alpha_3 = (1,2,m)$$

A. $m \neq 1 \wedge m \neq -1$ B. $m \neq 1$

C. $m = 1 \vee m = -1$ D. $m = 1$

83. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau KHÔNG là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 = (1,1,m), \alpha_2 = (m,-1,1), \alpha_3 = (1,2,m)$$

A. $m \neq 1 \wedge m \neq -1$ B. $m \neq 1$

C. $m = 1 \vee m = -1$ D. $m = 1$

84. Tìm giá trị của m để hệ vectơ sau KHÔNG là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 = (1,1,m), \alpha_2 = (m,-1,1), \alpha_3 = (1,-1,m)$$

A. $m \neq 1 \wedge m \neq -1$ B. $m \neq 2$

C. $m = 1 \vee m = -1$ D. $m = 2$

Dạng toán: Cơ sở và số chiều của không gian vectơ con sinh bởi một hệ vectơ.

85. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^2$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (2,1), \alpha_2 = (-4,-2)$$

Khi đó số chiều của W, kí hiệu $n = \dim W$, là khẳng định nào sau đây:

A. $n = 0$ B. $n = 1$ C. $n = 2$ D. $n = 3$

86. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^2$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (-1,1), \alpha_3 = (2,4)$$

Khi đó số chiều của W, kí hiệu $n = \dim W$, là khẳng định nào sau đây:

A. $n = 0$ B. $n = 1$ C. $n = 2$ D. $n = 3$

87. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,2,1), \alpha_2 = (0,-1,4), \alpha_3 = (0,0,-2)$$

Khi đó số chiều của W, kí hiệu $n = \dim W$, là khẳng định nào sau đây:

A. $n = 0$ B. $n = 1$ C. $n = 2$ D. $n = 3$

88. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1, 2, 1), \alpha_2 = (-1, -1, -1), \alpha_3 = (2, 4, 4)$$

Khi đó số chiều của W, kí hiệu $n = \dim W$, là khẳng định nào sau đây:

A. $n = 0$ B. $n = 1$ C. $n = 2$ D. $n = 3$

89. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1, 0, -1), \alpha_2 = (1, 2, 0), \alpha_3 = (2, 2, -1)$$

Khi đó số chiều của W, kí hiệu $n = \dim W$, là khẳng định nào sau đây:

A. $n = 0$ B. $n = 1$ C. $n = 2$ D. $n = 3$

90. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1, 7, -3), \alpha_2 = (1, 9, -4), \alpha_3 = (0, 4, -2)$$

Khi đó số chiều của W, kí hiệu $n = \dim W$, là khẳng định nào sau đây:

A. $n = 0$ B. $n = 1$ C. $n = 2$ D. $n = 3$

91. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1, 2, -2), \alpha_2 = (2, 5, -2), \alpha_3 = (1, 3, 2), \alpha_4 = (2, 4, -4)$$

Khi đó số chiều của W, kí hiệu $n = \dim W$, là khẳng định nào sau đây:

A. $n = 1$ B. $n = 2$ C. $n = 3$ D. $n = 4$

92. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (-2, -3, 4), \alpha_3 = (1, 3, 1), \alpha_4 = (-1, -1, 3)$$

Khi đó số chiều của W, kí hiệu $n = \dim W$, là khẳng định nào sau đây:

A. $n = 1$ B. $n = 2$ C. $n = 3$ D. $n = 4$

93. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1, 0, 1, 2), \alpha_2 = (4, 1, 0, 2), \alpha_3 = (3, 1, -1, 0), \alpha_4 = (3, 2, 0, 1,).$$

Khi đó số chiều của W, kí hiệu $n = \dim W$, là khẳng định nào sau đây:

A. $n = 1$ B. $n = 2$ C. $n = 3$ D. $n = 4$

94. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^2$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (-1, -2)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. θ D. α_1, θ

95. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^2$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (-1,1), \alpha_3 = (1,1)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. $\alpha_1, \alpha_2, \theta$

96. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,-1,2), \alpha_2 = (2,-2,4), \alpha_3 = (-1,1,-2)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. θ

97. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (1,1,1), \alpha_3 = (1,3,5)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. α_3

98. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,-1,1), \alpha_2 = (1,0,3), \alpha_3 = (2,-2,2)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. α_3

99. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,0,-1), \alpha_2 = (2,1,-2), \alpha_3 = (1,0,-2)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. α_3

100. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,3,-1), \alpha_2 = (1,5,-1), \alpha_3 = (2,6,1)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. α_3

101. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,1,2), \alpha_2 = (2,3,4), \theta = (0,0,0)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \theta$ D. α_3

102. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,0,-1), \alpha_2 = (1,1,0), \alpha_3 = (2,1,1), \theta = (0,0,0)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta$

103. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,0,-1), \alpha_2 = (1,1,0), \alpha_3 = (2,1,-1), \alpha_4 = (2,0,-2)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

104. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,2,-1), \alpha_2 = (-2,-3,4), \alpha_3 = (1,3,2), \alpha_4 = (-1,-1,3)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

105. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,0,-1), \alpha_2 = (2,2,-1), \alpha_3 = (1,0,1), \alpha_4 = (3,2,-2)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

106. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,0,1,0), \alpha_2 = (1,1,1,1), \alpha_3 = (2,0,4,1), \alpha_4 = (2,0,2,0)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

107. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,-1,0,1), \alpha_2 = (0,1,2,1), \alpha_3 = (1,0,2,2), \alpha_4 = (2,-2,0,2)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

108. Cho W là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ

$$\alpha_1 = (1,-1,0,1), \alpha_2 = (0,1,2,1), \alpha_3 = (2,-2,1,2), \alpha_4 = (-1,2,2,1)$$

Khi đó các vectơ nào sau đây là một cơ sở của W.

A. α_1 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

Dạng toán: Tọa độ của vectơ.

109. Với giá trị nào của m thì vectơ $\alpha_1 = (3, m, m)$ thuộc W với

$$W = \{\alpha_1 = (1,1,0), \alpha_2 = (2,0,1)\}$$

A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. $m = -7$ D. $m = 7$

110. Với giá trị nào của m thì vectơ $\alpha_1 = (1,1,m)$ KHÔNG thuộc W với

$$W = \{\alpha_1 = (1,1,0), \alpha_2 = (2,0,1), \alpha_3 = (1,-1,1)\}$$

A. $m \neq 0$ B. $m \neq 1$ C. $m \neq 2$ D. $m \neq 3$

111. Tìm tọa độ x_1, x_2 của vectơ $u = (0,-2)$ theo cơ sở $\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (2,6)$

A. $x_1 = 2, x_2 = 1$ B. $x_1 = 2, x_2 = -1$

C. $x_1 = -1, x_2 = 2$ D. $x_1 = 1, x_2 = 2$

112. Tìm tọa độ x_1, x_2 của vectơ $u = (2,3)$ theo cơ sở $\alpha_1 = (1,3), \alpha_2 = (-1,0)$

A. $x_1 = 1, x_2 = -1$ B. $x_1 = 1, x_2 = 1$

C. $x_1 = 3, x_2 = 1$ D. $x_1 = 2, x_2 = 0$

113. Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (0,3,2)$ theo cơ sở

$$\alpha_1 = (1,2,1),\ \alpha_2 = (0,2,0), \alpha_3 = (-1,-1,1)$$

A. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$ B. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$

C. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ D. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2$

114. Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (6,9,-11)$ theo cơ sở

$$\alpha_1 = (1,1,-2), \alpha_2 = (2,3,-4), \alpha_3 = (3,5,-5)$$

A. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$ B. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$

C. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ D. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2$

115. Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (0,1,0)$ theo cơ sở

$$\alpha_1 = (1,1,1),\ \alpha_2 = (-1,-2,-2), \alpha_3 = (1,2,1)$$

A. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1$ B. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$

C. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ D. $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$

116. Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (-1,4,3)$ theo cơ sở

$$\alpha_1 = (1,-1,2),\ \alpha_2 = (-2,3,-3), \alpha_3 = (-1,3,2)$$

A. $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$ B. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$

C. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ D. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$

117. Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (1,6,3)$ theo cơ sở

$$\alpha_1 = (1,2,1),\ \alpha_2 = (-3,-4,-1), \alpha_3 = (1,3,1)$$

A. $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$ B. $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2$

C. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -1$ D. $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -2$

118. Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (1,-2,-1)$ theo cơ sở

$$\alpha_1 = (1,3,2),\ \alpha_2 = (-2,-7,-5), \alpha_3 = (1,1,1)$$

A. $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$ B. $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2$

C. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$ D. $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 0$

119. Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (10, 13, 20)$ theo cơ sở

$$\alpha_1 = (1, 1, 2),\ \alpha_2 = (7, 9, 16),\ \alpha_3 = (-3, -4, -4)$$

A. $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$ B. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

C. $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 0$ D. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$

120. Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (2, -3, -2)$ theo cơ sở

$$\alpha_1 = (2, -2, 2),\ \alpha_2 = (1, 1, 5),\ \alpha_3 = (-1, 4, 7)$$

A. $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$ B. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

C. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0$ D. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$

121. Tìm tọa độ x_1, x_2 của vectơ $u = (-1, -1, -2)$ theo hai vectơ

$$\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (-3, -5, -8)$$

A. $x_1 = 2, x_2 = 1$ B. $x_1 = 2, x_2 = -1$

C. $x_1 = 2, x_2 = -1$ D. $x_1 = 0, x_2 = 0$

122. Tìm tọa độ x_1, x_2 của vectơ $u = (-1, 3, 1)$ theo hai vectơ

$$\alpha_1 = (1, 1, 3), \alpha_2 = (-1, 1, -1)$$

A. $x_1 = 2, x_2 = 1$ B. $x_1 = 2, x_2 = -1$

C. $x_1 = -1, x_2 = -1$ D. $x_1 = 1, x_2 = 2$

Dạng toán: Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

123. Vectơ nào sau đây thuộc không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

A. $(1, 1)$ B. $(2, 2)$ C. $(0, 0)$ D. $(3, -3)$

124. Vectơ nào sau đây thuộc không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

A. $(1, -1, 0)$ B. $(1, 1, 1)$ C. $(3, -3, 6)$ D. $(2, 0, -6)$

125. Vectơ nào sau đây thuộc không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$$

A. $(1, -1, -3)$ B. $(-1, 1, -2)$ C. $(3, -3, 6)$ D. $(3, -3, -6)$

126. Vectơ nào sau đây KHÔNG thuộc không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -2x + z = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

A. $(2, 1, 4)$ B. $(-2, -1, -4)$ C. $(0, 0, 0)$ D. $(1, 0, 1)$

127. Vectơ nào sau đây là cơ sở không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases}$$

A. $(-1, 1)$ B. $(1, 1)$ C. $(0, 0)$ D. $(2, 1)$

128. Vectơ nào sau đây là cơ sở không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

A. $(-1, 1)$ B. $(1, 1)$ C. $(0, 0)$ D. $(2, 1)$

129. Vectơ nào sau đây là cơ sở không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

A. $(-1, 1)$ B. $(1, 1)$ C. $(0, 0)$ D. $(2, 1)$

130. Hệ vectơ nào sau đây là cơ sở không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

A. $(0, 1, 0), (1, 0, 1)$ B. $(1, 1, 0), (1, 0, 1)$

C. $(0, 1, 1), (1, 0, 1)$ D. $(0, 1, 0)$

131. Hệ vectơ nào sau đây là cơ sở không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

A. $(1, 1, 1), (0, 0, 0)$ B. $(1, 1, 1)$

C. $(0, 1, 1), (1, 0, 1)$ D. $(0, 1, 0)$

132. Hệ vectơ nào sau đây là cơ sở không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

A. $(2, 1, 1), (0, 0, 0)$ B. $(1, 1, 1)$

C. $(2, 1, 1)$ D. $(2, 0, 0), (0, 1, 1)$

133. Hệ vectơ nào sau đây là cơ sở không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \\ 2x + 5y - 7z = 0 \end{cases}$$

A. $(2,2,1),(0,0,0)$ B. $(1,1,1)$

C. $(2,2,1)$ D. $(1,1,1),(0,0,0)$

134. Hệ vectơ nào sau đây là cơ sở không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

A. $(1,-2,1)$ B. $(1,2,1)$

C. $(4,2,1)$ D. $(7,2,1)$

135. Hệ vectơ nào sau đây là cơ sở không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

A. $(-3,1,1)$ B. $(1,1,1)$

C. $(3,-1,-1)$ D. $(1,-1,1)$

136. Hệ vectơ nào sau đây là cơ sở không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

A. $(-5,-2,1,0)$ B. $(1,0,0,1)$

C. $(4,2,1,1)$ D. $(-5,-2,1,0),(1,0,0,1)$

137. Hệ vectơ nào sau đây là cơ sở không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

A. $(-3,1,1,1)$ B. $(0,1,-1,0)$

C. $(-2,1,0,0)$ D. $(2,1,0,0)$

Dạng toán: Bài tập tổng hợp

138. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ $\alpha_1 = (1,1,0), \alpha_2 = (2,0,1), \alpha_3 = (2,4,-3)$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ độc lập tuyến tính B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ phụ thuộc tuyến tính

C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ D. Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ có hạng bằng 3

139. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ phụ thuộc vào tham số m

$$\alpha_1 = (1, m, 2), \alpha_2 = (2, m+1, 1), \alpha_3 = (1, 3, m-3)$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $m \neq 4$

B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $m = -1$

C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ khi và chỉ khi $m \neq -1$ và $m \neq 4$

D. Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ luôn có hạng bằng 3

140. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ phụ thuộc vào tham số m

$$\alpha_1 = (m+1, 3, -2), \alpha_2 = (m, 0, 1), \alpha_3 = (-1, 3, m-1)$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ luôn độc lập tuyến tính

B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $m = -1$

C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ khi và chỉ khi $m \neq -1$

D. Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ luôn có hạng bằng 2

BÀI TẬP TỰ LUẬN CHƯƠNG 3

Dạng toán: Điều kiện tổ hợp tuyến tính.

Chương 4 – CHÉO HÓA MA TRẬN – DẠNG TOÀN PHƯƠNG

4.1. Trị riêng, vectơ riêng

4.1.1. Định nghĩa trị riêng, vectơ riêng của ma trận

Với vectơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Kí hiệu $[x]$ là ma trận sau

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$. Số thực λ được gọi là *trị riêng* của ma trận A nếu tồn tại vectơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, khác θ, sao cho $A[x] = \lambda[x]$. Khi đó vectơ x được gọi là *vectơ riêng* của A ứng với trị riêng λ.

Ví dụ 1: Xét ma trận I_3 thì $\lambda = 1$ là một trị riêng, vì có vectơ $x = (2, 2, 2)$ sao cho

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1. \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Khi đó $x = (2, 2, 2)$ là một vectơ riêng của I_3 ứng với trị riêng $\lambda = 1$.

Chú ý: i) Nếu ma trận A có vectơ riêng x ứng với trị riêng λ thì kx $(k \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ cũng là vectơ riêng của A ứng với trị riêng λ.

ii) Nếu λ là trị riêng của ma trận A thì λ^k là trị riêng của A^k. Nếu thêm giả thuyết $\det A \neq 0$ thì λ^{-k} là trị riêng của A^{-k}. $(k \in \mathbb{N})$.

iii) Tập hợp tất cả các vectơ riêng của A ứng với trị riêng λ và vectơ θ sẽ tạo thành một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$, gọi là *không gian riêng* của A ứng với λ, kí hiệu V_λ.

4.1.2. Cách tìm trị riêng, vectơ riêng của ma trận

Giả sử ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ và λ là trị riêng của A, vectơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là vectơ riêng của A ứng với trị riêng λ. Khi đó $A[x] = \lambda[x]$ khi và chỉ khi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \theta$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \theta$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, trị riêng đóng vai trò như tham số, vectơ riêng là nghiệm khác θ của hệ. Như vậy, điều kiện để có trị riêng là hệ phương trình có nghiệm không tầm thường, tương đương $\det(A-\lambda I_n)=0$. Giải điều kiện này ta tìm được trị riêng λ, tập hợp tất cả các nghiệm khác θ của hệ chính là tất cả vectơ riêng ứng với trị riêng λ hay không gian riêng của A ứng với λ chính là không gian nghiệm của hệ. Như vậy ta có định nghĩa và thuật toán tìm trị riêng, vectơ riêng sau.

Định nghĩa: Ta gọi *ma trận đặc trưng* của A là ma trận $A-\lambda I_n$. *Đa thức đặc trưng* của A là định thức của ma trận đặc trưng (là một đa thức của λ), kí hiệu $P_A(\lambda)$, tức là $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$. Phương trình $P_A(\lambda)=0$ được gọi là *phương trình đặc trưng*.

Phương pháp tìm trị riêng, vectơ riêng của ma trận:

$*$ Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)=0$ tìm nghiệm của phương trình này. Đó chính là các trị riêng của ma trận A.

$*$ Giả sử λ_0 là một trị riêng, để tìm vectơ riêng ứng với trị riêng λ_0 ta giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(A-\lambda_0 I_n)[x]=\theta$. Nghiệm không tầm thường của hệ này chính là vectơ riêng cần tìm.

Ví dụ 2: Tìm trị riêng, vectơ riêng của ma trận $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Bài giải

Phương trình đặc trưng $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3+3\lambda+2=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2(2-\lambda)=0$$

Vậy A có hai trị riêng là $\lambda=-1$ và $\lambda=2$.

$*$ Vectơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng $\lambda=-1$.

Xét hệ phương trình sau $(A+I_3)[x]=\theta$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow [1 \quad 1 \quad 1 | \, 0]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai ẩn tự do (x_2, x_3). Nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = -a-b \\ x_2 = a, x_3 = b \end{cases} (a,b \in \mathbb{R})$$

Vậy vectơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng $\lambda=-1$ có dạng

$$(-a-b,a,b)(a,b\in\mathbb{R},a^2+b^2\neq 0)$$

(Không gian riêng $V_{-1}=(-a-b,a,b)(a,b\in\mathbb{R})$)

$*$ Vectơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng $\lambda=2$.

Xét hệ phương trình sau $(A-2I_3)[x]=\theta$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&0\\1&-2&1&0\\1&1&-2&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\1&-2&1&0\\-2&1&1&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&-3&3&0\\0&3&-3&0\end{array}\right]$$
$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một ẩn tự do (x_3). Nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{cases}x_1=a\\x_2=a\\x_3=a\end{cases}(a\in\mathbb{R})$$

Vậy vectơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng $\lambda=2$ có dạng

$$(a,a,a)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$$

(Không gian riêng $V_2=(a,a,a)(a\in\mathbb{R})$)

4.2. Chéo hóa ma trận

4.2.1. Một số định nghĩa

Cho ma trận $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. Ta nói A *đồng dạng* với B, kí hiệu $A\sim B$ nếu tồn tại ma trận vuông P cấp n không suy biến sao cho $B=P^{-1}AP$.

Chú ý: Nếu $A\sim B$ thì $\det A=\det B$, $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B, P_A(\lambda)=P_B(\lambda)$ (do đó giá trị riêng của A và B là như nhau.

Ma trận vuông A cấp n được gọi là *chéo hóa được* nếu A đồng dạng với một ma trận chéo. Như vậy ma trận A chéo hóa được nếu tồn tại ma trận vuông P cấp n không suy biến sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo. Ma trận P gọi là *ma trận làm chéo*.

Chéo hóa ma trận A tức là tìm ma trận vuông P cấp n không suy biến sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo.

4.2.2. Thuật toán chéo hóa ma trận

a. Điều kiện cần và đủ để ma trận chéo hóa được

Ma trận vuông A cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi A có đủ n vectơ riêng ĐLTT.

Giả sử A có tất cả các giá trị riêng là $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ khi đó A chéo hóa được khi và chỉ khi $\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}+\cdots+\dim V_{\lambda_k}=n$.

Nhận xét: i) Nếu A không có trị riêng $(P_A(\lambda)=0)$ thì A không chéo hóa được.

ii) Nếu A có n trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.

b. Thuật toán chéo hóa ma trận

Cho trận vuông A cấp n. Để chéo hóa ma trận A ta làm như sau:

$*$ Bước 1: Tìm các giá trị riêng của A. Nếu A không có trị riêng thì A không chéo hóa được. Nếu A có trị riêng thì chuyển sang bước 2.

$*$ Bước 2: Giả sử A có tất cả các giá trị riêng là $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Tìm cơ sở của các không gian nghiệm $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_k}$. Nếu $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_k} \neq n$ thì A không chéo hóa được. Ngược lại thì A chéo hóa được. Khi đó ma trận P được tạo thành bởi các cơ sở của $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_k}$ sắp thành cột (sắp cơ sở V_{λ_1} trước, theo thứ tự của hệ nghiệm cơ bản, tương tự cho $V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_k}$). Ma trận $P^{-1}AP$ là ma trận chéo với đường chéo chính là các trị riêng sắp theo thứ tự $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, trong đó mỗi λ_iđược viết lặp lại số lần bằng số vectơ cơ sở của V_{λ_i}.

Trong **Ví dụ 2** thì ma trận A có hai trị riêng là $\lambda = -1$ và $\lambda = 2$.

Không gian riêng $V_{-1} = (-a-b, a, b)(a, b \in \mathbb{R})$ có cơ sở là $(-1, 1, 0); (-1, 0, 1)$.

Không gian riêng $V_2 = (a, a, a)(a \in \mathbb{R})$ có cơ sở là $(1, 1, 1)$.

Do đó A chéo hóa được. Ma trận làm chéo là

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 3: Tìm trị riêng, vectơ riêng và chéo hóa (nếu được) của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài giải

Phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(1-\lambda)^2 = 0$$

Vậy A có hai trị riêng là $\lambda = 0$ và $\lambda = 1$.

$*$ Vectơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng $\lambda = 0$.

Xét hệ phương trình sau $(A + 0I_4)[x] = \theta$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai ẩn tự do (x_2, x_3). Nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = x_4 = 0 \\ x_2 = a, x_3 = b \end{cases} (a, b \in \mathbb{R})$$

Vậy vectơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng $\lambda = -1$ có dạng

$$(0, a, b, 0)(a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0)$$

Không gian riêng V_0 có cơ sở là $(0,1,0,0); (0,0,1,0)$

$*$ Vectơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng $\lambda = 1$.

Xét hệ phương trình sau $(A - I_4)[x] = \theta$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một ẩn tự do (x_4). Nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = 0 \\ x_4 = c \end{cases} (c \in \mathbb{R})$$

Vậy vectơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng $\lambda = 1$ có dạng

$$(0, 0, 0, c)(c \in \mathbb{R} \backslash \{0\})$$

Không gian riêng V_1 có cơ sở là $(0,0,0,1)$.

4.3. Dạng toàn phương

4.3.1. Khái niệm dạng toàn phương

a. Dạng toàn phương

Dạng toàn phương của n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ (hay *dạng toàn phương trong* $\mathbb{R}^n$) là hàm Q từ $\mathbb{R}^n$ đến $\mathbb{R}$ cho bởi biểu thức (dưới dạng ma trận)

$$Q(x) = [x]^T A[x], \text{ với } x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Với $A = (a_{ij})_n$ là ma trận đối xứng $(a_{ij} = a_{ji})$.

Ma trận A và hạng của nó được gọi là ma trận và hạng của dạng toàn phương Q.

Thực hiện phép nhân ma trận trong biểu thức trên thì $Q(x)$ có dạng

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \text{ với } a_{ij} = a_{ji}.$$

Chú ý: Hệ số của $x_i x_j$ $(i \neq j)$ là $a_{ij} + a_{ji} = 2a_{ij}$.

Ví dụ 4: Cho dạng toàn phương của hai biến

$$Q(x) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Khi đó $Q(x) = 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2$.

Ví dụ 5: Cho dạng toàn phương của ba biến $Q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3$. Hãy tìm ma trận của dạng toàn phương Q và viết $Q(x)$ dưới dạng ma trận.

Bài giải

Gọi A là ma trận của dạng toàn phương.

Các hệ số của x_1^2, x_2^2, x_3^2 là các phần tử nằm trên đường chéo chính của A.

Các hệ số của tích x_ix_j $(i \neq j)$ gấp đôi giá trị a_{ij} của A. Do đó

$$a_{11} = 2, a_{22} = 1, a_{33} = -1; 2a_{12} = -2 \Longrightarrow a_{12} = -1 (a_{12} = a_{21})$$

$$2a_{13} = 0 \Longrightarrow a_{13} = 0 (a_{13} = a_{31}); 2a_{23} = 1 \Longrightarrow a_{23} = 1/2\ (a_{23} = a_{32})$$

Vậy $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$ và $Q(x) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

b. Dạng chính tắc của dạng toàn phương

Dạng chính tắc là dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^n$ mà ma trận của dạng toàn phương là ma trận chéo (hay dạng toàn phương chỉ chứa bình phương củ các biến).

Ví dụ 6: Cho dạng toàn phương của bốn biến $Q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 0x_4^2$.

4.3.2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Ví dụ 7: Cho dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3, Q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2$. Khi đó $Q(x) = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 - x_3^2$. Như vậy đặt $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ thì dạng toàn phương trên có dạng chính tắc $Q(y) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

Chú ý là còn nhiều cách đặt khác để đưa về dạng chính tắc.

Phương pháp chung: Đổi biến $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ bằng $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ cho bởi $[x] = P[y]$ ($P = \left(p_{ij}\right)_n$ là ma trận vuông cấp n không suy biến), khi đó

$$\begin{cases} x_1 = p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \cdots + p_{1n}y_n \\ x_2 = p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \cdots + p_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n = p_{n1}y_1 + p_{n2}y_2 + \cdots + p_{nn}y_n \end{cases}.$$

(trong thực tế có thể ta sẽ đặt $y_1, \dots, y_n$ theo $x_1, \dots, x_n$, khi đó $[y] = P^{-1}[x]$)

Sao cho ma trận $B = P^TAP$ có dạng chéo. Lúc đó

$$Q(x) = [x]^TA[x] = (P[y])^TA(P[y]) = [y]^TP^TAP[y] = [y]^TB[y]$$

Như vậy dạng toàn phương Q có dạng chính tắc đối với biến y.

Chú ý: Ma trận P được gọi là *ma trận của phép biến đổi*.

Trong **Ví dụ 7** thì ma trận $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Phương pháp Lagrange

Cho dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^n$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}, \forall i,j)$$

Nội dung của phương pháp như sau

$*$ Trường hợp 1: Nếu có hệ số $a_{ii} \neq 0$, không mất tính tổng quát, ta giả sừ là a_{11}

Bước 1: Phân tích $Q(x)$ như sau

$$Q(x) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n) + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{2\le i<j\le n} a_{ij}x_i x_j$$

Đưa $Q(x)$ về dạng

$$Q(x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + Q_1(x_2, \dots, x_n)$$

(chú ý khi đổi biến thì $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$)

Trong đó $Q_1(x_2, \dots, x_n)$ là dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^{n-1}$.

Bước 2: Tiếp tục phân tích $Q_1(x_2, \dots, x_n)$. Cũng xảy ra hai trường hợp.

$*$ Trường hợp 2: Nếu tất cả hệ số $a_{ii} = 0$ với mọi i, tồn tại $a_{ij} \neq 0$, không mất tính tổng quát, ta giả sừ là a_{12}. Ta đặt

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_i = y_i, 3 \le i \le n \end{cases}$$

Khi đó $Q(y) = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + \cdots$ là dạng toàn phương có hệ số $y_1^2 \neq 0$. Trở về trường hợp 1. Phép đổi biến cuối cùng là hợp các phép đổi biến lại.

Ví dụ 8: Đưa DTP $Q(x) = -x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ về dạng chính tắc

Bài giải

Ta có $Q(x) = -(x_2^2 - 2x_1x_2) + 4x_3^2 + 4x_1x_3 = -(x_2 - x_1)^2 + x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3$

$$= -(x_2 - x_1)^2 + x_1^2 + 4x_1x_3 + 4x_3^2 = -(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + 2x_3)^2$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_1 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_2 - 2y_3 \\ x_2 = -y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Khi đó Q có dạng chính tắc theo biến y, $Q = -y_1^2 + y_2^2$ với phép đổi biến $[x] = P[y]$

Ví dụ 9: Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

$$Q(x) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Bài giải

$$\begin{aligned}
Q(x) &= 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 \\
&= 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3 \\
&= \frac{1}{3}(9x_1^2 - 12x_1x_2 + 24x_1x_3) + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3 \\
&= \frac{1}{3}((3x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 4x_2^2 - 16x_3^2 + 16x_2x_3) + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3 \\
&= \frac{1}{3}(3x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 + \frac{14}{3}x_2^2 - \frac{7}{3}x_3^2 + \frac{28}{3}x_2x_3 \\
&= \frac{1}{3}(3x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 + \frac{14}{3}x_2^2 + \frac{28}{3}x_2x_3 - \frac{7}{3}x_3^2 \\
&= \frac{1}{3}(3x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 + \frac{14}{3}(x_2^2 + 2x_2x_3) - \frac{7}{3}x_3^2 \\
&= \frac{1}{3}(3x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 + \frac{14}{3}((x_2 + x_3)^2 - x_3^2) - \frac{7}{3}x_3^2 \\
&= \frac{1}{3}(3x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 + \frac{14}{3}(x_2 + x_3)^2 - 7x_3^2
\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Khi đó Q có dạng chính tắc theo biến y (với phép đổi biến $[x] = P[y]$)

$$Q = \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{14}{3}y_2^2 - 7y_3^2.$$

Ví dụ 10: Đưa dạng toàn phương $Q(x) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 6x_1x_3$ về dạng chính tắc.

Bài giải

Đặt $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ khi đó $\left(P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$$\begin{aligned}
Q(x) &= 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 2(y_1 - y_2)y_3 - 6(y_1 + y_2)y_3 \\
&= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3 = 2(y_1^2 - 2y_1y_3) - 2y_2^2 - 8y_2y_3 \\
&= 2((y_1 - y_3)^2 - y_3^2) - 2y_2^2 - 8y_2y_3 \\
&= 2(y_1 - y_3)^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 - 8y_2y_3 \\
&= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2^2 + 4y_2y_3) - 2y_3^2 \\
&= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 + 2y_3)^2 + 6y_3^2.
\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 + 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 - 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$ ($P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$) thì dạng toàn phương trên có dạng chính tắc

$$Q(z) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$$

Với phép đổi biến $[x] = P_1[y] = P_1P_2[z]$.

Phương pháp biến đổi sơ cấp ma trận đối xứng

Cho dạng toàn phương Q trong $\mathbb{R}^n$, có ma trận là A. Xét ma trận $[A|I_n]$.

$*$ Bước 1: Thực hiện các cặp phép biến đổi sơ cấp (mỗi cặp là một phép biến đổi sơ cấp dòng và một phép biến đổi sơ cấp cột cùng kiểu) đưa $[A|I_n]$ về dạng $[B|C]$. Trong đó B là ma trận chéo, khi đó $C = P^T$.

$*$ Bước 2: Đổi biến $[x] = P[y]$ khi đó $Q[y] = [y]^T P^T AP[y]$.

Trong **Ví dụ 8**, $Q(x) = -x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$. Xét ma trận

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 \to d_1 + d_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{c_1 \to c_1 + c_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{c_3 \to c_3 - 2c_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Vậy ma trận $P^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Khi đó Q có dạng chính tắc theo biến y, $Q = y_1^2 - y_2^2$ với phép đổi biến $[x] = P[y]$

Trong **Ví dụ 10**, $Q(x) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 6x_1x_3$. Xét ma trận

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 \to d_1 + d_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{c_1 \to c_1 + c_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2 \to 2d_2 - d_1, d_3 \to d_3 + d_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{c_2 \to 2c_2 - c_1, c_3 \to c_3 + c_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 \to d_3 + 2d_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{c_3 \to c_3 + 2c_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Vậy ma trận $P^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Khi đó Q có dạng chính tắc $Q = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2$ với phép đổi biến $[x] = P[y]$.

4.3.3. Dạng toàn phương xác định dấu

Định nghĩa: Cho dạng toàn phương Q trong $\mathbb{R}^n$ với ma trận dạng toàn phương là A và $r(A) = n$. (ta không xét trường hợp A suy biến)

Dạng toàn phương Q được gọi là *xác định dương* nếu $Q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{\theta\}$.

Dạng toàn phương Q được gọi là *xác định âm* nếu $Q(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{\theta\}$.

Dạng toàn phương Q được gọi là *nửa xác định dương* nếu $Q(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Dạng toàn phương Q được gọi là *nửa xác định âm* nếu $Q(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Dạng toàn phương Q được gọi là *không xác định dấu* nếu $Q(x)$ nhận cả giá trị dương và giá trị âm, nghĩa là $Q(x)$ đổi dấu.

Ví dụ 11: Xét các dạng toàn phương sau trong $\mathbb{R}^2$

$Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1x_2, R(x) = -4x_1^2 - 4x_2^2 + 8x_1x_2, T(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2$

$Q(x)$ là xác định dương vì $Q(x) = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\theta\}$.

$R(x)$ là nửa xác định âm vì $R(x) = -4(x_1 - x_2)^2 \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

$T(x)$ là không xác định dấu vì $T(1,1) = 1 > 0$ nhưng $T(0,1) = -1 < 0$.

Định nghĩa: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Khi đó các định thức sau được gọi là định thức con chính

$$D_1 = a_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Định lý Sylvester:

Cho Cho dạng toàn phương Q trong $\mathbb{R}^n$ với ma trận dạng toàn phương là A

$*$ Nếu tất cả các định thức con chính $D_1, D_2, \ldots, D_n$ đều dương thì dạng toàn phương Q xác định dương.

$*$ Nếu tất cả các định thức con chính cấp chẵn $D_2, D_4, \ldots$ đều dương và tất cả các định thức con chính cấp lẻ $D_1, D_3, \ldots$ đều âm thì dạng toàn phương Q xác định âm.

Ví dụ 12: Dùng định lý Sylvester xét tính xác định dấu của các dạng toàn phương sau trong $\mathbb{R}^3$

$$Q(x) = -2x_1^2 - 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2, R(x) = 7x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 5x_1x_3.$$

Bài giải

$Q(x)$ và $R(x)$ lần lượt có ma trận của dạng toàn phương là

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Với ma trận A ta có

$$D_1 = -2 < 0, D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 > 0, D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -12 < 0.$$

Vậy $Q(x)$ xác định âm.

Với ma trận B ta có

$$D_1 = 7 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0, D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -32 < 0.$$

Chưa kết luận được. Ta thấy $R(1,0,0) = 7 > 0, R(0,0,1) = -7 < 0$, do đó dạng toàn phương $R(x)$ không xác định dấu.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 4

Dạng toán: Đa thức đặc trưng của ma trận.

1. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ là khẳng định nào sau đây:

A. $P_A(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$ B. $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 3)$

C. $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$ D. $P_A(\lambda) = (\lambda + 1)(3 - \lambda)$

2. Ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ là khẳng định nào sau đây:

A. $P_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 3)$ B. $P_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$

C. $P_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 6$ D. $P_A(\lambda) = (\lambda + 3)(2 - \lambda)$

3. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ là khẳng định nào sau đây:

A. $P_A(\lambda) = -\lambda^2 - 7$ B. $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 7$

C. $P_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$ D. $P_A(\lambda) = (\lambda + 3)(3 - \lambda)$

4. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ là khẳng định nào sau đây:

A. $P_A(\lambda) = -(1 - \lambda)^2(1 + \lambda)$ B. $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2(1 + \lambda)$

C. $P_A(\lambda) = (1 + \lambda)^2(1 - \lambda)$ D. $P_A(\lambda) = -\lambda^2(1 - \lambda)^2$

5. Ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ là khẳng định nào sau đây:

A. $P_A(\lambda)=(2-\lambda)(1+\lambda)^2$ B. $P_A(\lambda)=(\lambda-2)(1-\lambda^2)$

C. $P_A(\lambda)=(2+\lambda)(1+\lambda)^2$ D. $P_A(\lambda)=(2+\lambda)(1-\lambda^2)$

6. Ma trận $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ là khẳng định nào sau đây:

A. $P_A(\lambda)=\lambda(4-\lambda^2)$ B. $P_A(\lambda)=-\lambda(2-\lambda^2)$

C. $P_A(\lambda)=\lambda(2-\lambda)^2$ D. $P_A(\lambda)=\lambda(2-\lambda^2)$

7. Ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 3 & -2\end{bmatrix}$ có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ là khẳng định nào sau đây:

A. $P_A(\lambda)=\lambda^3-4\lambda+3$ B. $P_A(\lambda)=-\lambda^3+4\lambda-3$

C. $P_A(\lambda)=\lambda^3-3\lambda+2$ D. $P_A(\lambda)=-\lambda^3+3\lambda-2$

8. Ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ là

A. $P_A(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+3)$ B. $P_A(\lambda)=-\lambda(\lambda-1)(\lambda+3)$

C. $P_A(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$ D. $P_A(\lambda)=-\lambda(\lambda-1)(\lambda+3)$

9. Ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ là

A. $P_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$ B. $P_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda^2-4)$

C. $P_A(\lambda)=(\lambda^2-1)(\lambda-2)^2$ D. $P_A(\lambda)=(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)$

Dạng toán: Giá trị riêng của ma trận.

10. Ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ có các giá trị riêng là khẳng định nào sau đây:

A. $\lambda=1,\lambda=-3$ B. $\lambda=-1,\lambda=3$

C. $\lambda=-1,\lambda=3$ D. Không có giá trị riêng

11. Ma trận $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ có các giá trị riêng là khẳng định nào sau đây:

A. $\lambda=2,\lambda=-3$ B. $\lambda=-2,\lambda=3$

C. $\lambda=-2,\lambda=-3$ D. Không có giá trị riêng

12. Ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ có các giá trị riêng là khẳng định nào sau đây:

A. $\lambda = 9$ B. $\lambda = 3$

C. $\lambda = 3, \lambda = -3$ D. Không có giá trị riêng

13. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ có các giá trị riêng là khẳng định nào sau đây:

A. $\lambda = 1$ B. $\lambda = -1$

C. $\lambda = 0, \lambda = 1$ D. $\lambda = 1, \lambda = -1$

14. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ có các giá trị riêng là khẳng định nào sau đây:

A. $\lambda = 2, \lambda = \pm 1$ B. $\lambda = -1$

C. $\lambda = 2$ D. $\lambda = -1, \lambda = 2$

15. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ có các giá trị riêng là khẳng định nào sau đây:

A. $\lambda = 0, \lambda = 2, \lambda = -2$ B. $\lambda = 0, \lambda = 4$

C. $\lambda = 0, \lambda = 2$ D. $\lambda = 0, \lambda = \sqrt{2}, \lambda = -\sqrt{2}$

16. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ có các giá trị riêng là khẳng định nào sau đây:

A. $\lambda = 1, \lambda = 2$ B. $\lambda = -1, \lambda = 2$

C. $\lambda = 1, \lambda = -2$ D. $\lambda = -1, \lambda = -2$

17. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ có các giá trị riêng là khẳng định nào sau đây:

A. $\lambda = 1, \lambda = -3$ B. $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = 3$

C. $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = -3$ D. $\lambda = 0, \lambda = -1, \lambda = -3$

18. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ có giá trị riêng là khẳng định nào sau đây:

A. $\lambda = 1, \lambda = 3$ B. $\lambda = -1, \lambda = 3$

C. $\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 3$ D. $\lambda = -1, \lambda = -3$

19. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ có các giá trị riêng là khẳng định nào sau đây:

A. $\lambda = 1, \lambda = 2$ B. $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = -2$

C. $\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 2$ D. $\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 2, \lambda = -2$

Dạng toán: Vectơ riêng của ma trận.

20. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ có các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$, là vectơ có dạng nào sau đây:

A. $(a, -a)(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ B. $(a, -a)(a \in \mathbb{R})$

C. $(0, a)(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ D. $(a, 0)(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$

21. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ có các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$, là vectơ có dạng nào sau đây:

A. $(-a, a)(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ B. $(a, a)(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$

C. $(-a, a)(a \in \mathbb{R})$ D. $(a, a)(a \in \mathbb{R})$

22. Ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ có các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = -3$, là vectơ có dạng nào sau đây:

A. $(a, a)(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ B. $(-a, a)(a \in \mathbb{R})$

C. $(-a, a)(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ D. Không có vectơ riêng

23. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ có các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$, là vectơ có dạng nào sau đây:

A. $(-a, a)(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ B. $(2a, a)(a \in \mathbb{R})$

C. $(-a, a)(a \in \mathbb{R})$ D. $(2a, a)(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$

24. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ có các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$, là vectơ có dạng nào sau đây:

A. $(-a, 0, a)(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ B. $(-a, 0, a)(a \in \mathbb{R})$

C. $(b, a, b)(a, b \in \mathbb{R})$ D. $(b, a, b)(a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$

25. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ có các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$, là vectơ có dạng nào sau đây:

A. $(-a, 0, a)(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ B. $(-a, 0, a)(a \in \mathbb{R})$

C. $(b, a, b)(a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ D. $(b, a, b)(a, b \in \mathbb{R})$

26. Ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ có các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda=2$, là vectơ có dạng nào sau đây:

A. $(a,a,a)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ B. $(a,a,a)(a\in\mathbb{R})$

C. $(-a,-a,a)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ D. Không có vectơ riêng

27. Ma trận $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ có các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda=0$, là vectơ có dạng nào sau đây:

A. $(-a,0,a)(a\in\mathbb{R})$ B. $(-a,0,a)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$

C. $(-a,a,a)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ D. $(-a,a,a)(a\in\mathbb{R})$

28. Ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 3 & -2\end{bmatrix}$ có các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda=1$, là vectơ có dạng nào sau đây:

A. $\left(-{}^{3}/_{5}\,a,0,a\right)(a\in\mathbb{R})$ B. $\left(-{}^{3}/_{5}\,a,0,a\right)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$

C. $\left({}^{3}/_{5}\,a,0,a\right)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ D. $\left({}^{3}/_{5}\,a,0,a\right)(a\in\mathbb{R})$

29. Ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ có các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda=3$, là vectơ có dạng nào sau đây:

A. $(2a,a,a)(a\in\mathbb{R})$ B. $(2a,a,a)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$

C. $(0,-a,a)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ D. Không có vectơ riêng

30. Ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ có các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda=2$, là vectơ có dạng nào sau đây:

A. $(0,a,b)(a,b\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ B. $(a,a,a)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$

C. $(a,a,0)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ D. $(a,0,0)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$

31. Ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ có các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda=3$, là vectơ có dạng nào sau đây:

A. $(a,-2a,b)(a,b\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ B. $(a,-2a,b)(a\in\mathbb{R})$

C. $(a,a,0)(a\in\mathbb{R})$ D. $(a,a,0)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$

32. Ma trận $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&2&3\\0&0&0&2\end{bmatrix}$ có các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda=1$, là vectơ có dạng nào sau đây:

A. $(0,-a,-3a,a)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ B. $(0,-a,-3a,a)(a\in\mathbb{R})$

C. $(a,0,0,0)(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ D. $(a,0,0,0)(a\in\mathbb{R})$

33. Vectơ $(2,-2)$ là vectơ riêng của ma trận $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ ứng với giá trị riêng nào sau đây:

A. $\lambda=1$ B. $\lambda=0$ C. $\lambda=-1$ D. $\lambda=1$ và $\lambda=-1$

34. Vectơ $(-2,-2)$ là vectơ riêng của ma trận $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ ứng với giá trị riêng nào sau đây:

A. $\lambda=3$ B. $\lambda=-1$ C. $\lambda=-3$ D. $\lambda=1$

35. Vectơ $(2,-2)$ là vectơ riêng của ma trận $A=\begin{bmatrix}-1&2\\3&0\end{bmatrix}$ ứng với giá trị riêng nào sau đây:

A. $\lambda=3$ B. $\lambda=-1$ C. $\lambda=-3$ D. $\lambda=1$

36. Vectơ $(2,1)$ là vectơ riêng của ma trận $A=\begin{bmatrix}1&4\\2&-1\end{bmatrix}$ ứng với giá trị riêng nào sau đây:

A. $\lambda=3$ B. $\lambda=-2$ C. $\lambda=-3$ D. $\lambda=2$

37. Vectơ $(3,-1,3)$ là vectơ riêng của ma trận $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ ứng với giá trị riêng nào sau đây:

A. $\lambda=3$ B. $\lambda=-1$ C. $\lambda=-3$ D. $\lambda=1$

38. Vectơ $(4,4,4)$ là vectơ riêng của ma trận $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ ứng với giá trị riêng nào sau đây:

A. $\lambda=3$ B. $\lambda=2$ C. $\lambda=-3$ D. $\lambda=-2$

39. Vectơ $(2,0,-2)$ là vectơ riêng của ma trận $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ ứng với giá trị riêng nào sau đây:

A. $\lambda=3$ B. $\lambda=2$ C. $\lambda=1$ D. $\lambda=0$

40. Vectơ $(3,0,5)$ là vectơ riêng của ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 3 & -2\end{bmatrix}$ ứng với giá trị riêng nào sau đây:

A. $\lambda=3$ B. $\lambda=2$ C. $\lambda=1$ D. $\lambda=0$

41. Vectơ $(2,1,1)$ là vectơ riêng của ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ứng với giá trị riêng nào sau đây:

A. $\lambda=3$ B. $\lambda=2$ C. $\lambda=1$ D. $\lambda=0$

42. Vectơ $(2,0,0,0)$ là vectơ riêng của ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ ứng với giá trị riêng nào sau đây:

A. $\lambda=3$ B. $\lambda=2$ C. $\lambda=1$ D. $\lambda=0$

Dạng toán: Chéo hóa ma trận.

43. Giả sử A là ma trận vuông cấp 3 có 3 vectơ riêng là $(1,2,1),(1,0,1),(1,0,0)$ lần lượt ứng với các giá trị riêng $\lambda=1,\lambda=2,\lambda=3$. Đặt $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng

A. A chéo hóa được và $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

B. A chéo hóa được và $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

C. A chéo hóa được và $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

D. A, B, C đều đúng.

44. Ma trận $P=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ chéo hóa ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ thành ma trận nào sau đây:

A. $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & 20\end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix}20 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}$

45. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$. Ma trận P làm chéo A là ma trận nào sau đây:

A. $P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ B. $P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

C. $P=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ D. $P=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

46. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$. Ma trận P làm chéo A là ma trận nào sau đây:

A. $P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ B. $P=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

C. $P=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ D. $P=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$

47. Ma trận $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ chéo hóa ma trận $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ thành ma trận nào sau đây:

A. $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

48. Ma trận $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ chéo hóa ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ thành ma trận nào sau đây:

A. $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

49. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$. Ma trận P làm chéo A là ma trận nào sau đây:

A. $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ B. $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$

C. $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ D. $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

50. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Ma trận P làm chéo A là ma trận nào sau đây:

A. $P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ B. $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

C. $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ D. $P=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

Dạng toán: Ma trận của dạng toàn phương

51. Cho dạng toàn phương của 2 biến, $Q(x)=x_1^2+2x_2^2$. Khi đó ma trận của dạng toàn phương là

A. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ B. $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

C. $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ D. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

52. Cho dạng toàn phương của 2 biến, $Q(x)=x_1^2+x_2^2+4x_1x_2$. Khi đó ma trận của dạng toàn phương là

A. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ B. $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

C. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ D. $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{bmatrix}$

53. Cho dạng toàn phương của 2 biến, $Q(x)=2x_1x_2$. Khi đó ma trận của dạng toàn phương là

A. $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ B. $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

C. $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ D. $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

54. Cho dạng toàn phương của 3 biến, $Q(x)=x_1^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_2x_3$. Khi đó ma trận của dạng toàn phương là

A. $A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 0\\ -4 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$ B. $A=\begin{bmatrix}1 & -4 & -4\\ -4 & 0 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{bmatrix}$

C. $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ D. $A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 2\\ -4 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

55. Cho dạng toàn phương của 3 biến, $Q(x)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$. Khi đó ma trận của dạng toàn phương là

A. $A=\begin{bmatrix}2 & -4 & -4\\ -4 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix}$ B. $A=\begin{bmatrix}2 & -4 & -4\\ 4 & 3 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$

C. $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -2\\ 2 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ D. $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -2\\ -2 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$

56. Cho dạng toàn phương của 3 biến, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$. Khi đó ma trận của dạng toàn phương là

A. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ B. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

C. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ D. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

57. Cho dạng toàn phương của 3 biến, $Q(x) = 2x_1x_2$. Khi đó ma trận của dạng toàn phương là

A. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ B. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

C. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ D. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Dạng toán: Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

58. Cho dạng toàn phương của 2 biến, $Q(x) = 2x_1x_2$. Chọn ma trận đổi biến P thích hợp ($[x] = P[y]$) để đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc

A. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ B. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

C. $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ D. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

59. Cho dạng toàn phương của 2 biến, $Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2$. Chọn ma trận đổi biến P thích hợp ($[x] = P[y]$) để đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc

A. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ B. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

C. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ D. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

60. Cho dạng toàn phương của 3 biến, $Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$. Chọn ma trận đổi biến P thích hợp ($[x] = P[y]$) để đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc

A. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ B. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

C. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ D. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

61. Cho dạng toàn phương của 3 biến, $Q(x) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 6x_1x_3$. Chọn ma trận đổi biến P thích hợp ($[x] = P[y]$) để đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc

A. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

C. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ D. $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 2 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

62. Cho dạng toàn phương của 3 biến, $Q(x) = -x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$. Chọn ma trận đổi biến P thích hợp ($[x] = P[y]$) để đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc

A. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ B. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ D. $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chương 1 – Ma trận – Định thức

1. D 2. A 3. A 4. A 5. C 6. D 7. A 8. C 9. C 10. B 11. C 12. A

13. A 14. D 15. A 16. A 17. C 18. B 19. C 20. A 21. B 22.C 23. D 24. C

25. B 26. B 27. C 28. C 29. D 30. A 31. C 32. A 33. B 34. C 35. A 36. A

37. B 38. A 39. B 40. C 41. A 42. D 43. C 44. D 45. D 46. B 47. C 48. D

49. D 50. D 51. A 52. C 53. C 54.C 55. D 56. C 57. C 58. C 59. D 60. B

61. D 62. B 63. A 64. B 65. D 66. B 67. D 68. B 69. D 70. C 71. C 72. B

73. C 74. D 75. C 76. A 77. C 78. D

Chương 2 – Hệ phương trình tuyến tính

1. D 2. C 3. B 4. C 5. A 6. B 7. C 8. D 9. D 10. A 11. B 12. C

13. A 14. D 15. D 16. D 17. C 18. B 19. B 20. C 21. C 22. D 23. D 24. A

25. C 26. B 27. C 28. A 29. A 30. B 31. B 32. A 33. B 34. B 35. B 36. B

37. B 38. A 39. C 40. C 41. B 42. B 43. A 44. C 45. A 46. C 47. D 48. A

49. B 50. B 51. B 52. B 53. B 54.C 55. B 56. C 57. A 58. B 59. B 60. D

61. B 62. C 63. A 64. A 65. A 66. D 67. A 68. B 69. A 70. B 71. B 72. C

73. D 74. D 75. D 76. D 77. B 78. D

Chương 3 – Không gian vectơ

1. C 2. A 3. B 4. B 5. D 6. A 7. C 8. B 9. B 10. A 11. C 12. C

13. D 14. B 15. D 16. C 17. B 18. A 19. A 20. D 21. B 22. D 23. A 24. A

25. B 26. C 27. B 28. A 29. A 30. B 31. B 32. C 33. C 34. D 35. D 36. A

37. C 38. A 39. D 40. C 41. D 42. D 43. B 44. B 45. C 46. D 47. C 48. D

49. B 50. D 51. C 52. B 53. C 54.D 55. A 56. B 57. C 58. C 59. D 60. C

61. C 62. D 63. B 64. C 65. B 66. A 67. D 68. B 69. C 70. D 71. D 72. C

73. B 74. A 75. C 76. C 77. D 78. B 79. C 80. C 81. D 82. C 83. C 84. C

85. B 86. C 87. D 88. D 89. C 90. C 91. C 92. B 93. C 94. A 95. B 96. A

97. B 98. B 99. C 100. C 101. B 102. C 103. B 104. C

105. C 106. C 107. B 108. D 109. B 110. A

111. B 112. A 113. C 114. C 115. D 116. A

117. B 118. C 119. D 120. D 121. A 122. D

123. C 124. B 125. D 126. D 127. A 128. B

129. D 130. A 131. B 132. C 133. B 134. A

135. D 136. D 137. C 138. C 139. D 140. A

Chương 4 – Chéo hóa ma trận – Dạng toàn phương

1. A 2. B 3. C 4. A 5. B 6. D 7. D 8. C 9. A 10. B 11. A 12. C

13. D 14. A 15. D 16. C 17. B 18. B 19. A 20. A 21. B 22. C 23. D 24. D

25. A 26. A 27. B 28. C 29. B 30. D 31. A 32. C 33. C 34. A 35. C 36. A

37. D 38. B 39. D 40. C 41. A 42. C 43. A 44. A 45. B 46. A 47. C 48. B

49. D 50. C 51. A 52. C 53. D 54.C 55. D 56. A 57. B 58. B 59. D 60. C

61. A 62. B

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Sĩ Đồng, Toán cao cấp: Đai số tuyến tính, NXB Giáo dục, 2010.

[1] Nguyễn Hữu Việt Hưng, Đại số tuyến tính, NXB GD 2009

[2] Mỵ Vinh Quang, Bài giảng Đại số tuyến tính, ĐHSP TPHCM, 2006.

[4] Nguyễn Quốc Hưng, *Toán cao cấp C2 và một số ứng dụng trong kinh doanh*, NXB Giao thông vận tải, 2002.

MỤC LỤC

KÍ HIỆU .....

MỞ ĐẦU .....

CHƯƠNG 1 – MA TRẬN – ĐỊNH THỨC 1

1.1. KHÁI NIỆM MA TRẬN VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN 6

1.2. ĐỊNH THỨC..... 8

1.3. HẠNG CỦA MA TRẬN..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

1.4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 1 ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

BÀI TẬP TỰ LUẬN CHƯƠNG 1 ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

CHƯƠNG 2 – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH 19

2.1. KHÁI NIỆM CHUNG VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH 19

2.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH ... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 2 ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

BÀI TẬP TỰ LUẬN CHƯƠNG 2 36

CHƯƠNG 3 – KHÔNG GIAN VECTƠ ..ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

3.1. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VECTƠ $\mathbb{R}^n$..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

3.2. ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH.....**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

3.3. KHÔNG GIAN VECTƠ CON, CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU .....**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 3 ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

BÀI TẬP TỰ LUẬN CHƯƠNG 3..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

CHƯƠNG 4 – CHÉO HÓA MA TRẬN – DẠNG TOÀN PHƯƠNG .....ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

4.1. TRỊ RIÊNG, VECTƠ RIÊNG ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

4.2. CHÉO HÓA MA TRẬN ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

4.3. DẠNG TOÀN PHƯƠNG..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 4 ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

BÀI TẬP TỰ LUẬN CHƯƠNG 4..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

TÀI LIỆU THAM KHẢO .....ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.