TRƯỜNG ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC HÀ NỘI
KHOA XÂY DỰNG
BỘ MÔN SỨC BỀN – CƠ HỌC KẾT CẤU

--------***--------

BÀI GIẢNG MÔN HỌC

CÁC PHƯƠNG PHÁP SỐ

HÀ NỘI 2-2017

Nội dung môn học

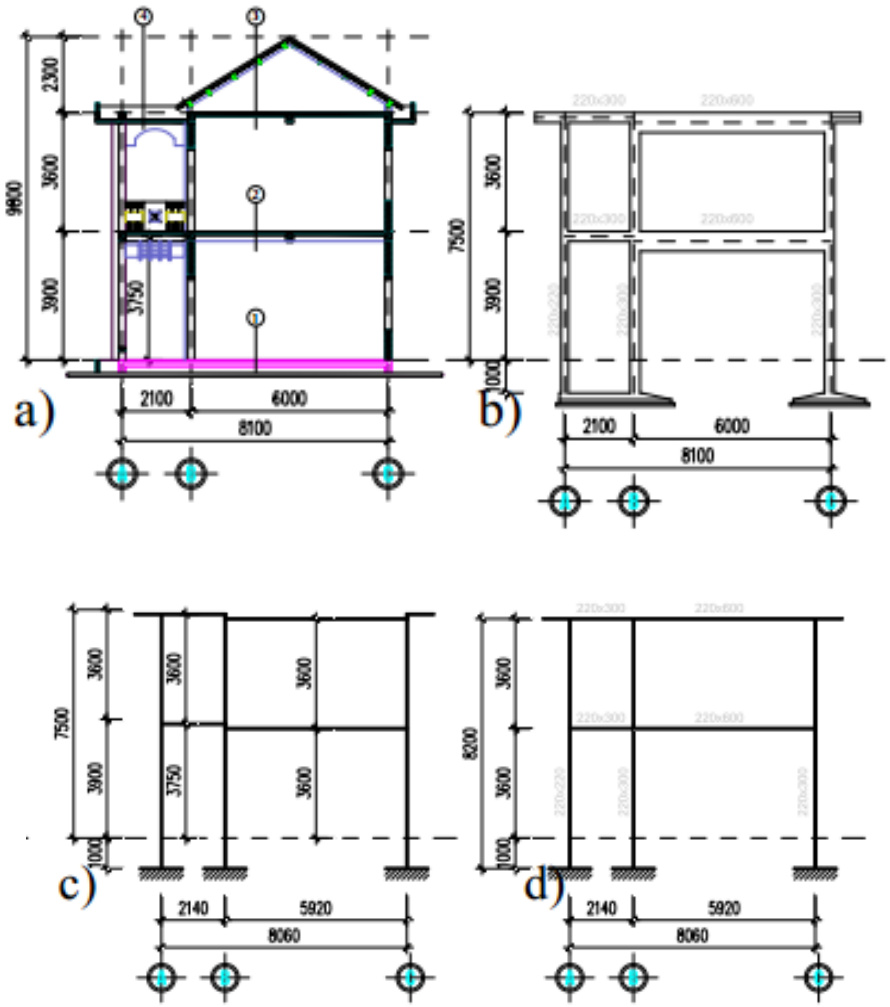
Chương 1: Chương mở đầu

Chương 2: Phương pháp sai phân hữu hạn

Chương 3: Phương pháp phần tử hữu hạn (mô hình chuyển vị)

Chương 4: Áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn (mô hình chuyển vị) cho bài toán hệ thanh.

Khái niệm về tính toán kết cấu



XÁC ĐỊNH SƠ ĐỒ TÍNH, TẢI TRỌNG

↓

TÍNH TOÁN KẾT CẤU(TÍNH NỘI LỰC, CHUYỂN VỊ)

↓

THIẾT KẾ

↓

THI CÔNG

KHÁI NIỆM VỀ TÍNH TOÁN KẾT CẤU

Một vật thể khi chịu tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài (tải trọng, chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa, nhiệt độ …) thì trong vật thể :

- Xuất hiện các ứng suất (nội lực)
- Biến dạng (thẳng, xoay)
- Chuyển vị

▪ **Tính toán kết cấu**: xác định các giá trị biến dạng, chuyển vị, ứng suất (nội lực) của vật thể chịu tác động của các nguyên nhân bên ngoài.

CÁC BƯỚC TÍNH TOÁN KẾT CẤU

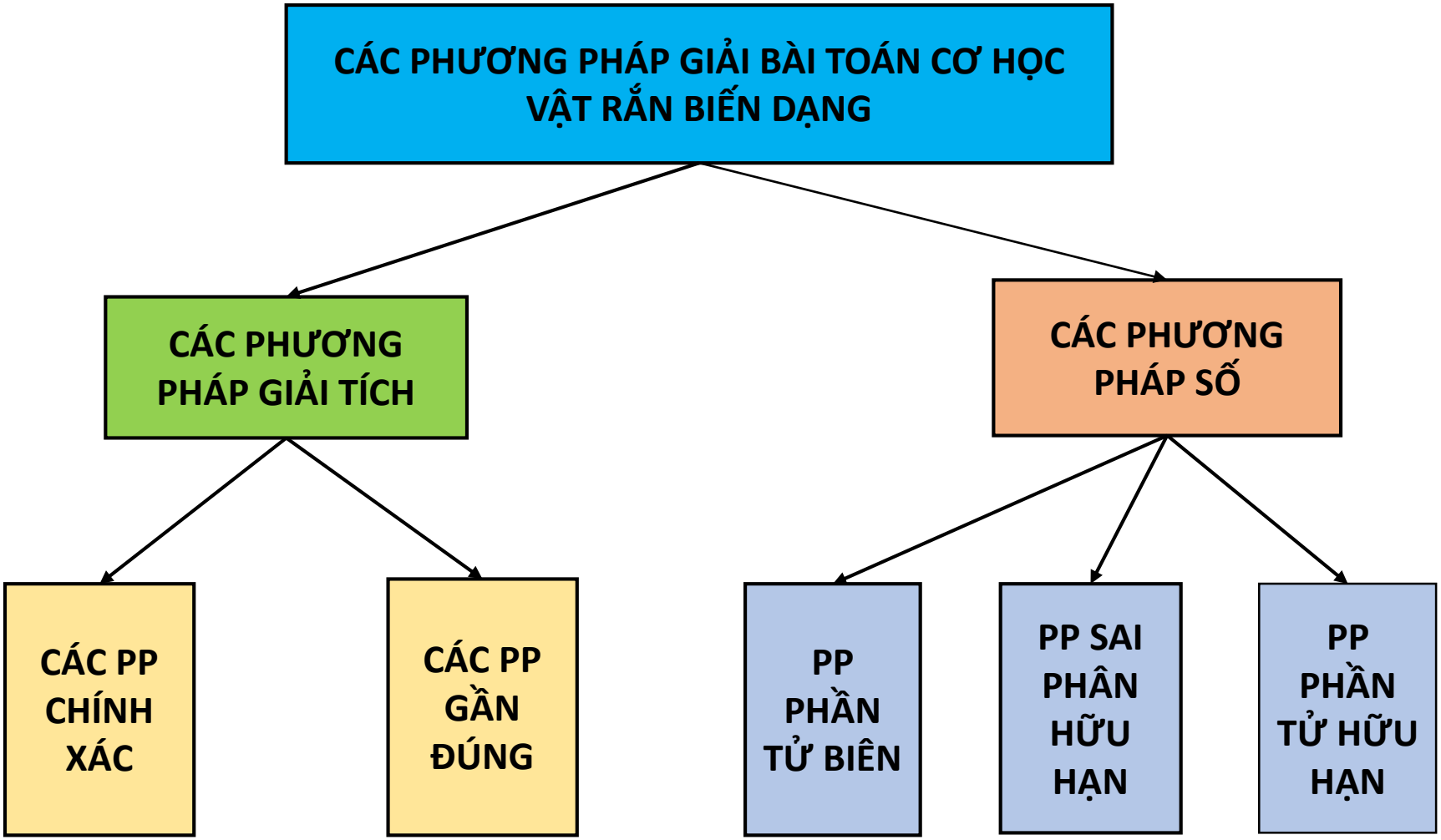
- **Xây dựng bài toán:**

- Xác định ẩn số của bài toán
- Thiết lập các phương trình, bất phương trình, các liên hệ giữa các ẩn số, các liên hệ với các đại lượng biểu thị tính chất cơ lý của vật liệu.

- Giải bài toán:

- Giải các hệ phương trình, hệ bất phương trình để có được các giá trị biến dạng, chuyển vị, ứng suất và nội lực.

CÁC PHƯƠNG PHÁP SỐ – CHƯƠNG MỞ ĐẦU



CHƯƠNG 1: CHƯƠNG MỞ ĐẦU

1.1. CÁC KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG PHÁP SỐ

1.2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN TRONG LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI DƯỚI DẠNG MA TRẬN

1.3. NGUYÊN LÝ DỪNG THẾ NĂNG TOÀN PHẦN

1.1. CÁC KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG PHÁP SỐ

- Khái niệm về PPS: là các PP thay thế việc trình bày nghiệm của bài toán dưới dạng các hàm cổ điển bằng một tập hợp số.
- Nghiệm được xác định tại một số hữu hạn các điểm của vật thể, hay nói khác đi nghiệm được mô tả theo một tập hợp số, các điểm còn lại xác định bằng cách nôi suy.
- Thay thế cho các hàm nghiệm liên tục (giải tích), chỉ xác định những giá trị rời rạc của nó nên phương pháp số còn được gọi là phương pháp rời rạc hóa.

1.1. CÁC KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG PHÁP SỐ

CÁC PHƯƠNG PHÁP RỜI RẠC HÓA

RỜI RẠC HÓA TOÁN HỌC

Rời rạc hóa các phương trình

Phương trình thỏa mãn tại một số điểm tự chọn. Nghiệm là tập hợp các giá trị của ẩn tại các điểm tự chọn.

PP sai phân hữu hạn

RỜI RẠC HÓA VẬT LÝ

Rời rạc hóa các mô hình vật thể.

Vật liên tục thay thế bằng hữu hạn các phần tử rời rạc nối với nhau tại các nút.

Nghiệm là tập hợp các giá trị của ẩn tại các nút.

PP phần tử hữu hạn

1.2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN TRONG LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI DƯỚI DẠNG MA TRẬN

CÁC MỐI LIÊN HỆ TRONG LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH

- CHUYỂN VỊ – BIẾN DẠNG
- BIẾN DẠNG – ỨNG SUẤT
- ỨNG SUẤT – TẢI TRỌNG

1.2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN TRONG LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI DƯỚI DẠNG MA TRẬN

- **Trạng thái ứng suất tại một điểm**

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T$$

- **Trạng thái biến dạng tại một điểm**

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T$$

- **Chuyển vị tại một điểm**

$$\{u\} = \{u \quad v \quad w\}^T$$

1.2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN TRONG LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI DƯỚI DẠNG MA TRẬN

Đại lượng cần tìm	Bài toán 3 chiều	Bài toán 2 chiều	Bài toán 1 chiều
Chuyển vị $\{u\}$	u v w	u v	u
ứng suất $\{\sigma\}$	σ_x σ_y σ_z τ_{xy} τ_{yz} τ_{zx}	σ_x σ_y τ_{xy}	σ_x
Biến dạng $\{\varepsilon\}$	ε_x ε_y ε_z γ_{xy} γ_{yz} γ_{zx}	ε_x ε_y γ_{xy}	ε_x
Tổng số ẩn	15	8	3

1.2.1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH BIẾN DẠNG – CHUYỂN VỊ PHƯƠNG TRÌNH HÌNH HỌC

a) Bài toán 3 chiều

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [\nabla]\{u\}$$

$[\nabla]$: ma trận các toán tử vi phân

b) Bài toán 2 chiều

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

c) Bài toán một chiều

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

1.2.2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH ỨNG SUẤT - BIẾN DẠNG

ĐỊNH LUẬT HÚC

a) Bài toán 3 chiều

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - v\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]; \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - v\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]; \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - v\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right]; \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$$

G - môđun đàn hồi trượt

$$G = \frac{E}{2(1+v)}$$

E - môđun đàn hồi dọc trục

v - hệ số Poisson

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -v & -v & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & -v & 0 & 0 & 0 \\ -v & -v & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+v) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1}\{\sigma\} \qquad \{\sigma\} = [D].\{\varepsilon\}$$

1.2.2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH ỨNG SUẤT - BIẾN DẠNG

ĐỊNH LUẬT HÚC

$[D]$ là ma trận đàn hồi, chứa các đặc trưng đàn hồi của kết cấu

$$[D] = \frac{E}{2(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} (1-2v) & 2v & 2v & 0 & 0 & 0 \\ 2v & (1-2v) & 2v & 0 & 0 & 0 \\ 2v & 2v & (1-2v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2v) \end{bmatrix}$$

b) Bài toán 2 chiều

- Trạng thái phẳng về ứng suất: vật thể có dạng tấm có chiều dầy nhỏ so với kích thước của 2 chiều còn lại và tải trọng trong mặt phẳng của tấm.

Kí hiệu xOy là hệ trục nằm trong mặt phẳng của tấm và Oz là trục vuông góc với mặt đó. Thừa nhận các giả thiết dưới đây với ứng suất:

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - v\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - v\sigma_x\right]$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{2(1+v)}{E}\tau_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -v & 0 \\ -v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+v) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$$

$$\varepsilon_z = -\frac{v}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{-v}{1-v}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1-v^2)}\begin{bmatrix} 2 & 2v & 0 \\ 2v & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-v \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$[D] = \frac{E}{2(1-v^2)}\begin{bmatrix} 2 & 2v & 0 \\ 2v & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-v \end{bmatrix}$$

b) Bài toán 2 chiều

- Trạng thái phẳng về biến dạng : vật thể có tiết diện ngang không đổi và chiều dài lớn so với kích thước của 2 chiều còn lại, tải trọng tác dụng vuông góc với trục dài của vật thể.

Gọi xOy là hệ trục song song với mặt phẳng của tiết diện ngang. Thừa nhận các giả thiết sau:

$$w = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \qquad \varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1+v}{E}\begin{bmatrix} 1-v & -v & 0 \\ -v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 2(1-v) & 2v & 0 \\ 2v & 2(1-v) & 0 \\ 0 & 0 & 1-2v \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

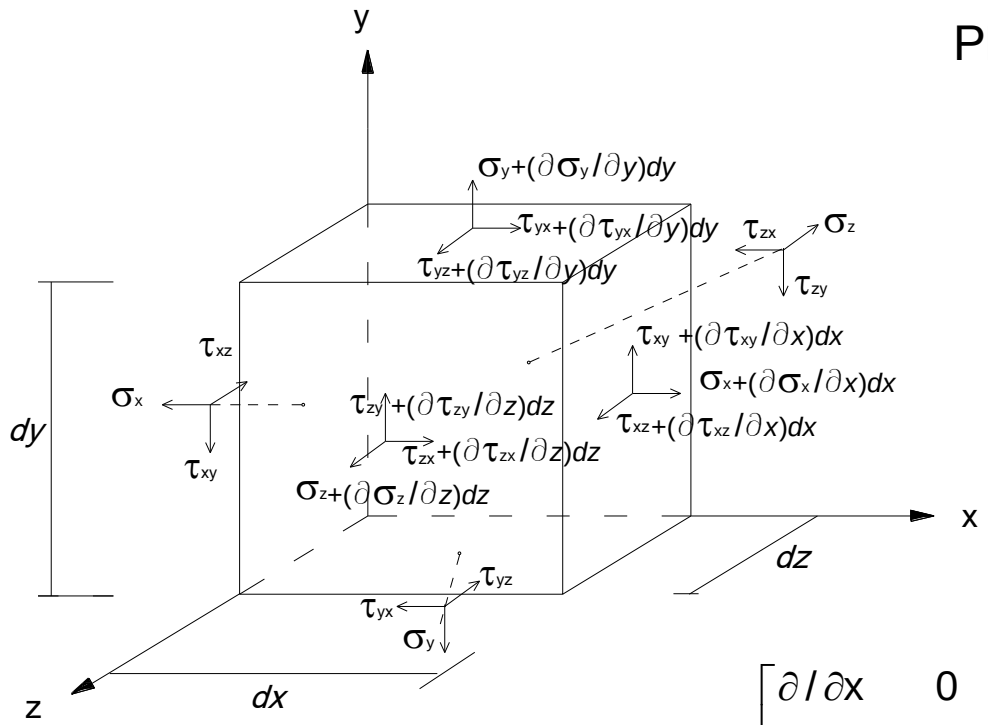
$$[D] = \frac{E}{2(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 2(1-v) & 2v & 0 \\ 2v & 2(1-v) & 0 \\ 0 & 0 & 1-2v \end{bmatrix} \qquad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0; \qquad \sigma_z = -v\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

c) Bài toán 1 chiều

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x \Rightarrow \sigma_x = E.\varepsilon_x$$

1.2.3. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG ỨNG SUẤT – TẢI TRỌNG

a) Bài toán 3 chiều



Phương trình cân bằng theo 3 trục x, y, z

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+\rho_x=0$$

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+\rho_y=0$$

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\rho_z=0$$

$$\begin{bmatrix}\partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z\\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0\\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\rho_x\\ \rho_y\\ \rho_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$[\nabla]^T\{\sigma\}+\{\rho\}=\{0\}$$

$[\nabla]$ ma trận các toán tử vi phân

Phương trình cân bằng trên bề mặt – điều kiện biên tĩnh học

$$l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} = q_x$$
$$l\tau_{yx} + m\sigma_y + n\tau_{yz} = q_y$$
$$l\tau_{zx} + m\tau_{zy} + n\sigma_z = q_z$$

l, m, n - các cosin chỉ phương của pháp tuyến ngoài của mặt vật thể đàn hồi tại điểm đang xét;
q_x , q_y , q_z - các thành phần ngoại lực theo 3 trục x, y, z tác dụng trên một đơn vị diện tích mặt ngoài của vật thể đàn hồi.

$$\begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix}$$

$$[L].\{\sigma\} = \{q\}$$

$[L]$ - ma trận cosin chỉ phương của pháp tuyến ngoài của mặt vật thể đàn hồi

b) Bài toán 2 chiều

Phương trình cân bằng

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho_y = 0$$

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Điều kiện biên tĩnh học

$$l\sigma_x + m\tau_{xy} = q_x$$

$$l\tau_{yx} + m\sigma_y = q_y$$

$$\begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}$$

c) Bài toán 1 chiều

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \rho_x = 0$$

1.2.4. CÁC PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG THÍCH

a) Bài toán 3 chiều

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right]$$

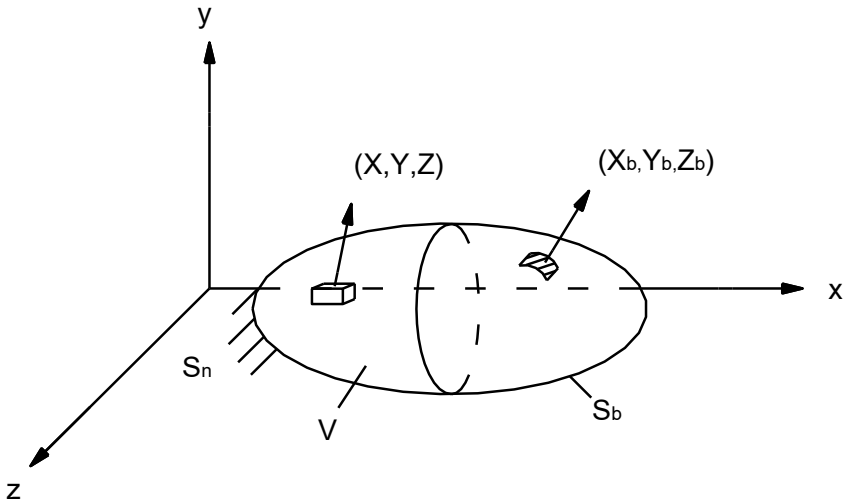
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right]$$

b) Bài toán 2 chiều

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

1.3. NGUYÊN LÝ DỪNG THẾ NĂNG TOÀN PHẦN



Vật thể đàn hồi V

Diện tích mặt chịu tải S_b

Diện tích bề mặt có điều kiện biên S_n

Lực thể tích trên 1 đơn vị thể tích

$$\{\rho\} = \{X \quad Y \quad Z\}^T$$

Lực bề mặt trên 1 đơn vị diện tích

$$\{q\} = \{X_b \quad Y_b \quad Z_b\}^T$$

Vectơ chuyển vị: $\{u\} = \{u \quad v \quad w\}^T$

Vectơ ứng suất: $\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T$

Vectơ biến dạng: $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T$

Công ngoại lực trên các chuyển dời {u}:

$$W = \int_V \{u\}^T \{\rho\} dV + \int_S \{u\}^T \{q\} dS = \int_V (Xu + Yv + Zw) dV + \int_S (X_b u + Y_b v + Z_b w) dS$$

1.3. NGUYÊN LÝ DỪNG THẾ NĂNG TOÀN PHẦN

Thế năng biến dạng đàn hồi: $$U = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

Thế năng toàn phần của hệ: $\Pi = U - W$

Nguyên lý dừng thế năng toàn phần

Trong tất cả các trường chuyển vị (trạng thái chuyển vị) khả dĩ động (tức thoả mãn các điều kiện tương thích và điều kiện biên động học); trường chuyển vị thực (tức trường chuyển vị tương ứng với sự cân bằng của vật thể) sẽ ứng với thế năng toàn phần Π của hệ đạt giá trị dừng.

$$\delta\Pi(\{u\}) = \delta\, U(\{u\}) - \delta\, W(\{u\}) = 0$$