CHƯƠNG 2: PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN

2.1. Khái niệm phương pháp sai phân hữu hạn

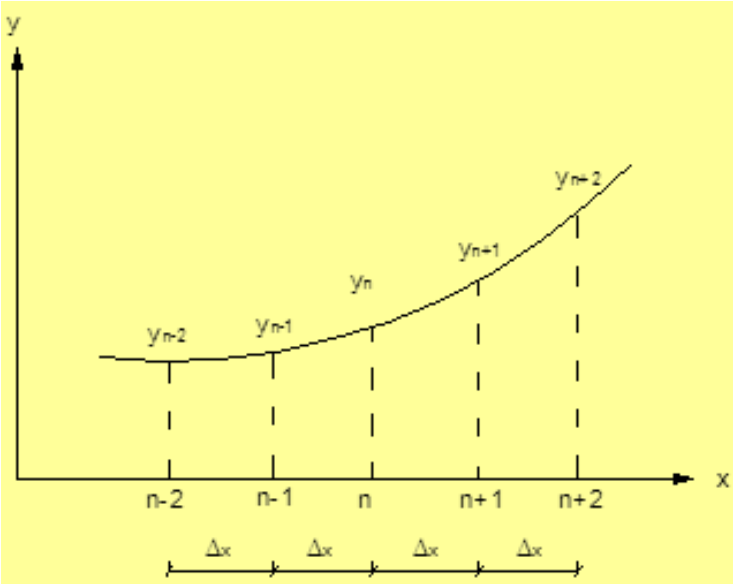
2.2. Cách biểu thị đạo hàm bằng sai phân hữu hạn

2.3. Áp dụng phương pháp sai phân hữu hạn để xác định mô men uốn và độ võng của dầm

2.1. KHÁI NIỆM PP SAI PHÂN HỮU HẠN

- Đạo hàm trong phương trình được biểu thị bằng hiệu của các giá trị hàm tương ứng giữa một khoảng chia hữu hạn.
- Tại mỗi điểm chia của các khoảng (còn gọi là lưới) sẽ viết được một phương trình biểu thị phương trình vi phân bằng sai phân hữu hạn.
- Cùng với điều kiện biên (cũng được biểu thị bằng sai phân hữu hạn), thiết lập được một hệ phương trình đại số cho phép xác định các giá trị bằng số của hàm cần tìm tại các điểm lưới.
- Kết quả thu được các phương trình đại số thay vì phải tích phân các phương trình vi phân.

1. Đạo hàm và sai phân cấp một



$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_n = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

trong đó: Δy - gọi là sai phân cấp một

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - gọi là tỉ sai phân

- Sai phân tiến: $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$
- Sai phân lùi : $\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$
- Sai phân trung tâm : $\Delta y_n = \frac{1}{2}(y_{n+1} - y_{n-1})$

Đạo hàm cấp một sẽ là:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_n \approx \frac{\Delta y_n}{\Delta x} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x}$$

2. Đạo hàm và sai phân cấp cao

- Lấy gần đúng: $\left.\frac{d^m y}{dx^m}\right|_n \approx \frac{\Delta^m y_n}{(\Delta x)^m}$ $\Delta^m y_n$: sai phân cấp m của hàm tại điểm chia thứ n
- Sai phân cấp hai: $\Delta^m y_n = \Delta\left(\Delta^{m-1} y_n\right)$
- Đạo hàm cấp hai: $\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta\left(\frac{1}{2}(y_{n+1} - y_{n-1})\right) = \frac{1}{4}(y_{n+2} - 2y_n + y_{n-2})$
- Có thể tăng độ chính xác của biểu thức trên bằng cách chia nhỏ bước, chỉ bằng $\Delta x/2$ có:

$$\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_n \approx \frac{(y_{n+2} - 2y_n + y_{n-2})}{4(\Delta x)^2}$$

$$\Delta^2 y_n = (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})$$

$$\Delta^4 y_n = \Delta^2\left(\Delta^2 y_n\right) = \Delta^2(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) = \Delta^2 y_{n+1} - 2\Delta^2 y_n + \Delta^2 y_{n-1}$$

$$= y_{n+2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}$$

$$\left.\frac{d^4 y}{dx^4}\right|_n \approx \frac{\Delta^4 y_n}{(\Delta x)^4} = \frac{y_{n+2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{(\Delta x)^4}$$

2.3. ÁP DỤNG PP SAI PHÂN HỮU HẠN XÁC ĐỊNH MÔ MEN UỐN VÀ ĐỘ VÕNG CỦA DẦM

- Phương trình vi phân của dầm chịu uốn :

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \quad ; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{q}{EJ} \qquad (1)$$

- Sai phân cấp 2 và cấp 4

$$\Delta^2 y_n = \left(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\right) \qquad \Delta^4 y_n = y_{n-2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}$$

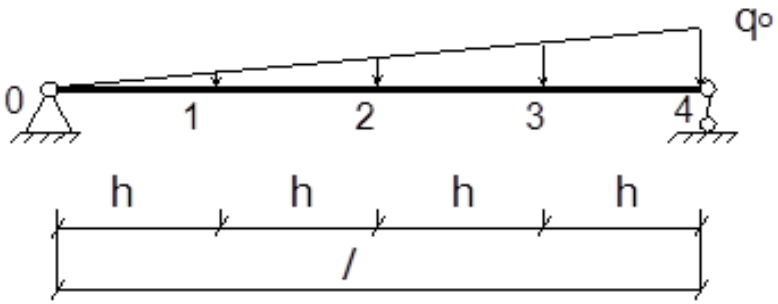
- Tại điểm chia thứ n, các phương trình vi phân được viết lại dưới dạng sai phân như sau (h là bước sai phân)

$$\left.\begin{aligned} M_{n-1} - 2M_n + M_{n+1} &= h^2 q_n \\ y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} &= \frac{h^2 M_n}{EJ} \\ y_{n-2} - 4y_{n-1} + 6y_n - 4y_{n+1} + y_{n+2} &= \frac{h^4 q_n}{EJ} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Chỉ cần giải hệ PT đại số (2) thay cho việc giải PT vi phân (1)

2.3. ÁP DỤNG PP SAI PHÂN HỮU HẠN XÁC ĐỊNH MÔ MEN UỐN VÀ ĐỘ VÕNG CỦA DẦM

- Ví dụ 2.1: Xác định mômen và độ võng tại các điểm chia.



Bước sai phân: h=l/4

Điều kiện biên: $M_0 = M_4 = 0$

$y_0 = y_4 = 0$

Tính mô men

Tại nút 1: $0 - 2M_1 + M_2 = -h^2(q_0/4)$

Tại nút 2: $M_1 - 2M_2 + M_3 = -h^2(q_0/2)$

Tại nút 3: $M_2 - 2M_3 + 0 = -h^2(3q_0/4)$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_o h^2/4 \\ -q_o h^2/2 \\ -3q_o h^2/4 \end{Bmatrix}$$

Giải hệ phương trình thu được kết quả

$M_1 = 0{,}625\, q_0 h^2 = 0{,}0391\, q_0 l^2$

$M_2 = q_0 h^2 = 0{,}0625\, q_0 l^2$

$M_3 = 0{,}873\, q_0 h^2 = 0{,}0547\, q_0 l^2$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} 0{,}0391 q_o l^2 \\ 0{,}0625 q_o l^2 \\ 0{,}0547 q_o l^2 \end{Bmatrix}$$

2.3. ÁP DỤNG PP SAI PHÂN HỮU HẠN XÁC ĐỊNH MÔ MEN UỐN VÀ ĐỘ VÕNG CỦA DẦM

Tính độ võng (có thể dùng sai phân cấp 2 hoặc cấp 4)

Tại nút 1: $0 - 2y_1 + y_2 = h^2(0{,}625\, q_0h^2)/EJ$

Tại nút 2: $y_1 - 2y_2 + y_3 = h^2(q_0h^2)/EJ$

Tại nút 3: $y_2 - 2y_3 + 0 = h^2(0{,}873\, q_0h^2)/EJ$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \frac{q_o h^4}{EJ} \begin{Bmatrix} 0{,}625 \\ 1 \\ 0{,}873 \end{Bmatrix} \qquad \{y\} = \frac{q_o l^4}{EJ} 10^{-3} \begin{Bmatrix} 4{,}63 \\ 6{,}82 \\ 5{,}13 \end{Bmatrix}$$

Giải hệ phương trình thu được kết quả

$y_1 = -\,1{,}187\, q_0h^4 /EJ = -\,0{,}00463\, q_0\, l^4/EJ$

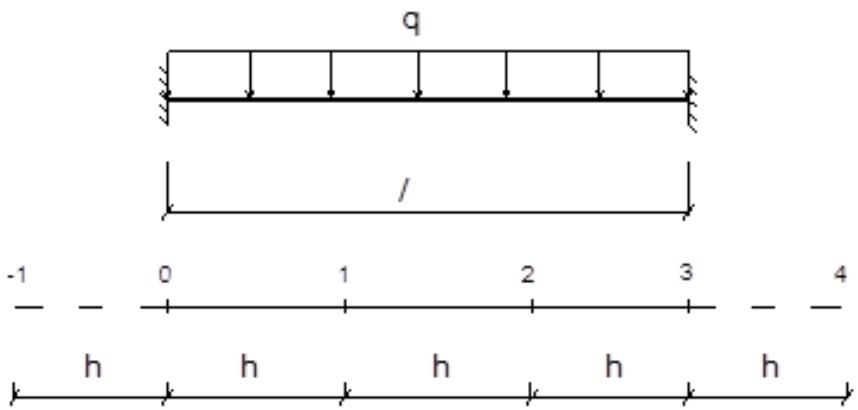
$y_2 = -\,1{,}749\, q_0h^4 /EJ = -\,0{,}00682\, q_0\, l^4/EJ$

$y_1 = -\,1{,}311\, q_0h^4 /EJ = -\,0{,}00513\, q_0\, l^4/EJ$

Kết quả trên chỉ là gần đúng, nếu chia bước sai phân nhỏ hơn thì kết quả sẽ hội tụ về kết quả chính xác.

2.3. ÁP DỤNG PP SAI PHÂN HỮU HẠN XÁC ĐỊNH MÔ MEN UỐN VÀ ĐỘ VÕNG CỦA DẦM

Ví dụ 2.2.



Tính độ võng tại các điểm chia.

- Bước sai phân h=l/3
- Nút trong 1,2 ; nút ngoài -1,4
- Nút biên 0,3
- Điều kiện biên: $y_0 = y_3 = 0$

Độ võng của dầm tại các nút 1 và 2 :

Tại nút 1: $y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3 = - h^4 q/EJ$

Tại nút 2: $y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 = - h^4 q/EJ$

Để tìm y_{-1} và y_4 , sử dụng điều kiện biên về góc xoay tại nút 0 và 3:

Tại nút 0:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0 \Rightarrow y_1 = y_{-1}$$

2.3. ÁP DỤNG PP SAI PHÂN HỮU HẠN XÁC ĐỊNH MÔ MEN UỐN VÀ ĐỘ VÕNG CỦA DẦM

Tại nút 3: $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_3 = \frac{y_4 - y_2}{2h} = 0 \Rightarrow y_2 = y_4$$

Thay y_{-1} và y_4 , y_0 và y_3 vào hệ phương trình trên thu được:

$$7y_1 - 4y_2 = -h^4 q/EJ$$

$$-4y_1 + 7y_2 = -h^4 q/EJ$$

Giải hệ phương trình thu được kết quả:

$$y_1 = y_2 = -h^4 q/3EJ = -l^4 q/3^5 EJ$$