

CHƯƠNG 4: ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP PTHH TÍNH TOÁN HỆ THANH PHẲNG

4.1.Phần tử thanh chịu kéo – nén

4.2.Phần tử thanh chịu uốn ngang phẳng

4.3.Phần tử thanh chịu uốn ngang phẳng và kéo – nén

4.4.Áp dụng PP PTHH tính hệ dầm – khung phẳng chịu tải trọng

4.5.Áp dụng PP PTHH tính hệ dàn phẳng chịu tải trọng

4.1.PHẦN TỬ THANH CHỊU KÉO - NÉN

Xét PT là thanh thẳng i-k, chiều dài l ,

$$EF = \text{const} \quad \{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_k \end{Bmatrix} \quad \{P_q\}_e = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{kx} \end{Bmatrix}$$

1. Ma trận độ cứng

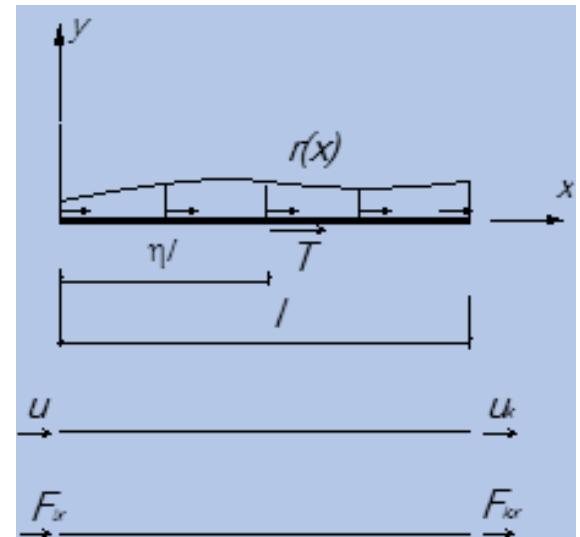
Ma trận hàm dạng

$$[N] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \frac{x}{l} \end{bmatrix} = [N_1(x) \quad N_2(x)]$$

$$\{\varepsilon\} = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad [\nabla] = \partial / \partial x \quad \sigma_x = E \varepsilon_x \quad [D] = E$$

Ma trận xác định biến dạng $[B] = [\nabla] \cdot [N] = [\partial / \partial x] \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \frac{x}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$

Ma trận độ cứng PT trong HTDR



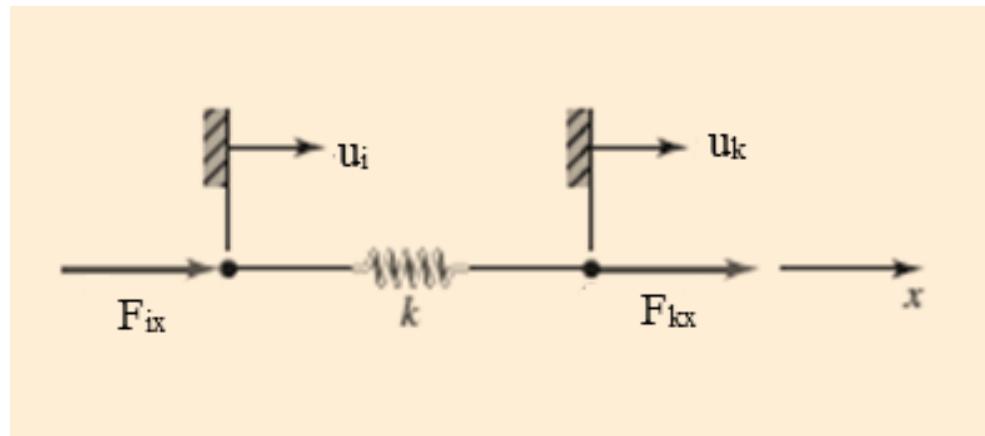
$$[K]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_I \int_F [B]^T [D] [B] dF dx$$

4.1.PHẦN TỬ THANH CHỊU KÉO - NÉN

$$[K]_e = \int_0^1 \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} F dx = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Phần tử lò xo tuyến tính

k : độ cứng của lò xo

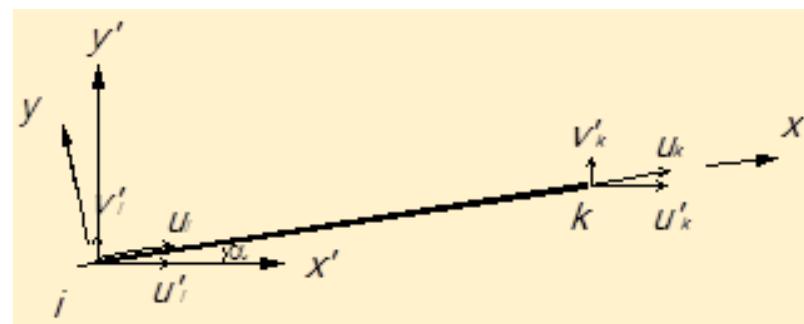


$$[K]_e = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)^*$$

4.1.PHẦN TỬ THANH CHIU KÉO - NÉN

Ma trận độ cứng của PT trong HTĐC

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_k \end{Bmatrix}; \quad \{\delta'\}_e = \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_k \\ v'_k \end{Bmatrix}$$



Tại nút i : $u_i = u'_i \cdot \cos\alpha + v'_i \cdot \sin\alpha$

$$u_i = [\cos\alpha \quad \sin\alpha] \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \end{Bmatrix} = [L_i] \cdot \{\delta'_i\}$$

$$[L_i] = [\cos\alpha \quad \sin\alpha]$$

$$\cos\alpha = c = \frac{x'_k - x'_i}{l}; \sin\alpha = s = \frac{y'_k - y'_i}{l};$$

$$l = \sqrt{(x'_k - x'_i)^2 + (y'_k - y'_i)^2}$$

Tại nút k

$$[L_k] = [\cos\alpha \quad \sin\alpha]$$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_i] & 0 \\ 0 & [L_k] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_k \\ v'_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_k \\ v'_k \end{Bmatrix}$$

Ma trận biến đổi tọa độ

$$[T]_e = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$$

4.1. PHẦN TỬ THANH CHỊU KÉO - NÉN

$$[K']_e = [T]_e^T \cdot [K]_e \cdot [T]_e = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{EF}{I} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$$

$$[K']_e = \frac{EF}{I} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

2. Vectơ tải trọng nút $\{P_q\}_e$ do tải trọng tác dụng trong thanh

Tải trọng phân bố

$$\{P_q\}_e = \int_0^l [N]^T r(x) dx = \int_0^l \left\{ 1 - \frac{x}{l}, \frac{x}{l} \right\} r(x) dx$$

Lực tập trung

$$\{P_q\}_e = \begin{bmatrix} N_1(\eta l) \\ N_2(\eta l) \end{bmatrix} \cdot T$$

Tải trọng phân bố đều

$$\{P_q\}_e = \int_0^l \left\{ 1 - \frac{x}{l}, \frac{x}{l} \right\} r dx = \begin{bmatrix} \frac{rl}{2} \\ \frac{rl}{2} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Lực tập trung ở giữa PT

$$\{P_q\}_e = \begin{bmatrix} T/2 \\ T/2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

4.2.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG

Vectơ chuyển vị nút và vectơ tải trọng nút

$$\{\delta\}_e = \{v_i \quad \varphi_i \quad v_k \quad \varphi_k\}^T \quad \{P_q\}_e = \{F_{iy} \quad F_{i\varphi} \quad F_{ky} \quad F_{k\varphi}\}^T$$

1. Ma trận độ cứng

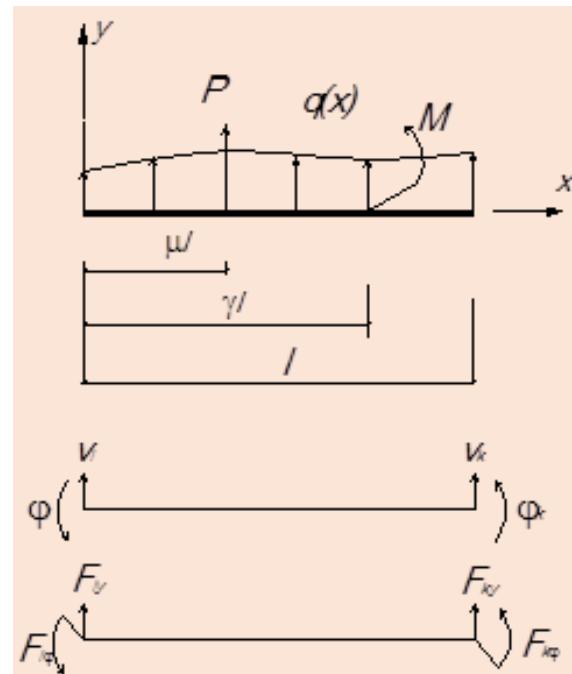
Ma trận hàm dạng

$$[N] = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)]$$

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right); N_2(x) = \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right);$$

$$N_3(x) = \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right); N_4(x) = \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right).$$

$$\{\varepsilon\} = \varepsilon_x \quad [D] = E \quad \varepsilon_x = \varepsilon_x^u = \frac{y}{\rho} = -y \frac{d^2v}{dx^2}$$



$$[\nabla] = -y \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Ma trận xác định biến dạng

$$[B] = [\nabla][N] = -y [N_1''(x) \quad N_2''(x) \quad N_3''(x) \quad N_4''(x)]$$

$$= y \left[\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \quad \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \quad \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) \quad \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \right]$$

4.2.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG

Ma trận độ cứng PT-HTĐR

$$[K]_e = \int_V [B]^T [D][B] dV = \int_F \int [B]^T [D][B] dF dx$$

$$[K]_e = EJ_z \begin{bmatrix} \int N_1'' N_1'' dx & & & \\ & dx & & \\ \int N_2'' N_1'' dx & \int N_2'' N_2'' dx & & \\ & & & \\ \int N_3'' N_1'' dx & \int N_3'' N_2'' dx & \int N_3'' N_3'' dx & \\ & & & \\ \int N_4'' N_1'' dx & \int N_4'' N_2'' dx & \int N_4'' N_3'' dx & \int N_4'' N_4'' dx \end{bmatrix}$$

$$J_z = \int_F y^2 dF$$

$$[K]_e = EJ_z \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix}$$

(4.5)

4.2.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG

2. Ma trận độ cứng xác định theo lý thuyết Cơ học kết cấu

Phần tử k_{mn} trong ma trận độ cứng

có ý nghĩa là phản lực tại

liên kết thứ m (lực nút thứ m)

do riêng chuyển vị của liên kết

thứ n bằng đơn vị gây ra.

$$Q_i = \frac{12EJ}{l^3} v_i + \frac{6EJ}{l^2} \varphi_i - \frac{12EJ}{l^3} v_k + \frac{6EJ}{l^2} \varphi_k$$

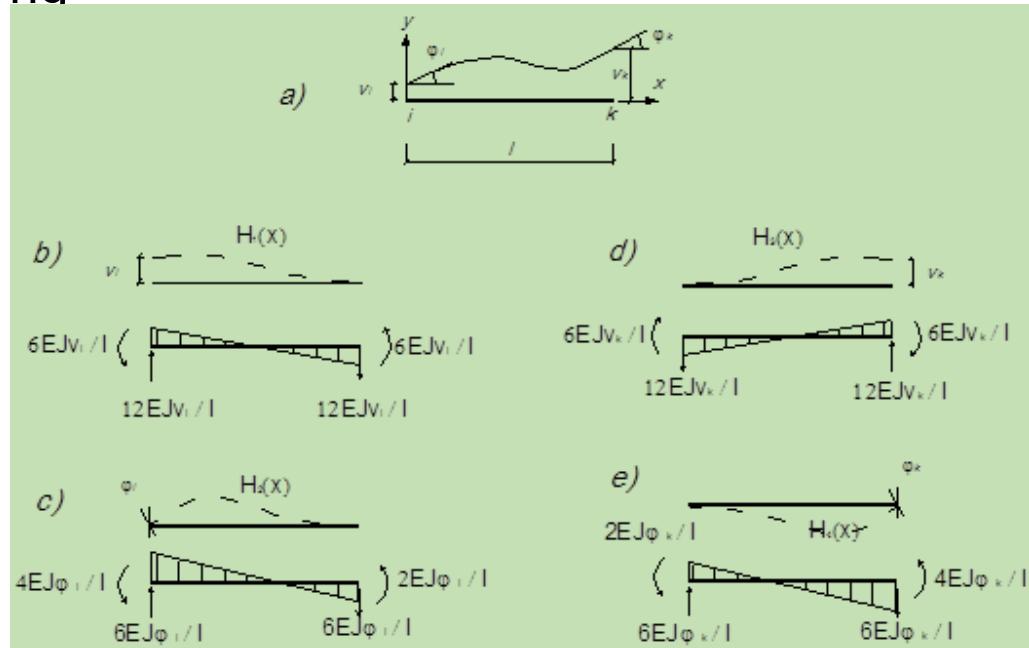
$$M_i = \frac{6EJ}{l^2} v_i + \frac{4EJ}{l} \varphi_i - \frac{6EJ}{l^2} v_k + \frac{2EJ}{l} \varphi_k$$

$$Q_k = -\frac{12EJ}{l^3} v_i - \frac{6EJ}{l^2} \varphi_i + \frac{12EJ}{l^3} v_k - \frac{6EJ}{l^2} \varphi_k$$

$$M_k = \frac{6EJ}{l^2} v_i + \frac{2EJ}{l} \varphi_i - \frac{6EJ}{l^2} v_k + \frac{4EJ}{l} \varphi_k$$

Q_i, Q_k - lực nút tại nút i và k tương ứng với chuyển vị thẳng v_i, v_k ;

M_i, M_k - lực nút tại nút i và k tương ứng với chuyển vị xoay φ_i, φ_k .



4.2.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_k \\ M_k \end{Bmatrix} = EJ \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \phi_i \\ v_k \\ \phi_k \end{Bmatrix}$$

$$\{S\}_e = [K]_e \{\delta\}_e$$

3. Vectơ tải trọng nút $\{P_q\}_e$ do tải trọng tác dụng trong thanh

Tải trọng phân bố

$$\{P_q\}_e = \int_0^l [N]^T q(x) dx = \int_0^l \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{Bmatrix} q(x) dx = \int_0^l \begin{Bmatrix} \frac{1}{l^3}(2x^3 - 3lx^2 + l^3) \\ \frac{1}{l^2}(x^3 - 2lx^2 + l^2x) \\ \frac{1}{l^3}(-2x^3 + 3lx^2) \\ \frac{1}{l^2}(x^3 - lx^2) \end{Bmatrix} q(x) dx$$

4.2. PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG

Tải trọng phân bố đều

$$\left\{ P_q \right\}_e = \int_0^l \begin{Bmatrix} \frac{1}{l^3}(2x^3 - 3lx^2 + l^3) \\ \frac{1}{l^2}(x^3 - 2lx^2 + l^2x) \\ \frac{1}{l^3}(-2x^3 + 3lx^2) \\ \frac{1}{l^2}(x^3 - lx^2) \end{Bmatrix} qdx = \begin{Bmatrix} \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ \frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Lực tập trung và mômen tập trung

$$\left\{ P_q \right\}_e = \begin{Bmatrix} N_1(\mu l) \\ N_2(\mu l) \\ N_3(\mu l) \\ N_4(\mu l) \end{Bmatrix} P + \begin{Bmatrix} N'_1(\gamma l) \\ N'_2(\gamma l) \\ N'_3(\gamma l) \\ N'_4(\gamma l) \end{Bmatrix} M$$

Lực tập trung và mômen tập trung đặt tại giữa nhịp:

$$\left\{ P_q \right\}_e = \left\{ \left(\frac{P}{2} - \frac{3M}{2l} \right) \quad \left(\frac{Pl}{8} - \frac{M}{4} \right) \quad \left(\frac{P}{2} + \frac{3M}{2l} \right) \quad \left(-\frac{Pl}{8} - \frac{M}{4} \right) \right\}^T \quad (4.7)$$

4.3.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

4.3.1. Phần tử thanh hai đầu ngầm

Vécto chuyển vị nút và vectơ tải trọng nút

$$\{\delta\}_e = \{u_i \quad v_i \quad \varphi_i \quad u_k \quad v_k \quad \varphi_k\}^T$$

$$\{P_q\}_e = \{F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{i\varphi} \quad F_{kx} \quad F_{ky} \quad F_{k\varphi}\}^T$$

Ma trận hàm dạng

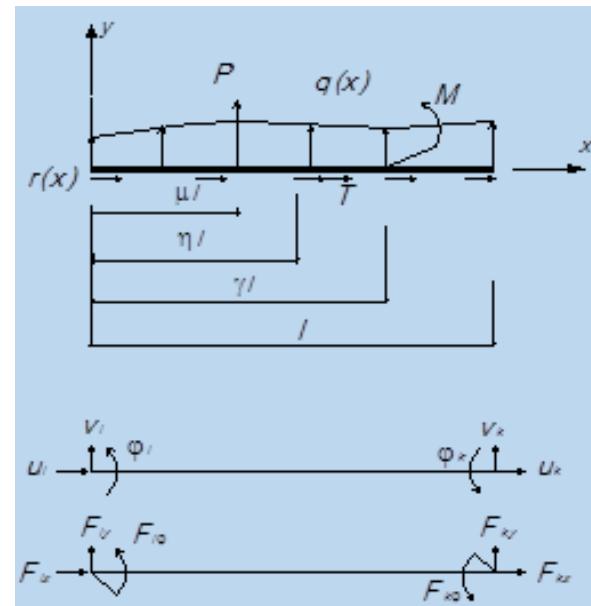
$$\{u\} = \begin{cases} u(x) \\ v(x) \end{cases} = \begin{cases} a_1 + a_2 x \\ a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + a_6 x^3 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{cases}$$

$$[P(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}$$

$$u(x) = a_1 + a_2 x$$

$$v(x) = a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + a_6 x^3$$

$$\varphi(x) = v'(x) = a_4 + 2a_5 x + 3a_6 x^2$$



4.3.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

$$u_i \equiv u(x=0) = a_1$$

$$v_i \equiv v(x=0) = a_3$$

$$\varphi_i \equiv \varphi(x=0) = a_4$$

$$u_k \equiv u(x=l) = a_1 + a_2 l$$

$$v_k \equiv v(x=l) = a_3 + a_4 l + a_5 l^2 + a_6 l^3$$

$$\varphi_k \equiv \varphi(x=l) = a_4 + 2a_5 l + 3a_6 l^2$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/l & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/l^2 & -2/l & 0 & 3/l^2 & -1/l \\ 0 & 2/l^3 & 1/l^2 & 0 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix}$$

$$[N] = [P(x)] [A]^{-1} = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix}$$

$$\{\delta\}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & l^2 & l^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [A] \{a\}$$

$$N_1(x) = (1 - \frac{x}{l}); N_2(x) = (1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3});$$

$$N_3(x) = (x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}); N_4(x) = \frac{x}{l};$$

$$N_5(x) = (\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}); N_6(x) = (-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2})$$

4.3.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

Kết hợp 2 trường hợp : thanh chịu kéo - nén và thanh chịu uốn

$$\{\varepsilon\} = \varepsilon^{k-n} + \varepsilon^u = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad [\nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$[B] = [\nabla][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix}$$

$$[B] = [N'_1(x) - yN''_2(x) - yN''_3(x) \quad N'_4(x) - yN''_5(x) - yN''_6(x)]$$

$$N'_1(x) = -\frac{1}{l}; N''_2(x) = \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right); N''_3(x) = \left(-\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \right)$$

$$N'_4(x) = \frac{1}{l}; \quad N''_5(x) = \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \quad N''_6(x) = \left(-\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \right)$$

Ma trận độ cứng

$$[K]_e = \int_v [B]^T [D] [B] dv = E \int_v \begin{bmatrix} N'_1 \\ -yN''_2 \\ -yN''_3 \\ N'_4 \\ -yN''_5 \\ -yN''_6 \end{bmatrix} [N'_1 - yN''_2 - yN''_3 + N'_4 - yN''_5 - yN''_6] dv$$

4.3. PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

$$[K]_e = E \begin{bmatrix} \int_v N'_1 N'_1 dv & & & & & \\ & \int_v -y N''_2 N'_1 dv & \int_v y^2 N''_2 N''_2 dv & & & dx \\ & \int_v -y N''_3 N'_1 dv & \int_v y^2 N''_3 N''_2 dv & \int_v y^2 N''_3 N''_3 dv & & \\ & \int_v N'_4 N'_1 dv & \int_v -y N'_4 N''_2 dv & \int_v -y N'_4 N''_3 dv & \int_v N'_4 N'_4 dv & \\ & \int_v -y N''_5 N'_1 dv & \int_v y^2 N''_5 N''_2 dv & \int_v y^2 N''_5 N''_3 dv & \int_v -y N''_5 N'_4 dv & \int_v y^2 N''_5 N''_5 dv \\ & \int_v -y N''_6 N'_1 dv & \int_v y^2 N''_6 N''_2 dv & \int_v y^2 N''_6 N''_3 dv & \int_v -y N''_6 N'_4 dv & \int_v y^2 N''_6 N''_5 dv & \int_v y^2 N''_6 N''_6 dv \end{bmatrix}$$

$$k_{22} = E \int_v y^2 N''_2 N''_2 dV = E \int_F y^2 dF \int_I N''_2 N''_2 dx = E J_z \int_I N''_2 N''_2 dx \quad J_z = \int_F y^2 dF$$

$$k_{21} = E \int_v -y N''_2 N'_1 dV = -E \int_F y dF \int_I N''_2 N'_1 dx = 0 \quad \int_F y dF = 0$$

4.3.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

$$[K]_e = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

4.3.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

$$[K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EF}{I}c^2 + \frac{12EJ}{I^3}s^2 & & \\ \left(\frac{EF}{I} - \frac{12EJ}{I^3}\right)cs & \frac{EF}{I}s^2 + \frac{12EJ}{I^3}c^2 & (dx) \\ -\frac{6EJ}{I^2}s & \frac{6EJ}{I^2}c & \frac{4EJ}{I} \\ -\frac{EF}{I}c^2 - \frac{12EJ}{I^3}s^2 & \left(-\frac{EF}{I} + \frac{12EJ}{I^3}\right)cs & \frac{6EJ}{I^2}s & \frac{EF}{I}c^2 + \frac{12EJ}{I^3}s^2 \\ \left(-\frac{EF}{I} + \frac{12EJ}{I^3}\right)cs & -\frac{EF}{I}s^2 - \frac{12EJ}{I^3}c^2 & -\frac{6EJ}{I^2}c & \left(\frac{EF}{I} - \frac{12EJ}{I^3}\right)cs & \frac{EF}{I}s^2 + \frac{12EJ}{I^3}c^2 \\ \frac{6EJ}{I^2}s & \frac{6EJ}{I^2}c & \frac{2EJ}{I} & \frac{6EJ}{I^2}s & \frac{6EJ}{I^2}c & \frac{4EJ}{I} \end{bmatrix}$$

(4.9)

4.3.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

Tải trọng phân bố

$$\{\mathbf{P}_q\}_e = \int_0^l [\mathbf{N}]^T \{q\} dx = \int_0^l \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 \\ 0 & N_2(x) \\ 0 & N_3(x) \\ N_4(x) & 0 \\ 0 & N_5(x) \\ 0 & N_6(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r(x) \\ q(x) \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \int_0^l N_1(x)r(x)dx \\ \int_0^l N_2(x)q(x)dx \\ \int_0^l N_3(x)q(x)dx \\ \int_0^l N_4(x)r(x)dx \\ \int_0^l N_5(x)q(x)dx \\ \int_0^l N_6(x)q(x)dx \end{Bmatrix}$$

Tải trọng phân bố đều

$$\{\mathbf{P}_q\}_e = \left\{ \frac{rl}{2}, \frac{ql}{2}, \frac{ql^2}{12}, \frac{rl}{2}, \frac{ql}{2}, -\frac{ql^2}{12} \right\}^T \quad (4.10)$$

4.3.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

Lực tập trung và mômen tập trung

$$\{P_q\}_e = \begin{bmatrix} N_1(\eta l) & 0 \\ 0 & N_2(\mu l) \\ 0 & N_3(\mu l) \\ N_4(\eta l) & 0 \\ 0 & N_5(\mu l) \\ 0 & N_6(\mu l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ N'_2(\gamma l) \\ N'_3(\gamma l) \\ 0 \\ N'_5(\gamma l) \\ N'_6(\gamma l) \end{bmatrix} M = \begin{Bmatrix} N_1(\eta l)T \\ N_2(\mu l)P + N'_2(\gamma l)M \\ N_3(\mu l)P + N'_3(\gamma l)M \\ N_4(\eta l)T \\ N_5(\mu l)P + N'_5(\gamma l)M \\ N_6(\mu l)P + N'_6(\gamma l)M \end{Bmatrix}$$

Lực tập trung và mômen tập trung đặt giữa nhịp

$$\{P_q\}_e = \left\{ \frac{T}{2}, \left(\frac{P}{2} - \frac{3M}{2l} \right), \left(\frac{Pl}{8} - \frac{M}{4} \right), \frac{T}{2}, \left(\frac{P}{2} + \frac{3M}{2l} \right), \left(-\frac{Pl}{8} - \frac{M}{4} \right) \right\}^T \quad (4.11)$$

4.3.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

4.3.2. Phần tử thanh đầu ngầm đầu khớp

$$\{\delta\}_e = \{u_i \quad v_i \quad \varphi_i \quad u_k \quad v_k\}^T$$

$$\{P_q\}_e = \{F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{i\varphi} \quad F_{kx} \quad F_{ky}\}^T$$

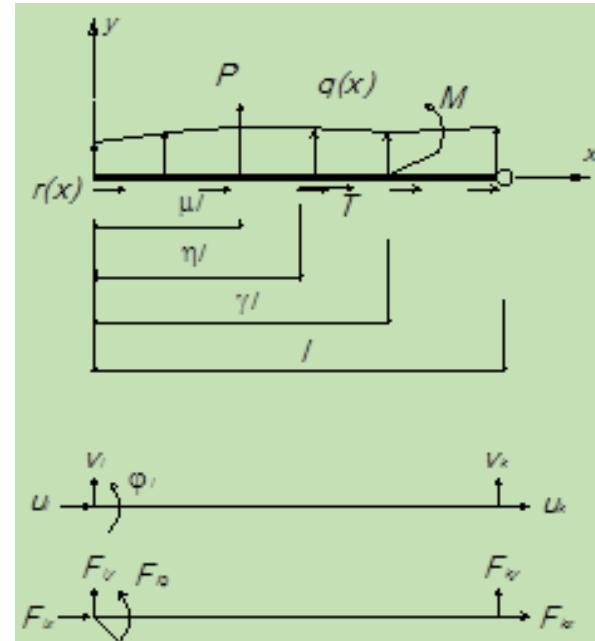
Ma trận hàm dạng

$$[N] = [P(x)] [A]^{-1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = N_1(x) = (1 - \frac{x}{l}); N_4 = N_4(x) = \frac{x}{l}$$

$$N_2 = N_2(x) = (1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3}); N_3 = N_3(x) = (x - \frac{3x^2}{2l} + \frac{x^3}{2l^2});$$

$$N_5 = N_5(x) = (\frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3});$$



4.3.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

4.3.2. Phần tử thanh đầu ngầm đầu khớp

$$[B] = [\nabla][N] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & -y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 \end{bmatrix}$$

$$[B] = [N'_1 - yN''_2 - yN''_3 N'_4 - yN''_5]$$

$$N'_1 = -\frac{1}{l}; N'_4 = \frac{1}{l}; N''_2 = \left(-\frac{3}{l^2} + \frac{3x}{l^3} \right);$$

$$N''_3 = \left(-\frac{3}{l} + \frac{3x}{l^2} \right); N''_5 = \left(\frac{3}{l^2} - \frac{3x}{l^3} \right)$$

4.3.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

Ma trận độ cứng

$$[K]_e = \int_V [B]^T [D][B] dV = E \int_I \int_F [B]^T [B] dF dx$$

$$[K]_e = \begin{bmatrix} \frac{EF}{I} & 0 & 0 & -\frac{EF}{I} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{I^3} & \frac{3EJ}{I^2} & 0 & -\frac{3EJ}{I^3} \\ 0 & \frac{3EJ}{I^2} & \frac{3EJ}{I} & 0 & -\frac{3EJ}{I^2} \\ -\frac{EF}{I} & 0 & 0 & \frac{EF}{I} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{I^3} & -\frac{3EJ}{I^2} & 0 & \frac{3EJ}{I^3} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

4.3.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

Ma trận độ cứng

$$[K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e$$

$$[K']_e = \begin{bmatrix} \frac{EF}{I}c^2 + \frac{3EJ}{I^3}s^2 & & \\ \left(\frac{EF}{I} - \frac{3EJ}{I^3}\right)cs & \frac{EF}{I}s^2 + \frac{3EJ}{I^3}c^2 & (dx) \\ -\frac{3EJ}{I^2}s & \frac{3EJ}{I^2}c & \frac{3EJ}{I} \\ -\frac{EF}{I}c^2 - \frac{3EJ}{I^3}s^2 & \left(-\frac{EF}{I} + \frac{3EJ}{I^3}\right)cs & \frac{3EJ}{I^2}s & \frac{EF}{I}c^2 + \frac{3EJ}{I^3}s^2 \\ \left(-\frac{EF}{I} + \frac{3EJ}{I^3}\right)cs & -\frac{EF}{I}s^2 - \frac{3EJ}{I^3}c^2 & -\frac{3EJ}{I^2}c & \left(\frac{EF}{I} - \frac{3EJ}{I^3}\right)cs & \frac{EF}{I}s^2 + \frac{3EJ}{I^3}c^2 \end{bmatrix}$$

(4.13)

4.3. PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

Tải trọng phân bố

$$\{\mathbf{P}_q\}_e = \int_0^l [\mathbf{N}]^T \{q\} dx = \int_0^l \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 \\ 0 & N_2(x) \\ 0 & N_3(x) \\ N_4(x) & 0 \\ 0 & N_5(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r(x) \\ q(x) \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \int_0^l N_1(x)r(x)dx \\ \int_0^l N_2(x)q(x)dx \\ \int_0^l N_3(x)q(x)dx \\ \int_0^l N_4(x)r(x)dx \\ \int_0^l N_5(x)q(x)dx \end{Bmatrix}$$

Tải trọng phân bố đều

$$\{\mathbf{P}_q\}_e = \left\{ \frac{rl}{2}, \frac{5ql}{8}, \frac{ql^2}{8}, \frac{rl}{2}, \frac{3ql}{8} \right\}^T \quad (4.14)$$

4.3. PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

Lực tập trung và mômen tập trung

$$\{P_q\}_e = \begin{bmatrix} N_1(\eta l) & 0 \\ 0 & N_2(\mu l) \\ 0 & N_3(\mu l) \\ N_4(\eta l) & 0 \\ 0 & N_5(\mu l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ N'_2(\gamma l) \\ N'_3(\gamma l) \\ 0 \\ N'_5(\gamma l) \end{bmatrix} M = \begin{Bmatrix} N_1(\eta l)T \\ N_2(\mu l)P + N'_2(\gamma l)M \\ N_3(\mu l)P + N'_3(\gamma l)M \\ N_4(\eta l)T \\ N_5(\mu l)P + N'_5(\gamma l)M \end{Bmatrix}$$

Lực tập trung và mômen tập trung đặt giữa nhịp

$$\{P_q\}_e = \left\{ \frac{T}{2}, \left(\frac{11P}{16} - \frac{9M}{8l} \right), \left(\frac{3Pl}{16} - \frac{M}{8} \right), \frac{T}{2}, \left(\frac{5P}{16} + \frac{9M}{8l} \right) \right\}^T \quad (4.15)$$

4.3. PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

4.3.3. Phần tử thanh đầu khớp đầu ngầm

$$\{\delta\}_e = \{u_i \quad v_i \quad u_k \quad v_k \quad \varphi_k\}^T$$

$$\{P_q\}_e = \{F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{kx} \quad F_{ky} \quad F_{k\varphi}\}^T$$

Ma trận hàm dạng

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & N_3 & N_5 \end{bmatrix}$$

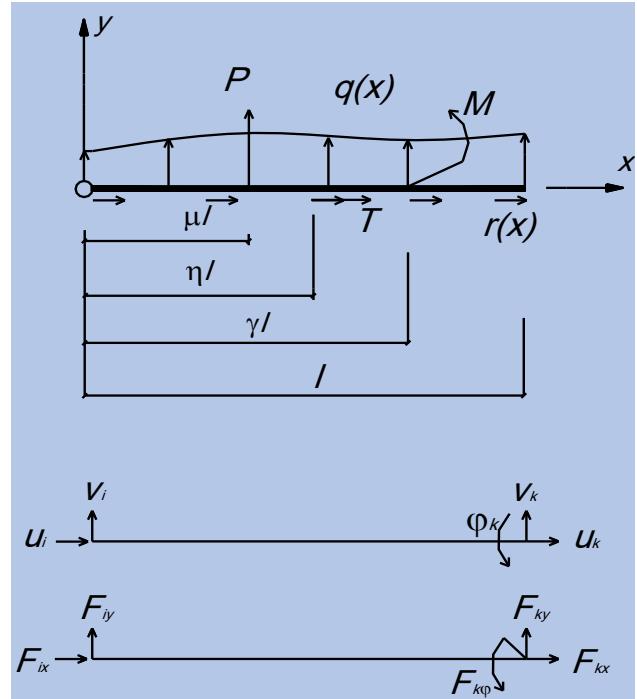
$$N_1 = N_1(x) = (1 - \frac{x}{l}); N_4 = N_4(x) = \frac{x}{l}$$

$$N_2 = N_2(x) = (1 - \frac{3x}{2l} + \frac{x^3}{2l^3}); N_3 = N_3(x) = (\frac{3x}{2l} - \frac{x^3}{2l^3});$$

$$N_5 = N_5(x) = (-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2l^2});$$

$$[B] = [\nabla][N] = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad -y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & N_3 & N_5 \end{bmatrix}$$

$$[B] = [N'_1 - yN''_2 \quad N'_4 - yN''_3 - yN''_5]$$



4.3. PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

$$N'_1 = -\frac{1}{l}; N'_4 = \frac{1}{l}; N''_2 = \left(\frac{3x}{l^3} \right);$$

$$N''_3 = \left(-\frac{3x}{l^3} \right); N''_5 = \left(\frac{3x}{l^2} \right)$$

$$[K]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV = E \int_I \int_F [B]^T [B] dF dx$$

$$[K]_e = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & \frac{3EJ}{l^3} & -\frac{3EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{3EJ}{l^2} & 0 & -\frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l} \end{bmatrix}$$

(4.16)

4.3. PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

$$[K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e$$

$$[K']_e = \begin{bmatrix} \frac{EF}{I}c^2 + \frac{3EJ}{I^3}s^2 & & & & \\ & \left(\frac{EF}{I} - \frac{3EJ}{I^3}\right)cs & \frac{EF}{I}s^2 + \frac{3EJ}{I^3}c^2 & & (dx) \\ & & & \left(-\frac{EF}{I} + \frac{3EJ}{I^3}\right)cs & \frac{EF}{I}c^2 + \frac{3EJ}{I^3}s^2 \\ & & & & \\ & \left(-\frac{EF}{I} + \frac{3EJ}{I^3}\right)cs & -\frac{EF}{I}s^2 - \frac{3EJ}{I^3}c^2 & \left(\frac{EF}{I} - \frac{3EJ}{I^3}\right)cs & \frac{EF}{I}s^2 + \frac{3EJ}{I^3}c^2 \\ & -\frac{3EJ}{I^2}s & & & \\ & & \frac{3EJ}{I^2}c & & \\ & & & \frac{3EJ}{I^2}s & \\ & & & & -\frac{3EJ}{I^2}c \\ & & & & \frac{3EJ}{I} \end{bmatrix}$$

(4.17)

4.3. PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

Tải trọng phân bố

$$\{\mathbf{P}_q\}_e = \int_0^l [\mathbf{N}]^T \{q\} dx = \int_0^l \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 \\ 0 & N_2(x) \\ N_4(x) & 0 \\ 0 & N_3(x) \\ 0 & N_5(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r(x) \\ q(x) \end{Bmatrix} dx = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^l N_1(x)r(x)dx \\ \int_0^l N_2(x)q(x)dx \\ \int_0^l N_4(x)r(x)dx \\ \int_0^l N_3(x)q(x)dx \\ \int_0^l N_5(x)q(x)dx \end{array} \right\}$$

Tải trọng phân bố đều

$$\{\mathbf{P}_q\}_e = \left\{ \frac{rl}{2} \quad \frac{3ql}{8} \quad \frac{rl}{2} \quad \frac{5ql}{8} \quad -\frac{ql^2}{8} \right\}^T \quad (4.18)$$

4.3.PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

Lực tập trung và mômen tập trung

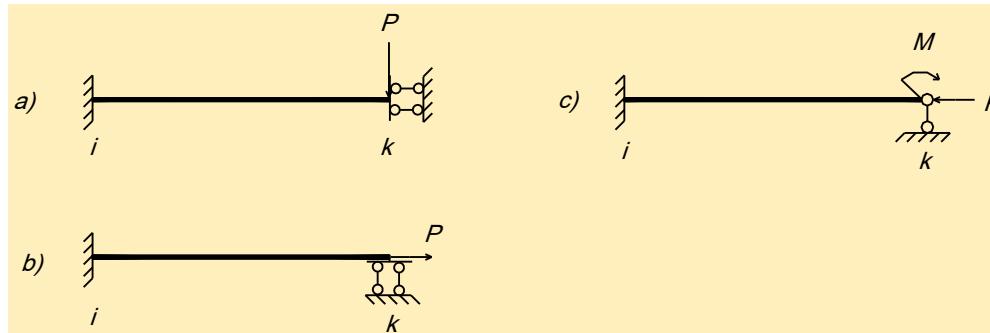
$$\{P_q\}_e = \begin{bmatrix} N_1(\eta l) & 0 \\ 0 & N_2(\mu l) \\ N_4(\eta l) & 0 \\ 0 & N_3(\mu l) \\ 0 & N_5(\mu l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ N'_2(\gamma l) \\ 0 \\ N'_3(\gamma l) \\ N'_5(\gamma l) \end{bmatrix} M = \begin{Bmatrix} N_1(\eta l)T \\ N_2(\mu l)P + N'_2(\gamma l)M \\ N_4(\eta l)T \\ N_3(\mu l)P + N'_3(\gamma l)M \\ N_5(\mu l)P + N'_5(\gamma l)M \end{Bmatrix}$$

Lực tập trung và mômen tập trung đặt giữa nhịp

$$\{P_q\}_e = \left\{ \frac{T}{2} \quad \left(\frac{5P}{16} - \frac{9M}{8l} \right) \quad \frac{T}{2} \quad \left(\frac{11P}{16} + \frac{9M}{8l} \right) \quad \left(-\frac{3PI}{16} - \frac{M}{8} \right) \right\}^T \quad (4.19)$$

4.3. PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

Chú ý : Trường hợp gấp những thanh có liên kết đầu thanh khác với các PT trên đều có thể đưa về các loại PT đã xét để lập ma trận độ cứng



- PT trên hình a quan niệm là PT 2 đầu ngầm.

$$\{F\}_e = \{F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{i\phi} \quad F_{kx} \quad F_{ky} \quad F_{k\phi}\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -P \quad 0\}^T$$

- PT trên hình b quan niệm là PT 2 đầu ngầm.

$$\{F\}_e = \{F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{i\phi} \quad F_{kx} \quad F_{ky} \quad F_{k\phi}\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad P \quad 0 \quad 0\}^T$$

- PT trên hình c quan niệm là PT đầu ngầm đầu khớp cố định

4.3. PHẦN TỬ THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG VÀ KÉO NÉN

Tải trọng đã cho gồm lực tập trung đặt đúng nút và mômen tập trung đặt trong PT nên vectơ tải trọng nút có dạng:

$$\{F\}_e = \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{i\varphi} \\ F_{kx} \\ F_{ky} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3M}{2l} \\ \frac{M}{2} \\ 0 \\ -\frac{3M}{2l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3M}{2l} \\ \frac{M}{2} \\ -P \\ -\frac{3M}{2l} \end{pmatrix}$$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

1. Trình tự tính toán

- Bước 1: Rời rạc hoá kết cấu, đánh số PT, đánh số các nút, chọn HTĐC cho hệ kết cấu.
- Bước 2: Lập bảng số mã, xử lí điều kiện biên (cho số mã bằng 0 ứng với chuyển vị nút, tại đó đặt các liên kết với đất giữ cho nút không có chuyển vị).
- Bước 3: Lập vectơ chuyển vị nút của toàn bộ kết cấu $\{\delta^*\}$.
- Bước 4: Xác định ma trận độ cứng tổng thể $[K^*]$ xét tới điều kiện biên.

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

- Xác định ma trận độ cứng từng PT thanh trong HTĐC;
- Ghép các ma trận độ cứng từng PT thanh theo số má tổng thu được ma trận độ cứng tổng thể $[K^*]$.
- *Bước 5:* Xác định vectơ tải trọng nút tổng thể $\{F^*\}$ xét tới điều kiện biên.
 - Xét riêng tải trọng tác dụng trong các PT thanh và tải trọng tập trung đặt tại nút.
 - Xác định vectơ tải trọng nút $\{P_q\}_e$ của từng PT xét trong HTDR (tra bảng phụ lục);

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

- Chuyển $\{P_q\}_e$ trong HTDR về $\{P'_q\}_e$ trong HTDC của kết cấu:

$$\{P'_q\}_e = [T]^T_e \{P_q\}_e$$

- Dựa theo số mã tổng thể ghép các $\{P'_q\}_e$ thu được $\{P'_q\}$, kết hợp với $\{P'_n\}$:

$$\{F^*\} = \{P'_q\} + \{P'_n\}$$

• *Bước 6:* Thiết lập và giải hệ phương trình toàn hệ kết cấu:

$$[K^*].\{\delta^*\} = \{F^*\} \quad \{\delta^*\} = [K^*]^{-1}\{F^*\}$$

• *Bước 7:* Xác định nội lực. $\{S\}_e = [\lambda]_e \cdot \{\delta'\}_e - \{P_q\}_e$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

2. Xác định nội lực tại các nút PT

Nội lực tại các điểm nút PT sắp xếp thành vectơ nội lực nút của PT:

$$\{S\}_e = [K]_e \{\delta\}_e$$

- Trong PT có tải trọng tác dụng thì vectơ nội lực tại điểm nút $\{S\}_e$ còn phải thêm vào nội lực tại các điểm nút do tải trọng tác dụng trong PT gây ra. Nội lực này chính là phản lực tại các liên kết nút và bằng vectơ tải trọng nút $\{P_q\}_e$ của PT e nhưng trái dấu:

$$\{S\}_e = [K]_e \{\delta\}_e - \{P_q\}_e$$

- Quan hệ giữa vectơ $\{\delta\}_e$ và $\{\delta'\}_e$: $\{\delta\}_e = [T]_e \{\delta'\}_e$

$$\{S\}_e = [K]_e [T]_e \{\delta'\}_e - \{P_q\}_e$$

$$\{S\}_e = [\lambda]_e \{\delta'\}_e - \{P_q\}_e$$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

$$\{S\}_e = \{N_i \quad Q_i \quad M_i \quad N_k \quad Q_k \quad M_k\}^T$$

$\{\delta'\}_e$ - vectơ chuyển vị nút PT e trong HTĐC, được xác định dựa vào vectơ $\{\delta^*\}$ và các điều kiện biên.

$$[\lambda]_e = [K]_e [T]_e$$

PT thanh 2 đầu liên kết ngầm:

$$[\lambda]_e = \begin{bmatrix} \frac{EF}{I}c & \frac{EF}{I}s & 0 & -\frac{EF}{I}c & -\frac{EF}{I}s & 0 \\ -\frac{12EJ}{I^3}s & \frac{12EJ}{I^3}c & \frac{6EJ}{I^2} & \frac{12EJ}{I^3}s & -\frac{12EJ}{I^3}c & \frac{6EJ}{I^2} \\ -\frac{6EJ}{I^2}s & \frac{6EJ}{I^2}c & \frac{4EJ}{I} & \frac{6EJ}{I^2}s & -\frac{6EJ}{I^2}c & \frac{2EJ}{I} \\ -\frac{EF}{I}c & -\frac{EF}{I}s & 0 & \frac{EF}{I}c & \frac{EF}{I}s & 0 \\ \frac{12EJ}{I^3}s & -\frac{12EJ}{I^3}c & -\frac{6EJ}{I^2} & -\frac{12EJ}{I^3}s & \frac{12EJ}{I^3}c & -\frac{6EJ}{I^2} \\ -\frac{6EJ}{I^2}s & \frac{6EJ}{I^2}c & \frac{2EJ}{I} & \frac{6EJ}{I^2}s & -\frac{6EJ}{I^2}c & \frac{4EJ}{I} \end{bmatrix}$$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

PT thanh đầu ngầm đầu khớp:

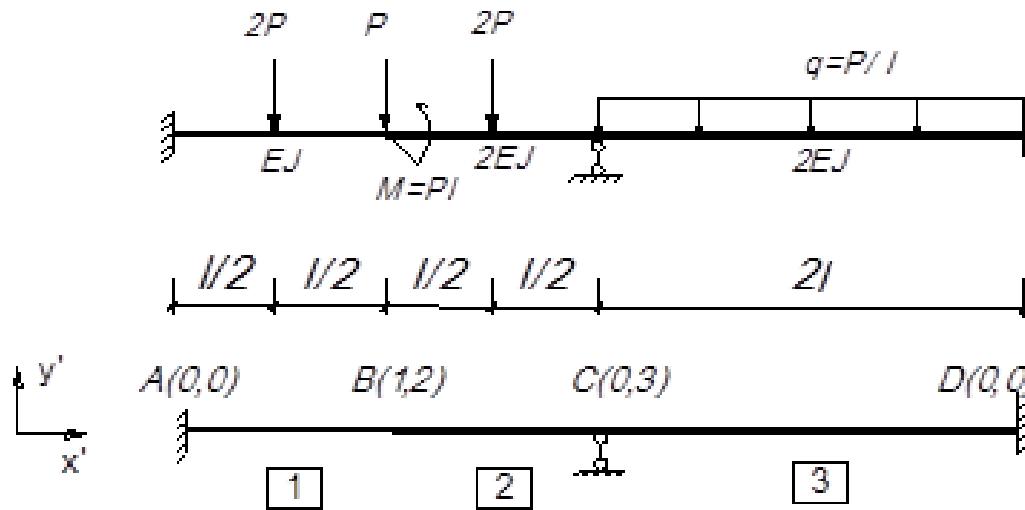
$$[\lambda]_e = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l}c & \frac{EF}{l}s & 0 & -\frac{EF}{l}c & -\frac{EF}{l}s \\ -\frac{3EJ}{l^3}s & \frac{3EJ}{l^3}c & \frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l^3}s & -\frac{3EJ}{l^3}c \\ -\frac{3EJ}{l^2}s & \frac{3EJ}{l^2}c & \frac{3EJ}{l} & \frac{3EJ}{l^2}s & -\frac{3EJ}{l^2}c \\ -\frac{EF}{l}c & -\frac{EF}{l}s & 0 & \frac{EF}{l}c & \frac{EF}{l}s \\ \frac{3EJ}{l^3}s & -\frac{3EJ}{l^3}c & -\frac{3EJ}{l^2} & -\frac{3EJ}{l^3}s & \frac{3EJ}{l^3}c \end{bmatrix}$$

PT thanh đầu khớp đầu ngầm :

$$[\lambda]_e = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l}c & \frac{EF}{l}s & -\frac{EF}{l}c & -\frac{EF}{l}s & 0 \\ -\frac{3EJ}{l^3}s & \frac{3EJ}{l^3}c & \frac{3EJ}{l^3}s & -\frac{3EJ}{l^3}c & \frac{3EJ}{l^2} \\ -\frac{EF}{l}c & -\frac{EF}{l}s & \frac{EF}{l}c & \frac{EF}{l}s & 0 \\ \frac{3EJ}{l^3}s & -\frac{3EJ}{l^3}c & -\frac{3EJ}{l^3}s & \frac{3EJ}{l^3}c & -\frac{3EJ}{l^2} \\ -\frac{3EJ}{l^2}s & \frac{3EJ}{l^2}c & \frac{3EJ}{l^2}s & -\frac{3EJ}{l^2}c & \frac{3EJ}{l} \end{bmatrix}$$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

Ví dụ 4.1. Vẽ biểu đồ (M), (Q) cho dầm liên tục sau:



1. Rời rạc hoá kết cấu thành 3 PT. Các PT của dầm liên tục không chịu tác dụng của lực dọc trực nên đều là các thanh chịu uốn ngang phẳng. Ân chuyển vị nút chỉ gồm chuyển vị thẳng vuông góc với trục dầm và chuyển vị xoay.

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ ĐÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

2. Lập bảng số mã (tính tới điều kiện biên):

Phần tử			Số mã cục bộ					
Tên	Loại	α	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		0°	0	0	1	2		
2		0°	1	2	0	3		
3		0°	0	3	0	0		

3. Vectơ chuyển vị nút của hệ kết cấu trong HTĐC :

$$\{\delta^*\} = \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3\}^T = \{v_B \quad \varphi_B \quad \varphi_C\}^T$$

4. Xác định ma trận độ cứng $[K^*]$ của toàn hệ :

Vì HTĐC song song với HTĐR của cả 3 PT, nên $[K]_e$ cũng chính là $[K']_e$.

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

$$[K']_1 = [K]_1 = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & 12 & -6l \\ \times & \times & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$[K']_2 = [K]_2 = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 12l & \times & 12l \\ 12l & 8l^2 & \times & 4l^2 \\ \times & \times & \times & \times \\ 12l & 4l^2 & \times & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$$

$$[K']_3 = [K]_3 = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & 4l^2 & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$[K^*] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 36 & 6l & 12l \\ 6l & 12l^2 & 4l^2 \\ 12l & 4l^2 & 12l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

5. Xác định vectơ tải trọng nút $\{F^*\}$ của toàn hệ

Với tải trọng tác dụng đặt trong các PT thanh:

$$\{P'_q\}_1 = \{P_q\}_1 = \left\{ -P, -\frac{Pl}{4}, -P, \frac{Pl}{4} \right\}^T$$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

$$\{P'_q\}_2 = \{P_q\}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -P & -\frac{Pl}{4} & -P & \frac{Pl}{4} \end{pmatrix}^T$$

$$\{P'_q\}_3 = \{P_q\}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -\frac{ql}{2} & -\frac{ql^2}{12} & -\frac{ql}{2} & \frac{ql^2}{12} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -P & -\frac{Pl}{3} & -P & \frac{Pl}{3} \end{pmatrix}^T$$

- Với tải trọng tác dụng đặt tại các nút:

$$\{P'_n\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -P & Pl & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\{F^*\} = \begin{pmatrix} F_{By} \\ F_{B\phi} \\ F_{C\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P - P + 0 \\ \frac{Pl}{4} - \frac{Pl}{4} + 0 \\ 0 + \frac{Pl}{4} - \frac{Pl}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -P \\ Pl \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3P \\ Pl \\ -\frac{Pl}{12} \end{pmatrix}$$

1
2
3

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

6. Thiết lập hệ phương trình cân bằng của toàn hệ:

$$\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 36 & 6l & 12l \\ 6l & 12l^2 & 4l^2 \\ 12l & 4l^2 & 12l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_B \\ \varphi_B \\ \varphi_C \end{Bmatrix}$$

Giải hệ phương trình xác định được:

$$\{\delta^*\} = \begin{Bmatrix} v_B \\ \varphi_B \\ \varphi_C \end{Bmatrix} = \frac{Pl^2}{3024EJ} \begin{Bmatrix} -398l \\ 366 \\ 255 \end{Bmatrix}$$

7. Xác định nội lực :

Khi HTĐC song song với HTĐR: $\{S\}_e = [K]_e \{\delta\}_e - \{P_q\}_e$

• PT thanh số1:

$$\{\delta\}_1 = \{\delta'\}_1 = \left\{ 0 \quad 0 \quad -\frac{398Pl^3}{3024EJ} \quad \frac{366Pl^2}{3024EJ} \right\}^T$$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

$$\{S\}_1 = \begin{pmatrix} Q_{AB} \\ M_{AB} \\ Q_{BA} \\ M_{BA} \end{pmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} \times & \times & -12 & 6l \\ \times & \times & -6l & 2l^2 \\ \times & \times & 12 & -6l \\ \times & \times & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{398\pi^3}{3024EJ} \\ -\frac{366\pi^2}{3024EJ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P \\ \frac{\pi}{4} \\ -P \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,306P \\ 1,282\pi \\ -1,306P \\ 1,024\pi \end{pmatrix}$$

- PT thanh số 2:

$$\{\delta\}_2 = \{\delta'\}_2 = \left\{ -\frac{398\pi^3}{3024EJ}, \frac{366\pi^2}{3024EJ}, 0, \frac{255\pi^2}{3024EJ} \right\}^T$$

$$\{S\}_2 = \begin{pmatrix} Q_{BC} \\ M_{BC} \\ Q_{CB} \\ M_{CB} \end{pmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 12l & \times & 12l \\ 12l & 8l^2 & \times & 4l^2 \\ -24 & -12l & \times & -12l \\ 12l & 4l^2 & \times & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{398\pi^3}{3024EJ} \\ \frac{366\pi^2}{3024EJ} \\ 0 \\ \frac{255\pi^2}{3024EJ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P \\ \frac{\pi}{4} \\ -P \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,306P \\ -0,024\pi \\ 1,694P \\ 0,67\pi \end{pmatrix}$$

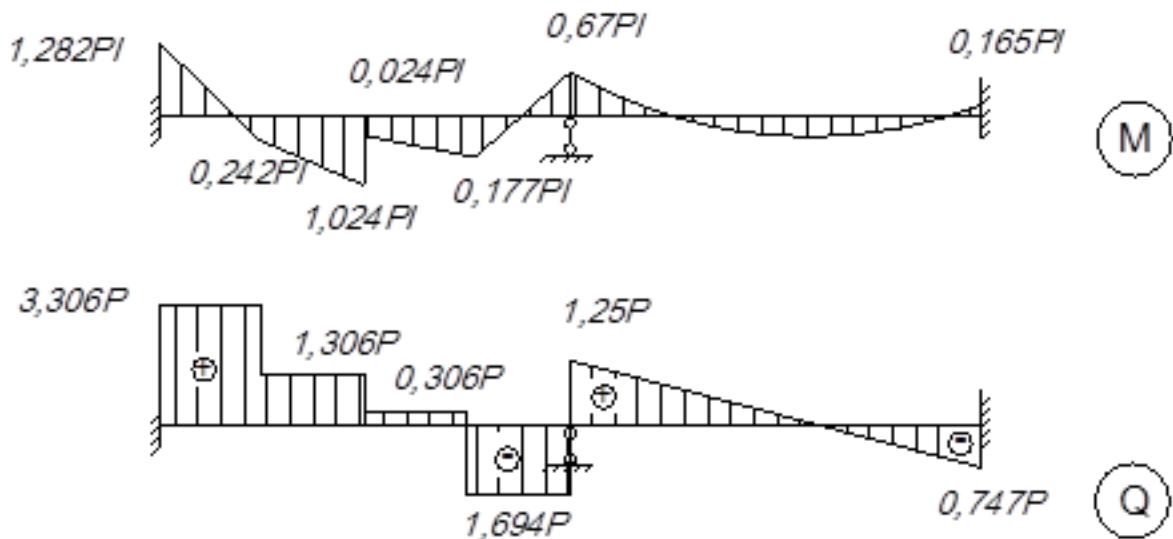
4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

- Phần tử thanh số 3:

$$\{\delta\}_3 = \{\delta'\}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{255\pi^2}{3024EJ} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

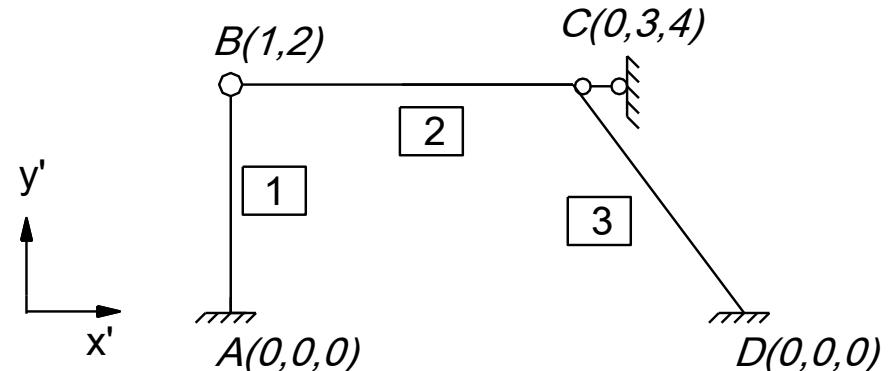
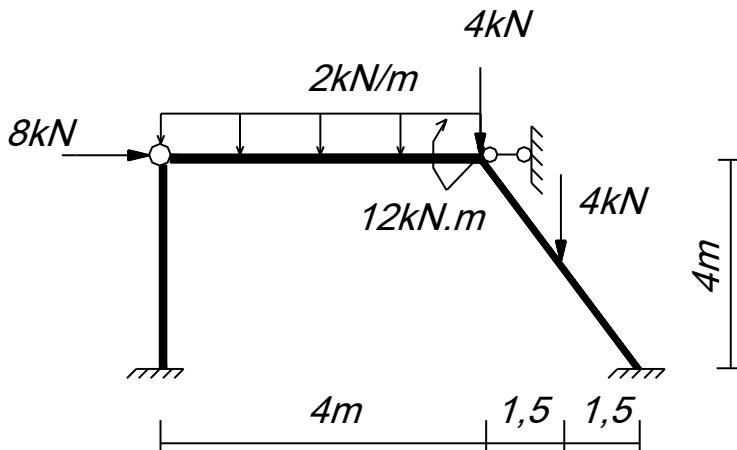
$$\{S\}_3 = \begin{pmatrix} Q_{CD} \\ M_{CD} \\ Q_{DC} \\ M_{DC} \end{pmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} \times & 3l & \times & \times \\ \times & 4l^2 & \times & \times \\ \times & -3l & \times & \times \\ \times & 2l^2 & \times & \times \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{255\pi^2}{3024EJ} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -P \\ \frac{\pi}{3} \\ -P \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25P \\ 0,67\pi \\ 0,747P \\ -0,165\pi \end{pmatrix}$$

8. Vẽ biểu đồ (M), (Q):



4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

Ví dụ 4.2. Vẽ biểu đồ (M), (Q), (N) của khung sau, $EF = 10^7 \text{ kN}$; $EJ = 4 \cdot 10^5 \text{ kN.m}^2$



1. Rời rạc hoá kết cấu thành 3 PT, đánh số PT, đánh số các nút, chọn hệ toạ độ chung $x'y'$ như hình vẽ.
2. Lập bảng số má (tính tới điều kiện biên):

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

Phần tử			Số mã cục bộ					
Tên	Loại	α	1	2	3	4	5	6
Số mã toàn thể								
1		90°	0	0	0	1	2	
2		0°	1	2	0	3	4	
3		-53,1°	0	3	4	0	0	0

3. Vectơ chuyển vị nút
của hệ kết cấu trong HTĐC

$$\begin{aligned}\{\delta^*\} &= \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4\}^T \\ &= \{u_B \quad v_B \quad v_C \quad \varphi_C\}^T\end{aligned}$$

4. Xác định ma trận độ cứng của toàn hệ

$$[K']_1 = \begin{bmatrix} x & x & x & \times & & \times \\ x & x & x & \times & & \times \\ x & x & x & \times & & \times \\ x & x & x & \frac{EFc^2}{I} + \frac{3EJs^2}{I^3} & \left(\frac{EF}{I} - \frac{3EJ}{I^3}\right)cs & \\ x & x & x & \left(\frac{EF}{I} - \frac{3EJ}{I^3}\right)cs & \frac{EFs^2}{I} + \frac{3EJc^2}{I^3} & \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} x & x & x & \times & \times \\ x & x & x & \times & \times \\ x & x & x & \times & \times \\ x & x & x & 0,1875 & 0 \\ x & x & x & 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$c = 0;$
 $s = 1;$
 $I = 4m$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

PT 2 có HTĐR song song với HTĐC, nên : $c = 1; s = 0; l = 4m$

$$[K']_2 = \begin{bmatrix} EF/l & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 3EJ/l^3 & \times & -3EJ/l^3 & 3EJ/l^2 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & -3EJ/l^3 & \times & 3EJ/l^3 & -3EJ/l^2 \\ 0 & 3EJ/l^2 & \times & -3EJ/l^2 & 3EJ/l \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 25 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0,1875 & \times & -0,1875 & 0,75 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & -0,1875 & \times & 0,1875 & -0,75 \\ 0 & 0,75 & \times & -0,75 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$[K']_3 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \left(\frac{EFs^2}{l} + \frac{12EJc^2}{l^3} \right) & 6EJc/l^2 & \times & \times & \times \\ \times & 6EJc/l^2 & 4EJ/l & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & 12,94 & 0,576 & \times & \times & \times \\ \times & 0,576 & 3,2 & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

với: $c = 0,6; s = -0,8; l = 5m$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DẦM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

Dựa vào số mã toàn thể sắp xếp thu được ma trận độ cứng tổng thể:

$$[K^*] = 10^5 \begin{bmatrix} 25,1875 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25,1875 & -0,1875 & 0,75 \\ 0 & -0,1875 & 13,1275 & -0,174 \\ 0 & 0,75 & -0,174 & 6,2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

5. Xác định vectơ tải $\{F^*\}$ của toàn hệ

- Với tải trọng tác dụng đặt trong các PT thanh:

Do không có tải trọng đặt trong PT thứ 1, nên: $\{P_q\}_1 = \{P'_q\}_1 = 0$

Do HTĐC song song với HTĐR của PT thứ 2, nên:

$$\{P'_q\}_2 = \{P_q\}_2 = \left\{ 0 \quad -\frac{3ql}{8} \quad 0 \quad -\frac{5ql}{8} \quad \frac{ql^2}{8} \right\}^T = \{0 \quad -3 \quad 0 \quad -5 \quad 4\}^T$$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

Đối với PT thứ 3, có góc lệch với $\cos\alpha = 0,6$; $\sin\alpha = -0,8$

$$\begin{aligned}\{\mathbf{P}_q\}_3 &= \left\{ -\frac{P}{2} \sin\alpha \quad -\frac{P}{2} \cos\alpha \quad -\frac{Pl}{8} \quad -\frac{P}{2} \sin\alpha \quad -\frac{P}{2} \cos\alpha \quad \frac{Pl}{8} \right\}^T \\ &= \{1,6 \quad -1,2 \quad -1,5 \quad 1,6 \quad -1,2 \quad 1,5\}^T\end{aligned}$$

Do tải trọng nút của PT thứ 3 chỉ cần tính tại nút C nên khi chuyển về HTĐC chỉ xét tại đầu C của PT:

$$\{\mathbf{P}'_{q,C}\}_3 = [\mathbf{L}_C]_3^T \{\mathbf{P}_{q,C}\}_3 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,6 \\ -1,2 \\ -1,5 \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 \\ -2 \\ 3 \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$$

Theo mã số tổng thể, ghép nối thu được vectơ tải trọng nút toàn hệ kết cấu khi tải trọng tác dụng đặt trong các PT thanh :

$$\{\mathbf{P}'_q\} = \begin{cases} 0+0+0 \\ 0-3+0 \\ 0-5-2 \\ 0+4-1,5 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -3 \\ -7 \\ 2,5 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

- Với tải trọng tác dụng đặt tại các nút:

$$\{P'_n\} = \begin{cases} 8 \\ 0 \\ -4 \\ -12 \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad \{F^*\} = \begin{cases} F_{Bx} \\ F_{By} \\ F_{Cy} \\ F_{C\phi} \end{cases} = \begin{cases} 0+8 \\ -3+0 \\ -7-4 \\ 2,5-12 \end{cases} = \begin{cases} 8 \\ -3 \\ -11 \\ -9,5 \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

6. Thiết lập hệ phương trình cân bằng của toàn hệ:

$$10^5 \begin{bmatrix} 25,1875 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25,1875 & -0,1875 & 0,75 \\ 0 & -0,1875 & 13,1275 & -0,174 \\ 0 & 0,75 & -0,174 & 6,2 \end{bmatrix} \begin{cases} u_B \\ v_B \\ v_C \\ \varphi_C \end{cases} = \begin{cases} 8 \\ -3 \\ -11 \\ -9,5 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình

$$\{\delta^*\} = \begin{cases} u_B \\ v_B \\ v_C \\ \varphi_C \end{cases} = 10^{-5} \begin{cases} 0,318 \\ -0,085 \\ -0,866 \\ -1,546 \end{cases} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ rad \end{matrix}$$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

7. Xác định nội lực

- PT thanh số 1: $\{\delta'\}_1 = 10^{-5} \{0 \ 0 \ 0 \ 0,318 \ -0,085\}^T$

$$\{S\}_1 = [\lambda]_1 \{\delta'\}_1$$

$$\begin{aligned} \{S\}_1 &= \begin{pmatrix} N_{AB} \\ Q_{AB} \\ M_{AB} \\ N_{BA} \\ Q_{BA} \end{pmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & -25 \\ \times & \times & \times & 0,1875 & 0 \\ \times & \times & \times & 0,75 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 25 \\ \times & \times & \times & -0,1875 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,318 \\ -0,085 \end{pmatrix} 10^{-5} = \begin{pmatrix} 2,025 \\ 0,06 \\ 0,238 \\ -2,025 \\ -0,06 \end{pmatrix} \text{ kN} \end{aligned}$$

- PT thanh số 2: $\{\delta'\}_2 = 10^{-5} \{0,318 \ -0,085 \ 0 \ -0,866 \ -1,546\}^T$

$$\{S\}_2 = [\lambda]_2 \{\delta'\}_2 - \{P_q\}_2$$

$$\begin{aligned} \{S\}_2 &= \begin{pmatrix} N_{BC} \\ Q_{BC} \\ N_{CB} \\ Q_{CB} \\ M_{CB} \end{pmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 25 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0,1875 & \times & -0,1875 & 0,75 \\ -25 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & -0,1875 & \times & 0,1875 & -0,75 \\ 0 & 0,75 & \times & -0,75 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0,318 \\ -0,085 \\ 0 \\ -0,866 \\ -1,546 \end{pmatrix} 10^{-5} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,95 \\ 1,987 \\ -7,95 \\ 6,013 \\ -8,05 \end{pmatrix} \text{ kN} \end{aligned}$$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

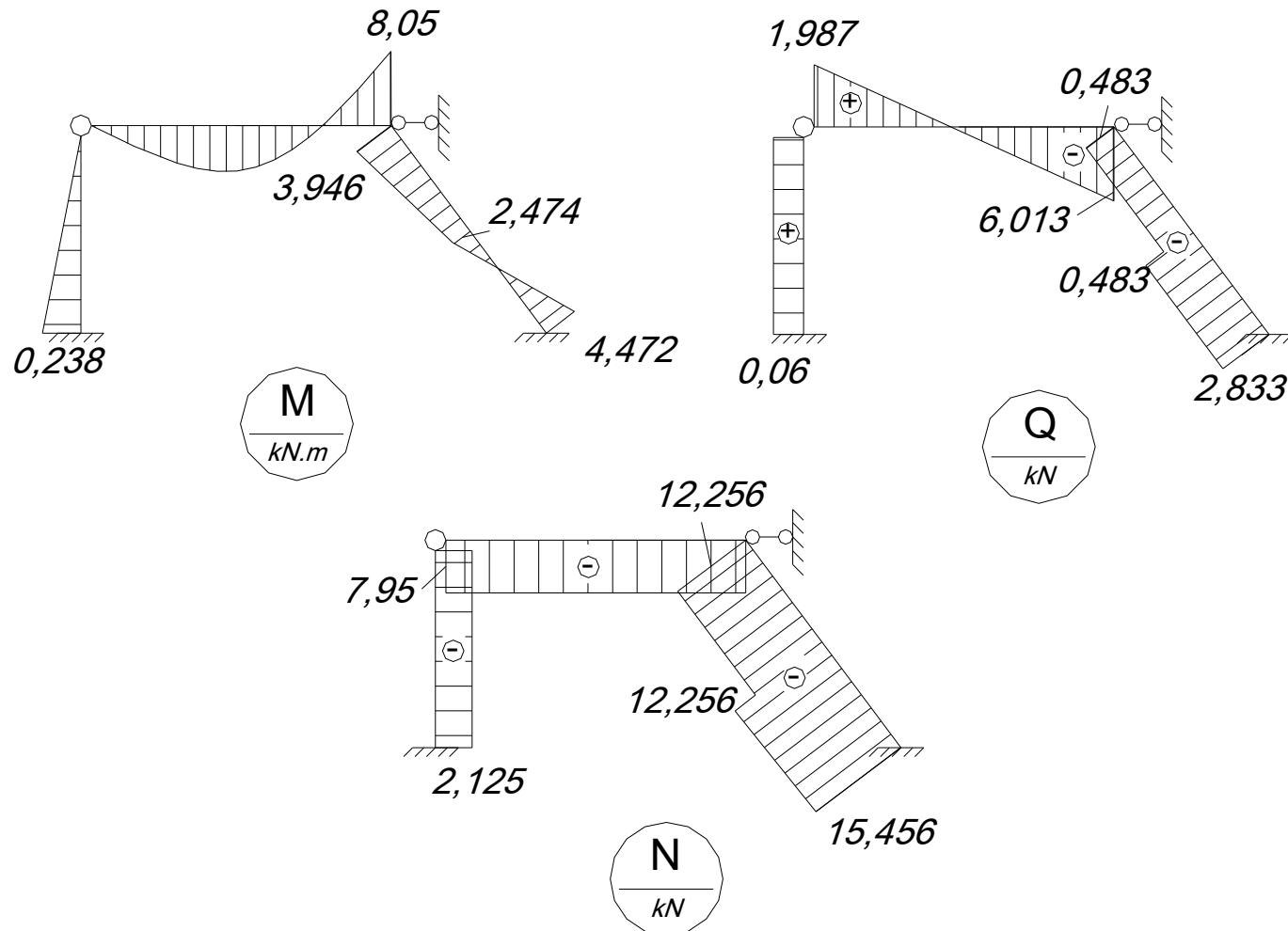
- PT thanh số 3: $\{\delta'\}_3 = 10^{-5} \{0 \ -0,866 \ -1,546 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$

$$\{S\}_3 = [\lambda]_3 \{\delta'\}_3 - \{P_q\}_3$$

$$\{S\}_3 = \begin{pmatrix} N_{CD} \\ Q_{CD} \\ M_{CD} \\ N_{DC} \\ Q_{DC} \\ M_{DC} \end{pmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} \times & -16 & 0 & \times & \times & \times \\ \times & 0,23 & 0,96 & \times & \times & \times \\ \times & 0,576 & 3,2 & \times & \times & \times \\ \times & 16 & 0 & \times & \times & \times \\ \times & -0,23 & -0,96 & \times & \times & \times \\ \times & 0,576 & 1,6 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0,866 \\ -1,546 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 10^{-5} - \begin{pmatrix} 1,6 \\ -1,2 \\ -1,5 \\ 1,6 \\ -1,2 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,256 \\ -0,483 \\ -3,946 \\ -15,456 \\ 2,883 \\ -4,472 \end{pmatrix} \text{ kN, kNm}$$

4.4. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀM – KHUNG PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

8. Vẽ biểu đồ (M), (Q), (N):



4.5. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀN PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

Ma trận độ cứng của các PT thanh trong dàn xét trong HTĐC

$$[K']_e = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng của các PT thanh dàn tương ứng với PT có 4 thành phần chuyển vị nút xét trong HTDR lấy với $c = 1, s = 0$ có dạng:

$$[K]_e = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận chuyển hệ toạ độ

$$[T]_e = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

4.5. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀN PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

Hệ dàn phẳng, các PT thanh đều là thanh thẳng hai đầu khớp, tải trọng tác dụng là hệ lực tập trung đặt tại mắt dàn, nội lực chỉ là lực dọc không đổi trong mỗi thanh. Vectơ tải trọng nút tổng thể chỉ gồm có $\{P'_n\}$.

Nội lực tại các điểm nút PT :

$$\{S\}_e = [K]_e [T]_e \{\delta'\}_e - \{P_q\}_e = [\lambda]_e \{\delta'\}_e$$

$$[\lambda]_e = [K]_e [T]_e = \frac{EF}{I} \begin{bmatrix} c & s & -c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -s & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{S\}_e = \begin{Bmatrix} N_{ix} \\ Q_{iy} \\ N_{kx} \\ Q_{ky} \end{Bmatrix} = \frac{EF}{I} \begin{bmatrix} c & s & -c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -s & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

4.5. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀN PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

$$N_{ix} = \frac{EF}{l} [u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha - u_k \cos \alpha - v_k \sin \alpha]$$

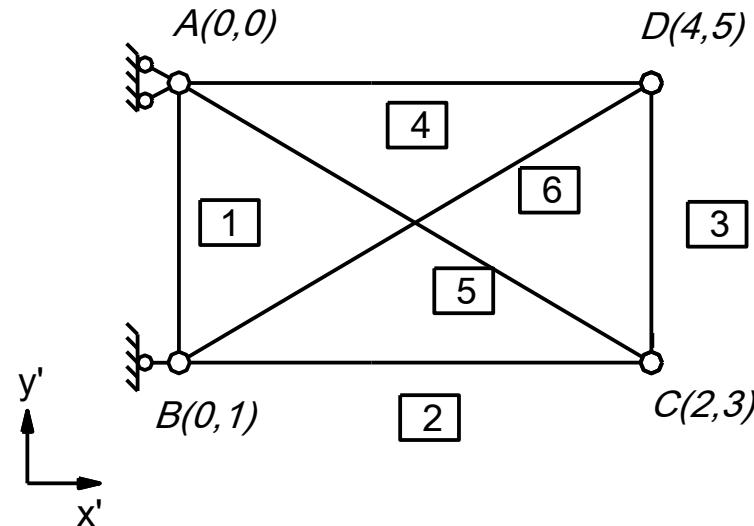
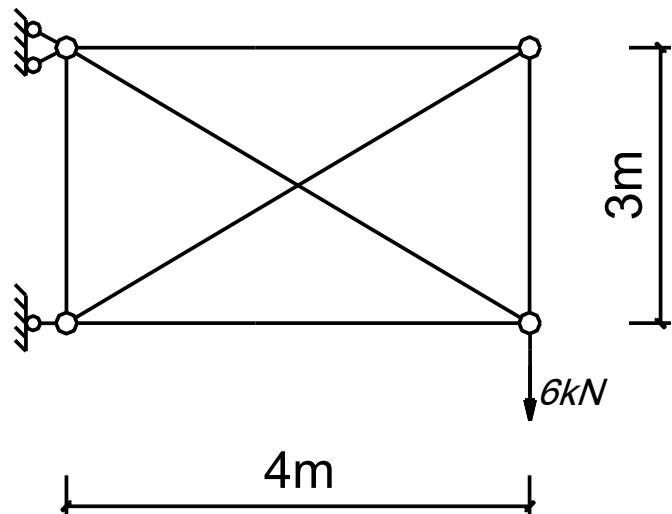
$$N_{kx} = \frac{EF}{l} [-u_i \cos \alpha - v_i \sin \alpha + u_k \cos \alpha + v_k \sin \alpha]$$

$$N_{ik} = \frac{EF}{l} [\cos \alpha (u_k - u_i) + \sin \alpha (v_k - v_i)]$$

$$Q_{iy} = Q_{ky} = 0$$

4.5. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀN PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

Ví dụ 4.3. Tính lực dọc các thanh trong dàn với $E=const$.



1. Rời rạc hệ ra làm 6 PT thanh, đánh số PT, đánh số các nút, chọn hệ toạ độ chung $x'y'$ như trên hình 4.14b .
2. Lập bảng số má (tính tới điều kiện biên):

4.5. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀN PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

Phần tử			Số mã cục bộ					
Tên		α	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		90°	0	1	0	0		
2		0°	0	1	2	3		
3		90°	2	3	4	5		
4		0°	0	0	4	5		
5		-36.87°	0	0	2	3		
6		36.87°	0	1	4	5		

3. Vectơ chuyển vị nút của toàn hệ kết cấu:

$$\{\delta^*\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_B \\ u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \end{Bmatrix}$$

4.5. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀN PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

4. Xác định ma trận độ cứng của toàn hệ: $\cos \alpha_1 = 0; \sin \alpha_1 = 1$

- PT 1: $I = 3m$; $EF = \text{const}$;

$$[K']_1 = \frac{EF}{I} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & s^2 & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} = EF \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & 0,333 & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- PT 3: $I = 3 m$; $EF = \text{const}$; $\cos \alpha_3 = 0; \sin \alpha_3 = 1$

$$[K']_3 = \frac{EF}{I} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} = EF \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,333 & 0 & -0,333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,333 & 0 & 0,333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

- PT 2: $I = 4m$; $EF = \text{const}$. HTĐR của PT 2 song song với HTĐC.

$$[K']_2 = [K]_2 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \frac{EF}{I} & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = EF \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0,25 & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

4.5. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀN PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

- PT 4: $l=4\text{m}$; $\text{EF} = \text{const}$

$$[K']_4 = [K]_4 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \text{EF} & 0 \\ \times & \times & \mid & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{EF} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & 0,25 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- PT 5: $l=5\text{ m}$; $\text{EF} = \text{const}$; $\cos\alpha_5 = 0,8$; $\sin\alpha_5 = -0,6$

$$[K']_5 = \frac{\text{EF}}{l} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & c^2 & cs \\ \times & \times & cs & s^2 \end{bmatrix} = \text{EF} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & 0,128 & -0,096 \\ \times & \times & -0,096 & 0,072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- PT 6: $l=5\text{ m}$; $\text{EF} = \text{const}$; $\cos\alpha_6 = 0,8$; $\sin\alpha_6 = 0,6$

$$[K']_6 = \frac{\text{EF}}{l} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & s^2 & -cs & -s^2 \\ \times & -cs & c^2 & cs \\ \times & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} = \text{EF} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & 0,072 & -0,096 & -0,072 \\ \times & -0,096 & 0,128 & 0,096 \\ \times & -0,072 & 0,096 & 0,072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

4.5. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀN PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

Dựa vào số mã toàn thể sắp xếp thu được ma trận độ cứng tổng thể:

$$[K^*] = EF \begin{bmatrix} 0,405 & 0 & 0 & -0,096 & -0,072 \\ 0 & 0,378 & -0,096 & 0 & 0 \\ 0 & -0,096 & 0,405 & 0 & -0,333 \\ -0,096 & 0 & 0 & 0,378 & 0,096 \\ -0,072 & 0 & -0,333 & 0,096 & 0,405 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

5. Vectơ tải trọng nút của toàn hệ kết cấu:

$$\{F^*\} = \begin{Bmatrix} F'_{By} \\ F'_{Cx} \\ F'_{Cy} \\ F'_{Dx} \\ F'_{Dy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

6. Thiết lập hệ phương trình cân bằng của toàn hệ:

$$EF \begin{bmatrix} 0,405 & 0 & 0 & -0,096 & -0,072 \\ 0 & 0,378 & -0,096 & 0 & 0 \\ 0 & -0,096 & 0,405 & 0 & -0,333 \\ -0,096 & 0 & 0 & 0,378 & 0,096 \\ -0,072 & 0 & -0,333 & 0,096 & 0,405 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_B \\ u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4.5. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀN PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

Giải hệ phương trình và xác định được:

$$\{\delta^*\} = \begin{Bmatrix} v_B \\ u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \end{Bmatrix} = \frac{1}{EF} \begin{Bmatrix} -7,882 \\ -18,018 \\ -70,938 \\ 14,04 \\ -63,056 \end{Bmatrix} (\text{m})$$

7. Xác định lực dọc các thanh trong dàn:

$$N_{ik} = \frac{EF}{l} [\cos \alpha (u_k - u_i) + \sin \alpha (v_k - v_i)]$$

4.5. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀN PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

7. Xác định lực dọc các thanh trong dàn:

$$N_{BA} = \frac{1}{3} [0 + 1(0 + 7,882)] = 2,627\text{kN}$$

$$N_{BC} = \frac{1}{4} [1(-18,018 - 0) + 0] = -4,505\text{kN}$$

$$N_{CD} = \frac{1}{3} [0 + 1(-63,056 + 70,938)] = 2,627\text{kN}$$

$$N_{AD} = \frac{1}{4} [1(14,04 - 0) + 0] = 3,51\text{kN}$$

$$N_{AC} = \frac{1}{5} [0,8(-18,018 - 0) - 0,6(-70,938 - 0)] = 5,63\text{kN}$$

$$N_{BD} = \frac{1}{5} [0,8(14,04 - 0) + 0,6(-63,056 + 7,882)] = -4,37\text{kN}$$

4.5. ÁP DỤNG PP PTHH TÍNH HỆ DÀN PHẲNG CHỊU TẢI TRỌNG

Giải hệ phương trình và xác định được:

$$\{\delta^*\} = \begin{Bmatrix} v_B \\ u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \end{Bmatrix} = \frac{1}{EF} \begin{Bmatrix} -7,882 \\ -18,018 \\ -70,938 \\ 14,04 \\ -63,056 \end{Bmatrix} (\text{m})$$

7. Xác định lực dọc các thanh trong dàn:

$$N_{ik} = \frac{EF}{l} [\cos \alpha (u_k - u_i) + \sin \alpha (v_k - v_i)]$$